С. П. АНДРЕЕВ
В. Н. БУРКОВ
В. В. КОНДРАТЬЕВ
А. М. ЧЕРКАШИН

МЕХАНИЗМЫ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМ

СИНТЕЗ ПРОЦЕДУР ОЦЕНКИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ И СТИМУЛИРОВАНИЯ

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ
ПРОБЛЕМ
УПРАВЛЕНИЯ

С. П. АНДРЕЕВ
В. Н. БУРКОВ
В. В. КОНДРАТЬЕВ
А. М. ЧЕРКАШИН

МЕХАНИЗМЫ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМ

СИНТЕЗ ПРОЦЕДУР ОЦЕНКИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ И СТИМУЛИРОВАНИЯ

ПРЕПРИНТ

МОСКВА 1984

УДК 65.012

МЕХАНИЗМЫ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМ (Синтез процедур оценки деятельности и стимулирования). -М., 1984 (Препринт /Институт проблем управления).

Исследуется базовая модель двухуровневой организационной системы. Сформулирован набор типовых целей для активных элементов нижнего уровня. В соответствии с реализацией заданных целей проводится синтез отдельных составляющих механизма функционирования организационной системы - процедур оценки деятельности и стимулирования. Рассматриваются независимые периоды функционирования и ситуация, когда механизм функционирования содержит процедуры адаптивной корректировки нормативной базы планирования.

Главы I-3 написаны авторами совместно, глава 4 - С.П.Андреевым

Рецензент к.т.н. А.М.Малишевский

Утверждено к печати Редакционным советом Института

О г л а в л е н и е

Настоящий препринт является продолжением работы [I]. В ней были представлены формально-математические методы обследования организаций как систем с активными целенаправленными структурными элементами, дано описание структуры двухуровневой организационной системы и ее механизма функционирования, построена общая схема процесса функционирования системы.

Предметом следующего этапа исследований является анализ и синтез отдельных составляющих механизма функционирования. В данном препринте рассматривается синтез процедур оценки деятельности и стимулирования в соответствии с реализацией стоящих перед организацией целей. В этой связи формулируется набор типовых целей для активных элементов нижнего уровня, а именно рассматриваются следующие цели: точное выполнение плана по всем планируемым показателям (совпадение состояния с планом), выполнение и перевыполнение плана, реализация максимальных состояний в векторно-покомпонентном смысле (по Парето), максимально достижимое перевыполнение плана, минимизация отклонения состояния от плана. Под каждую конкретную цель определяются соответствующие правила формирования значений показателей оценки деятельности [I], на основании которых между активными элементами распределяется ограниченный фонд поощрения в зависимости от результатов их деятельности. Для соответствующих функций предложены удобные достаточные условия, обеспечивающие заинтересованность элементов в выполнении установленных требований. Отдельно рассматривается синтез процедур оценки деятельности в случае использования центром адаптивных процедур корректировки нормативной базы планирования. Предложенные типовые шкалы стимулирования нашли применение в комплексных системах управления высокой эффективностью и качеством работ в отраслевых НИИ и КБ.

I. ФОРМУЛИРОВКА ЦЕЛЕЙ ДЛЯ СТРУКТУРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОРГАНИЗАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

В результате декомпозиции целей организационной системы и проецирования их на структуру системы каждому структурному элементу декретируется набор индивидуальных целей [I] . Достижение организацией в процессе функционирования поставленных целей связано с реализацией отдельными элементами соответствующих частных целей.

Один из возможных вариантов формулировки целей для активных структурных элементов организационной системы заключается в следующем. Из множества допустимых планов $\mathcal{D}_i$ i-му элементу назначаются плановые значения $x_i=(x_{i1},\dots,x_{im})$, $x_i\in\mathcal{D}_i$ соответствующих базовых показателей состояния $y_i=(y_{i1},\dots,y_{im})$ и устанавливаются у с л о в и я с о г л а с о в а н и я, задающие м н о ж е с т в о с о г л а с о в а н н ы х с о с т о я н и й $L_i(\cdot)$. Множество $L_i(\cdot)$ включает желательные с позиции целей системы значения вектора состояния i-го элемента при заданном плане x_i и в общем случае зависит от плана и множества возможных состояний элемента $Y_i(\tau_i)$ ж). Цель x_i, $L_i(x_i,\tau_i)$ считается достигнутой (реализованной), если элемент выбрал одно из согласованных состояний $y_i\in L_i(x_i,\tau_i)$. Полагаем, что отдельный период функционирования системы [I,2] содержит один плановый период, т.е. для каждого периода функционирования устанавливается конкретное положение цели. В силу универсальности определения плана в организационной системе [I] принятый здесь способ описания целей обладает достаточной степенью общности.

Различать цели будем по виду условий согласования: эквивалентными считаются цели, для которых множества согла-

---

ж) Множества $Y_i(\tau_i)$ предполагаются связными и компактными при всех допустимых значениях параметра $\tau_i\in\Omega_i$.

сованных состояний совпадают при одних и тех же значениях x_i и τ_i. Разным значениям плана при фиксированной зависимости $L_i(x_i,\tau_i)$ отвечают разные положения одной и той же цели. Декретированную группе из n элементов цель, которой соответствуют множества согласованных состояний $L_i^\ell(x_i,\tau_i)$, $i=\overline{1,n}$, сокращенно обозначим L^ℓ. Будем говорить, что цель L^ℓ реализована на множестве планов $\mathcal{D}'=\prod_{i=1}^{n}\mathcal{D}_i'$, если при любом плане $x\in\mathcal{D}'$ элементы выбирают одно из согласованных состояний $y_i\in L_i^\ell(x_i,\tau_i)$, $i=\overline{1,n}$. На этапе выбора состояния элементы предполагаются благожелательными: если множество рациональных состояний $R_i(x_i,\tau_i)$ включает хотя бы одно согласованное, то элемент заведомо реализует согласованное состояние. Тогда условие реализации цели L^ℓ на множестве планов $\mathcal{D}'$ есть

$$\forall x_i\in\mathcal{D}_i' : L_i^\ell(x_i,\tau_i)\cap R_i(x_i,\tau_i)\neq\varnothing\ ,\quad i=\overline{1,n}\ . \qquad (1)$$

Большинство используемых на практике целей можно задать при помощи множеств согласованных состояний следующей структуры

$$L_i^1(x_i)=\{x_i\}\ ;$$

$$L_i^2(x_i,\tau_i)=\{y_i\mid y_{ij}\geq x_{ij},\ j=\overline{1,m},\ y_i\in Y_i(\tau_i)\}\ ;$$

$$L_i^3(\tau_i)=\{y_i\mid y_i\in Y_i(\tau_i): \forall z_i\neq y_i,\ z_i\in Y_i(\tau_i)\ \exists j: z_{ij}<y_{ij}\}\ ;$$

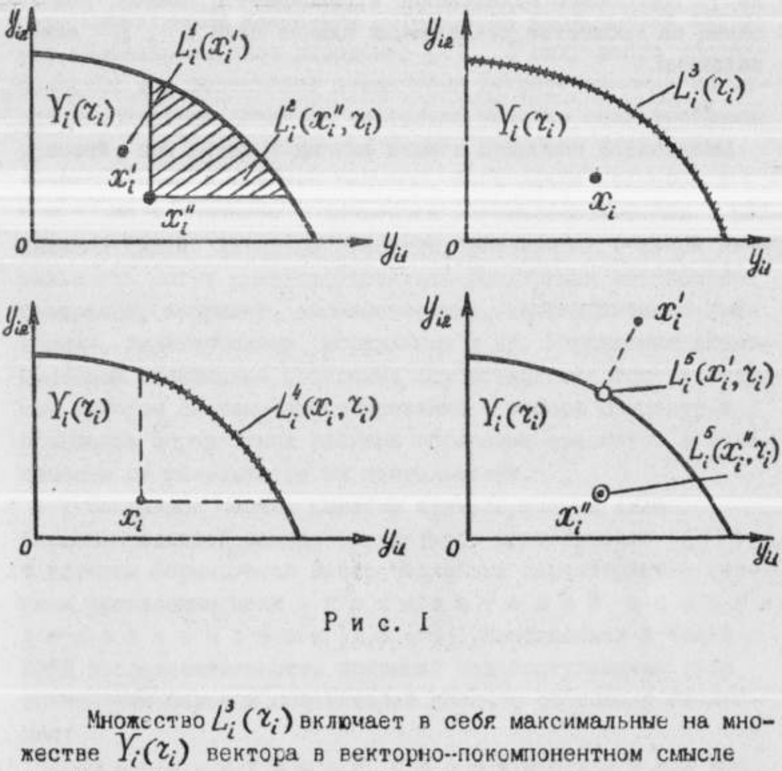
$$L_i^4(x_i,\tau_i)=L_i^2(x_i,\tau_i)\cap L_i^3(\tau_i)\ ;$$

$$L_i^5(x_i,\tau_i)=\{y_i\mid \|y_i-x_i\|=\min_{z_i\in Y_i(\tau_i)}\|z_i-x_i\|,\ y_i\in Y_i(\tau_i)\}\ ,$$

где

$$\|z_i-x_i\|=\sqrt{\sum_{j=1}^{m}(z_{ij}-x_{ij})^2}$$ – евклидова норма.

В двумерном пространстве перечисленные множества иллюстрируются на рис.I. В случае цели L^1 требуется совпадение состояния с планом по всем показателям. В случае цели L^2 перед элементами ставится задача выполнения и перевыполнения плана в пределах множества возможных состояний.



Р и с. I

Множество $L_i^3(\tau_i)$ включает в себя максимальные на множестве $Y_i(\tau_i)$ вектора в векторно-покомпонентном смысле (по Парето). Увеличение какой-либо из компонент состояния $y_i \in L_i^3(\tau_i)$ в пределах множества $Y_i(\tau_i)$ может быть осуществлено только за счет уменьшения хотя бы одной из остальных компонент. Для цели L^4 множеством согласованных при плане x_i состояний i-го элемента является подмножество максимальных состояний, принадлежащее неотрицательному ортанту в системе координат с началом в точке $y_i = x_i$. Понятно, что множества $L_i^4(x_i, \tau_i)$ и $L_i^3(\tau_i)$ принадлежат границе $\Gamma_i(z_i)$ компактного множества $Y_i(z_i)$. Наконец, множество $L_i^5(x_i, z_i)$ задает максимально близкие к плану состояния в смысле евклидовой нормы (нетрудно показать, что для выпуклого множества $Y_i(z_i)$ такое состояние единственно). При реализуемом плане $x_i \in Y_i(z_i)$ согласованное для цели L^5 состояние единственно и совпадает с планом. Тем самым на множестве реализуемых планов цели L^1, L^5 эквивалентны.

2. ОЦЕНКА ДЕЯТЕЛЬНОСТИ И СТИМУЛИРОВАНИЕ

Структурным элементам организации свойственно активное целенаправленное поведение [2] . В силу этого обстоятельства для достижения элементами декретированных им целей необходимым является не только наличие всех требуемых условий, при которых данные цели в принципе реализуемы (материальные и людские ресурсы, финансовые средства и т.п.), но и создание у элементов заинтересованности в реализации целей. Активные элементы организации в своей деятельности могут руководствоваться различными мотивациями поведения, например, экономическими, законодательно-правовыми, политическими, моральными и др. Управление экономической мотивацией поведения осуществляется соответствующим выбором системы стимулирования - набора процедур и принципов определения размера поощрения элементов в зависимости от результатов их деятельности.

Составной частью системы стимулирования является блок комплексной оценки результатов деятельности (КОРД), в котором формируется набор численных характеристик степени реализации цели - показателей оценки деятельности [1,3 - 5] .Выполняемая в блоке КОРД последовательность операций над поступающими туда значениями базовых показателей плана и состояния следующая:

нормирующее преобразование шкалы [5]

$$\delta_{ij} = \mu_{ij}(y_{ij}, x_{ij}) \, , \; j = \overline{1,m} \, , \; i = \overline{1,n} \, ,$$

где показатель плана x_{ij} выполняет роль нормативного уровня для соответствующего показателя состояния;

преобразование шкалы

$$v_{ij}(x_{ij}, \delta_{ij}) = v_{ij}^{*}(x_{ij}, y_{ij}) = K_{ij}^{\wedge} \, , \; j = \overline{1,m} \, , \; i = \overline{1,n} \, , \qquad (2)$$

в результате которого согласно числу базовых показателей формируются **локальные показатели** оценки деятельности;

формирование для каждого активного элемента **комплексного показателя** оценки деятельности

$$K_i = v_i^{**}(K_{i1}^{\wedge}, \ldots, K_{im}^{\wedge}), \ i = \overline{1,n} \ ;$$

нормирование комплексных показателей оценки деятельности

$$K_i' = \frac{K_i}{\sum_{j=1}^{n} K_j}, \ i = \overline{1,n},$$

позволяющее оценивать деятельность каждого элемента в сравнении с деятельностью остальных элементов данной группы.

