Автоматика и телемеханика. 2018. № 5. С. 107 – 118.

Д.А. НОВИКОВ, чл-корр. РАН (novikov@ipu.ru)
(Институт проблем управления им В.А. Трапезникова РАН, Москва)

АНАЛИТИЧЕСКАЯ СЛОЖНОСТЬ И ПОГРЕШНОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ОРГАНИЗАЦИОННО-ТЕХНИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ[1]

Предложен метод оценки аналитической сложности и погрешности решения (методом равномерного перебора) задач управления в иерархических организационно-технических системах. Показано, что, во-первых, стремление к уменьшению погрешности приводит к росту сложности; во-вторых, имеет место эффект снижения сложности с увеличением числа уровней управленческой иерархии (при декомпозиции задач управления); в-третьих, погрешность и сложность являются «естественными ограничителями» роста организационных иерархий и использования комплексных механизмов управления, а также стимулируют применение типовых решений.

Ключевые слова: организационно-техническая система, иерархическая игра, метод равномерного перебора, аналитическая сложность, типовое решение, комплексирование механизмов управления.

1. Введение

Организационно-технические системы (ОТС) характеризуются, во-первых, сложной иерархической структурой и разнообразием решаемых на различных уровнях иерархии задач. Поэтому в них зачастую применяются комплексы взаимосвязанных *механизмов управления* – отображений множеств управляемых переменных во множества управляющих переменных (например, в механизмах стимулирования – зависимость размера вознаграждения субъекта от результата его деятельности, в механизмах распределения ресурса – зависимость выделяемого количества ресурса от заявок на него и т.д.) [1, 2].

Во-вторых, ОТС включают людей, их группы и коллективы, которые *активны* и преследуют собственные цели, что в соответствующих математических моделях отражается стремлением субъектов максимизировать свои целевые функции - базовым инструментом моделирования принятия решений и управления в организациях являются *иерархические игры* [4, 2].

Известно (см. [3-8]), что характерные для иерархических игр максиминные принципы оптимальности «неустойчивы» - например, функция аргмаксимума $\arg\max_y f(x, y)$ непрерывной функции $f(\cdot, \cdot)$ не является непрерывной, поэтому использование оракулов первого и второго порядков [9] (использующих информацию соответственно о первых и вторых производных оптимизируемой функции и традиционных для задач выпуклой оптимизации) в подобных задачах в общем случае невозможно, и, как правило, при численной оптимизации используются переборные методы. Приводимые ниже оценки сложности и погрешности являются оценками сверху – в тех случаях, когда (для тех или иных частных случаев) возможно применение градиентных методов оптимизации, сложность и/или погрешность могут быть существенно более низкими.

Возникающие при решении задач управления ОТС наборы взаимосвязанных (в соответствии со структурой системы) оптимизационных задач требуют исследования своей «сложности», которой в теории управления организационными системами [2] почти не уделялось внимания. Поэтому ниже сначала рассматриваются общие подходы к определению и оценке *аналитической сложности* (под которой в соответствии с [9] будем понимать оценку числа обращений к оракулу в худшем случае) и *погрешности* решения задач индивидуального принятия решений и управления одним субъектом (так называемая «базовая модель» - см. второй раздел). Затем полученные результаты обобщаются на случай веерной структуры (третий раздел), и рассматривается модель

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 16-19-10609).

роста иерархий (четвертый раздел). В пятом и шестом разделах в терминах аналитической сложности и погрешности кратко рассматриваются соответственно задачи поиска *типовых решений* и *комплексирования механизмов* организационного управления.

2. Базовая модель

Рассмотрим элементарную ОТС (ее базовую модель), состоящую из двух активных (обладающих собственными интересами и способных к стратегическому поведению) субъектов: одного управляющего органа – *центра* - и одного управляемого субъекта – *агента*. Пусть целевая функция центра $F(x, y, \theta, C)$, являющаяся липшицевой (далее будем для определенности использовать l_∞-норму) с константой Липшица L, зависит от скалярных действий центра $x \in [0; 1]$ и агента $y \in [0; 1]$, состояния природы $\theta \in [0; 1]$ и значения параметра $C \in [0; 1]$; а целевая функция агента $f(x, y)$, являющаяся липшицевой с константой l, зависит от действий центра и агента.

