УДК 519.86
ББК 22.18

КОМПЛЕКСНЫЕ МОДЕЛИ СИСТЕМНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВЕННО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ[1]

Новиков Д. А.[2]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

Рассматривается комплекс последовательно усложняемых моделей принятия производственным предприятием многокритериальных решений относительно объема производства, привлечения/размещения заемных средств, инвестиций в повышение эффективности и в развитие производственных мощностей. Приводятся результаты вычислительных экспериментов, обсуждаются перспективы развития и применения методов системной оптимизации к моделированию производственно-экономической деятельности предприятий.

Ключевые слова: комплексная модель, производственно-экономическая деятельность предприятия, системная оптимизация, вычислительный эксперимент.

1. Введение

Большинство современных объектов управления требуют использования гетерогенных (иерархических, комплексных, гибридных, использующих различные языки описания и т.д.) моделей [28, 44].

Социально-экономические и производственные системы, являясь предметом исследования в том числе математической

---

[1] *Работа поддержана грантом РНФ №16-19-10609.*

[2] *Дмитрий Александрович Новиков, член-корреспондент РАН* (*novikov@ipu.ru*).

экономики и исследования операций, могут быть описаны с использованием разнообразного математического аппарата. Различные классы моделей, отражая различные явления и процессы, как правило, слабо связаны между собой. В этом можно убедиться как на примере классических монографий и учебников – см., например, [7, 12, 13, 18, 20, 23, 31, 41, 49], так и на примере многочисленных качественных современных отечественных (см., например, [4, 9, 10, 11, 21, 32, 33]) и зарубежных (см., например, [37, 38, 39, 40, 43, 47, 48]) учебных пособий. Отсутствие комплексности моделей является, с одной стороны, вызовом для соответствующих теорий, а, с другой стороны, порождает методические проблемы: отсутствие у студентов целостной картины и понимания взаимосвязей различных разделов учебных дисциплин не способствует как восприятию и пониманию предмета, так и возможности эффективного использования полученных знаний при решении практических задач в рамках последующей профессиональной деятельности.

Настоящая работа посвящена комплексным моделям системной оптимизации производственно-экономической деятельности предприятий. Обсудим значения двух ключевых терминов – «комплексная модель» и «системная оптимизация».

Комплексное моделирование – параллельное (совместное) рассмотрение нескольких моделей, с достаточной полнотой отражающих различные свойства моделируемого объекта, или/и *последовательное* наращивание сложности модели за счет одновременного учета определенной совокупности его свойств.

В [27] выделены три основных требования, предъявляемых к любым моделям: ингерентность, простота и адекватность - как отношения моделей с тремя остальными «участниками» процесса моделирования: со средой (ингерентность), с субъектом, создающим и/или использующим модель (простота), и с моделируемым объектом (адекватность).

Соотношения между входящими в комплекс частными, быть может, взаимосвязанными моделями и общей (по отношению к ним, в том числе включающей их в себя) комплексной моделью регулируются двумя принципами – принципом эмерджентности и принципом соответствия.

Принцип эмерджентности – общая модель по сравнению с частной или с их семейством должна отражать качественно новые (отсутствующие в каждой из частных моделей) свойства моделируемого объекта. Принцип эмерджентности включает в себя более частные принципы (их список на сегодняшний день не канонизирован и открыт):

- *принцип непротиворечивости* (результаты частных моделей или подмоделей общей модели не должны принципиально противоречить друг другу, или эти противоречия должны разрешаться в рамках более общей модели);
- *принцип наследования* (общая модель должна отражать все свойства моделируемого объекта, учитываемые частными моделями);
- *принцип монотонности* (в случае использования единого критерия эффективности учет новых свойств моделируемого объекта не должен снижать его значение; в противном случае необходимо привлечение более общей модели).

Принцип соответствия традиционен для наук сильной версии [27], требуя, чтобы в определенных «предельных» случаях общая модель превращалась в соответствующую частную.

Что касается *системной оптимизации*, то на сегодняшний день существуют два значения этого термина. Первое значение – нестрогое: максимально широкий спектр всевозможных целенаправленных изменений в моделируемом объекте рассматривается комплексно, с учетом «системности», т.е. взаимосвязей элементов объекта. Второе значение - строгое (принадлежит академику В.М. Глушкову [3], см. также [6]): многокритериальная оптимизационная задача формулируется в рамках комплекса иерархических моделей со взаимосвязанными и изменяемыми в процессе оптимизации ограничениями.

Несмотря на очевидную перспективность подходов системной оптимизации, за прошедшие три с половиной десятилетия это направление развивалось не очень интенсивно. Среди основных «ветвей развития» можно выделить следующие.

Во-первых, монографии [3, 22, 24, 30] по моделированию сложных иерархических систем, отражающие результаты интенсивного развития этого направления в 60-80-х годах XX века. Хотя, справедливости ради, необходимо отметить, что, несмотря на близость концепций, в явном виде термин «системная оптимизация» в этих работах почти не встречается.

Во-вторых, методы программно-целевого планирования и управления (научная школа В.А. Ирикова): траекторный подход к решению задач программно-целевого управления [34] и системной оптимизации [16, 35], методы системной оптимизации в задачах координации решений [14, 15].

В-третьих, работы по теоретико-игровым и оптимизационным моделям механизмов управления (научная школа В.Н. Буркова), в явном виде использующие и развивающие концепцию системной оптимизации – см. обзор и ряд результатов в [2].

Структура настоящей работы, посвященной достаточно узкому классу задач системной оптимизации и не претендующей на принципиально новые теоретические методы и общие алгоритмы (а носящей скорее методологический - с точки зрения комплексного моделирования – и методический – с точки зрения преподавания соответствующих дисциплин - характер), такова: во втором разделе описывается базовая модель деятельности предприятия, в третьем – основные переменные и диапазоны их значений, используемые в других моделях. Четвертый раздел содержит расширения базовой модели, пятый раздел – комплексные модели. В шестом разделе приведены методические рекомендации по анализу моделей. Заключение содержит краткое обсуждение перспектив применения методов системной оптимизации к моделированию производственно-экономической деятельности предприятий.

2. Базовая модель

Модель 1 (М1, базовая). Рассмотрим производственное предприятие (далее будем называть его «*агентом*» - «*agent*» в англоязычной литературе), которое осуществляет производство одного вида товара. *Стоимость сырья* - одной «заготовки» (необходимой для производства единицы товара), которые он закупает, - равна λ_0 рублей, *рыночная стоимость* готовой единицы товара равна λ рублей. *Трудозатраты* зависят от *действия* *агента* - количества $y \geq 0$ производимых единиц товара (*объема производства*) - следующим образом:

(1) $c(y, r) = \dfrac{y^2}{2r}$,

где $r > 0$ – коэффициент, отражающий *эффективность производства* (используемых технологий, квалификацию персонала), называемый обычно *типом агента* и имеющий размерность «руб.$^{-1}$». Отметим, что все приведенные ниже результаты (в том числе и возможность получения аналитических зависимостей) останутся в силе при использовании вместо (1) широко распространенных в экономико-математическом моделировании обобщенных производственных функций типа Кобба–Дугласа: $c(y, r) = \dfrac{1}{\rho} y^{\rho} r^{1-\rho}$, $\rho > 1$ [12, 17, 46].

Прибыль агента равна разности между *выручкой* λy от продаж и *затратами* (равными сумме трудозатрат (1) и затрат $\lambda_0 y$ на приобретение сырья):

(2) $\Phi_1(\lambda, \lambda_0, r, y) = (\lambda - \lambda_0)y - \dfrac{y^2}{2r}$.

Предположим, что постоянные издержки отсутствуют, а имеющиеся средства достаточны для закупки любого количества заготовок. Будем считать, что агент, выбирая объем производства y, заинтересован в максимизации прибыли (в этом проявляется целенаправленность, *рациональность* его поведения как экономического агента):

(3) $\Phi_1(\lambda, \lambda_0, r, y) \to \max\limits_{y \geq 0}$,

которая (см. выражение (2)) достигает максимума при объеме производства (с точностью до дискретности числа единиц товара)

(4) $y_1^*(\lambda, \lambda_0, r) = (\lambda - \lambda_0)r$.

В этом легко убедиться, вычисляя производную выражения (2) и приравнивая эту производную к нулю, не забыв при этом проверить, что максимизируемая функция (2) вогнутая (имеет в рассматриваемом случае отрицательную вторую производную).

Максимальное значение прибыли равно

(5) $\Phi_1(\lambda, \lambda_0, r, y_1^*(\lambda, \lambda_0, r)) = (\lambda - \lambda_0)^2 r/2$.

Все описываемые в настоящей работе модели были реализованы в программной среде РДС (Расчет Динамических Систем), разработанной в ИПУ РАН [36], с интуитивно понятным интерфейсом, и находятся в свободном доступе по адресу http://www.mtas.ru/biblio/RDS/M.zip. На рис. 1 приведена зависимость прибыли агента от объема производства при $\lambda = 10$, $\lambda_0 = 2$, $r = 3$ (вертикальные линии соответствуют реальному (левая линия) и оптимальному – максимизирующему прибыль - действиям агента). Все рисунки также построены в РДС.