Показатели оценки деятельности служат количественными измерителями степени достижения целей и одновременно используются в системе стимулирования для определения величины материального поощрения активных элементов. В принципе для выполнения этих функций могут применяться несовпадающие наборы показателей и процедуры формирования их значений. Вопросы синтеза процедур построения показателей-измерителей нашли отражение в [6-9] . В настоящей работе при аддитивной функции свертки локальных показателей оценки деятельности $K_i = \sum_{j=1}^{m} K_{ij}^{\wedge}$, $i = \overline{1,n}$ рассматривается синтез функций преобразования шкалы (2), используемых в системе материального стимулирования. В качестве нормирующего преобразования шкалы выбирается абсолютное отклонение состояния от плана: $\delta_{ij} = y_{ij} - x_{ij}$, $j = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,n}$. При этом искомое преобразование шкалы представимо в виде

$$v_{ij}^{*}(x_{ij}, y_{ij}) = v_{ij}(x_{ij}, y_{ij} - x_{ij}). \quad (3)$$

Функциональная схема системы материального стимулирования для группы из n элементов представлена на рис. 2 , где используются условные обозначения типовых операций над показателями , введенные в работе [1] .

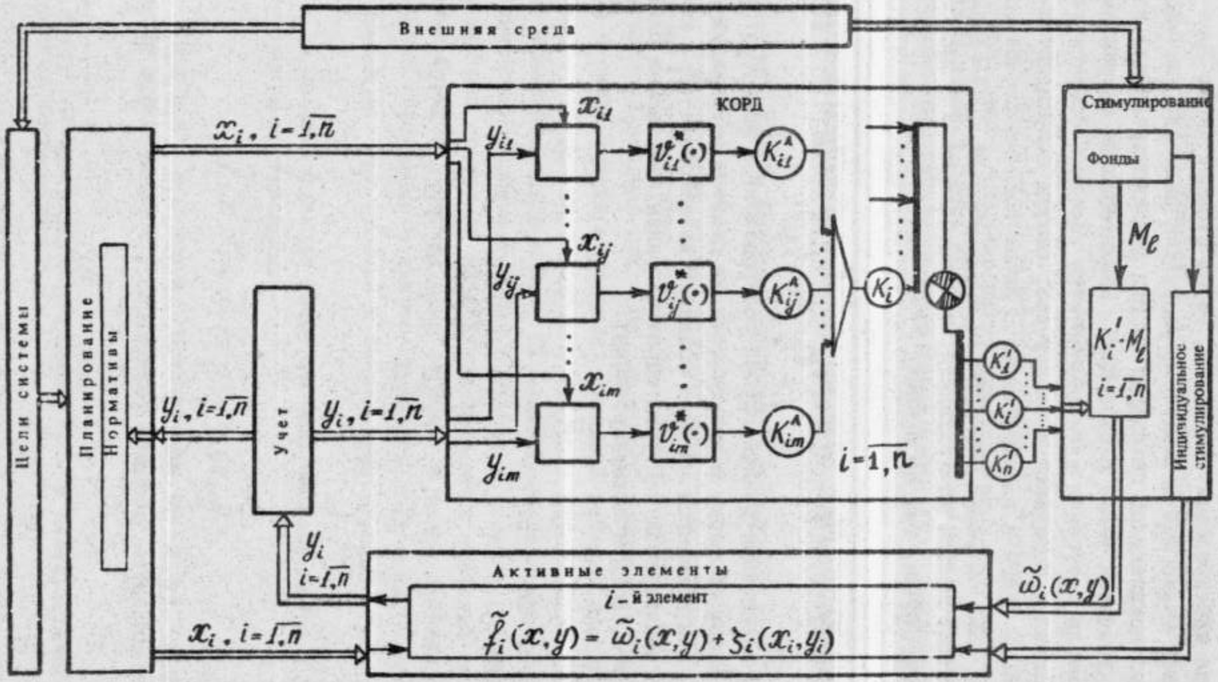

Внешняя среда
Цели системы
Планирование
Нормативы
Учет
КОРД
Стимулирование
Фонды
M_ℓ
$K_i^{\prime} \cdot M_\ell$
$i=\overline{1,n}$
Индивидуальное стимулирование
Активные элементы
i-й элемент
$\tilde{f}_i(x,y) = \tilde{\omega}_i(x,y) + \zeta_i(x_i,y_i)$
$x_i,\ i=\overline{1,n}$
$y_i,\ i=\overline{1,n}$
$\tilde{\omega}_i(x,y)$
x_{i1}
x_{ij}
x_{im}
y_{i1}
y_{ij}
y_{im}
$\vartheta^*_{i1}(\cdot)$
$\vartheta^*_{ij}(\cdot)$
$\vartheta^*_{im}(\cdot)$
$K^{\wedge}_{i1}$
$K^{\wedge}_{ij}$
$K^{\wedge}_{im}$
K_i
$i=\overline{1,n}$
$K_1^{\prime}$
$K_i^{\prime}$
$K_n^{\prime}$

Рис. 2

В блоке планирования в зависимости от стоящих перед организацией целей для элементов формируются плановые значения базовых показателей на данный период функционирования, которые вводятся также в блок КОРД. Реализованные элементами показатели состояния идентифицируются системой оперативного управления и поступают в блок учета, откуда направляются в блоки КОРД и планирования. В блоке КОРД на основе описанных выше операций формируются нормированные комплексные показатели оценки деятельности, которые вводятся в блок стимулирования, где по правилу

$$\tilde{\omega}_i(x,y) = K_i^l \cdot M_l = \frac{\sum_{j=1}^{m} v_{ij}^{*}(x_{ij}, y_{ij})}{\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} v_{kj}^{*}(x_{kj}, y_{kj})} \cdot M_l \qquad (4)$$

между элементами данной группы распределяется фонд M_l [10].

Таким образом, в зависимости от степени реализации цели i-м элементом на него подается воздействие $\tilde{\omega}_i$, которое реализуется контуром обратной связи, включающим блоки учета, КОРД и стимулирования.

3. СТИМУЛИРОВАНИЕ В УСЛОВИЯХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРИОДОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ

При фиксированном размере фонда M_ℓ ж) синтез системы материального стимулирования заключается в соответствующей настройке блока КОРД. В данном случае это сводится к построению функций преобразования шкалы (3), которые при заданной типовой цели L^ℓ обеспечивают выполнение условия (I). Для решения этой задачи необходимо построить модель поведения активного элемента на этапе выбора состояния.

3.I. Модель поведения активного элемента

В формальной модели каждому активному элементу ставится в соответствие некоторая целевая функция $\tilde{f}_i(x,y)$, отражающая правило подсчета "выигрыша" элемента в отдельном периоде функционирования. Активный элемент принимает решение, исходя из стремления получить определенное значение своей целевой функции. Независимость периодов функционирования понимается как отсутствие влияния выбираемых элементами состояний на область возможных значений их целевых функций в последующие периоды. В этих условиях естественно стремление элементов выбирать состояния, максимизирующие целевые функции в рамках существующих ограничений.

В целевой функции элемента выделим изменяемую и фиксированную составляющие:

$$\tilde{f}_i(x,y) = \tilde{\omega}_i(x,y) + \xi_i(x_i,y_i).$$

И з м е н я е м а я составляющая $\tilde{\omega}_i(x,y)$, задаваемая выражением (4), определяет величину материального

ж) Некоторые принципы образования фондов материального поощрения рассмотрены в [I,II].

поощрения, получаемого элементом в соответствии с рассматриваемой системой стимулирования (описание экономической мотивации поведения элемента), и может корректироваться соответствующей настройкой блока КОРД. Функция $\tilde{\omega}_i(x,y)$ содержит неизвестные i-му элементу значения показателей состояния остальных элементов группы. Это приводит элемент к необходимости предварительно устранять имеющуюся неопределенность. При достаточно большом числе элементов может оказаться, что действия одного элемента слабо влияют на удельную величину отчислений $M_\ell / \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} v^*_{kj}(x_{kj}, y_{kj})$. В этих условиях можно считать, что при определении рациональных состояний элемент не учитывает своего влияния на эту величину и после сделанных предположений относительно выборов других элементов заменяет ее некоторым прогнозируемым значением $M_\ell / \beta_i(\cdot)$. Точка в записи $\beta_i(\cdot)$ означает зависимость данной величины от диапазонов возможных значений функций преобразования шкалы. Целесообразно считать, что с увеличением значений верхних границ функций преобразования шкалы значение $\beta_i(\cdot)$ возрастает для всех элементов.

Таким образом, определение рациональных состояний в каждом независимом периоде элемент осуществляет по схеме

$$\tilde{f}_i(x,y) \Rightarrow f_i(x_i,y_i) = \frac{M_\ell}{\beta_i(\cdot)} \sum_{j=1}^{m} v^*_{ij}(x_{ij}, y_{ij}) + \zeta_i(x_i, y_i) \xrightarrow[y_i \in Y_i(r_i)]{} max \quad (5)$$

Решения задачи (5) образуют множество рациональных состояний $R_i(x_i, r_i)$.

Для реализации цели нужно так подобрать функции преобразования шкалы (3), чтобы при одном и том же плане по крайней мере одно из рациональных состояний являлось одновременно согласованным состоянием. Построение множества рациональных состояний требует наличия информации о фиксированной составляющей целевой функции элемента $\zeta_i(x_i, y_i)$ и о множестве возможных состояний $Y_i(r_i)$.

Фиксированная составляющая $\zeta_i(x_i, y_i)$ описывает в условных единицах измерения различные мотивации поведения элемента, в том числе мотивации, обусловленные уже заданными и не подлежащими коррекции системами стимулирования. Точное восстановление зависимости $\zeta_i(x_i, y_i)$ может оказаться затруднительным из-за включения в нее описаний неэкономических мотиваций поведения, например, функций "трудозатрат", определяющих величину затраченных элементом усилий на реализацию тех или иных состояний. Разработка методологии и процедур описания подобных субъективных характеристик элементов на практике сопряжена с известными сложностями и представляет собой самостоятельную для исследования проблему. Причем, точное, адекватное действительности, описание неэкономических мотиваций вообще вряд ли возможно. Более реальной представляется возможность (предполагая функции $\zeta_i(x_i, y_i)$ достаточно гладкими) определять некоторые их характеристики, например:

предельное приращение

$$\Delta_i(a_i, b_i) \geq \max_{x_i \in \mathcal{D}_i(a_i)} \left(\max_{y_i \in Y_i(b_i)} \zeta_i(x_i, y_i) - \zeta_i(x_i, x_i) \right), \tag{6}$$

предельную скорость убывания

$$u_i'(a_i, b_i) \geq - \min_{j=\overline{1,m}} \min_{\substack{y_i \in Y_i(b_i) \\ x_i \in \mathcal{D}_i(a_i)}} \frac{\partial \zeta_i(x_i, y_i)}{\partial y_{ij}}, \tag{7}$$

предельную скорость возрастания

$$u_i''(a_i, b_i) \geq \max_{j=\overline{1,m}} \max_{\substack{y_i \in Y_i(b_i) \\ x_i \in \mathcal{D}_i(a_i)}} \frac{\partial \zeta_i(x_i, y_i)}{\partial y_{ij}}. \tag{8}$$

Для этого могут использоваться экспертные оценки, деловые игры, имитационное моделирование.

В дальнейшем рассматривается случай неполной информированности: известны зависимости $\Delta_i(a_i, b_i)$, $u_i'(a_i, b_i)$, $u_i''(a_i, b_i)$, $Y_i(a_i)$ и значения вектора параметров $\tilde{\tau}_i$, $\tilde{\tilde{\tau}}_i$ такие, что $Y_i(\tilde{\tau}_i) \subset Y_i(\tau_i) \subset Y_i(\tilde{\tilde{\tau}}_i)$, а действительное значение τ_i неизвестно ($\tau_i \in \Omega_i \subset E^p$). Предполагается, что параметрическое представление множества возможных состояний обладает свойством $\forall a_i > b_i \ (a_{ij} \geq b_{ij},\ j=\overline{1,p},\ a_i \neq b_i)$:

$$Y_i(a_i) \supset Y_i(b_i), \quad Y_i(a_i) \neq Y_i(b_i). \tag{9}$$

Отметим, что принятое здесь допущение о независимости периодов функционирования эквивалентно в смысле тождественности модели поведения элемента предположению об отсутствии у элемента дальновидности, когда им не учитывается возможное влияние выбираемых состояний на "выигрыши" в последующих периодах.