Отметим, что из липшицевости функции следует ее равномерная непрерывность и, следовательно, непрерывность на всей области определения, а из последней следует непрерывность функций максимума и минимума (см., например, теорему 1.1.4 в [9]), которые также будут липшицевы.

Предположим, что центр и агент разыгрывают *иерархическую игру* Γ_2 с побочными платежами (напомним, что игрой Γ_2 называется игра с фиксированной последовательностью ходов, в которой выбором игрока, делающего первый ход (центра), является функция от действий игрока, делающего второй ход (агента) [4]), тогда их целевые функции имеют вид $F(x, y, \theta, C) - u(y)$ и $f(x, y) + u(y)$, где платеж $u(\cdot)$ может интерпретироваться как *стимулирование* агента центром.

Обозначим через $[0; 1]|_h$ множество точек равномерной сетки с шагом $h \ll 1$ на единичном отрезке. Тогда, если функция $f(\cdot, \cdot)$ задана таблично с равномерными сетками с шагами H и h по первому и второму аргументу соответственно (оракул нулевого порядка – см. определения в [9], т.е. будем рассматривать только *метод равномерного перебора*), то *аналитическая сложность* W_0 вычисления наилучшего ответа (BR – Best Response) агента на действие x центра (т.е. – модель принятия решения агентом)

(1) $BR(x) = \operatorname{Arg} \max\limits_{y \in [0;1]|_h} f(x, y)$

будет иметь порядок $\dfrac{1}{h}$, т.е. $W_0 \sim \Theta(\dfrac{1}{h})$, и позволит найти максимальное значение целевой функции агента с *погрешностью/точностью* $\Delta_0 \approx \dfrac{l\,h}{2}$ (см. общие результаты в [9]). В случае, когда целевые функции известны неточно, могут быть использованы методы, описанные в [7, 8], или методы интервальной оптимизации [11, 12], если неточно известны коэффициенты целевой функции.

Отметим, что (см. соответствующие оценки ниже):

1) при последовательной оптимизации (например, нахождение суммы максимумов/минимумов) соответствующие сложности, как и погрешности, складываются;

2) при последовательном («вложенном») вычислении максимумов/минимумов некоторой функции соответствующие сложности перемножаются.

В [2, 13] показано, что следующий минимальный платеж со стороны центра

(2) $u(x, z, y) = \begin{cases} \max\limits_{w \in [0;1]} f(x, w) - f(x, z) + \varepsilon, y = z, \\ 0, y \neq z, \end{cases}$

где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малая константа, побуждает агента выбрать действие $y = z$ как единственную точку максимума его целевой функции и ε-оптимален для центра. Этот факт позволяет свести рассматриваемую игру к игре Γ_1 (напомним, что игрой Γ_1 называется игра с фиксированной последовательностью ходов, в которой выбор игрока, делающего первый ход, не зависит в явном виде от действий игрока, делающего второй ход [4]). Отметим, что выбор в выражении (2) $\varepsilon = l\,h / 2$ компенсирует незнание значений целевой функции вне узлов сетки; наличие дополнительной информации, например, о монотонности $f(x, y)$ по y, позволяет выбирать любые $\varepsilon > 0$.

Следует признать, что, воспользовавшись структурой оптимального решения (2) игры Γ_2 с побочными платежами [4], мы «проскочили» этап поиска оптимальной функции $u(\cdot)$, а этот этап сам по себе характеризуется большими вычислительными затратами [4, 14]. Более того, если бы имелось несколько агентов, разыгрывающих при заданном выборе центра игру в нормальной форме, то поиск соответствующего равновесия Нэша являлся бы в общем случае NP-трудной задачей [15, 16] и отдельную проблему представлял бы поиск полиномиальных алгоритмов аппроксимации равновесия Нэша (и оценка зависимости точности аппроксимации от числа агентов) – см., например, ссылки в [17].

