УДК 517.9
ББК 22.1 6

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕВИСА С МНОГОТОЧЕЧНЫМ НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНЫМ УСЛОВИЕМ

Конкина А. С.[1]
(*Южно-Уральский государственный университет, Челябинск*)

Эволюция свободной поверхности фильтрующейся жидкости в пласте ограниченной мощности моделируется уравнением Девиса с однородными условиями Дирихле. Приводится разрешимость многоточечной начально-конечной задачи для стохастической модели Девиса. Основной результат – доказательство однозначной разрешимости эволюционной модели с аддитивным белым шумом и многоточечным начально-конечным условием.

Ключевые слова: белый шум, винеровский K-процесс, модель Девиса.

1. Введение

Пусть U и F – банаховы пространства, где заданы операторы $L \in \mathrm{L}(U; F)$ (т.е. линеен и непрерывен) и $M \in Cl(U; F)$ (т.е. линеен, замкнут и плотно определен), причем M $(L; p)$-секториален, $p \in \{0\} \cup N$.

Пусть выполняются условия:

(A1) $U^0 \oplus U^1 = U$, $(F^0 \oplus F^1 = F)$,

которое имеет место либо в случае сильной $(L; p)$-секториальности оператора M справа (слева), $p \in \{0\} \cup N$, либо рефлексивности пространства U (F).

---

[1] *Александра Сергеевна Конкина, аспирант кафедры математического и компьютерного моделирования* (*alexandra.konkina@yandex.ru*).

(A2) $L_1^{-1} \in L(F^1;U^1)$,

которое имеет место в случае сильной $(L;p)$-секториальности оператора M, $p \in \{0\} \cup N$. Ранее было показано, что (A1) вместе с условием $(L;p)$-секториальности оператора M, $p \in \{0\} \cup N$, дает сильную $(L;p)$-секториальность оператора M справа (слева), $p \in \{0\} \cup N$, а если к ним добавить условие (A2), то получим сильную $(L;p)$-секториальность оператора M, $p \in \{0\} \cup N$[2]. Тогда оператор $G = M_0^{-1}L_0 \in L(U^0)$ нильпотентен степени p, а оператор $S = L_1^{-1}M_1 \in Cl(U^1)$ секториален. (A3) еще одно важное условие на относительный спектр оператора M [1].

Построим относительно спектральные проекторы [1] $P_j \in L(U)$ и $Q_j \in L(F)$, $j = 1, \ldots, n$, которые имеют вид

$$P_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}(\mu L - M)^{-1}Ld\mu, Q_j = \tag{1}$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}L(\mu L - M)^{-1}d\mu,\ j = \overline{1,n},$$

причем оказывается, что при условии $(L;p)$-секториальности оператора M и условий (A1), (A2), $P_jP = PP_j = P_j$ и$Q_jQ = QQ_j = Q$, $j = 1, \ldots, n$. Значит, в данном случае существует проектор $P_0 = P - \sum_{j=1}^{n} P_j$, $P_0 \in L(U)$.

Пусть $\Omega \subset \mathrm{R}^d$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \mathrm{R}_+$ рассмотрим эволюционную модель Девиса

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u - \beta\Delta^2 u + f, \tag{2}$$

$$u(x,t) = \Delta u(x,t) = 0, (x,t) \in \partial\Omega \times R_+, \tag{3}$$

где $\lambda \in \mathrm{R}$, $\alpha, \beta \in \mathrm{R}_+$. Уравнение (2) вместе с условиями (3), где свободный член $f = f(t)$ – белый шум, можно привести к стохастическому уравнению соболевского типа

$$Ldu = Mudt + NdW. \tag{4}$$

Здесь U – банахово пространство, F – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, операторы

$L \in \mathrm{L}(U; F)$ и $M \in Cl(U; F)$, а $W = W(t)$ –F-значный винеровский K-процесс.

Возьмем $\tau_0 = 0$ и $\tau_j \in \mathrm{R}_+$, если $\tau_{j-1} < \tau_j$ для $j = 1, \ldots, n$. Уравнение (4) можно дополнить многоточечным начально-конечным условием

(5) $$\lim_{t \to \tau_0 +} P_0(u(t) - \xi_0) = 0, P_j(u(\tau_j) - \xi_j) = 0, \ j = \overline{1, n}.$$

где P_j – *относительно спектральные проекторы* [2].

Вектор-функцию $u \in C^1(\tau_0, \tau_n]; U) \cap C(\tau_0, \tau_n]; U)$, удовлетворяющую уравнению (4), назовем его *решением*; решение $u = u(t)$ уравнения (4), удовлетворяющее условию (5), назовем *решением многоточечной начально-конечной задачи* (4), (5).

2. Пространство шумов

Пусть $\Omega \equiv (\Omega, A, P)$ – полное вероятностное пространство, снабженное борелевской σ-алгеброй. Назовем случайной величиной измеримое отображение. Отметим, что все случайные величины имеющие нормалное распределение (т.е. гауссовы), содержатся в пространстве L_2.