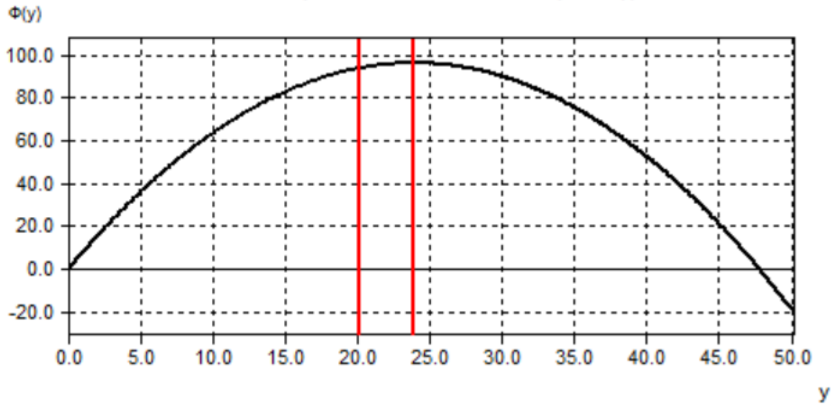


Рис. 1. Зависимость прибыли агента от объема производства в М1

Далее будем усложнять базовую модель, добавляя к ней сначала учет одного из таких эффектов, как возможное наличие:
- технологических ограничений;
- постоянных издержек;
- ограниченности собственных средств;
- заемных средств;
- инвестиций в повышение эффективности[3];

[3] *Понятно, что такие решения, как, например, выбор объема производства и выбор размера инвестиций в повышение его эффективности, имеют разные временные горизонты. Рассмотрение их в рамках*

- инвестиций в расширение производства (повышение производственных мощностей);
- конкуренции на рынке,

(см. расширения базовой М1 - М2-М8 в разделе 4 и в таблице 1), а затем будем добавлять эти эффекты последовательно (см. комплексные М9-М14, таблицу 2 и рис. 3).

Таблица 1. Эффекты, учитываемые в М1-М8

Эффекты	**М1**	**М2**	**М3**	**М4**	**М5**	**М6**	**М7**	**М8**
Рациональное поведение (λ_0, λ, r)	+	+	+	+	+	+	+	+
Технологические ограничения (y_0)		+					+	
Постоянные издержки (c_0)			+					
Ограниченность собственных средств (Φ_0)				+				
Заемные средства ($\delta(v)$)					+			
Повышение эффективности ($r(w)$)						+		
Расширение производства ($y_{\max}(u)$)							+	
Конкуренция на рынке								+

3. Основные переменные

Перечислим обозначения основных переменных, используемых ниже, и выбранные условно диапазоны их значений (приводятся в скобках), используемых при численном моделировании.

Входные параметры:

1) $\lambda_0 \geq 0$ - цена сырья ([0; 10]);

одной модели подразумевает использование приведенных (к единому моменту времени) затрат и доходов.

2) $\lambda \geq 0$ - цена товара ([0; 15]);

3) $r \geq 0$ - тип агента ([0; 5]), $r_0 \geq 0$ – начальный тип агента ([0; 5]);

4) $y_0 \geq 0$ – технологическое ограничение ([0; 50]);

5) $c_0 \geq 0$ – постоянные издержки ([0; 50]);

6) $\Phi_0 \geq 0$ – начальные средства ([0; 100]);

7) $\delta^- \geq 0$ - ставка размещения средств ([0; 2]);

8) $\delta^+ \geq 0$ - ставка привлечения средств ([0; 2], $\delta^+ \geq \delta^-$);

9) $D \geq 0$ – параметр функции (31) зависимости рыночной цены от суммарного объема производства;

10) $\gamma \geq 0$ – параметр функции (31) зависимости рыночной цены от суммарного объема производства;

11) $c(y, r)$ – функция затрат агента;

12) $r(r_0, \alpha, w)$ – зависимость типа агента от инвестиций в повышение эффективности;

13) $y_{\max}(y_0, \beta, u)$ – зависимость технологических ограничений от инвестиций в расширение производственных мощностей;

14) α – параметр функции $r(\cdot)$ ([0; 10]);

15) β – параметр функции $y_{\max}(\cdot)$ ([0; 10]).

Выходные параметры:

1) $y \geq 0$ – объем производства ($z = \lambda_0 y$ – инвестиции в приобретение сырья) ([0; 50]);

2) $v \in \Re^1$ - объем привлекаемых ($v > 0$) или размещаемых ($v < 0$) средств ([0; 100]);

3) $w \geq 0$ – объем инвестиций в повышение эффективности ([0; 100]);

4) $u \geq 0$ – объем инвестиций в расширение производственных мощностей ([0; 100]).

Перейдем к описанию расширений базовой М1.

4. Расширения базовой модели

Модель 2 (М2). Предположим, что в условиях М1 присутствуют ограничения $y_0 \geq 0$ (например, технологические) на объем производства: $y \in [0; y_0]$. Тогда, решая задачу максимизации на отрезке вогнутой функции

(6) $\Phi_1(\lambda, \lambda_0, r, y) \to \max\limits_{y \in [0; y_0]}$,

получим, что оптимальным является объем производства

(7) $y_2^*(\lambda, \lambda_0, r, y_0) = \min \{(\lambda - \lambda_0)r; y_0\}$.

М2 превращается в М1 при $y_0 = +\infty$, т.е. при отсутствии технологических ограничений, следовательно, принцип соответствия (см. введение) для М2, как и для всех описываемых ниже моделей, выполнен.

<u>Модель 3 (М3).</u> Предположим, что в условиях М1 агент несет постоянные издержки $c_0 \geq 0$ (например, плата за аренду производственных помещений и/или оборудования, оплата коммунальных услуг и т.п.). Прибыль (2) примет вид

(8) $\Phi_3(\lambda, \lambda_0, r, y) = (\lambda - \lambda_0)y - \dfrac{y^2}{2r} - c_0$.

Очевидно, что учет постоянных издержек со знаком минус в выражении (8) не повлияет на вогнутость целевой функции и не изменит оптимального значения объема производства (4), но приведет к необходимости анализа *условия безубыточности* (прибыль должна быть неотрицательна):

(9) $c_0 \leq (\lambda - \lambda_0)\, y_1^*(\lambda, \lambda_0, r) - \dfrac{(y_1^*(\lambda, \lambda_0, r))^2}{2r}$.

М3 превращается в М1 при $c_0 \equiv 0$ (т.е. при отсутствии постоянных издержек).

<u>Модель 4 (М4).</u> Предположим, что в условиях М1 начальные средства $\Phi_0 \geq 0$, которые агент может потратить на закупку заготовок, у агента ограничены. Тогда оптимальный (максимизирующий прибыль) объем производства равен

(10) $y_4^*(\lambda, \lambda_0, r, \Phi_0) = \min \{(\lambda - \lambda_0)\, r; \Phi_0/\lambda_0\}$.

М4 соответствует М2 при $y_0 = \Phi_0/\lambda_0$ и превращается в М1 при $\Phi_0 \equiv +\infty$ (неограниченности начальных собственных средств).

<u>Модель 5 (М5).</u> Предположим, что в условиях М1 агент имеет возможность привлечь или предложить любой объем v средств по ставке

(11) $\delta(v) = \begin{cases} \delta^+, v > 0, \\ 0, v = 0, \\ \delta^-, v < 0; \end{cases}$

где $0 \leq \delta^- \leq \delta^+$ - ставки соответственно размещения и привлечения заемных средств (далее, если речь идет только о привлекаемых средствах, будем использовать для соответствующей ставки обозначение δ).

Обозначим через

(12) $z \in Z(v) = [0; v]$

сумму, которую, дополнительно к собственным средствам Φ_0 (в настоящей модели принято, что $\Phi_0 = 0$), агент тратит на приобретение сырья; при этом он обеспечивает объем производства $y = z / \lambda_0$, что приводит к получению прибыли (с учетом возврата суммы $(1 + \delta)v$ по кредиту)

(13) $\Phi_5(\lambda, \lambda_0, r, \delta, v, z) = v - z + \lambda z / \lambda_0 - (1 + \delta(v))v - \dfrac{z^2}{2(\lambda_0)^2 r}$.

Оптимальный объем $v_5^*(\lambda, \lambda_0, r, \delta)$ заемных средств и оптимальные затраты $z_5^*(\lambda, \lambda_0, r, \delta)$ на сырье должны максимизировать прибыль (13), а объем привлеченных средств желательно минимизировать, т.е.

(14) $\Phi_5(\lambda, \lambda_0, r, \delta, v, z) \to \max\limits_{v \in \Re^1,\, z \in Z(v)}$, $v \to \min\limits_{v \geq 0}$.

Задача (14) принадлежит классу так называемых *задач системной оптимизации*, в которых управляемые переменные входят не только в критерии эффективности, но и в ограничения.

В рассматриваемом случае задача (14) допускает аналитическое решение. Действительно, отметим, что прибыль (13) монотонно убывает по объему v заемных средств и этот объем не может быть отрицательным. Поэтому в оптимальном решении[4] $v = z$. Подставляя это равенство в выражение (13), получим задачу максимизации вогнутой функции

(15) $z\,(\lambda/\lambda_0 - 1 - \delta) - \dfrac{z^2}{2(\lambda_0)^2 r} \to \max\limits_{z \geq 0}$.

Решение задачи (15):

---

[4] *Из этого наблюдения следует также справедливость вывода о том, что агенту не выгодно в рамках данной модели предоставлять кредиты.*

(16) $z_5^*(\lambda, \lambda_0, r, \delta) = \lambda_0 (\lambda - (1 + \delta) \lambda_0) r$.