Предположим, что функция $F(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ задана таблично по равномерной сетке с шагами соответственно H, h, p и q. С учетом (2) вычисление гарантированного значения целевой функции центра

(3) $G(C) = \max\limits_{(x,\, z)\in[0;1]|_H \times[0;1]|_h} [\min\limits_{\theta\in[0;1]|_p} F(x, z, \theta, C) + f(x, z) - \max\limits_{y\in[0;1]|_h} f(x, y) - \varepsilon]$

будет иметь аналитическую сложность $W_1 \sim \Theta\left(\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{h}\right)\frac{1}{h}\frac{1}{H}\right)$ и при $\varepsilon = l\, h / 2$ позволит получить значение величины (3) с погрешностью

$$\Delta_1 \approx \frac{L \max\{h, H, p\} + l\,(h + 2\max\{h, H\})}{2}.$$

Структура данных выражений позволяет рекомендовать выбирать шаг сетки $p = \max\{h, H\}$, что и предполагается ниже.

В случае последовательных вычислений аналитическая сложность может также использоваться как грубая оценка объема необходимой компьютерной памяти: например, при фиксированном значении C вычисление правой части выражения (3) имеет сложность W_1, но так как необходимо получить зависимость $G(C)$ на сетке $[0; 1]|_q$ по параметру C, то сложность этой операции составит W_1 / q.

Рассмотрим следующую задачу: минимизировать выбором шагов сетки h и H погрешность Δ_1 при ограничении T (например, *ограничение «реального времени»* (действительно, если известно время τ одного обращения к оракулу, то общее «время вычислений» составит $t = W\,\tau$), или *ограниченность когнитивных возможностей* лица, принимающего решения) на сложность W_1:

(4) $(L + 2l)\max\{h, H\} + l\, h \to \min\limits_{h,\, H}$,

(5) $\left(\frac{1}{\max\{h, H\}} + \frac{1}{h}\right)\frac{1}{h}\frac{1}{H} \le T.$

Будем для простоты рассматривать частный случай $h = H$. Из структуры задачи (4)-(5) следует, что оптимальное решение обращает (5) в равенство, т.е.

(6) $h = H = \sqrt[3]{\frac{2}{T}}$.

Например, при $l = L = 1$ и $T = 10^4$ получаем из (6), что $h = H \sim 0{,}05$, при этом $\Delta_1 \approx 0{,}1$.

Имеет смысл сравнивать величину погрешности с максимальной вариацией целевой функции на области ее определения (а эта вариация определяется соответствующей константой Липшица). Например, величина $\delta_1 = \Delta_1 / L$ может условно рассматриваться как *относительная погрешность*.

Отметим, что, зная зависимость сложности и погрешности от шагов сетки, можно ставить и решать не только задачу (4)-(5) минимизации погрешности при ограничениях на сложность, но и задачу минимизации сложности при ограничениях на погрешность и т.д.

В дальнейшем будем считать, что в базовой модели $p = h = H = \sqrt[3]{\frac{2}{T}}$, $W_1 \sim \Theta(\frac{2}{h^3})$ и $\Delta_1 \approx (L + 3l)\, h / 2$. При этом $\delta_1 \sim (1 + 3\, l / L)\, h / 2$, т.е. относительная погрешность нахождения максимального значения целевой функции центра пропорциональна шагу используемой сетки.

Качественный вывод из результатов рассмотрения модели настоящего раздела заключается в том, что в иерархических организационных (активных) системах аналитическая сложность (и требование скорости вычислений) и погрешность удовлетворяют условному «*принципу неопределенности*»: стремление к уменьшению погрешности приводит к росту сложности и, наоборот, снижение сложности приводит к росту погрешности.

3. Веерная структура

Рассмотрим ОТС, имеющую верную структуру, т.е. состоящую из одного центра с целевой функцией $\sum_{i=1}^{n} F_i(x_i, y_i, \theta_i, C_i)$, где функции $F_i(\cdot)$ L-липшицевы, и $n \geq 2$ невзаимодействующих друг с другом агентов, которых будем нумеровать индексом $i = \overline{1,n}$ (так называемая система со слабо связанными агентами [2]). Так как агенты независимы, центр может для каждого из них использовать независимый от других агентов побочный платеж вида (2) и, воспользовавшись выражением (3), найти соответствующие слагаемые $\{G_i(C_i)\}_{i = \overline{1,n}}$.