В последующих параграфах настоящей главы рассматривается синтез функций преобразования шкалы в соответствии с реализацией целей $L^1, \dots, L^5$.

3.2. Реализация цели точного выполнения плана[ж)]

Требовать строгого выполнения плана имеет смысл только для реализуемых планов $x_i \in Y_i(r_i),\ i=\overline{1,n}$,так как план $x_i \notin Y_i(r_i)$ заведомо не может быть выполнен вне зависимости от величины "штрафов" за невыполнение. В случае неполной информированности центра множеством гарантированно реализуемых планов является $\mathcal{D}(\tilde{r}) = \prod\limits_{i=1}^{n} (\mathcal{D}_i \cap Y_i(\tilde{r}_i))$, так как $Y_i(\tilde{r}_i) \subset Y_i(r_i)$.

Рассмотрим реализацию цели L^1 на множестве планов $\mathcal{D}(\tilde{r})$.В условиях независимых периодов функционирования активный элемент заинтересован в выполнении любого плана $x_i \in \mathcal{D}_i(\tilde{r}_i)$, если

$$\forall x_i \in \mathcal{D}_i(\tilde{r}_i), y_i \in Y_i(\tilde{\tilde{r}}_i): f_i(x_i, x_i) \geq f_i(x_i, y_i). \tag{10}$$

Справедливость условия (10) достигается соответствующим выбором функций преобразования шкалы в зависимости от имеющейся информации о фиксированных составляющих целевых функций элементов и о множествах возможных состояний. В следующем утверждении приводятся удобные достаточные для реализации цели L^1 условия на функции преобразования

ж) Здесь используются результаты работы [12] .

шкалы. Функции $v_{ij}^*(x_{ij},y_{ij})$ в неравенствах (I2) предполагаются непрерывными на отрезке $[\underline{y}_{ij},\overline{y}_{ij}]$ и дифференцируемыми на интервалах $(\underline{y}_{ij},x_{ij})$ и $(x_{ij},\overline{y}_{ij})$, где отрезок $[\underline{y}_{ij},\overline{y}_{ij}]$ – проекция связного компактного множества $Y_i(\tilde{\tau}_i)$ на координатную ось y_{ij}.

Утверждение I. Цель L^1 реализована на множестве $\mathcal{D}(\tilde{\tau})$, если для всех неравных $x_i\in\mathcal{D}_i(\tilde{\tau}_i)$, $y_i\in Y_i(\tilde{\tilde{\tau}}_i)$, $i=\overline{1,n}$ справедливо условие

$$\frac{M_1}{\beta_i(\cdot)}\left(v_{ij}^*(x_{ij},x_{ij})-v_{ij}^*(x_{ij},y_{ij})\right)\geqslant\Delta_i(\tilde{\tau}_i,\tilde{\tilde{\tau}}_i),\ j=\overline{1,m} \tag{II}$$

или имеет место совместное выполнение неравенств

$$\begin{gathered}\frac{\partial v_{ij}^*(x_{ij},y_{ij})}{\partial y_{ij}}\geqslant\frac{\beta_i(\cdot)}{M_1}u_i'(\tilde{\tau}_i,\tilde{\tilde{\tau}}_i),\ \underline{y}_{ij}<y_{ij}<x_{ij},\\ \frac{\partial v_{ij}^*(x_{ij},y_{ij})}{\partial y_{ij}}\leqslant-\frac{\beta_i(\cdot)}{M_1}u_i''(\tilde{\tau}_i,\tilde{\tilde{\tau}}_i),\ x_{ij}<y_{ij}<\overline{y}_{ij},\ j=\overline{1,m}.\end{gathered} \tag{I2}$$

Доказательства всех рассматриваемых в работе утверждений и лемм приводятся в Приложении.

Содержательно условие (II) означает, что для i-го элемента отклонение от плана хотя бы по одной компоненте влечет уменьшение прогнозируемых отчислений из фонда M_1 на величину не меньшую, чем максимально возможное при этом приращение фиксированной составляющей целевой функции. Иначе говоря, при выполнении плана "выигрыш" по изменяемой составляющей должен превосходить возможный "проигрыш" по фиксированной составляющей. Это условие требует наличия у функции преобразования шкалы в точках $y_{ij}=x_{ij}$ разрывов второго рода ("скачка"), если $\xi_1(x_i,y_i)\neq const$. Неравенства (I2) устанавливают ограничения на минимальную скорость изменения непрерывной функции преобразования шкалы.

Построение систем стимулирования на практике проводится в рамках действующих нормативных положений. Используемые при этом преобразования шкал по возможности должны выбираться из классов наиболее простых функциональных зависимостей. Обозначим через $\underline{K}_{ij}^{\wedge}$ и $\overline{K}_{ij}^{\wedge}$ ограничения снизу и сверху на допустимые значения локальных показателей оценки деятельности. Цель точного выполнения плана может быть реализована простейшей разрывной функцией преобразования шкалы

$$v_{ij}^{*}(x_{ij}, y_{ij}) = v_{ij}(y_{ij} - x_{ij}) = \begin{cases} \underline{K}_{ij}^{\wedge}, \text{ если } y_{ij} \neq x_{ij}, \\ \overline{K}_{ij}^{\wedge}, \text{ если } y_{ij} = x_{ij}. \end{cases} \qquad (13)$$

Условие (II) устанавливает для такой шкалы ограничение снизу на необходимую величину фонда материального поощрения [10]:

$$M_1 \geqslant \max_{\substack{j=\overline{1,m} \\ i=\overline{1,n}}} \frac{\Delta_i(\tilde{\tau}_i, \tilde{\tilde{\tau}}_i) \cdot \beta_i(\cdot)}{\overline{K}_{ij}^{\wedge} - \underline{K}_{ij}^{\wedge}}. \qquad (14)$$

Если имеющийся размер фонда меньше этой величины, то может оказаться, что некоторые элементы не будут заинтересованы в выполнении плана по ряду базовых показателей. Как отмечалось в разделе 3.1, расширение диапазона изменения локальных показателей оценки деятельности приводит к увеличению значения прогноза $\beta_i(\cdot)$, $i=\overline{1,n}$. Поэтому увеличение максимально допустимого значения показателя, зачастую, не позволяет уменьшить оценку (14).

Преобразование шкалы (13) является оптимальным в том смысле, что при любом размере фонда обеспечивается выполнение планов из наиболее широкого множества. Это следует из приводимого ниже утверждения.

Утверждение 2. Если для функций преобразования шкалы $v_{ij}^{*1}(x_{ij}, y_{ij})$, $v_{ij}^{*2}(x_{ij}, y_{ij})$ имеет место

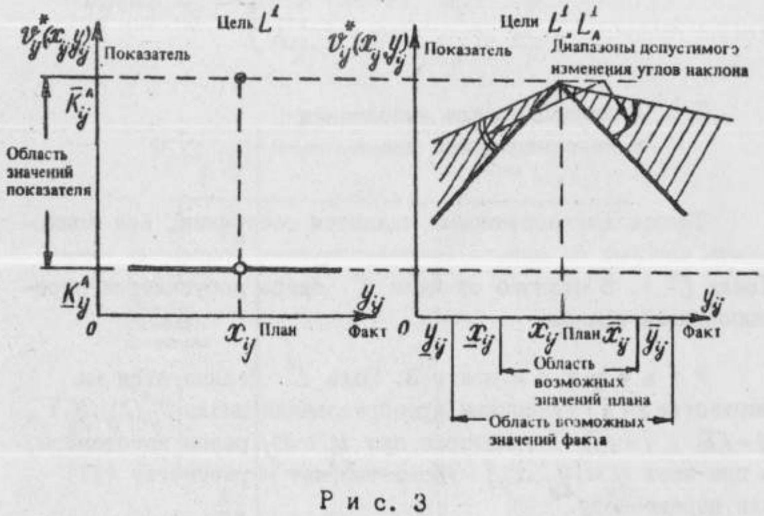
$$v_{ij}^{*1}(x_{ij}, y_{ij}) > v_{ij}^{*2}(x_{ij}, y_{ij}), \; x_{ij} \neq y_{ij},$$

$$v_{ij}^{*1}(x_{ij}, x_{ij}) = v_{ij}^{*2}(x_{ij}, x_{ij}),$$

тогда множество реализуемых планов P_i^2, в выполнении которых заинтересован элемент при функции $v_{ij}^{*\ell}(x_{ij}, y_{ij})$ включает соответствующее множество P_i^{ℓ} .

Для построения преобразований шкалы в классе непрерывных функций используется условие (I2). Можно предложить кусочно-линейную функцию вида (см. рис.3)

$$v_{ij}^{*}(x_{ij}, y_{ij}) = v_{ij}(y_{ij} - x_{ij}) = \begin{cases} \bar{K}_{ij}^{\wedge} - \alpha_{ij}(x_{ij} - y_{ij}), \text{ если } & y_{ij} \leqslant x_{ij}, \\ \bar{K}_{ij}^{\wedge} - \gamma_{ij}(y_{ij} - x_{ij}), \text{ если } & y_{ij} > x_{ij}. \end{cases} \quad (I5)$$



Р и с. 3

Из неравенств (I2) при $u_i'(\cdot) > 0$, $u_i''(\cdot) > 0$ выводятся ограничения на коэффициенты α_{ij} и γ_{ij} :

$$\frac{\beta_i(\cdot)\, u_i'(\tilde{\tau}_i, \tilde{\tilde{\tau}}_i)}{M_1} \leqslant \alpha_{ij} \leqslant \frac{\bar{K}_{ij}^{\wedge} - \underline{K}_{ij}^{\wedge}}{\bar{x}_{ij} - \underline{y}_{ij}},$$

$$\frac{\beta_i(\cdot)\, u_i''(\tilde{\tau}_i, \tilde{\tilde{\tau}}_i)}{M_1} \leqslant \gamma_{ij} \leqslant \frac{\bar{K}_{ij}^{\wedge} - \underline{K}_{ij}^{\wedge}}{\bar{y}_{ij} - \underline{x}_{ij}}, \; j = \overline{1,m}.$$

Отрезки $[\underline{x}_{ij}, \bar{x}_{ij}]$ и $[\underline{y}_{ij}, \bar{y}_{ij}]$ являются соответственно проекциями компактных связных множеств $\mathcal{D}_i \cap Y_i(\tilde{\tau}_i)$ и $Y_i(\tilde{\tilde{\tau}}_i)$ на координатную ось y_{ij}. Из последних неравенств вытекает ограничение на размер фонда материального поощрения

$$M_1 \geqslant \max_{\substack{j=\overline{1,m} \\ i=\overline{1,n}}} \frac{\beta_i(\cdot)}{\bar{K}_{ij}^{\wedge} - \underline{K}_{ij}^{\wedge}} \max\{u_i'(\tilde{\tau}_i, \tilde{\tilde{\tau}}_i)(\bar{x}_{ij} - \underline{y}_{ij}); u_i''(\tilde{\tau}_i, \tilde{\tilde{\tau}}_i)(\bar{y}_{ij} - \underline{x}_{ij})\}.$$

3.3. Реализация цели выполнения и перевыполнения плана

Теперь согласованными являются состояния, все компоненты которых не меньше соответствующих компонент плана (цель L^2). В отличие от цели L^1 здесь допускается перевыполнение планов.