М5 переходит в М1 при $\delta = 0$. Их различие обусловлено тем, что в М1 считается, что агент приобретает сырье «одновременно» с получением выручки от продажи товара. Другими словами, в М5 можно выделить три момента времени – «первый», «второй» и «третий». В первый момент времени агент берет кредит и закупает сырье, во второй – производит товар, в третий – реализует товар, компенсирует трудозатраты и рассчитывается по кредиту. То есть затраты в момент приобретения сырья дисконтируются по ставке δ к моменту получения выручки – ср. выражения (4) и (16) (в последнем цена закупки сырья, «приведенная» к моменту получения выручки равна $(1 + \delta)\lambda_0$. В М1 все три момента времени «совмещены», что соответствует $\delta = 0$.

<u>Модель 6 (М6).</u> Предположим, что в условиях М1 агент имеет возможность, вложив сумму $w \geq 0$, увеличить эффективность до величины $r(w)$ (например, в результате техперевооружения или/и повышения квалификации персонала), где $r(\cdot)$ – известная возрастающая функция. Функция прибыли примет вид

(17) $\Phi_6(\lambda, \lambda_0, r, w, y) = (\lambda - \lambda_0)y - w - \dfrac{y^2}{2r(w)}$,

и задача агента будет заключаться в одновременном выборе неотрицательных значений y и w, максимизирующих выражение (17).

Функция (17) вогнута по y при любых положительнозначных функциях $r(w)$ и вогнута по w при выполнении условия

(18) $r''(w) \leq 2\left[\ln(r(w))\right]'$.

В качестве примера функции, удовлетворяющей условию (18), выберем

(19) $r(w) = r_0 + \alpha\sqrt{w}$,

где $\alpha \geq 0$ - известная константа. Дифференцируя выражение (17) по каждой из переменных и приравнивая соответствующие производные к нулю, получим систему из двух алгебраических уравнений относительно двух переменных - y и w. Решая эту систему уравнений, находим:

(20) $y_6^*(\lambda, \lambda_0, r_0, \alpha) = (\lambda - \lambda_0)(r_0 + \alpha^2(\lambda - \lambda_0)^2/4)$,
(21) $w_6^*(\lambda, \lambda_0, r_0, \alpha) = \alpha^2(\lambda - \lambda_0)^4/16$.

Подставляя (20) и (21) в (17), получим
(22) $\Phi_6(y^*(\lambda, \lambda_0), w^*(\lambda, \lambda_0)) = (\lambda - \lambda_0)^2[r_0 + \alpha^2(\lambda - \lambda_0)^2/8]/2$.

Сравнивая выражения (22) и (5), приходим к выводу, что в рамках М6 при функции эффективности (19) наличие возможности вложений в повышение эффективности производства никогда не приводит к уменьшению прибыли (принцип монотонности – см. введение).

М6 переходит в М1 при $r_0 = r$, $\alpha = 0$.

Модель 7 (М7). Предположим, что в условиях М2 агент имеет возможность, вложив сумму $u \geq 0$, увеличить технологические ограничения до величины $y_{\max}(u)$ (например, в результате техперевооружения, или/и расширения производственных мощностей, или/и найма дополнительного персонала и т.д.), где $y_{\max}(\cdot)$ – известная возрастающая вогнутая функция. Функция прибыли примет вид

(23) $\Phi_7(\lambda, \lambda_0, r, u, y) = (\lambda - \lambda_0)\, y - u - \dfrac{y^2}{2r}$,

при этом считается, что полная амортизация осуществляется в течение рассматриваемого периода времени (т.е. затраты u целиком входят в целевую функцию Φ_7). Задача агента будет заключаться в одновременном выборе неотрицательных значений y и u:

(24) $(\lambda - \lambda_0)y - u - \dfrac{y^2}{2r} \to \max\limits_{u \geq 0,\, y \in [0; y_{\max}(u)]}$, $u \to \min\limits_{u \geq 0}$.

Задача (24) является задачей системной оптимизации, однако она допускает простое решение, основывающееся на следующей идее: определим *минимальные затраты на обеспечение допустимости заданного объема производства* $y \geq 0$:
(25) $u(y) = \min \{u \geq 0 \mid y_{\max}(u) \geq y\}$.
В силу вогнутости функции $y_{\max}(u)$, функция $u(y)$ – выпуклая. С учетом выражения (25) задача (24) примет вид:

(26) $(\lambda - \lambda_0)y - u(y) - \dfrac{y^2}{2r} \to \max\limits_{y \geq 0}$,

т.е. будет заключаться в поиске безусловного максимума вогнутой функции.

В качестве примера рассмотрим

(27) $y_{\max}(u) = y_0 + \beta\sqrt{u}$,

где $\beta \geq 0$ - известная константа.

Тогда

(28) $u(y) = \begin{cases} 0, y \leq y_0, \\ \dfrac{1}{\beta^2}(y - y_0)^2, y \geq y_0. \end{cases}$

Подставляя выражение (28) в (26) и решая соответствующую задачу максимизации, получим:

(29) $y_7^*(\lambda, \lambda_0, r, y_0, \beta) = \begin{cases} (\lambda - \lambda_0)r, (\lambda - \lambda_0)r \leq y_0, \\ \dfrac{\beta^2(\lambda - \lambda_0) + 2y_0}{\beta^2 + 2r} r \ , (\lambda - \lambda_0)r > y_0. \end{cases}$

М7 переходит в М1 при $y_0 = y_{\max}$, $\beta = 0$.

Модель 8 (М8). Пусть имеются n агентов, производящих однородный товар, с целевыми функциями типа (2):

(30) $Q_i(\lambda, \lambda_0, r_i, y) = (\lambda(y) - \lambda_0)y_i - \dfrac{y_i^2}{2r_i}$,

где $i \in N = \{1, \ldots, n\}$ – индекс агента, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ – вектор действий агентов. Предположим, что рыночная цена линейно убывает с ростом суммарного предложения товара (так называемая линейная *олигополия Курно*):

(31) $\lambda(y) = D - \gamma \sum_{i \in N} y_i$,

а агенты принимают решения об объемах выпускаемых ими товаров однократно, одновременно и независимо. Тогда, подставляя выражение (31) в (30), дифференцируя по y_i и решая соответствующую систему алгебраических уравнений, находим *равновесие Нэша игры агентов* в нормальной форме:

(32) $y_i^*(\lambda_0, D, \gamma, r) = \dfrac{(D - \lambda_0)r_i}{(1 + \gamma r_i)(1 + \gamma \sum_{j \in N} \frac{r_j}{1 + \gamma r_j})}$.

$r = (r_1, \ldots, r_n)$ – вектор типов агентов.

На рис. 2 приведена «панель управления» реализованной в РДС М8 при $D = 15$, $\gamma = 0{,}05$, $\lambda_0 = 2$, $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 4$ (агент 1 – синяя линия, агент 2 – красная линия, агент 3 – зеленая линия на графиках динамики действий агентов и их прибыли). В качестве предположения о динамике поведения агентов (каждый из которых в каждом периоде наблюдает предыдущие действия всех своих оппонентов и принимает решения независимо от них, т.е. некооперативно) использована гипотеза индикаторного поведения [29, 46] с параметрами g_i – см. рис. 2.

Завершив рассмотрение М2–М8, отличающихся от базовой М1 наличием только одного из «дополнительных эффектов» (см. Таблица 1), перейдем последовательному наращиванию сложности моделей, т.е. к комплексным М9–М14, в которых различные «дополнительные эффекты» добавляются последовательно (см. таблицу 2 и рис. 3).

Таблица 2. Эффекты, учитываемые в М9-М14

Эффекты	**М9**	**М10**	**М11**	**М12**	**М13**	**М14**
Рациональное поведение (λ_0, λ, r)	+	+	+	+	+	+
Технологические ограничения (y_0)	+	+	+	+	+	+
Постоянные издержки (c_0)	+	+	+	+	+	+
Ограниченность собственных средств (Φ_0)		+	+	+	+	+
Заемные средства ($\delta(v)$)			+	+	+	+
Повышение эффективности ($r(w)$)				+	+	+
Расширение производства ($y_{\max}(u)$)					+	+
Конкуренция на рынке						+