При фиксированных $\{C_i\}_{i = \overline{1,n}}$ последовательное вычисление в соответствии с выражением (3) значений величин $\{G_i(C_i)\}_{i = \overline{1,n}}$ будет иметь аналитическую сложность порядка $\Theta\left(\frac{2n}{h^3}\right)$, а с учетом запоминания зависимостей от $\{C_i\}_{i = \overline{1,n}}$ - $\Theta\left(\frac{2n}{qh^3}\right)$. Вычисление максимального суммарного выигрыша центра в *задаче стимулирования n независимых агентов*

(7) $G_\Sigma(C_1, \ldots, C_n) = \sum_{i=1}^{n} G_i(C_i)$

будет характеризоваться погрешностью $\Delta_n \approx (L + 3l)\, n\, h / 2 + \frac{nqL}{2}$ (второе слагаемое соответствует решению методом равномерного перебора задачи (9)), т.е.

(8) $\delta_n \sim (1 + 3\, l / L)\, n\, h / 2 + n\, q / 2$.

Рассмотрим задачу оптимизации $G_\Sigma(C_1, \ldots, C_n)$, например, выбором $\{C_i \geq 0\}$ на симплексе $\sum_{i=1}^{n} C_i = c$ (содержательная интерпретация – *распределение центром между агентами ресурса c* на стимулирование; для простоты в оценках (9), (13) и др. будем считать, что $c = 1$):

(9) $g(c) = \max_{\{C_i \geq 0\}: \sum_{i=1}^{n} C_i = c} \sum_{i=1}^{n} G_i(C_i)$.

В силу аддитивности целевой функции и зависимости каждого из слагаемых только от соответствующей переменной для решения задачи (9) можно воспользоваться методом динамического программирования, который имеет сложность порядка $\Theta\left(\frac{n}{q^2}\right)$. Следовательно, для веерной структуры аналитическая сложность всей иерархии оптимизационных задач ((1), (3), (9)) будет иметь порядок $\Theta\left(\frac{2n}{qh^3} + \frac{n}{q^2}\right)$. Однако, как отмечалось выше, в настоящей работе рассматривается только метод равномерного перебора как наиболее универсальный и не использующий свойств экстремизируемых функций. Оценка его сложности для задачи (9) - $\Theta(\frac{1}{q^n})$) поэтому в условиях необходимости вычисления максимумов (3) для каждой комбинации значений $\{C_i\}_{i = \overline{1,n}}$ оценка сверху сложности всей иерархии оптимизационных задач ((1), (3), (9)) будет иметь порядок

(10) $W_n \sim \Theta\left(\frac{2n}{h^3}\frac{1}{q^n}\right)$.

Из (8) следует ряд простых качественных результатов: с ростом числа агентов в системе для сохранения неизменной погрешности определения оптимального значения целевой функции центра необходимо пропорционально уменьшать шаг сетки (что, с другой стороны, приведет к степенному росту сложности).

Как это обычно имеет место в задачах многомерной оптимизации, минимизация погрешности Δ_n (или/и δ_n) эквивалентна минимизации шага сетки h (зависимость от него линейна), однако уменьшение последнего приводит к быстрому (степенному) росту сложности: пусть в рамках используемого иллюстративного числового примера ($l = L = 1$) используются оптимальные в базовой модели шаги сетки: $h = H \sim 0{,}05$. Тогда в системе с пятью, например, агентами и $q \sim 0{,}05$ относительная погрешность в соответствии с выражением (8) составит около 62 %, а сложность (10) составит $\sim 2 \times 10^5$.

Таким образом, с одной стороны, погрешность и сложность являются «источниками» и «естественными ограничителями роста» организационных иерархий (см. следующий раздел), стимулируют применение типовых решений (см. пятый раздел) и ставят существенные барьеры на пути стремления к «добросовестной оптимизации» всей организации в целом – сверху донизу (см. шестой раздел).

4. Рост иерархий

В предыдущем разделе рассматривалась решаемая центром задача (9) распределения ресурса в веерной (двухуровневой) иерархии и были получены оценки (8) и (10) относительной погрешности и сложности соответственно. Возникает вопрос, каковы будут погрешность и сложность в случае, когда центр «строит» трехуровневую иерархию, т.е. разбивает то же множество из n невзаимодействующих агентов, например, на две группы (размером n_1 и n_2, $n_1 + n_2 = n$), решает для каждой группы задачу типа (9), а затем ищет оптимальное распределение ресурса между двумя группами?