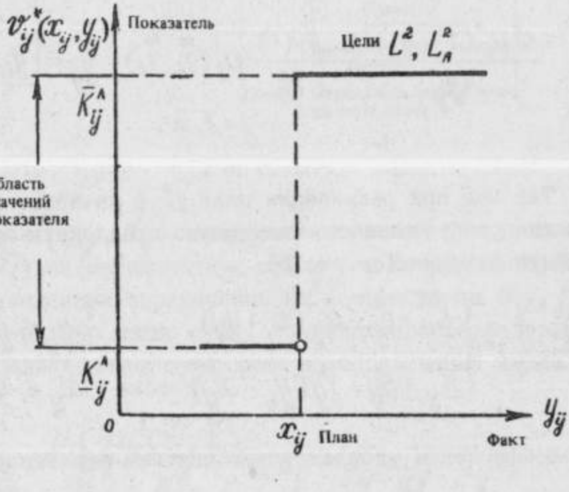
У т в е р ж д е н и е 3. Цель L^2 реализуется на множестве $\mathcal{D}(\tilde{\tau})$ функциями преобразования шкалы $v_{ij}^*(x_{ij}, y_{ij})$, $j = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,n}$, которые при $y_{ij} \geqslant x_{ij}$ равны константам, а при всех $y_{ij} \in [\underline{y}_{ij}, x_{ij}]$ удовлетворяют неравенству (II) или неравенству

$$\frac{M_2}{\beta_i(\cdot)}(v_{ij}^*(x_{ij}, x_{ij}) - v_{ij}^*(x_{ij}, y_{ij})) \geqslant (\bar{y}_{ij} - \underline{x}_{ij}) \max\{u_i'(\tilde{\tau}_i, \tilde{\tilde{\tau}}_i), u_i''(\tilde{\tau}_i, \tilde{\tilde{\tau}}_i)\}.$$

Функции $v_{ij}^*(x_{ij}, y_{ij})$ из утверждения 3 имеют разрывы в точках $y_{ij} = x_{ij}$ (полагаем $\zeta_i(x_i, y_i) \neq const$). Что же касается синтеза функций преобразования шкалы из класса непрерывных функций, то здесь имеются известные сложности, связанные с необходимостью учитывать вид поверхности, ограничивающей множество возможных состояний активного элемента. Достаточные для реализации цели L^2 условия на функции $v_{ij}^*(x_{ij}, y_{ij})$ из класса непрерывных функций здесь не приводятся, так как для общего случая они весьма громоздки и их практическое использование не целесообразно. Это замечание в равной степени относится также к случаю реализации цели L^4.

Таким образом, реализацию цели выполнения и перевыполнения плана обеспечивает простейшая разрывная функция (см. рис.4)

$$v_{ij}^*(x_{ij}, y_{ij}) = \begin{cases} \underline{K}_{ij}^{\wedge}, & \text{если } y_{ij} < x_{ij}, \\ \overline{K}_{ij}^{\wedge}, & \text{если } y_{ij} \geqslant x_{ij}. \end{cases} \tag{I6}$$



Р и с. 4

Ограничения снизу на размер фонда M_2 определяет выражение (I4). Выполнение или перевыполнение планов будет зависеть от конкретных значений показателей плана и вида фиксированной составляющей целевой функции элемента.

3.4. Стимулирование выбора максимальных состояний

Реализация рассматриваемой цели L^3 заключается в создании у активного элемента заинтересованности в выборе при любом плане $x_i \in \mathcal{D}_i(\tilde{\tilde{r}}_i)$, $\mathcal{D}_i(\tilde{\tilde{r}}_i) = \mathcal{D}_i \bigcap Y_i(\tilde{\tilde{r}}_i)$ максимальных на множестве состояний в векторно-покомпонентном смысле. Благожелательный элемент выберет одно из таких состояний, если его целевая функция монотонно возрастает по компонентам состояния на множестве $Y_i(\tilde{\tilde{r}}_i)$. Монотонное возрастание функции $f_i(x_i, y_i)$ по состоянию при всех допустимых планах обеспечивается (см. замечание в доказательстве утверждения I) применением функций преобразования шкалы $v^*_{ij}(x_{ij}, y_{ij})$, $j=\overline{1,m}$, для которых при всех $x_i \in \mathcal{D}_i(\tilde{\tilde{r}}_i)$ справедливо неравенство

$$\frac{\partial v^*_{ij}(x_{ij}, y_{ij})}{\partial y_{ij}} \geqslant \frac{\beta_i(\cdot)}{M_3} u'_i(\tilde{\tilde{r}}_i, \tilde{\tilde{r}}_i),\ y_{ij} \in [\underline{y}_{ij}, \overline{y}_{ij}],\quad j=\overline{1,m}.$$

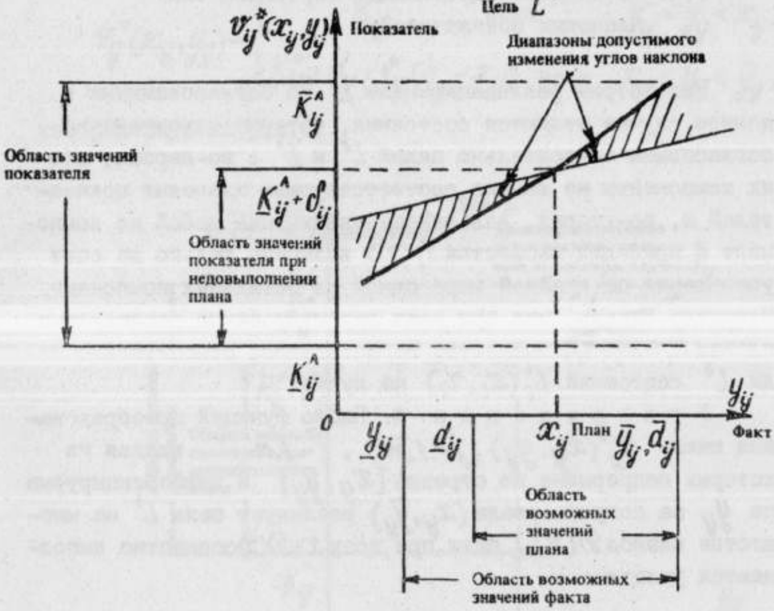
Так как при реализации цели L^3 в качестве типовой функции преобразования шкалы можно предложить кусочно-линейную функцию (см.рис.5)

$$v^*_{ij}(x_{ij}, y_{ij}) = \begin{cases} \underline{K}^{\wedge}_{ij} + \delta_{ij} - \alpha_{ij}(x_{ij} - y_{ij}), & \text{если} \quad \underline{y}_{ij} \leqslant y_{ij} < x_{ij}, \\ \underline{K}^{\wedge}_{ij} + \delta_{ij} + \gamma_{ij}(y_{ij} - x_{ij}), & \text{если} \quad x_{ij} \leqslant y_{ij} \leqslant \overline{y}_{ij}, \end{cases}$$

где коэффициенты удовлетворяют системе неравенств

$$\frac{\beta_i(\cdot)\, u'_i(\tilde{\tilde{r}}_i, \tilde{\tilde{r}}_i)}{M_3} \leqslant \alpha_{ij} \leqslant \frac{\delta_{ij}}{\overline{d}_{ij} - \underline{y}_{ij}},$$

$$\frac{\beta_i(\cdot)\, u'_i(\tilde{\tilde{r}}_i, \tilde{\tilde{r}}_i)}{M_3} \leqslant \gamma_{ij} \leqslant \frac{\overline{K}^{\wedge}_{ij} - \underline{K}^{\wedge}_{ij} - \delta_{ij}}{\overline{y}_{ij} - \underline{d}_{ij}}.$$



Р и с. 5

Здесь отрезок $[\underline{d}_{ij}, \bar{d}_{ij}]$ представляет собой проекцию множества $\mathcal{D}_i(\tilde{\tau}_i)$ на координатную ось y_{ij}. Нетрудно определить из приведенных ограничений на коэффициенты α_{ij}, γ_{ij} необходимый размер фонда M_3, позволяющего реализовывать цель L^3 предложенными функциями преобразования шкалы:

$$M_3 \geqslant \max_{\substack{j=\overline{1,m} \\ i=\overline{1,n}}} \frac{\beta_i(\cdot)\, u_i'(\tilde{\tilde{\tau}}_i, \tilde{\tilde{\tau}}_i)}{\bar{K}_{ij}^{\wedge} - \underline{K}_{ij}^{\wedge}} (\bar{d}_{ij} - \underline{y}_{ij} + \bar{y}_{ij} - \underline{d}_{ij}).$$

3.5. Максимально достижимое перевыполнение плановых показателей

Рассмотрим реализацию цели L^4 ж). Согласованными в данном случае являются состояния, которые одновременно согласованы относительно целей L^2 и L^3 : во-первых, все их компоненты не меньше соответствующих плановых показателей и, во-вторых, дальнейшее увеличение любой из компонент в пределах множества $Y_i(\tau_i)$ возможно только за счет уменьшения по крайней мере одной из остальных компонент. Нетрудно видеть, что при всех гарантированно реализуемых планах $x_i \in \mathcal{D}_i(\tilde{\tau}_i)$ множество согласованных относительно цели L^4 состояний $L_i^4(x_i, \tau_i)$ не пусто.

Утверждение 4. Набор функций преобразования шкалы $v_{ij}^*(x_{ij}, y_{ij})$, $j=\overline{1,m}$, $i=\overline{1,n}$, каждая из которых непрерывна на отрезке $[x_{ij}, \bar{y}_{ij}]$ и дифференцируема по y_{ij} на полуинтервале $(x_{ij}, \bar{y}_{ij})$ реализует цель L^4 на множестве планов $\mathcal{D}(\tilde{\tau})$, если при всех $x \in \mathcal{D}(\tilde{\tau})$ совместно выполняются условия:

$$\forall y_{ij} \in (x_{ij}, \bar{y}_{ij}): \ \frac{\partial v_{ij}^*(x_{ij}, y_{ij})}{\partial y_{ij}} \geqslant \frac{\beta_i(\cdot)}{M_4} u_i^1(\tilde{\tau}_i, \tilde{\tilde{\tau}}_i);$$

$$\forall y_{ij} \in [\underline{y}_{ij}, x_{ij}]: \ v_{ij}^*(x_{ij}, x_{ij}) - v_{ij}^*(x_{ij}, y_{ij}) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\beta_i(\cdot)}{M_4} \Delta_i(\tilde{\tau}_i, \tilde{\tilde{\tau}}_i) + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^{m} (\bar{y}_{iq} - x_{iq}) \max_{y_{iq} \in (x_{iq}, \bar{y}_{iq}]} \frac{\partial v_{iq}^*(x_{iq}, y_{iq})}{\partial y_{iq}}; \tag{17}$$

$$j = \overline{1,m}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Приведенное утверждение позволяет предложить типовую функцию преобразования шкалы из класса разрывных кусочно-линейных функций и получить ограничения на варьируемые коэффициенты.

ж) В работе [13] предложен один из способов реализации данной цели. Близкие по смыслу множества согласованных состояний рассмотрены в работе [14].

Рассмотрим функцию

$$v^*_{ij}(x_{ij},y_{ij})=\begin{cases}\underline{K}^\wedge_{ij}, & \text{если} \quad \underline{y}_{ij}\le y_{ij}<x_{ij},\\ \underline{K}^\wedge_{ij}+\delta_{ij}+\gamma_{ij}(y_{ij}-x_{ij}), & \text{если} \quad x_{ij}\le y_{ij}\le \bar{y}_{ij},\end{cases}$$

изображенную на рис.6.

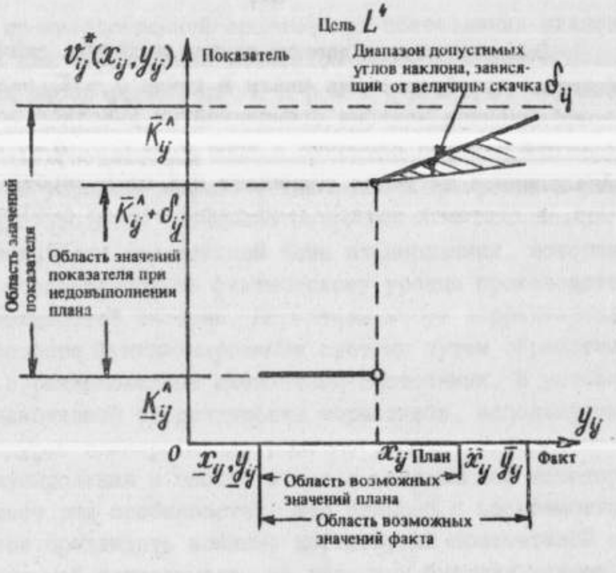


Рис. 6

Из первого неравенства утверждения 4 и условия $v^*_{ij}(x_{ij},y_{ij})\le\bar{K}^\wedge_{ij}$ следует ограничение

$$\frac{\beta_i(\cdot)}{M_4}u_i'(\tilde{\tau}_i,\tilde{\tilde{\tau}}_i)\le\gamma_{ij}\le\frac{\bar{K}^\wedge_{ij}-\underline{K}^\wedge_{ij}-\delta_{ij}}{\bar{y}_{ij}-\underline{x}_{ij}},$$

а из второго неравенства - ограничение

$$\delta_{ij}\ge\sum_{\substack{q=1\\ q\ne j}}^{m}\gamma_{iq}(\bar{y}_{iq}-\underline{x}_{iq}),\quad j=\overline{1,m},\quad i=\overline{1,n},$$

Из этих двух ограничений определяется оценка снизу на размер фонда M_4:

$$M_4 \geqslant \max_{\substack{j=\overline{1,m} \\ i=\overline{1,n}}} \frac{\beta_i(\cdot)\, u_i'(\tilde{\tau}_i, \tilde{\tilde{\tau}}_i)(\bar{y}_{ij} - \underline{x}_{ij})}{\bar{K}_{ij}^{\wedge} - \underline{K}_{ij}^{\wedge} - \sum\limits_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^{m} \gamma_{iq}(\bar{y}_{iq} - \underline{x}_{iq})} .$$

Заметим, что в данном случае величина скачка δ_{ij} у функции преобразования шкалы в точке $y_{ij} = x_{ij}$ зависит от коэффициентов наклона прямолинейных участков остальных функций данного элемента в зоне $y_{iq} \geqslant x_{iq}$, $q=\overline{1,m}$, $q \neq j$. Аналогичная ситуация возникает при стимулировании, например, в системах материально-технического снабжения [15].