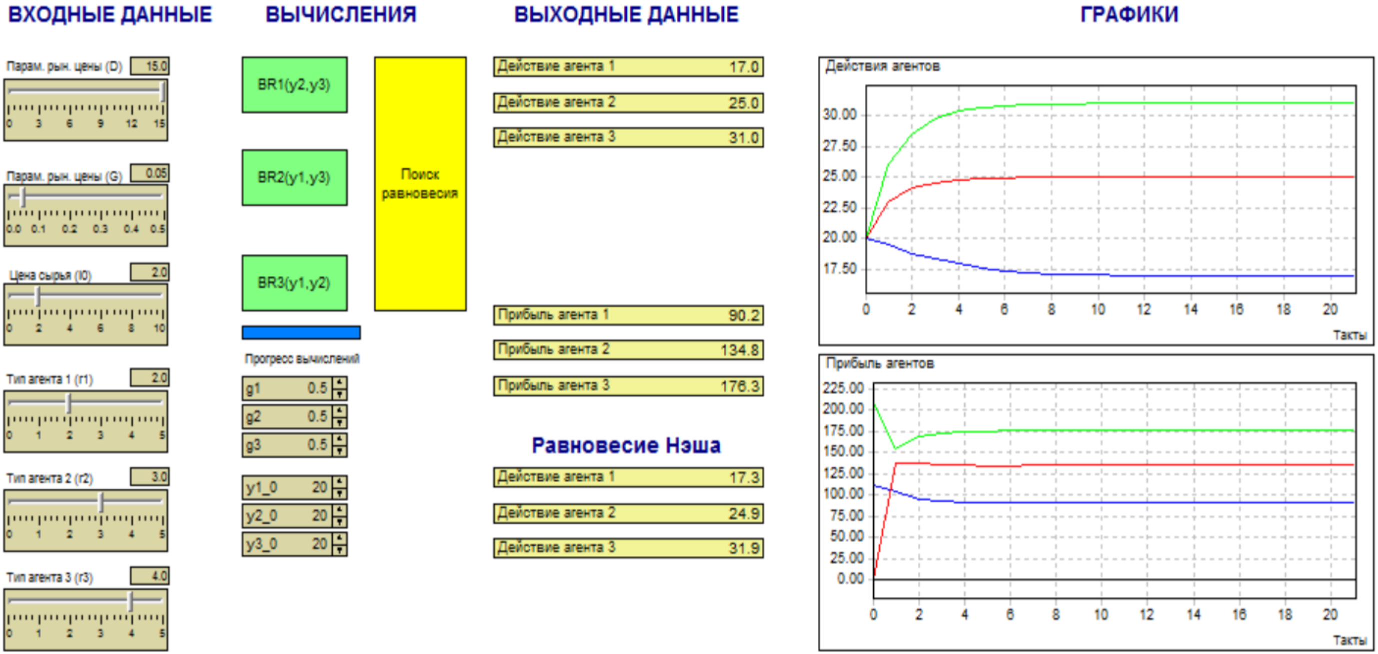


Рис. 2. «Панель управления» и результаты моделирования для M8

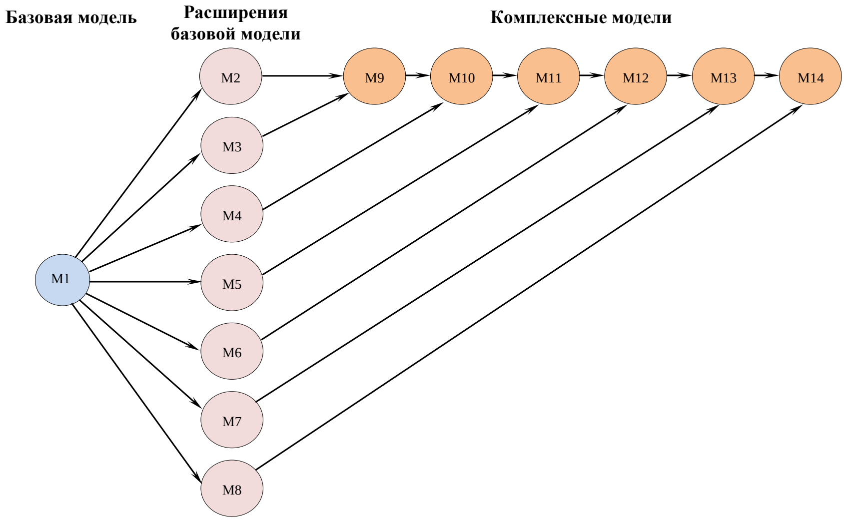


Рис. 3. Структура комплекса M1-M14

5. Комплексные модели

Модель 9 (М9). Предположим, что в условиях М2 агент несет постоянные издержки $c_0 \geq 0$. Прибыль (2) примет вид (8). Как и в М3, учет постоянных издержек со знаком минус в выражении (8) не изменит оптимального значения объема производства (4), но приведет к необходимости анализа *условия безубыточности* (прибыль должна быть неотрицательна – ср. с (9)):

(33) $c_0 \leq (\lambda - \lambda_0)\, y_2^*(\lambda, \lambda_0, r, y_0) - \dfrac{(y_2^*(\lambda, \lambda_0, r, y_0))^2}{2r}$.

Модель 10 (М10). Предположим, что в условиях М9 начальные собственные средства $\Phi_0 \geq 0$, которые агент может потратить на закупку заготовок и покрытие постоянных издержек, ограничены, а возможность привлечения внешних средств отсутствует. Тогда оптимальный (максимизирующий прибыль) объем производства равен (ср. с (10))

(34) $y_{10}^*(\lambda, \lambda_0, r, y_0, \Phi_0, c_0) = \min\{(\lambda - \lambda_0)r;\ y_0;\ (\Phi_0 - c_0)/\lambda_0\}$.

М10 является «последней» (по сложности) моделью, допускающей аналитическое решение. «Следующие» (по сложности) модели (М11–М14) требуют соответствующего вычислительного эксперимента.

Модель 11 (М11). Предположим, что в условиях М10 агент имеет возможность привлечь или разместить любой объем v средств по ставке $\delta(v)$. Обозначим через

(35) $z \in Z_{11}(v, y_0) = [0; \min \{\lambda_0 y_0; \Phi_0 - c_0 + v\}]$

сумму, которую агент тратит на приобретение сырья; при этом он обеспечивает объем производства $y = z / \lambda_0$, что приводит к получению прибыли (с учетом возврата/получения суммы $(1 + \delta(v))\, v$ по кредиту)

(36) $\Phi_{11}(\lambda, \lambda_0, r, \Phi_0, c_0, \delta(\cdot), v, z) = \Phi_0 - c_0 + v - z + \lambda z / \lambda_0 -$

$$- (1 + \delta(v))\, v - \frac{z^2}{2(\lambda_0)^2 r}.$$

Оптимальный объем $v_{11}^*(\lambda, \lambda_0, r, y_0, \Phi_0, c_0, \delta(\cdot))$ заемных средств и оптимальные затраты $z_{11}^*(\lambda, \lambda_0, r, y_0, \Phi_0, c_0, \delta(\cdot))$ на сырье должны максимизировать прибыль (36), т.е.

(37) $\Phi_{11}(\lambda, \lambda_0, r, \Phi_0, c_0, \delta(v), v, z) \to \max\limits_{v \in \Re^1,\, z \in Z_{11}(v, y_0)}$.

Отметим, что в задаче (37) (а также в задачах (40), (43) и (46)) агент выбирает не действие y, а объем затрат z на приобретение сырья. Так как при постоянной цене сырья λ_0 эти переменные однозначно и монотонно связаны: $y = z / \lambda_0$, то эти задачи могут быть легко переформулированы в терминах действия агента.

Данная модель уже достаточно «богата», для того чтобы отразить наличие у агента нескольких стратегий поведения, являющихся оптимальными при различных соотношениях входных параметров.

Так, например, при $\lambda = 10$, $\lambda_0 = 2$, $r = 3$, $\delta^+ = \delta^- = 0{,}5$, $y_0 = 30$, $c_0 = 20$, $\Phi_0 = 60$, оптимальным для агента является взять кредит в размере $v^* = 2{,}5$ и выбрать объем производства $y^* = 21$. Если цена сырья λ_0 возрастает до 7 единиц, то производство становится убыточным (оптимальный объем производства равен нулю), и агенту выгодно превратиться из производственной в кредитную организацию, одолжив все остающиеся у него после покрытия постоянных издержек средства: $v^* = \Phi_0 - c_0 = -40$.

«Богатство» данной и последующих моделей (M12-M14) также позволяет формулировать в их рамках *многокритериальные задачи*, характерные для проблематики системной оптимизации. Действительно, наличие достаточного числа «степеней свободы» (первичных и производных переменных, описывающих моделируемую систему), функциональных связей между ними и нескольких критериев, описывающих состояние системы, позволяют ставить и решать разнообразные задачи оптимизации: выбирая тот или иной критерий в качестве оптимизируемого, а остальные рассматривая в виде ограничений; или фиксируя требования к значениям одних критериев, искать систему ограничений, оптимизирующую другой критерий и т.д. – некоторые примеры приводятся ниже в рамках M12 и M13, где считается, что размер кредита должен быть неотрицательным.

Модель 12 (M12). Предположим, что в условиях M11 агент имеет возможность, вложив сумму $w \geq 0$, увеличить эффективность до величины $r(w)$. Множество допустимых затрат на приобретение сырья примет вид

(38) $z \in Z_{12}(v, w, y_0) = [0; \min \{\lambda_0 y_0; \Phi_0 - c_0 - w + v\}]$.

Функция прибыли примет вид

(39) $\Phi_{12}(\lambda, \lambda_0, \Phi_0, c_0, \delta(\cdot), r(\cdot), v, w, z) = \Phi_0 - c_0 + v - z - w +$

$$+ \lambda z / \lambda_0 - (1 + \delta(v))v - \frac{z^2}{2r(w)(\lambda_0)^2}.$$

Оптимальный объем $v_{12}^*(\lambda, \lambda_0, r(\cdot), y_0, \Phi_0, c_0, \delta(\cdot))$ заемных средств, оптимальные затраты $z_{12}^*(\lambda, \lambda_0, r(\cdot), y_0, \Phi_0, c_0, \delta(\cdot))$ на сырье и оптимальные вложения $w_{12}^*(\lambda, \lambda_0, r(\cdot), y_0, \Phi_0, c_0, \delta(\cdot))$ в повышение эффективности должны максимизировать прибыль (39), т.е.