Обозначим через

(11) $g_j(c_j) = \max\limits_{\{C_i \ge 0\}: \sum_{i=1}^{n_j} C_i = c_j} \sum\limits_{i=1}^{n_j} G_i(C_i)$, $j = 1, 2$.

Тогда на верхнем уровне иерархии центр будет решать задачу

(12) $g_1(c_1) + g_2(c_2) \to \max\limits_{c_1 \ge 0,\, c_2 \ge 0,\, c_1 + c_2 \le c}$.

По аналогии с (8) и (10) получаем оценки погрешности и сложности

(13) $\delta_{n_1+n_2} = (1 + 3\, l / L)\, n_1\, h / 2 + n_1\, q / 2 + (1 + 3\, l / L)\, n_2\, h / 2 + n_2\, q / 2 + q / 2 = \delta_n + q / 2$.

(14) $W_{n_1+n_2} \sim \Theta\left(\frac{2n_1}{h^3} \frac{1}{q^{n_1}} + \frac{2n_2}{h^3} \frac{1}{q^{n_2}} \right) \frac{1}{q}$.

Из (13) следует, что, независимо от того, как агенты разбиты на группы, переход от двухуровневой к трехуровневой иерархии приводит к увеличению относительной погрешности на $q / 2$.

Легко видеть, что, например, при $n > 2$ и $n_1 = n_2 = n / 2$ имеет место $W_{n_1+n_2} < W_n$, то есть разбиение агентов на две группы равной численности приводит к снижению сложности.

Можно сформулировать задачу в общем виде: на какие по размеру две части (еще более общая задача – каково оптимальное число частей) следует разбивать множество агентов, чтобы минимизировать сложность (14). Обозначим через m размер (число агентов в) первой части, тогда во второй их будет $n - m$. Получим (в непрерывном приближении) следующий «бинарный» (заключающийся в разбиении множества агентов на две части) вариант *задачи синтеза структуры*:

(15) $\left(\frac{m}{q^m} + \frac{n-m}{q^{n-m}} \right) \to \min\limits_{m \in [0; n]}$.

Данный вариант является простейшим, так как при заданном множестве агентов в общем случае можно искать многоуровневую структуру (не обязательно древовидную), обладающую требуемыми свойствами – см. обзоры и общие результаты в [18, 19]. Также напрашиваются определенные аналогии рассматриваемой проблематики с методом дихотомического программирования [20] в задачах дискретной оптимизации.

Решением задачи (15) является $m = n / 2$, т.е. с точки зрения минимизации аналитической сложности оптимальным является разбиение агентов на группы равного размера, что приводит к относительному (по сравнению с веерной структурой) снижению сложности порядка $q^{n/2}$.

Следовательно, в рассматриваемой модели при фиксированном наборе агентов увеличение числа уровней управленческой иерархии снижает сложность.

Таким образом, снижение сложности при незначительном росте погрешности является одним из факторов, приводящих к возникновению и росту организационных иерархий. Однако следует помнить, что данный фактор является далеко не единственным существенным для выбора рациональной организационной структуры – см. обзоры в [13, 18, 19, 21].

Рассматривая суммарное количество ресурса c как переменную величину, можно ставить и решать задачу *поиска оптимального количества ресурса* (максимизирующего, например, «прибыль» - разность между суммарным выигрышем и суммарным количеством используемого ресурса):

(16) $g(c) - c \to \max\limits_{c \in [0; c_{\max}]}$.

При заданной функции $g(\cdot)$ задача (16), решаемая с шагом сетки h, будет иметь аналитическую сложность $W_c \sim \Theta\left(\frac{c_{\max}}{h}\right)$.

5. Типовые решения

Изложенная во втором разделе идея поиска рационального баланса между погрешностью и сложностью имеет (помимо рассмотренных в третьем и четвертом разделах задач управления в иерархических ОТС) еще целый ряд важных приложений. Рассмотрим два из них – поиск типовых решений (см. настоящий раздел) и комплексирование механизмов управления (см. шестой раздел).

Проанализируем, временно «забыв» про иерархические игры, задачу принятия решений (выбора действия, максимизирующего соответствующую целевую функцию) агентом. Как отмечалось выше, поиск наилучшего ответа (1) агента на фиксированное действие $x \in [0; 1]$ центра имеет сложность $W_0 \sim \Theta(\frac{1}{h})$ и погрешность $\Delta_0 \approx \frac{l\,h}{2}$.