4. СТИМУЛИРОВАНИЕ ПРИ АДАПТИВНОЙ КОРРЕКТИРОВКЕ НОРМАТИВНОЙ БАЗЫ ПЛАНИРОВАНИЯ

В производственной системе при составлении плановых заданий для структурных элементов системы может использоваться набор различных н о р м а т и в о в, характеризующих производственные возможности элементов. Совокупность таких нормативов называют нормативной базой планирования. В условиях научно-технического прогресса и развития производства возникает потребность в постоянном совершенствовании нормативной базы планирования, которая должна соответствовать фактическому уровню производственных возможностей системы. Нормативы могут корректироваться в процессе функционирования системы путем обработки данных о реализованных элементами состояниях. В условиях такой адаптивной корректировки нормативов, используемых в процедурах планирования, решение задачи синтеза системы стимулирования в соответствии с реализацией некоторой цели имеет ряд особенностей. Это связано с возможностью элементов предвидеть влияние достигнутых показателей производственной деятельности на величину будущих планов.

4.1. Адаптивное формирование нормативов

В практике нормирования применяются различные процедуры и методы, например, аналитические, отчетно-статистические, расчетные, экспертные. Общей чертой большинства методов нормирования является использование данных о результатах производственной деятельности элементов, т.е. значений реализованных состояний. Эти данные могут формироваться в результате непосредственного наблюдения за работой элементов или извлекаться из отчетной документации. В последнем случае должна обеспечиваться достоверность используемой информации.

Последующая обработка поступивших данных о фактических значениях показателей состояния приводит к формированию оценок (нормативов) ряда производственных характеристик элементов, позволяющих судить об их внутренних производственных возможностях. В формальной модели такая ситуация соответствует адаптивной идентификации неизвестных параметров в параметрическом представлении множеств возможных состояний элементов [5,16] .

Ниже рассматривается повторяющееся функционирование организационной системы. Переменные величины, относящиеся к отдельному периоду функционирования, сопровождаются верхним индексом, указывающим номер периода. Предполагается, что множества возможных состояний элементов могут изменяться от периода к периоду (динамическая модель ограничений), причем $\tau_i^{t+1} \geqslant \tau_i^t$ ж), или, в силу (9), $Y_i(\tau_i^{t+1}) \supset \supset Y_i(\tau_i^t)$, то есть производственные возможности элементов не сужаются в процессе функционирования системы. При определении плана t-го периода в процедуре планирования вместо неизвестных параметров $\tau_i^t(\tilde{\tau}_i \leqslant \tau_i^t \leqslant \tilde{\tilde{\tau}}_i \;, t=1,2,\ldots)$ используются оценки, полученные на основе адаптивной идентификации: $a_i^t = \varphi_i(a_i^{t-1}, y_i^{t-1})$, $a^1 = \tilde{\tau}_i$.Эти оценки будем считать нормативами, которые образуют нормативную базу планирования. Относительно множества $Y_i(a_i^t)$ и функции идентификации $\varphi_i(a_i^{t-1}, y_i^{t-1})$ предполагаются справедливыми следующие естественные свойства:

$$a_i^t \leqslant \tau_i^{t-1} \; ; \tag{18}$$

$$\begin{aligned} y_i^{t-1} \notin Y_i(a_i^{t-1}) &\Longrightarrow a_i^t > a_i^{t-1} \;, \\ y_i^{t-1} \in Y_i(a_i^{t-1}) &\Longrightarrow a_i^t = a_i^{t-1} \;; \end{aligned} \tag{19}$$

$$a_i^t > \tilde{a}_i^t \Longrightarrow \varphi_i(a_i^t, y_i^t) \geqslant \varphi_i(\tilde{a}_i^t, y_i^t) \; ; \tag{20}$$

ж) Напомним, что для векторов запись $a_i > b_i$ означает $a_{ij} \geqslant b_{ij}$, $j = \overline{1,p}$, $a_i \neq b_i$. Если при этом допускается $a_i = b_i$, то будем писать $a_i \geqslant b_i$.

$$y_i^t, \tilde{y}_i^t \notin Y_i(a_i^t),\ y_i^t \geq \tilde{y}_i^t \Rightarrow \varphi_i(a_i^t, y_i^t) \geq \varphi_i(a_i^t, \tilde{y}_i^t) . \qquad (21)$$

Свойство (I8) с учетом (9) постулирует: оператором адаптивной идентификации восстанавливаются заведомо реализуемые состояния $Y_i(a_i^t) \subset Y_i(r_i^{t-1}) \subset Y_i(r_i^t)$. Из (I9) следует, что уточнение предыдущего значения норматива происходит тогда и только тогда, когда элемент "выходит" из восстановленного ранее оценочного множества. В силу этого свойства информированность центра о множествах возможных состояний элементов может только повышаться: $a_i^t \geqslant a_i^{t-1}$ $(Y_i(a_i^t) \supset Y_i(a_i^{t-1}))$. Свойство (20) постулирует строго монотонное возрастание функции идентификации по компонентам вектора оценок a_i^t , а условие (2I) - строго монотонное возрастание этой функции по компонентам состояния вне построенного накануне оценочного множества.

В случае независимых показателей состояния, когда $Y_i(r_i^t) = \prod_{j=1}^{n} [\underline{y}_{ij}, r_{ij}^t]$, в качестве процедур восстановления параметров r_{ij}^t (процедур корректировки нормативов), удовлетворяющих свойствам (I8) - (2I), можно указать следующие:

$$a_{ij}^t = \max \left\{ a_{ij}^{t-1} ; y_{ij}^{t-1} \right\} ;$$

$$a_{ij}^t = \max \left\{ a_{ij}^{t-1} ; \frac{a_{ij}^{t-1} + y_{ij}^{t-1}}{\ell} \right\} ;$$

$$a_{ij}^t = \max \left\{ a_{ij}^{t-1} ; \frac{x_{ij}^{t-1} + y_{ij}^{t-1}}{\ell} \right\} .$$

В зависимости от конкретных условий могут использоваться различные процедуры корректировки нормативов. При этом желательно, чтобы типовая система стимулирования направляла элементы на реализацию цели вне зависимости от конкретного вида таких процедур. Поэтому в работе не фиксируется конкретный вид функции идентификации, а лишь предполагаются справедливыми для нее свойства (I8)-(2I).

4.2. Модель поведения дальновидного элемента

Наличие в механизме функционирования процедур адаптивной корректировки нормативной базы планирования приводит к зависимости области значений целевой функции активного элемента отдельного периода от реализованных ранее состояний. Элемент, учитывающий такие "последствия" своего выбора, называется дальновидным [2,5] . В качестве критерия эффективности, которым руководствуется дальновидный элемент при нахождении рациональных состояний, можно принять сумму значений целевой функции, полученную за несколько периодов функционирования.

Критерий эффективности дальновидного элемента содержит разного рода неопределенности. Во-первых, предполагается, что в произвольном t-м периоде элементу неизвестны значения параметров модели ограничений в последующие периоды, а при определении рациональных состояний им может использоваться условие $r_i^t \lesssim r_i^{t+1} \lesssim \ldots \lesssim \tilde{\tilde{r}}_i$.Во-вторых, информированность элемента о процедуре формирования нормативов и процедуре планирования сводится к знанию свойств (I8)-(2I) и условия $x_i^t \in \mathcal{D}_i(a_i^t)$, $\mathcal{D}_i(a_i^t) = \mathcal{D}_i \cap Y_i(a_i^t)$ Наличие неопределенных факторов не позволяет элементу непосредственно решать задачу максимизации своего критерия по состояниям $y_i^t, \ldots, y_i^{t+N_i}$ и приводит к необходимости предварительно устранять имеющуюся неопределенность. Наиболее обоснованным принципом поведения в условиях неопределенности является принцип гарантированного результата, когда элемент выбором состояния стремится получить максимальное значение своего критерия при наихудших возможных значениях неопределенных факторов. Нетрудно показать, что в данном случае это приводит к следующей схеме определения рациональных состояний t-го периода:

$$f_i(x_i^t, y_i^t) + \sum_{q=t+1}^{t+N_i} \min_{z_i^q \in \mathcal{D}_i(\varphi_i(a_i^{q-1}, y_i^{q-1}))} f_i(z_i^q, y_i^q) =$$

$$= f_i(x_i^t, y_i^t) + \sum_{q=t+1}^{t+N_i} \hat{f}_i(\hat{\pi}_i(a_i^{q-1}, y_i^{q-1}, y_i^q)) \longrightarrow \max_{y_i^t, \ldots, y_i^{t+N_i} \in Y_i(r_i^t)} , \qquad (22)$$

где N_i – степень дальновидности. Таким образом, элемент полагая, что множество возможных состояний в будущие периоды "не расширяется", решает задачу максимизации критерия эффективности по $y_i^t, \ldots, y_i^{t+N_i}$ при наихудших допустимых планах, которые могут быть назначены в последующих периодах в зависимости от реализованных состояний. Рациональным для t-го периода является любое состояние y_i^{*t}, которое входит в одно из решений $y_i^{*t}, y_i^{t+1}(t), \ldots, \ldots, y_i^{t+N_i}(t)$ задачи (22). Понятно, что в общем случае некоторое состояние $y_i^{t+1}(t)$, входящее в решение задачи (22) в t-м периоде функционирования, может не являться рациональным состоянием для следующего $t+1$-го периода.

4.3. Стимулирование выполнения плана или минимального отклонения состояния от плана

При адаптивной корректировке нормативов (адаптивной идентификации параметров модели ограничений элементов) в условиях оговоренных выше предположений множеством допустимых гарантированно реализуемых планов в период t является $\mathcal{D}(a^t) = \prod_{i=1} \mathcal{D}_i(a_i^t)$. Допустим, что к элементу назначен некоторый план из множества $\mathcal{D}_i(a_i^t)$. Тогда реализация состояния $y_i^t = x_i^t$ в силу свойства (19) не позволяет центру уточнить имевшуюся ранее оценку a_i^t. Таким образом, если планирование осуществляется в пределах множества $\mathcal{D}_i(a_i^t)$, то реализация цели точного выполнения плана исключает возможность получения центром дополнительной текущей информации, которая могла бы использоваться для корректировки нормативов. Чтобы наличие в механизме функционирования процедур адаптивной идентификации имело смысл, необходимо расширить множество допустимых планов и доопределить цель L^1 на множестве нереализуемых планов, ставя перед элементом в случае $x_i^t \notin Y_i(r_i^t)$ задачу выбора такого состояния, которое в некотором смысле минимально отличается от плана.

Можно предложить следующую модификацию цели L^1 (цель L^ℓ в условиях адаптивной корректировки нормативов обозначается L^ℓ_A). В качестве множества согласованных состояний для цели L^1_A в t-м периоде принимается

$$L^1_{iA}(x^t_i, \tau^t_i) = \begin{cases} \{x^t_i\}, & \text{если} \quad x^t_i \in Y_i(\tau^t_i), \\ T_i(x^t_i, \tau^t_i), & \text{если} \quad x^t_i \notin Y_i(\tau^t_i), \end{cases}$$

где

$$T_i(x^t_i, \tau^t_i) = \{y_i \in Y_i(\tau^t_i) \mid \{\lambda x^t_i + (1-\lambda) y_i, 0 < \lambda < 1\} \cap Y_i(\tau^t_i) = \emptyset\}.$$

На множестве реализуемых планов цели L^1 и L^1_A эквивалентны, и от элемента в обоих случаях требуется точное выполнение таких планов.