(40) $\Phi_{12}(\lambda, \lambda_0, \Phi_0, c_0, \delta(v), r(w), v, w, z) \rightarrow \max\limits_{v \in \Re^1,\, w \geq 0,\, z \in Z_{12}(v, w, y_0)}$.

Отметим, что даже если $\delta(\cdot) \equiv 0$, то выполнение условия (18) не гарантирует выпуклости задачи (40), так как переменная w не только входит непосредственно в целевую функцию, но и определяет допустимое множество $Z_{12}(v, w, y_0)$.

Например, при $\lambda = 10$, $\lambda_0 = 2$, $r_0 = 3$, $\delta^+ = \delta^- = 0{,}5$, $y_0 = 30$, $c_0 = 20$, $\Phi_0 = 60$, $\alpha = 2$ (см. выражение (19)), оптимальным для агента является взять кредит в размере $v^* = 32$, инвестировать

$w^* = 11$ в повышение эффективности и выбрать объем производства $y^* = 30$. Зависимость прибыли Φ агента от размера кредита v и размера инвестиций w для рассматриваемого примера приведена на рис. 4 (здесь и далее при недопустимых значениях переменных прибыль считается равной нулю; линия уровня $\Phi_{12} = 100$ и ее проекции выделены на рис. 4 красным цветом).

В рамках М12 можно находить ответы на множество содержательных вопросов, типичных для подхода системной оптимизации. Например, каков должен быть минимальный объем собственных средств, при которых привлечение заемных средств становится нецелесообразным (ответ: 92,4). Или при каких минимальных технологических ограничениях инвестиции в повышение эффективности не имеют смысла (ответ: 10,6) и т.д.

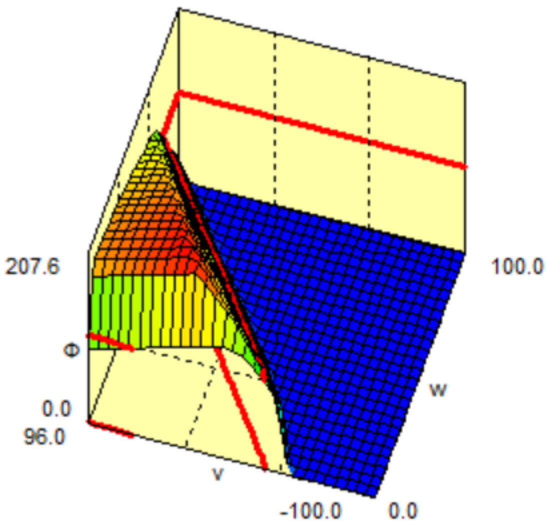


Рис. 4. Зависимость прибыли Φ агента от размера кредита v и размера инвестиций w в М12

<u>Модель 13 (М13).</u> Предположим, что в условиях М12 агент имеет возможность, вложив сумму $u \geq 0$, увеличить технологические ограничения до величины $y_{max}(u)$. Множество допустимых затрат на приобретение сырья примет вид

(41) $z \in Z_{13}(v, w, u) = [0; \min \{\lambda_0\, y_{max}(u); \Phi_0 - c_0 - w - u + v\}]$.

Функция прибыли примет вид

(42) $\Phi_{13}(\lambda, \lambda_0, \Phi_0, c_0, \delta(\cdot), r(\cdot), y_{max}(\cdot), v, w, u, z) =$

$$= \Phi_0 - c_0 + v - z - w - u + \lambda\, z/\lambda_0 - (1 + \delta(v))v - \frac{z^2}{2r(w)(\lambda_0)^2}.$$

Оптимальный объем $v^*(\lambda, \lambda_0, r(\cdot), y_{max}(\cdot), \Phi_0, c_0, \delta(\cdot))$ заемных средств, оптимальные затраты $z^*(\lambda, \lambda_0, r(\cdot), y_{max}(\cdot), \Phi_0, c_0, \delta(\cdot))$ на приобретение сырья, оптимальные вложения $w^*(\lambda, \lambda_0, r(\cdot), y_{max}(\cdot), \Phi_0, c_0, \delta(\cdot))$ в повышение эффективности и оптимальные вложения $u^*(\lambda, \lambda_0, r(\cdot), y_{max}(\cdot), \Phi_0, c_0, \delta(\cdot))$ в расширение производственных мощностей должны максимизировать прибыль (42), т.е.

(43)

$$\Phi_{13}(\lambda, \lambda_0, \Phi_0, c_0, \delta(v), r(w), y_{max}(u), v, w, u, z) \to \max_{v \in \Re^1,\, w \ge 0, u \ge 0, z \in Z_{13}(v,w,u)} .$$

Задача (43) является задачей системной оптимизации. Отметим, что вогнутость зависимости $y_{max}(u)$ и выполнение условия (18), в отличие от расширений базовой модели, не гарантируют выпуклости задачи (43), так как переменные u и w определяют допустимое множество $Z_{13}(v, w, u)$, а зависимость $\delta(v)$ разрывна.

На рис. 5 приведена экранная форма для «панели управления» М13.

Например, при $\lambda = 10$, $\lambda_0 = 2$, $r = 1$, $\delta^+ = \delta^- = 0{,}1$, $y_0 = 10$, $c_0 = 0$, $\Phi_0 = 100$, $\alpha = 2$, $\beta = 10$ получаем зависимости прибыли агента от выбираемых им параметров, приведенные на рис. 6 и рис. 7 (линия уровня $\Phi_{13} = 300$ и ее проекции выделены на рис. 6 красным цветом; линия уровня $\Phi_{13} = 0$ и ее проекции выделены на рис. 7 красным цветом).

<u>Модель 14 (М14).</u> Пусть деятельность каждого из агентов описывается М13, агенты конкурируют на одном и том же рынке, причем цена сырья λ_0 для них одинакова, а рыночная цена на их продукцию определяется выражением (ср. с (31))

(44) $\lambda(z_1, \dots z_n) = D - \dfrac{\gamma}{\lambda_0} \sum_{j \in N} z_j$.

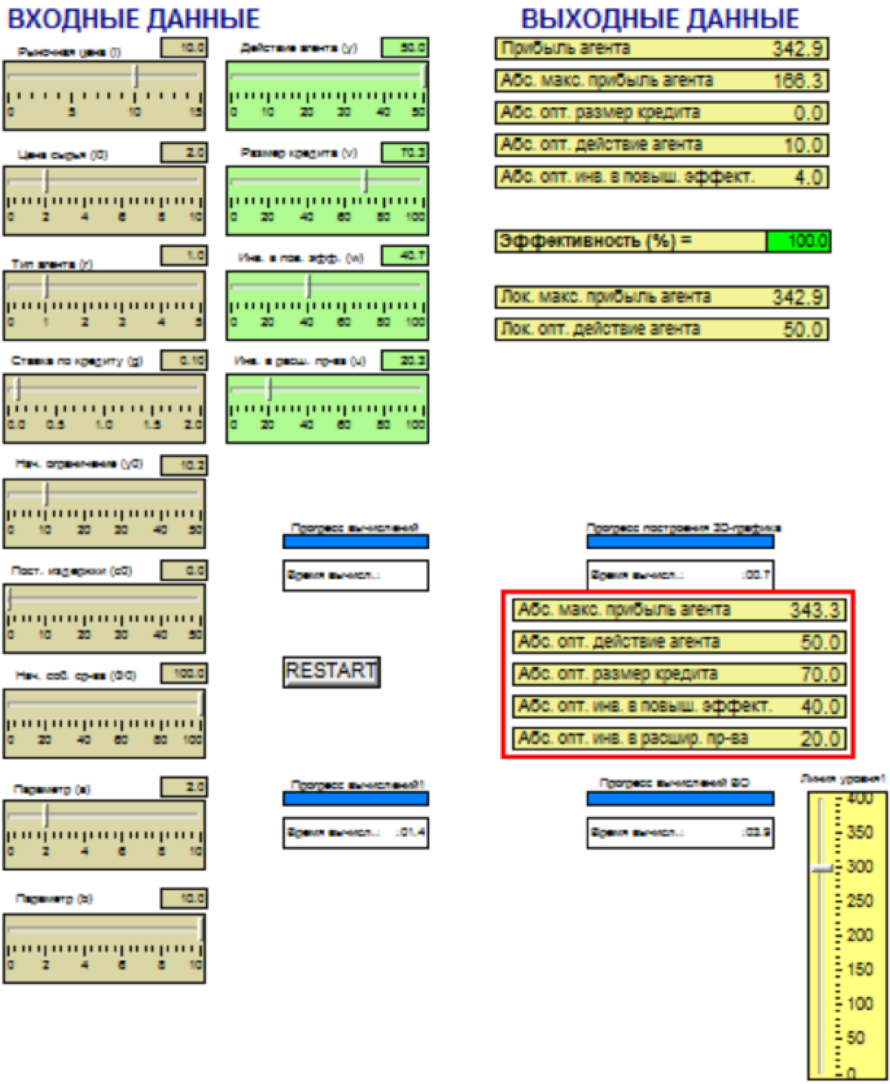


Рис. 5. «Панель управления» для М13

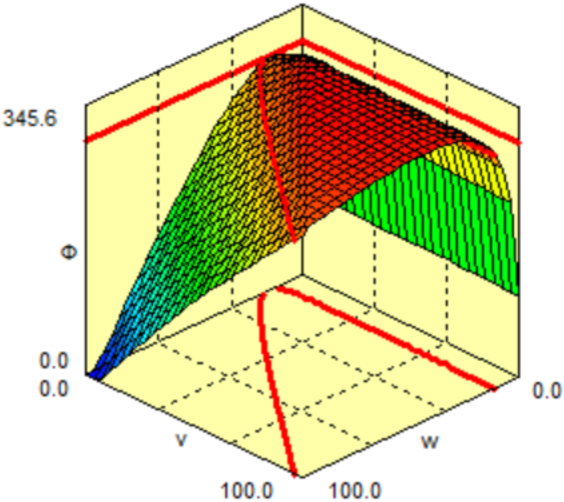


Рис. 6. Зависимость прибыли Ф агента от размера кредита v и размера инвестиций w в M13