В теории игр и теории принятия решений широко используется понятие *стратегии* игрока или лица, принимающего решения (ЛПР), определяемой как отображение множества возможных *обстановок принятия решений* (включающего историю игры, реализации значений неопределенных параметров, обстановку игры для данного субъекта и т.п.) во множество его допустимых действий. В рассматриваемом случае стратегией агента является отображение BR: $[0;1] \to 2^{[0;1]}$, ставящее в соответствие действию центра (обстановке принятия решений для агента) множество действий агента, максимизирующих целевую функцию последнего.

Для простоты можно предположить, что целевые функции таковы, что наилучший ответ агента единственен, т.е. BR: $[0;1] \to [0;1]$. Если $x \in [0; 1]|_H$, то для каждого из $1 / H$ значений действия центра необходимо найти действие агента, доставляющее максимум его целевой функции. Результатом будет $(1 + [1 / H])$-мерный вектор y^*, который назовем условно *полным решением* задачи принятия решений агентом; его нахождение будет характеризоваться сложностью $W^* \sim \Theta(\frac{1}{h\,H})$, а погрешность равна Δ_0.

Обозначим через $\{Q_i\}, i = \overline{1,k}$ разбиение единичного отрезка на k связных множеств. Пусть y_i' - решение задачи

(17) $\min\limits_{x \in Q_i|_{H'}} f(x, y) \to \max\limits_{y \in [0;1]|_{h'}}, \ i = \overline{1,k}$.

Результат решения задачи (17) - k-мерный вектор y' - назовем *типовым решением*. Идея использования типовых решений (см. также унифицированные решения задач управления оргсистемами в [2]) заключается в следующем [3]: вместо полного множества обстановок принятия решений (в рассматриваемом случае – единичного отрезка) используются k типовых ситуаций, в которых агенту предписывается принимать соответствующие типовые решения.

Т.е. агент, принимая решения, должен «диагностировать» обстановку – какому из множеств $\{Q_i\}\ i=\overline{1,k}$ принадлежит x (будем считать, что эта задача решается агентом безошибочно; сложность этой процедуры – применения типового решения: $\sim \Theta(k)$), а затем выбрать в качестве своего действия соответствующую компоненту вектора y'. Если $k \ll \frac{1}{h\,H}$, то сложность применения типового решения намного ниже сложности полного решения задачи принятия решений.

Погрешность типового решения (см. выражение (17)) $\Delta' \approx \frac{l}{2}\max\{h', H'\}$, а сложность его нахождения при заданном разбиении $\{Q_i\}, i=\overline{1,k}$ равна $W' \sim \Theta(\frac{k}{h'\,H'})$.

Однако характеристикой типового решения должна выступать не его погрешность, а «*цена стандартизации*» - потери (измеряемые в значениях целевой функции) от использования типового решения вместо полного [3, 7]:

(18) $\Delta''(\{Q_i\}, i=\overline{1,k}) = \max\limits_{i=\overline{1,k}} \max\limits_{x\in Q_i} [\max\limits_{y\in[0;1]} f(x,y) - f(x,y_i')] \approx l \max\limits_{i=\overline{1,k}} \operatorname{diam} Q_i$.

Пусть в рамках рассматриваемого условного примера (при l = 1 и $h = H = h' = H' \sim 0{,}05$) $k = 5$, и разбиение производится на равные отрезки, тогда получаем: $\Delta_0 \approx 0{,}025$, $W^* \sim 10^5$, $W' \sim 10^6$, $\Delta'' \sim 0{,}2$.

Отметим, что все предыдущие рассуждения проводились в рамках предположения, что разбиение $\{Q_i\}, i=\overline{1,k}$ задано. Однако, в целом, задача построения типовых решений заключается в нахождении, во-первых, оптимального (с учетом когнитивных и других возможностей ЛПР) числа k типовых ситуаций, а, во-вторых, в построении оптимального (минимизирующего цену стандартизации (18)) разбиения. Аналитическая сложность последней задачи может быть очень высока, особенно в случае многомерных множеств допустимых действий и обстановок принятия решений.

Таким образом, использование типовых решений оправданно, если они ищутся один раз, а применяются многократно.