В условиях $x^t_i \notin Y_i(\tau^t_i)$ цель L^1_A предписывает для элемента реализацию из множества $Y_i(\tau^t_i)$ такого состояния y^t_i, которое по отношению к плану являлось бы ближайшим вдоль направления, задаваемого вектором $z_i = x^t_i - y^t_i$. Согласованное состояние y^t_i, для которого имеет место $y^t_i \leqslant x^t_i$, позволяет восстанавливать более точную оценку неизвестных параметров, чем любое не согласованное состояние $\tilde{y}^t_i$ из множества $Y_i(\tau^t_i)$, принадлежащее прямой, проходящей через точки x^t_i и y^t_i. Действительно, нетрудно установить, что в данном случае $\tilde{y}^t_i \leqslant y^t_i$. Тогда согласно свойствам (I9), (2I) при $y^t_i \notin Y_i(a^t_i)$ справедливо условие $\varphi_i(a^t_i, \tilde{y}^t_i) \leqslant \varphi_i(a^t_i, y^t_i) \leqslant \tau^t_i$.

Условия на целевую функцию элемента, обеспечивающие реализацию цели L^1_A на всем множестве допустимых планов $\mathcal{D}(\tilde{\tilde{\tau}})$, приводятся в нижеследующей лемме. Предполагается, что элемент информирован о возможности назначения ему любого плана из $\mathcal{D}_i(\tilde{\tilde{\tau}}_i)$.

<u>Лемма I.</u> Цель L^1_A реализована на множестве планов $\mathcal{D}(\tilde{\tilde{\tau}})$, если целевые функции элементов непрерывны, строго монотонно возрастают по показателям состояния при $y_{ij} \leqslant x_{ij}$ и монотонно убывают при $y_{ij} > x_{ij}$.

Теперь нетрудно перейти к условиям для функций преобразования шкалы. Как следует из замечания в доказательстве утверждения I (см.Приложение), условия леммы обеспечиваются применением функций $v_{ij}^*(x_{ij}, y_{ij})$, удовлетворяющих условию (I2). Следовательно, цель L_1^1 может быть реализована функциями преобразования шкалы (I5), используемыми для реализации цели L^1.

Величина отклонения состояния от плана может определяться также с помощью некоторой заданной нормы. Рассмотрим реализацию цели L_1^5 минимального отклонения состояния от нереализуемого плана в смысле евклидовой нормы. Здесь уместно сделать одно замечание. Если элементу в t-м периоде функционирования может быть назначен любой план из множества $\mathcal{D}_i(\tilde{\tilde{\tau}}_i)$ вне зависимости от норматива a_i^t, то тем самым состояние предыдущего периода не оказывает влияния на величину плана x_i^t. В этих условиях оптимизация критерия эффективности дальновидного элемента сводится к максимизации целевой функции отдельного периода и, следовательно, задачи реализации одной и той же цели как в условиях адаптивной корректировки нормативов, так и в случае независимых периодов функционирования имеют общие решения.

Итак, для реализации целей L^5 и L_1^5 на множестве $\mathcal{D}_i(\tilde{\tilde{\tau}}_i)$ нужно так подобрать функции преобразования шкалы $\gamma_{ij}^*(x_{ij}, y_{ij})$, $j=\overline{1,m}$, чтобы при всех значениях $x_i \in \mathcal{D}_i(\tilde{\tilde{\tau}}_i)$ множества рациональных состояний элементов включали максимально близкие к плану состояния из множества возможных состояний, то есть

$$\forall x_i \in \mathcal{D}_i(\tilde{\tilde{\tau}}_i): \underset{y_i \in Y_i(\tau_i)}{Arg\max}\, f_i(x_i, y_i) \ni \underset{y_i \in Y_i(\tau_i)}{Arg\min} \sqrt{\sum_{j=1}^{m} (y_{ij} - x_{ij})^2}.$$

Понятно, что в общем случае для решения такой задачи нужно восстанавливать зависимость $\zeta_i(x_i, y_i)$ по крайней мере в некоторой окрестности плана и строить границу $\Gamma_i(\tau_i)$ множества состояний $Y_i(\tau_i)$. Иначе говоря, информации о предельных характеристиках (6)-(8) фиксированной составляющей целевой функции элемента может оказаться недостаточно для реализации цели L^5 на произвольном множестве планов. В приводимом ниже утверждении 5 рассматриваются возможности применения в этих условиях квадратичных функций преобразования шкалы вида (см. рис.7):

$$v_{ij}^*(x_{ij}, y_{ij}) = v_{ij}(y_{ij} - x_{ij}) = \bar{K}_{ij}^{\wedge} - c_i(y_{ij} - x_{ij})^2, \qquad (23)$$

где коэффициент c_i выбирается в пределах ограничений

$$0 < c_i \leq c_i^{min}, \quad c_i^{min} = \min_{j=\overline{1,m}} \frac{\bar{K}_{ij}^{\wedge} - \underline{K}_{ij}^{\wedge}}{\bar{\delta}_{ij}^2}$$

с тем, чтобы соблюдалось требование $\underline{K}_{ij}^{\wedge} \leq v_{ij}^*(x_{ij}, y_{ij}) \leq \bar{K}_{ij}^{\wedge}, j=\overline{1,m}$.

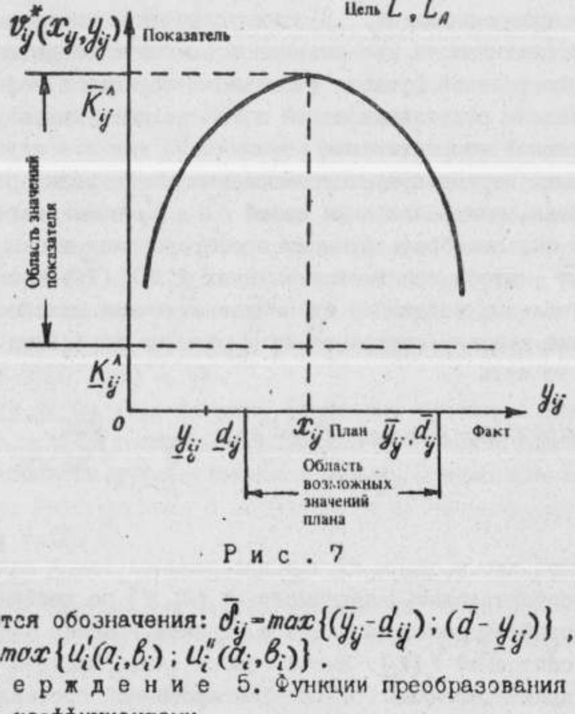


Рис. 7

Используются обозначения: $\bar{\delta}_{ij} = \max\{(\bar{y}_{ij} - \underline{d}_{ij}); (\bar{d} - \underline{y}_{ij})\}$, $x_i(a_i, b_i) = \max\{u_i'(a_i, b_i); u_i''(a_i, b_i)\}$.

Утверждение 5. Функции преобразования шкалы (23) с коэффициентами

$$0<C_i \leqslant \min\left\{C_i^{\min};\ \frac{\sqrt{m}\,\beta(\cdot)\,\overline{U}_i(\tilde{\tilde{\tau}}_i,\tilde{\tilde{\tau}}_i)}{2M_5}\right\} \tag{24}$$

реализуют цели L^5 и L^5_A на множестве таких планов x, показатели которых являются $x_{ij} \geqslant \overline{y}_{ij} + \varepsilon_i$ или $x_{ij} \leqslant y_{ij} - \varepsilon_i$, $j=\overline{1,m}$, $i=\overline{1,n}$ (множество $\mathcal{D}^\varepsilon = \prod\limits_{i=1}^{n} \mathcal{D}_i^\varepsilon$), где

$$\varepsilon_i = \frac{\overline{U}_i(\tilde{\tilde{\tau}}_i,\tilde{\tilde{\tau}}_i)\cdot\beta_i(\cdot)}{2C_i M_5}.$$

Если же $x_i \notin \mathcal{D}_i^\varepsilon$, то показатели реализованного состояния не отличаются от соответствующих показателей плана более, чем на величину ε_i.

Таким образом, функции (23) с коэффициентами (24) в зависимости от значения плана обеспечивают выбор состояний, которые либо максимально близки к плану на множестве $Y_i(\tau_i)$, либо находятся в некоторой окрестности плана, "сужающейся" по мере увеличения размера распределяемого фонда поощрения.

Максимально допустимые отклонения показателей состояния от соответствующих показателей плана могут задаваться предварительно: $|x_{ij} - y_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij}$ $(\varepsilon_i > \frac{1}{\sqrt{m}})$, $j=\overline{1,m}$, $i=\overline{1,n}$. Нетрудно показать, что в такой ситуации каждый из коэффициентов C_i должен выбираться в соответствии с ограничением

$$\frac{\overline{U}_i(\tilde{\tilde{\tau}}_i,\tilde{\tilde{\tau}}_i)\beta_i(\cdot)}{2M_5 \min\limits_{j=\overline{1,m}} \varepsilon_{ij}} \leqslant C_i \leqslant C_i^{\min}.$$

Для того, чтобы эти неравенства были совместны, потребуется фонд поощрения величины

$$M_5 \geqslant \max_{i=\overline{1,n}} \frac{\overline{U}_i(\tilde{\tilde{\tau}}_i,\tilde{\tilde{\tau}}_i)\beta_i(\cdot)}{2C_i^{\min} \min\limits_{j=\overline{1,m}} \varepsilon_{ij}}.$$

4.4. Реализация цели выполнения и перевыполнения плана

Наличие у активных элементов заинтересованности в выборе вектора состояний с компонентами, равными или большими соответствующих плановых показателей, приводит к реализации цели L_A^2. В произвольном t-м периоде функционирования реализации цели L^2 рассматривается на множестве планов $\mathcal{D}(a^t)$. Предполагается, что дальновидный элемент в зависимости от выбираемого состояния y_i^t ожидает в последующих периодах назначения любого плана из множества $\mathcal{D}_i(a_i^{t+1})$, $a_i^{t+1}=\varphi_i(a_i^t, y_i^t)$. Следующее утверждение справедливо при любой функции $\mathcal{T}_i(a_i^{q-1}, y_i^{q-1}, y_i^q)$ в критерии (22), отражающей правило устранения неопределенности дальновидным элементом и имеющей область значений в $\mathcal{D}_i(\varphi_i(a_i^{q-1}, y_i^{q-1}))$.

У т в е р ж д е н и е 6. Цель L_A^2 реализуется такими функциями преобразования шкалы, которые при $y_{ij} \geq x_{ij}$ равны константам, а при $y_{ij} < x_{ij}$ удовлетворяют условию

$$v_{ij}^*(x_{ij}, x_{ij}) - v_{ij}^*(x_{ij}, y_{ij}) > \frac{\beta_i(\cdot)}{M_2}(N_i+1)\Delta_i(\tilde{\tilde{\tau}}_i, \tilde{\tau}_i). \quad (25)$$

В утверждении, по-существу, обоснована возможность использовать при реализации цели L_A^2 ту же типовую функцию преобразования шкалы, которая предлагалась для реализации цели L^2 (см. (16),(14) и рис.4). Отличие состоит в величине "скачка" у функции $v_{ij}^*(x_{ij}, y_{ij})$ в точках $y_{ij}=x_{ij}$:в условиях адаптивной корректировки нормативов "скачок" больше и увеличивается с ростом степени дальновидности элемента N_i. Соответствующая поправка вводится и в выражение (14) для определения размера фонда поощрения. Однако для дальновидных элементов, определяющих рациональные состояния на основе принципа гарантированного результата по схеме (22), ограничение (25) можно ослабить, заменив правую часть неравенства на величину $\beta_i(\cdot)\Delta_i(\tilde{\tilde{\tau}}_i, \tilde{\tau}_i)/M_2$. Это нетрудно установить, следуя схеме доказательства утверждения 6.

4.5. Стимулирование выбора максимальных состояний

Если для реализации цели L^3 в случае независимых периодов функционирования или отсутствия у элементов дальновидности достаточно было обеспечить монотонное возрастание целевой функции по состоянию, то в условиях адаптивной корректировки нормативов задача усложняется. Это связано с необходимостью учитывать возможность дальновидного активного элемента оценивать влияние реализованных состояний на устанавливаемые нормативы. Прежде, чем перейти к синтезу функций преобразования шкалы для этого случая, сформулируем достаточные для реализации цели L^3_A условия на целевые функции активных элементов.