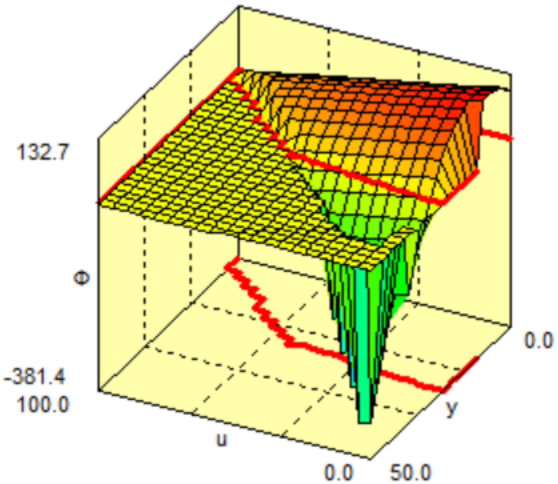


Рис. 7. Зависимость прибыли Ф агента от объема производства y и размера инвестиций u в M13

Воспользовавшись выражениями (42) и (44), определим целевую функцию i-го агента

(45) $F_i(\lambda_0, \Phi_{0i}, c_{0i}, \delta_i(\cdot), r_i(\cdot), y_{\max i}(\cdot), v_i, w_i, u_i, z_1, \ldots, z_n) =$

$$= \Phi_{0i} - c_{0i} + v_i - z_i - w_i - u_i + \left(D - \frac{\gamma}{\lambda_0}\sum_{j\in N} z_j\right) z_i/\lambda_0 -$$

$$- (1 + \delta_i(v_i))v_i - \frac{z_i^2}{2r_i(w_i)(\lambda_0)^2}.$$

Рассмотрим игру в нормальной форме между агентами, обладающими целевыми функциями (45). Обозначим через $H_i = \sum_{j\neq i} z_j$ суммарные затраты на приобретение сырья всех оппонентов i-го агента и вычислим для каждого агента его наилучший ответ на действия оппонентов:

(46) $BR_i(H_i) = (v_i(H_i), w_i(H_i), u_i(H_i), z_i(H_i)) =$

$$= \arg \max_{v\in\Re^1,\, w\geq 0, u\geq 0, z\in Z_{13}(v,w,u)} [\Phi_{0i} - c_{0i} + v_i - z_i - w_i -$$

$$- u_i + \left(D - \gamma\, \frac{\gamma}{\lambda_0}\sum_{j\in N} z_j\right) z_i/\lambda_0 - (1 + \delta_i(v_i))v_i - \frac{z_i^2}{2r_i(w_i)(\lambda_0)^2}],$$

$i \in N$.

Имея наилучшие ответы (46), можно численно искать равновесие игры агентов или строить и исследовать в рамках вычислительного эксперимента итерационные процедуры динамики стратегий, сходящиеся к этому равновесию (см. также М8).

На рис. 8 приведена «панель управления» и результаты моделирования для М14 для случая двух агентов ($D = 15$, $\gamma = 0{,}05$, $\lambda_0 = 1{,}3$, $r_1 = 1$, $r_2 = 5$, для обоих агентов $\delta = \alpha = \beta = 0$, $c_0 = 0$, $\Phi_0 = 100$, $y_0 = 50$, т.е. возможность займа и осуществления каких-либо инвестиций отсутствует).

Зависимость прибыли Ф и наилучшего ответа $BRy(Y)$ первого агента от его действия y и действия оппонента Y («нелинейность» обусловлена использованным крупным шагом сетки, который выбран в силу больших временн*ы*х затрат на вычисление наилучших ответов) приведены на рис. 9 и рис. 10 соответственно.

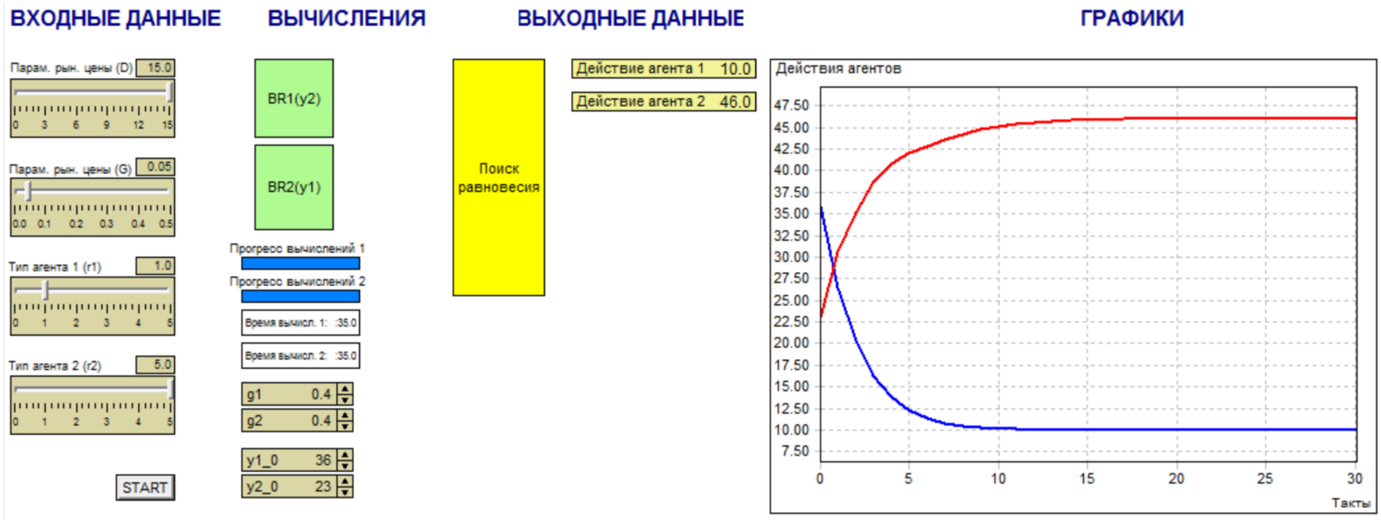


Рис. 8. «Панель управления» и результаты моделирования для М14

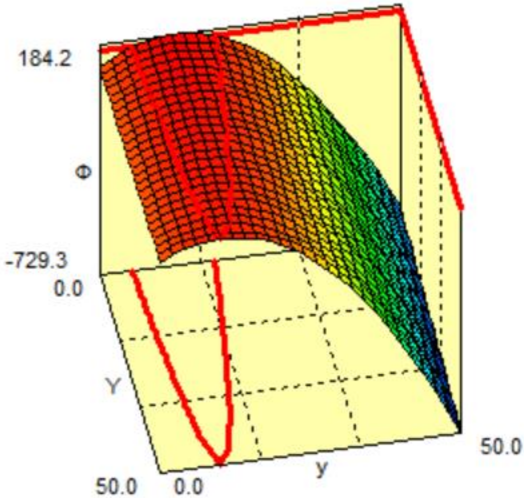
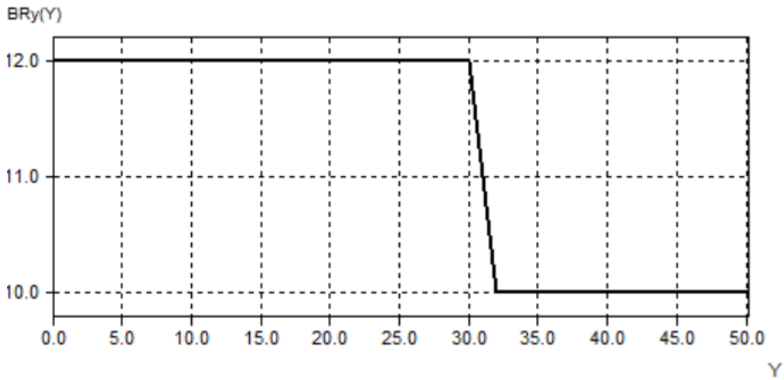


Рис. 9. Зависимость прибыли Ф от действия агента y и действия его оппонента Y в M14

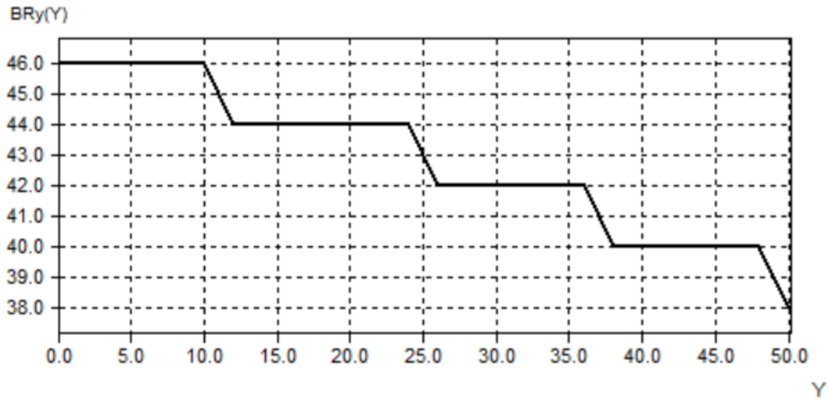
Равновесные действия агентов в рассматриваемом примере - (10; 40). Ситуация радикально меняется, если первый агент получает доступ к кредитным средствам ($\delta_1 = 0{,}5$) и получает возможность инвестировать в повышение эффективности ($\alpha_1 = 1$). Графики наилучших ответов первого агента $BR_v(Y)$ и $BR_w(Y)$ приведены на рис. 11 и рис. 12 соответственно.