6. Комплексирование механизмов управления

В [1, 22] рассматривалась проблема комплексирования механизмов управления в ОТС, т.е. построения так называемых *комплексных механизмов,* включающих в себя один или несколько элементарных или других комплексных механизмов. Выделялись случаи *параллельного комплексирования* (когда происходит одновременное независимое использование нескольких механизмов) и *последовательного комплексирования* (когда «выход» одного механизма является «входом» для другого).

Все рассматриваемые выше в разделах 2, 3 и 4 задачи управления взаимосвязаны между собой (см. таблицу). Действительно, начав с задачи принятия решений агентом, перешли к задаче стимулирования сначала одного, а затем и нескольких независимых агентов. Полученные результаты позволили затем последовательно сформулировать задачу распределения ресурса, задачу синтеза структуры и задачу поиска оптимального количества ресурса. Произведенная последовательность действий есть не что иное, как комплексирование соответствующих механизмов управления.

В таблице приведена сводка результатов, характеризующих порядки погрешности и аналитической сложности для различных комплексных механизмов (все шаги сеток для простоты считаются равными одной и той же величине h).

Таблица. *Взаимосвязь между задачами управления*

№ п.п.	**Задача (механизм управления)**	**Тип комплексирования** [22]	**Порядок погрешности**	**Порядок «кумулятивной сложности»**
1	Принятие решения агентом (1)	-	$\frac{l\,h}{2}$	$\frac{1}{h}$
2	Стимулирование агента (2)-(3)	Последовательное	$(L+3l)\,h\,/\,2$	$\frac{2}{h^3}$
3	Стимулирование n независимых агентов (7)	Параллельное	$(L+3l)\,n\,h\,/\,2$	$\frac{2n}{h^3}$
4	Распределение ресурса (9)	Последовательное	$(2L+3l)\,n\,h\,/\,2$	$\frac{2n}{h^{n+3}}$
5	Задача синтеза бинарной структуры (12), (15)	Последовательное	$((2L+3l)\,n+L)\,h\,/\,2$	$\frac{2n}{h^{n/2+3}}$
6	Поиск оптимального количества ресурса (16)	Последовательное	$((2L+3l)\,n+2L)\,h\,/\,2$	$\frac{2n}{h^{n/2+4}}$

Из таблицы следует, что и погрешность, и, особенно, сложность быстро растут с увеличением количества комплексируемых механизмов, прежде всего при переходе к оптимизации в многоэлементных системах, и даже при не очень большом числе агентов превосходят все разумные пределы. Следовательно, погрешность и сложность являются «ограничителями» попыток централизованного решения задачи комплексирования сложных механизмов управления. Выходом является использование методов децентрализации и/или типовых решений и/или эвристических процедур. Каждый из этих способов, естественно, приводит к снижению эффективности управления, и это снижение должно балансироваться с возможными погрешностями нахождения оптимума критерия эффективности при допустимых значениях сложности.

7. Заключение

Предложен метод оценки аналитической сложности и погрешности численного решения задач управления в иерархических ОТС. Возможные обобщения полученных результатов на случаи:

- неравномерных сеток на выпуклых компактных допустимых множествах;
- многомерных действий участников системы;
- допустимых множеств, отличных от единичных отрезков;
- взаимодействующих между собой агентов (с учетом теорем о децентрализации игры агентов [2, 13]);
- сетевой (недревовидной) структуры системы (с учетом описанной в [13] взаимосвязи порядка функционирования и уровней иерархии)

представляются достаточно простыми и не вызывающими принципиальных трудностей.

Вывод о том, что стремление к уменьшению погрешности приводит к росту сложности и, наоборот, снижение сложности приводит к росту погрешности, вполне привычен. А вот эффект снижения сложности с увеличением числа уровней управленческой иерархии представляется несколько неожиданным.

Рассматриваемая проблематика может быть условно отнесена к классу проблем C^3 (control, computing, communication) – совместного решения задач управления, вычислений и связи (см. обзоры в [1, 23, 24]). Действительно, учет в явном виде «вычислительной» сложности и структуры системы, наряду с требованиями реального времени, когнитивными и другими возможностями ЛПР, позволяет единообразно сравнивать механизмы управления (в том числе комплексные) по этим показателям, оптимизировать погрешность при ограничениях на сложность и т.д.