Рассмотрим два отображения – $f: I \to L_2$, ставящее в соответствие каждому $t \in I$ случайную величину $\xi \in L_2$, и $g: L_2 \times \Omega \to R$, ставящее в соответствие каждой паре (ξ, ω) точку $\xi(\omega) \in R$, где $I \subset R$ – некоторый промежуток. Стохастический процесс – это отображение $\eta: I \times \Omega \to L_2$, имеющее вид $\eta = \eta(t, \omega) = g(f(t), \omega)$. Отметим, что стохастический процесс $\eta = \eta(t, \bullet)$ (т.е если зафиксировать $t \in I$) является случайной величиной, а стохастический процесс $\eta = \eta(\bullet, \omega)$ (т.е. если зафиксировать $\omega \in \Omega$) будет называться (выборочной) траекторией. Назовем непрерывным стохастический процесс η, если при почти всех (п.в.) $\omega \in \Omega$ траектория $\eta(t, \omega)$ непрерывна на I.

Обозначим символом $P \equiv P(I \times \Omega; U)$ пространство стохастических процессов. Пространство непрерывнх стохастических процессов, чьи случайные величины принадлежат L_2, обозначим CL_2, т.е. $\eta \in CL_2$, если $\eta(t, \bullet) \in L_2$ при всех $t \in I$. Отметим что CL_2 является подпространстовом P. Отметим, что пространство CL_2 содержит, в частности, те стохастические процессы, все траектории которых п.н. непрерывны, а все (независимые) случайные величины – гауссовы. Рассмотрим оператор $K \in L(R)$, спектр которого $\sigma(K)$ положителен, т.е. $\sigma(K) \in R_+$. Это возможно, когда $\sigma(K)$ положительно определен и самосопряжен. Последовательность собственных значений оператора K обозначим через $\{\lambda_k\}$. Пусть спектр $\sigma(K)$ дискретен, конечнократен и сгущается только к точке нуль, тогда $\{\lambda_k\}$ занумеруем по невозрастанию с учетом их кратности. Оператор K называется *ядерным*, если $\mathrm{Tr}K=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k < +\infty$. Отметим, что линейная оболочка множества $\{\varphi_k\}$ соответствующих собственных векторов оператора K плотна в U. Рассмотрим *броуновские движения*, иначе говоря последовательность $\{\xi_K\}$.

Стохастический процесс

(6) $$\beta(t) \equiv \beta(t,\omega) = \sum_{k=0}^{\infty}\xi_k \sin\frac{\pi}{2}(2k+1),\ t \in \overline{R}_+,$$

обладающий свойствами

(W1) $\beta(0) = 0$ п.в. на Ω, и траектории п.н. непрерывны на $\overline{R}_+$.

(W2) Траектории винеровского K-процесса п.н. ни в одной точке недифференцируемы $t \in \overline{R}_+$ и на любом промежутке $\mathrm{I} \subset \overline{R}_+$ имеют неограниченнную вариацию. называется винеровским K-процессом.

При любых ядерном операторе $K \in L(U)$ и последовательности броуновских движений $\{\xi_K\}$ винеровский K-процесс $W \in CL_2$:

(7) $$W(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}\beta_k(t)\phi_k,$$

Для разрешимости задачи (4), (5) нам понадобится еще одно условие

(A4) $QN = N$,

тогда формальное решение $u = u(t)$ многоточечной начально-конечной задачи для уравнения (4) будет иметь вид

$$(8)\quad u(t) = U_0^t \xi_0 + \sum_{j=1}^{m} \left[\int_{\tau_j}^{t} U^{t-s} L_{1j}^{-1} Q_j N dW(s) + U^{t-\tau_j} \xi_j + L_{1j}^{-1} Q_j N W(t) \right].$$

Пусть оператор M (L, p)-секториален и выполнены условия (A1)–(A4). Тогда для любых U^1-значных гауссовых случайных величин ξ_j, $j = 1, \ldots, n$, не зависящих от $W(t)$ и удовлетворяющих условию (7), существует единственное сильное решение задачи (4), (5), которое к тому же имеет вид (8).

3. Модель Девиса

Пусть $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Рассмотрим теперь стохастическое эволюционное уравнение

$$(9)\quad (\lambda - \Delta) du = \alpha \Delta u dt - \beta \Delta^2 u dt + N dW$$

с краевыми условиями

$$(10)\quad u(x,t) = \Delta u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathrm{R}_+.$$

Пусть $F = L_2(\Omega)$ и $U = \{u \in W^2_2(\Omega) \colon u(x)=0, x \in \partial\Omega\}$. Операторы L и M заданы формулами $L = \lambda - \Delta$ и $M = \alpha\Delta - \beta\Delta^2$,

$$\mathrm{dom}\, M = U \cap \{u \in W_2^4(\Omega) : \Delta u(x) = 0, x \in \partial\Omega\}.$$

Очевидно, при всех $\lambda \in \mathrm{R}$ оператор $L \in \mathrm{L}(U; F)$, а при всех $\alpha \in \mathrm{R}$, $\beta \in \mathrm{R}\backslash\{0\}$ оператор $M \in Cl(U; F)$. При всех $\lambda \in R$, $\alpha, \beta \in \mathrm{R}_+$ оператор M сильно $(L, 0)$-секториален.