В равновесии вектор действий агентов – (46; 40), $v_1^* = 0$ (собственных средств хватает и на закупку сырья и на инвестиции в повышение эффективности), $w_1^* = 40$.

Специфика M14 заключается в том, что поведение каждого из агентов описывается достаточно сложной моделью – условно можно считать, что M14 является «теоретико-игровой надстройкой» над M13 (в то время как M8 – над M1). Соответственно, в терминах работы [1] M14 использует последовательно-параллельное комплексирование – над несколькими «параллельно» функционирующими моделями M13, описывающими отдельных агентов, надстраивается модель олигополии Курно, отражающая рыночное взаимодействие агентов.



(а)



(б)

Рис. 10. Зависимость наилучшего ответа BRy(Y)
первого (а) и второго (б) агентов от действия оппонента Y
в М14

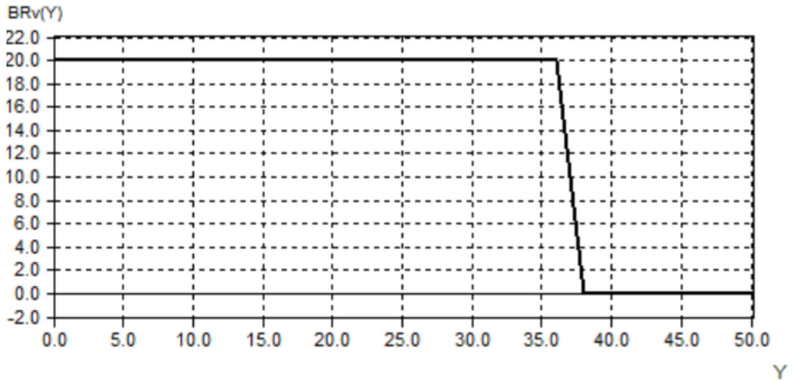


Рис. 11. Зависимость наилучшего ответа BRv(Y) первого агента от действия оппонента Y в M14

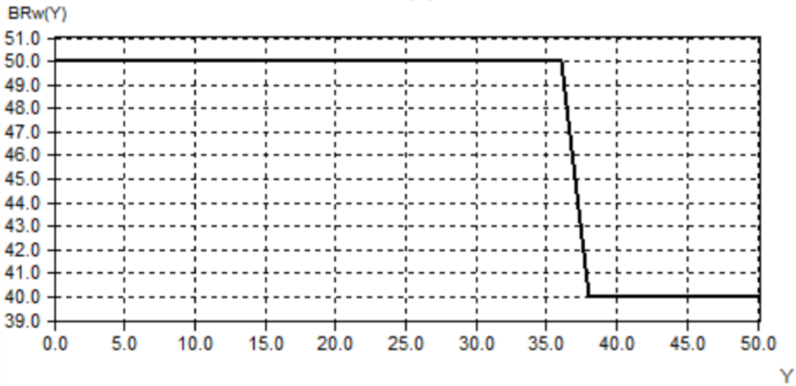


Рис. 12. Зависимость наилучшего ответа BRw(Y) первого агента от действия оппонента Y в M14

6. Анализ моделей: методические рекомендации

Приведем возможные этапы анализа M1–M14 и им подобных (в порядке возрастания трудоемкости и сложности для начинающего исследователя – например, студента, осваивающего соответствующий профильный учебный курс – моделирование организаций, математические модели в экономике, исследование операций и т.п.).

1. Проанализируйте *сравнительную статику* - зависимости прибыли агента и других выбираемых им параметров (объема производства, размера привлекаемых средств, инвестиций и т.д.), а также рыночного равновесия от значений рыночной цены λ, цены сырья λ_0, типа агента r, а также от значений параметров (α, β, γ и δ), свойств и конкретного вида функций ($c(\cdot)$, $r(\cdot)$, $\delta(\cdot)$, $y_{\max}(\cdot)$), и приведите соответствующие содержательные интерпретации.

Под «исследованием зависимости» в каждом случае понимается анализ (с построением соответствующих графиков) и интерпретация монотонности, точек экстремума и т.д. при изменении соответствующих параметров модели, осуществляемые тремя методами со сравнением (констатацией совпадения или объяснением наблюдаемых различий) результатов:

а) аналитическое исследование (если возможно получение явного вида соответствующих зависимостей);

б) имитационное моделирование: например, изменение «вручную» входных параметров в соответствующей модели РДС (или в другой – самостоятельной - программной реализации) и фиксация выходных параметров;

в) автоматизированное моделирование - дополнение соответствующей компьютерной модели функционалом автоматического перебора значений входных параметров и построением графиков значений выходных переменных.

2. Проанализируйте проблемы комплексирования и свойства (см. введение) отдельных комплексных моделей.

3. Проанализируйте проблемы программной реализации соответствующих моделей, в т.ч. точность решения оптимизационных задач в зависимости от начальных и конечных шагов алгоритмов оптимизации и т.п.

7. Заключение

Рассмотрены взаимосвязанные имитационные и оптимизационные модели производственно-экономической деятельности предприятия. Перспективными направлениями их развития является отказ от введенных предположений об однократности принятия решений, о наличии единственного производимого товара, об упрощенном представлении процесса производства в виде «производственной функции» типа выражения (1) и др. (при этом в явном виде не выделяются накладные расходы, налоговые отчисления и др.). То есть целесообразно расширение комплекса M1–M14 за счет рассмотрения:

1) номенклатуры производимых товаров с учетом их комплектности, загрузки производственного оборудования и т.д.;
2) логистических процессов, учитывающих состояние складов сырья и готовой продукции, управления запасами;
3) целенаправленной деятельности персонала и руководства предприятия, учитываемых в соответствующих механизмах организационного управления [42, 46]. При этом неизбежно рассмотрение иерархической организационной структуры;
4) большого числа взаимодействующих агентов, различающихся значениями своих параметров (что может привести к появлению качественно новых – «подлинно синергетических» - эффектов в соответствующей сложной системе);
5) нескольких последовательных взаимосвязанных периодов функционирования. В последнем случае, например, удастся рассмотреть задачи распределения прибыли на дивиденды, развитие производства и т.д., с учетом дебиторской и кредиторской задолженности (то есть более широко, чем выше, трактуемой «безубыточности»), задержек в оплате отгруженной продукции и т.д., то есть сформулировать и операционально исследовать традиционный для финансового анализа [8, 19] спектр задач.

Можно выделить несколько крупных «методологических» проблем в построении и исследовании комплексных моделей системной оптимизации организационно-технических, социально-экономических и др. сложных систем.

1. *Гетерогенность* описания моделируемых систем (например, производственное предприятие может описываться с точки зрения соответствующих материальных, финансовых, информационных и других потоков с использованием аппарата исследования операций, непрерывной и дискретной оптимизации и др.) [28, 44].

2. Необходимость комплексирования отдельных моделей и декомпозиции комплексных моделей (см. классификацию данной проблематики и краткий обзор в [1]). Здесь, в частности, возникает *задача определения «оптимальной» последовательности учета новых факторов* в комплексных моделях. Критерием эффективности при этом может быть максимально продолжительное (в смысле длины пути в сети, аналогичной приведенной на рис. 3) сохранение таких позитивных свойств моделей как возможность получения аналитических зависимостей, выпуклость оптимизационных задач и т.п., а методом решения – рассмотрение сети всевозможных последовательностей.

3. Высокая арифметическая сложность (в терминах [26]) численного решения задач системной оптимизации. Действительно, возможная невыпуклость задач оптимизации, или необходимость использования оракулов только нулевого порядка (в силу иерархической структуры моделей и неустойчивости выходов подсистем по входным параметрам, характерной для теоретико-игровых и экономико-математических моделей [25, 45]) зачастую вынуждают исследователя ограничиться использованием лишь «переборных» методов. Например, в М14, реализованной в РДС, расчет на «рядовом» компьютере наилучших ответов по четырем переменным для каждого из двух агентов, даже с использованием достаточно крупной вычислительной сетки, занимает несколько секунд. Увеличение числа переменных (с целью учета новых содержательных эффектов и свойств) и/или числа агентов, и/или уменьшение шага сетки и т.д. приводят к быстрому росту времени вычислений. Возможности распараллеливания присутствуют (например, в М14 вычисление наилучших ответов каждого из агентов при фиксированных значениях входных параметров может производиться независимо), но ограничены (использование теоретико-игровых моделей

подразумевает достаточно сильную «взаимосвязь» между процедурами принятия решений агентами).