Показано, что погрешность и сложность являются «естественными ограничителями роста» организационных иерархий и комплексных механизмов управления, а также стимулируют применение типовых решений и децентрализованных подходов (например, развиваемых в рамках мультиагентных систем и распределенной оптимизации [25-28], а также алгоритмической теории игр [16, 29]).

Список литературы

1 Mechanism Design and Management: Mathematical Methods for Smart Organizations / Ed. prof. *D. Novikov*. N.Y.: Nova Science Publishers, 2013.

2 *Novikov D.A.* Theory of Control in Organizations. N.Y.: Nova Science Publishers, 2013.

3 *Васильев Д.К., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А., Цветков А.В.* Типовые решения в управлении проектами. М.: ИПУ РАН, 2003.

4 *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.

5 *Горелов М.А.* Максимальный гарантированный результат в иерархических играх // Управление большими системами. 2017. № 67. С. 4 - 31.

6 *Молодцов Д.А.* Устойчивость принципов оптимальности. М.: Наука, 1987.

7 *Новиков Д.А.* Обобщенные решения задач стимулирования в активных системах. М.: ИПУ РАН, 1998.

8 *Novikov D.A.* Management of Active Systems: Stability or Efficiency // Syst. Sci. 2001. 26. N 2. P. 85 - 93.

9 *Нестеров Ю.Е.* Методы выпуклой оптимизации. М.: МЦНМО, 2010.

10 *Давыдов Э.Г.* Исследование операций. М.: Высшая школа, 1990.

11 *Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х.* Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986.

12 *Hansen E., Walster G.* Global Optimization Using Interval Analysis**.** New York: Marcel Dekker, 2004.

13 *Новиков Д.А.* Сетевые структуры и организационные системы. М.: ИПУ РАН, 2003.

14 *Федоров В.В.* Численные методы максимина. М.: Физматлит, 1979.

15 *Daskalakis C., Goldberg P., Papadimitriou C.* The Complexity of Computing a Nash Equilibrium // SIAM J. Comp. 2009. No 39(1). P. 195 – 259.

16 *Mansour Y.* Computational Game Theory. Tel Aviv: Tel Aviv University, 2003.

17 *Czumaj A., Fasoulakis M., Jurdzinski M.* Multi-player Approximate Nash Equilibria / Proc. 16th Int. Conf. Autonom. Agents and Multiagent Syst. (AAMAS 2017). San Paolo. May 8–12, 2017. P. 1511 - 1513.

18 *Губко М.В.* Математические модели оптимизации иерархических структур. М.: Ленанд, 2006.

19 *Мишин С.П.* Оптимальные иерархии управления в социально-экономических системах. М.: ПМСОФТ, 2004.

20 *Бурков В.Н., Буркова И.В., Попок М.В.* Метод дихотомического программирования // Управление большими системами. 2004. № 9. С. 57 – 75.

21 *Новиков Д.А.* Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. М.: Фонд «Проблемы управления», 1999.

22 *Бурков В.Н., Коргин Н.А. Новиков Д.А.* Проблемы комплексирования и декомпозиции механизмов управления организационно-техническими системами // Проблемы управления. 2016. № 5. С. 14 – 23.

23 *Novikov D.* Cybernetics: From Past to Future. Heidelberg: Springer, 2016.

24 *Андриевский Б.Р., Матвеев А.С., Фрадков А.Л.* Управление и оценивание при информационных ограничениях: к единой теории управления, вычислений и связи // АиТ. 2010. № 4. С. 34 – 99; Autom. Remote Control, 71:4 (2010), 572–633.

25 *Boyd S., Parikh N., Chu E., et al.* Distributed Optimization and Statistical Learning via the Alternating Direction Method of Multipliers // Foundat. Trends Machine Learning. 2011. No. 3(1). P. 1 – 122.

26 *Ren W., Yongcan C.* Distributed Coordination of Multi-agent Networks. London: Springer, 2011.

27 *Rzevski G., Skobelev P.* Managing Complexity. London: WIT Press, 2014.

28 *Shoham Y., Leyton-Brown K.* Multiagent Systems: Algorithmic, Game-Theoretic, and Logical Foundations. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

29 Algorithmic Game Theory / Eds. *Nisan N., Roughgarden T., Tardos E., and Vazirani V.* – N.Y.: Cambridge University Press, 2009.