Пусть φ_k – ортонормированный набор собственных функций однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа Δ в области Ω, занумерованный по не возрастанию собственных значений λ_k с учетом их кратности. Поскольку

$$(\mu L - M)u = \sum_{k=1}^{\infty} (\mu\lambda - (\mu + \alpha)\lambda_k + \beta\lambda_k^2) < u, \varphi_k > \varphi_k$$

при любых $u \in \mathrm{dom}\, M$, $\mu \in \mathrm{C}$, то

$$(11)\quad (\mu L - M)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{< \cdot, \phi_k >}{\beta\lambda_k^2 - \alpha\lambda_k + \mu(\lambda - \lambda_k)} \phi_k .$$

Ряд в (8) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте в C, не содержащем точек

(12) $$\mu_k = \lambda_k \frac{\beta\lambda_k - \alpha}{\lambda_k - \lambda}, \quad k \in \mathrm{N}.$$

Поскольку спектр $\sigma(\Delta)$ отрицателен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $-\infty$, то из (12) следует, что L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $-\infty$. При рассмотрении задачи ограничимся только значениями параметра λ, лежащими в спектре оператора Δ. Поэтому из множества чисел (12) следует удалить числа μ_k с номерами k, при которых $\lambda = \lambda_k$.

Итак, пусть $\lambda \in \sigma(\Delta)$, тогда получим

$$(\mu L - M)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty'} \frac{<\cdot,\varphi_k>\varphi_k}{\beta\lambda_k^2 - \alpha\lambda_k + \mu(\lambda-\lambda_k)} + \sum_{\lambda_k=\lambda} \frac{<\cdot,\varphi_k>\varphi_k}{\beta\lambda^2 - \alpha\lambda},$$

$$R_\mu^L(M) = \sum_{k=1}^{\infty'} (\mu + \lambda_k \frac{\beta\lambda_{k-\alpha}}{\lambda - \lambda_k})^{-1} <\cdot,\varphi_k>\varphi_k = L_\mu^L(M),$$

$$(\nu L - M)^{-1} L_\mu^L(M) = \sum_{k=1}^{\infty'} (\mu + \lambda_k \frac{\beta\lambda_{k-\alpha}}{\lambda - \lambda_k})^{-1} \times \frac{<\cdot,\varphi_k>\varphi_k}{\beta\lambda_k^2 - \alpha\lambda_k + \mu(\lambda-\lambda_k)},$$

где штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемых с номерами k такими, что $\lambda = \lambda_k$. Отсюда нетрудно получить сильную L-спектральность оператора M Простоты ради возьмем оператор $N = Q$, тогда условие (7) очевидно выполняется. Обозначим через $\{\mu_k\}$ последовательность собственных значений оператора Лапласа Δ в области Ω с условием (3), занумерованную по невозрастанию с учетом их кратности, а через $\{\varphi_k\}$– последовательность собственных функций. Тогда

(13) $$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty}{}' e^{\nu_k t}\langle\xi,\phi_k\rangle\phi_k + \sum_{j:\nu_j \in \sigma_j^L(M)} \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\sqrt{\lambda_k}}{\lambda - \mu_k} \int_{\tau_j}^{t} e^{\nu_k(t-s)} d\beta_k(s)\phi_k,$$

где $\nu_k = \dfrac{(\alpha\mu_k - \beta\mu_k^2)}{(\alpha - \mu_k)}$ – точки L-спектра оператора M, $\{\lambda_k\}$ – собственные значения специальными образом построенного ядерного оператора *M*. Штрих у знака суммы означает отсутствие членов таких, что $\lambda = \mu_k$.

Пусть выполнены условия леммы и теоремы, тогда формула (13) дает существенное сильное решение задачи (2), (3), (5).

Литература

1. SVIRIDYUK G.A., FEDOROV V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.
2. ZAGREBINA S.A. *Multipoint initial-final value problem for the linear model of plane-parallel thermal convection in viscoelastic incompressible fluid* // Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software". – 2014. – Vol. 7, Iss. 3. – P.5–22.

STOCHASTIC DEVIS MODEL WHITH MULTIPOINT INITIAL-FINAL VALUE

Alexandra Konkina, South Ural State University, Chelyabinsk, assistant (alexandra.konkina@yandex.ru).

Abstract: The evolution of the free surface of the filtering fluid in a reservoir of limited power is modeled by the Davis equation with homogeneous Dirichlet conditions. Depending on the nature of the free term describing the internal source of the liquid, the model will be deterministic or stochastic. The deterministic model has been studied in various aspects by many researchers with different initial (initial-nal value conditions). The stochastic model is studied here. Several approaches to solving this problems are mentioned, differing y their understanding of the "white noise". The definition of a solution is given, as well as definitions os the used stochastic processes. The solvability of the multipoint initial-finite problem for the stochastic Davis model is given in the article. The main result is the proof of the unique solvability of the evolutionary model with an additive white noise and a multipoint initial-final condition using linear algebra and spectral methods.

Keywords: white noise, Wiener *K*-process, Davis model.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 22.06.2017.
Опубликована 30.09.2017.