<u>Лемма 2.</u> Цель L^3_A реализована на множествах $\mathcal{D}(a^t)$, $t=1,2,\ldots$, если для всех $i=\overline{1,n}$ имеют место условия*)

$$\forall x_i \in \mathcal{D}_i(\tilde{z}_i): f_i(x_i, y_i) > f_i(x_i, \tilde{y}_i), \ y_i > \tilde{y}_i; \tag{26}$$

$$\max_{y_i \in Y(z_i)} \min_{x_i \in \mathcal{D}_i(a_i)} f_i(x_i, y_i) \geq \max_{y_i \in Y_i(z_i)} \min_{x_i \in \mathcal{D}_i(\tilde{a}_i)} f_i(x_i, y_i), \ a_i > \tilde{a}_i. \tag{27}$$

В приводимом ниже утверждении используется предельная с к о р о с т ь у б ы в а н и я фиксированной составляющей целевой функции п о п л а н у $u_i^x(a_i, b_i)$, определяемая выражением

$$u_i^x(a_i, b_i) \geq -\min_{j=\overline{1,m}} \min_{\substack{y_i \in Y_i(b_i) \\ x_i \in \mathcal{D}_i(a_i)}} \frac{\partial \xi_i(x_i, y_i)}{\partial x_{ij}}.$$

У т в е р ж д е н и е 7. Пусть для всех t справедливо $x_i^t \geqslant x_i^{t-1}$ и на множестве $\mathcal{D}_i(\tilde{z}_i)$ найдется единственная точка x_i^0 такая, что $\forall x_i \in \mathcal{D}_i(\tilde{z}_i): x_i^0 \leqslant x_i$. Тогда цель L^3_A реализуется на множествах $\mathcal{D}_i(a_i^t)$, $t=1,2,\ldots$

---

*) Подобные условия, обеспечивающие выбор элементом состояний на границе $\Gamma_i(z_i^t)$ множества $Y_i(z_i^t)$, приведены в [5].

функциями преобразования шкалы, для которых при всех $x_{ij} \in [\underline{d}_{ij}, \overline{d}_{ij}]$, $y_{ij} \in [\underline{y}_{ij}, \overline{y}_{ij}]$ имеют место неравенства

$$\frac{\partial v^*_{ij}(x_{ij}, y_{ij})}{\partial y_{ij}} > \frac{\beta_i(\cdot)}{M_з} u_i^{y}(\tilde{\tilde{r}}_i, \tilde{\tilde{r}}_i),$$

$$\frac{\partial v^*_{ij}(x_{ij}, y_{ij})}{\partial x_{ij}} > \frac{\beta_i(\cdot)}{M_з} u_i^{x}(\tilde{\tilde{r}}_i, \tilde{\tilde{r}}_i).$$

Функцией преобразования шкалы, удовлетворяющей приведенному утверждению, может служить (заметим, что по определению $\underline{d}_{ij} \geq \underline{y}_{ij}$, $\overline{d}_{ij} \leq \overline{y}_{ij}$) функция

$$v^*_{ij}(x_{ij}, y_{ij}) = \underline{K}^{\wedge}_{ij} + \alpha_{ij}(x_{ij} - \underline{d}_{ij}) + \gamma_{ij}(y_{ij} - x_{ij} + \underline{d}_{ij} - \underline{y}_{ij}), \quad (28)$$

изображенная на рис.8

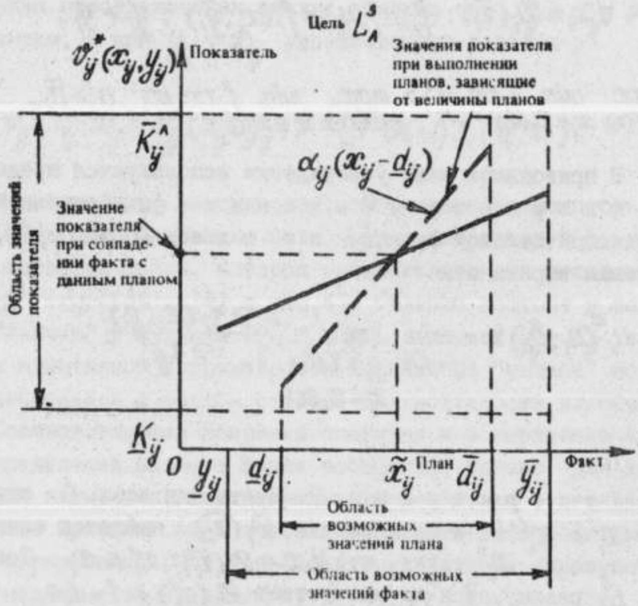


Рис. 8

Коэффициенты α_{ij} и γ_{ij} должны удовлетворять неравенствам:

$$\frac{\beta_i(\cdot)}{M_э} u_i'(\tilde{\tilde{\tau}}_i, \tilde{\tilde{\tau}}_i) < \alpha_{ij} \leq \frac{\bar{K}_{ij}^{\wedge} - \underline{K}_{ij}^{\wedge}}{\bar{y}_{ij} - \underline{y}_{ij}},$$

$$\alpha_{ij} + \frac{\beta_i(\cdot)}{M_э} u_i^{x}(\tilde{\tilde{\tau}}_i, \tilde{\tilde{\tau}}_i) < \gamma_{ij} \leq \frac{\bar{K}_{ij}^{\wedge} - \underline{K}_{ij}^{\wedge}}{\bar{y}_{ij} - \underline{y}_{ij}}, \; j=\overline{1,m}, \; i=\overline{1,n}.$$

Отсюда ограничение на размер фонда поощрения есть

$$M_э \geq \max_{\substack{j=\overline{1,m} \\ i=\overline{1,n}}} \beta_i(\cdot)\left(u_i'(\tilde{\tilde{\tau}}_i, \tilde{\tilde{\tau}}_i) + u_i^{x}(\tilde{\tilde{\tau}}_i, \tilde{\tilde{\tau}}_i)\right) \frac{\bar{y}_{ij} - \underline{y}_{ij}}{\bar{K}_{ij}^{\wedge} - \underline{K}_{ij}^{\wedge}}.$$

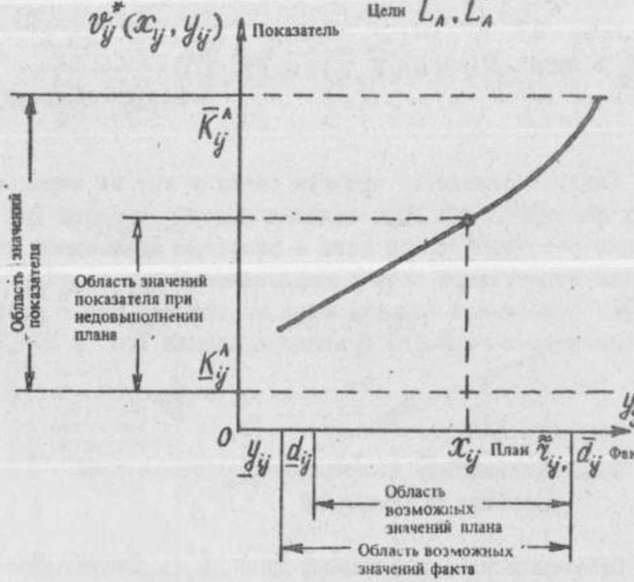
Следует отметить, что при одних и тех же характеристиках фиксированных составляющих целевых функций для реализации рассматриваемой цели в условиях адаптивной корректировки нормативной базы планирования в случае $u_i^{x}(\tilde{\tilde{\tau}}_i, \tilde{\tilde{\tau}}_i) > 0$, $i=\overline{1,n}$ требуется больший фонд поощрения, чем в условиях независимых периодов функционирования (см. § 3.4.)

4.6. Максимально достижимое перевыполнение плановых показателей

Остановимся на реализации цели L_A^4. Синтез функций преобразования шкалы для этого случая может осуществляться с использованием результатов утверждений 4 и 7 после некоторой модификации сформулированных в них условий. Подробное решение задачи реализации цели L_A^4 в общем случае здесь не проводится в виду ограниченности объема настоящего препринта. Рассмотрим один частный случай, когда показатели состояний элемента независимы, то есть

$Y_i(\tau_i^t)=\prod_{j=1}^{m}[\underline{y}_{ij},\tau_{ij}^t]$, а фиксированная составляющая представима в виде $\zeta_i(x_i,y_i)=\sum_{j=1}^{m}\zeta_{ij}(y_{ij}-x_{ij})$.

Лемма 3. Пусть множества возможных состояний элементов есть $Y_i(\tau_i^t)=\prod_{j=1}^{m}[\underline{y}_{ij},\tau_{ij}^t]$, $i=\overline{1,n}$. Цели L_A^3 и L_A^4 в период t реализованы на множестве планов $\mathcal{D}(a^t)$, если целевые функции элементов есть $f_i(y_i-x_i)=\sum_{j=1}^{m}f_{ij}(y_{ij}-x_{ij})$, $i=\overline{1,n}$, где каждая из функций $f_{ij}(y_{ij}-x_{ij})$ строго монотонно возрастает на отрезке $[\bar{d}_{ij}-\underline{y}_{ij},\bar{y}_{ij}-\underline{d}_{ij}]$ и выпукла на отрезке $[0,\bar{y}_{ij}-\underline{d}_{ij}]$.



Р и с. 9

Условия леммы в случае $\zeta_i(x_i,y_i)=\sum_{j=1}^{m}\zeta_{ij}(y_{ij}-x_{ij})$ обеспечиваются функциями преобразования шкалы (рис. 9), для которых при всех $x_{ij}\in[\underline{d}_{ij},\bar{d}_{ij}]$, $y_{ij}\in[x_{ij},\bar{y}_{ij}]$ имеют место условие

$$\frac{M}{\beta_i(\cdot)}\frac{\partial^2 v_{ij}^*(y_{ij}-x_{ij})}{\partial y_{ij}^2} > \max_{j=\overline{1,m}}\ \max_{y_i\in Y_i(\tilde{z}_i)}\frac{\partial^2 \xi_i(y_i-d_i)}{\partial y_{ij}^2}$$

и условие (I2) со строгим знаком неравенства. Подчеркнем, что здесь не требуется свойства процедуры планирования $x_i^t \geqslant x_i^{t-1}$. Предлагаемые функции преобразования шкалы отличаются от функции (28) тем, что при их использовании элементы получают отчисления из фонда поощрения за перевыполнение плана только в том периоде, в котором имело местс перевыполнение. Такие функции целесообразно применять в условиях жестких ограничений на величину расходования фонда поощрения за некоторый интервал времени, включающий несколько периодов функционирования, а функции типа (28) - в условиях ограниченности фонда поощрения одного периода.

З а к л ю ч е н и е

Описание механизма функционирования двухуровневой активной системы предполагает возможность введения центром в дополнение к имеющимся локальным (внутренним) ограничениям элемента Y_i дополнительных ограничений $\mathcal{D}_i$ на выбираемые элементом состояния - ограничений механизма функционирования [2] . Реализация требования выбора элементами состояний в пределах множеств $Y_i \cap \mathcal{D}_i$, $i=\overline{1,n}$ заключается в соответствующей коррекции целевых функций элементов с тем, чтобы создать у элементов заинтересованность в соблюдении установленных ограничений.

Очевидно, рассматриваемая в настоящей работе проблема реализации декретированных элементам целей является задачей синтеза целевых функций элементов, гарантирующих фактическое соблюдение заданных ограничений механизма функционирования (следуя [2] - синтез системы стимулирования). Сформулированный здесь перечень типовых целей отвечает часто встречающимся на практике конкретным видам ограничений. Вопросы реализации некоторых из перечисленных целей нашли отражение в ряде работ. Задача стимулирования выполнения плана рассматривалась в [12] . Одно из решений задачи обеспечения реализации максимальных по Парето состояний, показатели которых также не меньше соответствующих плановых показателей (цель L^4), предложено в работе [14] . Ряд достаточных условий выбора элементов состояний из множеств $L_i^3(\tau_i^t)$ при адаптивной идентификации неизвестных параметров в модели ограничений элемента приводится в [5] . Формулировка и реализация целей L_A^1, L_A^2, L_A^4, L_A^5 ранее не рассматривались. Задача синтеза изменяемой составляющей целевой функции элемента в условиях неопределенности относительно фиксированной составляющей рассматривалась только для случая стимулирования выполнения плана [4,12] .