Литература

1. БУРКОВ В.Н., КОРГИН Н.А., НОВИКОВ Д.А. *Проблемы комплексирования и декомпозиции механизмов управления организационно-техническими системами* // Проблемы управления. – 2016. – №5. – С. 14–23.
2. БУРКОВ В.Н., ГОРГИДЗЕ И.А., ДЖАВАХАДЗЕ Г.С., ПРАНГИШВИЛИ И.В., ХУРОДЗЕ Р.А. *Системные закономерности и системная оптимизация*. – М.: Синтег, 2004. - 208 с.
3. БУСЛЕНКО Н.П. *Моделирование сложных стем*. - М.: Наука, 1968. - 356 с.
4. ГЕРАСЬКИН М.И., ГРИШАНОВ Г.М. *Экономико-математическое моделирование современных промышленных комплексов*.– Самара: СамНЦ РАН, 2016. - 194 с.
5. ГЛУШКОВ В.М. *О системной оптимизации* // Кибернетика. – 1980. – №5. – С. 89–90.
6. ГЛУШКОВ В.М., МИХАЛЕВИЧ В.С., ВОЛКОВИЧ В.Л., ДИДЕНКО Г.А. *Системная оптимизация в многокритериальных задачах линейного программирования при интервальном задании предпочтений* // Кибернетика. – 1983. – №3. – С. 1–8.
7. ГРАНБЕРГ А.Н., СУСПИЦЫН С.А. *Введение в системное моделирование народного хозяйства.* - Новосибирск: Наука, 1988. - 304 с.
8. ДРАНКО О.И. *Финансовый менеджмент. Технологии управления финансами предприятия*. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. - 351 с.
9. ДУДОВ С.И., ВЫГОДЧИКОВА И.Ю., КУПЦОВ С.Н. *Математические методы в экономике.* – Саратов: СГУ, 2014. – 91 с.
10. ЗАМКОВ О.О., ТОЛСТОПЯТЕНКО А.В., ЧЕРЕМНЫХ Ю.Н. *Математические методы в экономике*. - М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2009. – 384 с.

11. ЗАСКАНОВ В.Г., ИВАНОВ Д.Ю. *Внутрифирменные модели организации производства на предприятиях машиностроения: теория и практика*. – Самара: Изд-во СамНЦ РАН, 2016. - 218 с.
12. ИВАНИЛОВ Ю.П., ЛОТОВ А.В. *Математические модели в экономике*. - М.: Наука, 1979. – 304 с.
13. ИНТРИЛЛИГАТОР М. *Математические методы оптимизации и экономическая теория*. - М.: Прогресс, 1975. – 606 с.
14. ИРИКОВ В.А., ЗОЛОТУХИН И.Н., ЛИСИН Д.С. *Модель портового кластера и алгоритм системной координации его развития* // Спецтехника и связь. – 2012. – №5. – С. 72–76.
15. ИРИКОВ В.А., ТРЕНЁВ В.Н. *Распределённые системы принятия решений. Теория и приложения.* - М.: Физматлит, 1999. – 288 с.
16. ИРИКОВ В.А., ТРЕНЁВ В.Н., АГЕЕВ И.А., ПОЗДНЯКОВ М.Я. *Анализ возможностей на основе параметрической модели системной оптимизации.* – Долгопрудный: МФТИ, 1990. – 68 с.
17. КЛЕЙНЕР Г.Б. *Производственные функции: теория, методы, применение*. - М.: Финансы и статистика, 1986. – 238 с.
18. КОБРИНСКИЙ Н.Е., МАЙМИНАС Е.З., СМИРНОВ А.Д. *Экономическая кибернетика*. - М.: Экономика, 1982. - 408 с.
19. КОВАЛЕВ В.В. *Финансовый анализ. Методы и процедуры*. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 560 с.
20. МАККОННЕЛЛ К., БРЮ С. *Экономикс*. - М.: ИНФРА-М, 1999. – 974 с.
21. МАЛУГИН В.А., ФАДЕЕВА Л.Н. *Количественный анализ в экономике и менеджменте: учебник*. – М.: ИНФРА-М, 2014. – 615 с.
22. МЕСАРОВИЧ М., МАКО Д., ТАКАХАРА И. *Теория иерархических многоуровневых систем*. - М.: Мир, 1973. - 344 с.
23. МИЛГРОМ П., РОБЕРТС Д. *Экономика, организация и менеджмент*. – СПб.: Экономическая школа, 2001. Т.1. – 468 с. Т.2. - 422 с.
24. МИХАЛЕВИЧ В.С., ВОЛКОВИЧ В.Л. *Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем*. – М.: Наука, 1982. – 286 с.

25. МОЛОДЦОВ Д.А. *Устойчивость принципов оптимальности*. - М.: Наука, 1987. – 280 с.
26. НЕСТЕРОВ Ю.Е. *Введение в выпуклую оптимизацию*. – М.: МЦНМО, 2010. – 280 с.
27. НОВИКОВ А.М., НОВИКОВ Д.А. *Методология научного исследования*. – М.: Либроком, 2010. – 280 с.
28. НОВИКОВ Д.А. *Кибернетика: навигатор*. – М.: Ленанд, 2016. – 160 с.
29. ОПОЙЦЕВ В.И. *Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения*. - М: Наука, 1977. - 248 с.
30. ПЕРВОЗВАНСКИЙ А.А., ГАЙЦГОРИ В.Г. *Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация*. - М.: Физматлит, 1979. - 344 с.
31. ПИНДАЙК Р., РУБИНФЕЛЬД Д. *Микроэкономика*. - М.: Дело, 2001. – 808 с.
32. ПОЛШКОВ Ю.Н. *Экономико-математическое моделирование в курсовых и дипломных работах*. – Донецк: ДонНУ, 2016. – 390 с.
33. ПОПОВ А.М., СОТНИКОВ В.Н. *Экономико-математические методы и модели*. – М.: Юрайт, 2013. – 479 с.
34. ПОСПЕЛОВ Г.С., ИРИКОВ В.А. *Программно-целевое планирование и управление*. - М.: Советское радио, 1976. – 404 с.
35. ПОСПЕЛОВ Г.С., ИРИКОВ В.А., КУРИЛОВ А.Е. *Процедуры и алгоритмы формирования комплексных грамм*. - М.: Наука, 1985. – 424 с.
36. РОЩИН А.А. *Расчет Динамических Систем (РДС). Руководство для программистов. Приложение: описание функций и структур. Приложение к руководству для программистов*. - М.: ИПУ РАН, 2012. – 719 с.
37. ЯНКОВОЙ А.Г. *Математико-статистические методы и модели в управлении предприятием: Учебное пособие*. – Одесса: ОНЭУ, 2014. – 250 с.
38. BRAY M., RAZIN R., SARYCHEV A. *Mathematical Economics*. – London: University of London, 2015. – 442 p.
39. FUENTE A. *Mathematical Methods and Models for Economists*. – Cambridge: Cambridge University Press, 2000. – 848 p.

40. HILLIER F., LIEBERMAN G. *Introduction to Operations Research* (8th ed.). – Boston: McGraw-Hill, 2005. – 1061 p.
41. MAS-COLLEL A., WHINSTON M.D., GREEN J.R. *Microeconomic Theory*. - N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995. - 981 p.
42. *Mechanism Design and Management: Mathematical Methods for Smart Organizations* / Ed. by Prof. D. Novikov. – New York: Nova Science Publishers, 2013. – 163 p.
43. MORGAN M. *The World in the Model: How Economists Work and Think*. – Cambridge: Cambridge University Press, 2012. – 422 p.
44. NOVIKOV D. *Hierarchical Models in Modern Control Theory* // Challenges in Automation, Robotics and Measurement Techniques. – Heidelberg: Springer, 2016. – P. 3–12.
45. NOVIKOV D.A. *Management of Active Systems: Stability or Efficiency* // Systems Science. – 2001. – Vol. 26, No. 2. – P. 85–93.
46. NOVIKOV D. *Theory of Control in Organizations*. – New York: Nova Science Publishers, 2013. – 341 p.
47. SAYAMA S. *Introduction to the Modeling and Analysis of Complex Systems*. – N.Y.: State University of New York, 2015. – 478 p.
48. TAHA H. *Operations Research: An Introduction* (9th ed.). – NY: Prentice Hall, 2011. – 813 p.
49. WAGNER H. *Principles of Operations Research*. 2nd ed. – NJ Upper Saddle River: Prentice Hall, 1975. – 1039 p.

INTEGRATED MODELS OF SYSTEM OPTIMIZATION OF THE ENTERPRISE ACTIVITY

Dmitry Novikov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Corresponding member of RAS (novikov@ipu.ru).

Abstract: *A set of models with increasing complexity is considered for enterprise multicriteria decision-making. Agents make rational decisions on the volume of production, attraction / placement of borrowed funds, investments in improving the efficiency and in the increasing of productive capacities. These models illustrate the approach of integrated modeling and system optimization to economic applications. The results of simulations are given, prospects for the development and application of the system optimization techniques to the modeling of production and economic activities of enterprises are discussed.*

Keywords: integrated models, system optimization, simulation, enterprise production and economic activity.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В.Н. Бурковым.

Поступила в редакцию 12.07.2016.
Опубликована 31.01.2017.