Следует подчеркнуть, что в результате реализации цели на некотором множестве планов $\mathcal{D}$ согласованный выбор состояний обеспечивается при любом плане из данного множества. Поэтому предлагаемые функции преобразования шкалы реализуют поставленные цели при произвольных процедурах планирования, обеспечивающих назначение планов из множества $\mathcal{D}$. В этом смысле функции преобразования шкалы инвариантны также относительно оператора адаптивной идентификации и реализуют соответствующие цели при любом операторе,удовлетворяющем принятым в работе свойствам.

В ситуации, когда имеющийся в распоряжении центра фонд поощрения недостаточен для реализации некоторой цели за счет применения данной системы стимулирования, могут использоваться дополнительные стимулирующие факторы, которые приводят к уменьшению предельных характеристик фиксированных составляющих целевых функций активных элементов (6) - (8). Это позволяет ослабить ограничения снизу на фонд поощрения, и имеющегося фонда может оказаться достаточно для реализации данной цели. В ряде случаев восстановление предельных характеристик фиксированной составляющей целевой функции элемента может оказаться затруднительным. Без учета фиксированной составляющей также могут использоваться предложенные функции преобразования шкалы (следует полагать $\Delta_i = 0$, $U_i' = 0$, $U_i'' = 0$). В этом случае снимаются ограничения на минимальный размер фонда поощрения.

Литература

1. Механизмы функционирования организационных систем. Обследование, описание и моделирование. - М., 1983 (Препринт/ Институт проблем управления).

2. Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. - М.: Наука, 1981.

3. Бурков В.Н., Константинова Н.В., Южновец В.П. Использование показателей оценки деятельности в системах материального стимулирования. - В кн.: Механизмы функционирования организационных систем. Теория и приложения. М., Институт проблем управления, 1982.

4. Андреев С.П., Бурков В.Н., Кондратьев В.В., Палюлис Н.-К.С. Принципы управления основной научной и производственной деятельностью НИИ и КБ. - Обмен опытом в радиопромышленности, 1982, вып.5.

5. Бурков В.Н., Кондратьев В.В., Цыганов В.В., Черкашин А.М. Теория активных систем и совершенствование хозяйственного механизма. -М.: Наука, 1984.

6. Черкашин А.М. Принципы построения количественной комплексной оценки результатов деятельности. - В кн.: Механизмы функционирования организационных систем. Теория и приложения. М., Институт проблем управления, 1982.

7. Черкашин А.М. Вопросы многокритериальной оценки результатов деятельности предприятий с учетом их прогрессивности. - В кн.: Планирование и координация научных исследований. М., ЦЭМИ, 1981.

8. Блачев Р.Н. Показатели экспертной оценки планируемых результатов фундаментальных и поисковых исследований. - В кн.: Механизмы функционирования организационных систем. Теория и приложения. М., Институт проолем управления, 1982.

9. Семенов И.Б., Павельев В.В., Сагалов Ю.Э. Комплексная система оценки результатов деятельности научных подразделений в Институте проблем управления (автоматики и телемеханики). - Реф. сб. Сер.Обмен передовым опытом в приборостроении. М., ЦНИИТЭИП,1979, вып.10.

10. Бурков В.Н.,Кондратьев В.В., Константинова Н.В., Юхновец В.П. Методы описания показателей оценки деятельности и систем стимулирования на предприятиях. - Обмен опытом в радиопромышленности, 1981, вып. 10.

11. Кондратьев В.В., Прокопенко А.А. Математическое описание финансовых потоков в строительстве. - Автоматика и телемеханика, 1981, № 10.

12. Андреев С.П., Кондратьев В.В., Палюлис Н.-К.С. Стимулирование выполнения плана активными элементами.- В кн.: Механизмы функционирования организационных систем. Теория и приложения. М., Институт проблем управления,1982.

13.Цветков А.В.Согласованное планирование в задаче выполнения и перевыполнения плана в условиях неопределенности. - В кн.: Материалы УШ Всесоюзного семинара-совещания. Управление большими системами. Алма-Ата, Каз.ПТИ, 1983.

14. Кондратьев В.В. Синтез механизмов функционирования активных систем в условиях неопределенности. - В кн.: Материалы УШ Всесоюзного семинара-совещания. Управление большими системами. Алма-Ата, Каз.ПТИ, 1983.

15. Кондратьев В.В., Марин Л.Ф., Тихонов А.А. Анализ функционирования службы материально-технического обеспечения в отраслевых НИИ и КБ. - В кн.: Механизмы функционирования организационных систем. Теория и приложения. М., Институт проблем управления, 1982.

16.- Андреев С.П., Кулаков С.М., Марченко Ю.Н. Формирование нормативной информации в активных системах. - В кн.: Синтез механизмов управления сложными системами. М., Институт проблем управления, 1980.

ПРИЛОЖЕНИЕ

<u>Доказательство утверждения I</u>. Покажем, что из условия (II) следует (I0). Действительно, $y_i \neq x_i$, означает, что хотя бы по одной компоненте $y_{ij} \neq x_{ij}$, тогда

$$f_i(x_i, x_i) - f_i(x_i, y_i) =$$

$$= \frac{M_i}{\beta_i(\cdot)} \sum_{j=1}^{m} (v_{ij}^*(x_{ij}, x_{ij}) - v_{ij}^*(x_{ij}, y_{ij})) - (\xi_i(x_i, y_i) - \xi_i(x_i, x_i)) \geq$$

$$\geq \Delta_i(\tilde{\tau}_i, \tilde{\tilde{\tau}}_i) - \max_{\substack{x_i \in \mathcal{D}_i(\tilde{\tau}_i) \\ y_i \in Y_i(\tilde{\tilde{\tau}}_i)}} (\xi_i(x_i, y_i) - \xi_i(x_i, x_i)) =$$

$$= \Delta_i(\tilde{\tau}_i, \tilde{\tilde{\tau}}_i) - \max_{x_i \in \mathcal{D}_i(\tilde{\tau}_i)} (\max_{y_i \in Y_i(\tilde{\tilde{\tau}}_i)} \xi_i(x_i, y_i) - \xi_i(x_i, x_i)) = 0.$$

Следовательно, $f_i(x_i, x_i) \geq f_i(x_i, y_i)$

Теперь пусть выполняется условие (I2). Обозначив через $y_i(j)$ неполный вектор состояний $(y_{i1}, \ldots, y_{ij-1}, y_{ij+1}, \ldots, y_{im})$, зафиксируем произвольные допустимые точки $\tilde{x}_i, \tilde{y}_i(j)$. Рассмотрим функцию $f_i^*(y_{ij}) = f_i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i(j), y_{ij}) = \frac{M_i}{\beta_i(\cdot)} v_{ij}^*(\tilde{x}_{ij}, y_{ij}) + \xi_i^*(y_{ij})$ на отрезке $[y_{ij}, \tilde{x}_{ij}]$, который принадлежит отрезкам $[a_{ij}, b_{ij}] \subset [\underline{y}_{ij}, \bar{y}_{ij}]$, где $[a_{ij}, b_{ij}]$ — область определения функции при фиксированных $\tilde{x}_i$ и $\tilde{y}_i(j)$. Для непрерывной на $[y_{ij}, \tilde{x}_{ij}]$ и дифференцируемой на $(y_{ij}, \tilde{x}_{ij})$ функции по известной теореме Лагранжа существует такая точка $\eta_{ij} \in (y_{ij}, \tilde{x}_{ij})$, что

$$f_i^*(\tilde{x}_{ij}) - f_i^*(y_{ij}) = \left. \frac{d f_i^*(z_{ij})}{d z_{ij}} \right|_{z_{ij} = \eta_{ij}} (\tilde{x}_{ij} - y_{ij}). \tag{П1}$$

В силу первого неравенства в (I2) получаем

$$\left.\frac{df_i^*(z_{ij})}{dz_{ij}}\right|_{z_{ij}=\eta_{ij}}(\tilde{x}_{ij}-y_{ij})=\left[\frac{M_i}{\beta_i(\cdot)}\cdot\frac{\partial v_{ij}^*(\tilde{x}_{ij},z_{ij})}{\partial z_{ij}}+\frac{d\xi_i^*(z_{ij})}{dz_{ij}}\right]\Bigg|_{z_{ij}=\eta_{ij}}\cdot(\tilde{x}_{ij}-y_{ij})\geqslant$$

$$\geqslant\left[\frac{M_i}{\beta_i(\cdot)}\cdot\frac{\partial v_{ij}^*(\tilde{x}_{ij},z_{ij})}{\partial z_{ij}}\Bigg|_{z_{ij}=\eta_{ij}}+\min_{z_{ij}\in(y_{ij},\tilde{x}_{ij})}\frac{d\xi_i^*(z_{ij})}{dz_{ij}}\right](\tilde{x}_{ij}-y_{ij})\geqslant 0.$$

То-есть $f_i^*(\tilde{x}_{ij})-f_i^*(y_{ij})\geqslant 0$. Аналогично из второго неравенства в (I2) получаем $f_i^*(\tilde{x}_{ij})-f_i^*(y_{ij})\geqslant 0$, если $y_{ij}\geqslant x_{ij}$. Таким образом, в силу произвольно выбранных $\tilde{x}_i$ и $\tilde{y}_i(j)$, элемент заинтересован в выполнении j-й компоненты плана. Проведя те же рассуждения последовательно для всех $j=\overline{1,m}$, получим $f_i(x_i,x_i)\geqslant f_i(x_i,y_i)$ $y_i\neq x_i$, что завершает доказательство утверждения.

<u>Замечание</u>. Из приведенного доказательства, в частности, следует, что в условиях (I2) целевая функция элемента при любом плане монотонно возрастает по состоянию при $y_i\leqslant x_i$ и убывает при $y_i\geqslant x_i$, то есть

$$f_i(x_i,y_i')\geqslant f_i(x_i,y_i''),\quad y_i''\leqslant y_i'\leqslant x_i\,, \tag{П2}$$

$$f_i(x_i,y_i')\leqslant f_i(x_i,y_i''),\quad x_i\leqslant y_i''\leqslant y_i'\,. \tag{П3}$$

Действительно, заменив в условии (ПI) $\tilde{x}_{ij}$ и y_{ij} соответственно на y_{ij}' и y_{ij}'' и следуя далее схеме доказательства достаточности условия (I2), приходим к (П2) и (П3). Этот факт будет использоваться при доказательстве других утверждений.

Доказательство утверждения 2. Пусть для некоторого $\tilde{x}_i \in Y_i(\tau_i)$ справедливо $f_i^1(x_i, x_i) > f_i(x_i, y_i)$, $y_i = \tilde{x}_i$, где $f_i^1(x_i, y_i)$ включает функцию $v_{ij}^{*1}(x_{ij}, y_{ij})$. Из условия утверждения и выражения (5) имеем неравенство $f_i^2(\tilde{x}_i, y_i) < f_i^1(\tilde{x}_i, y_i)$, следовательно, $f_i^2(\tilde{x}_i, y_i) < f_i^1(\tilde{x}_i, \tilde{x}_i) = f_i^2(\tilde{x}_i, \tilde{x}_i)$. Значит, если элемент заинтересован в выполнении некоторого плана при функции $v_{ij}^{*1}(x_{ij}, y_{ij})$, то эта заинтересованность тем более сохранится после замены $v_{ij}^{*1}(x_{ij}, y_{ij})$ на $v_{ij}^{*2}(x_{ij}, y_{ij})$, то есть $P^2 \supset P^1$. Утверждение доказано.

Доказательство утверждения 3. Достаточно рассмотреть возможность отклонения от плана в сторону недовыполнения хотя бы по одной компоненте. Пусть $y_i \neq x_i$ и $\exists\, y_{ij} < x_{ij}$. Имеем

$$f_i(x_i, x_i) - f_i(x_i, y_i) =$$

$$= \frac{M_2}{\beta_i(\cdot)} \left(v_{ij}^*(x_{ij}, x_{ij}) - v_{ij}^*(x_{ij}, y_{ij})\right) - \left(\zeta_i(x_i, y_i) - \zeta_i(x_i, x_i)\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{M_2}{\beta_i(\cdot)} \left(v_{ij}^*(x_{ij}, x_{ij}) - v_{ij}^*(x_{ij}, y_{ij})\right) - \Delta_i(\tilde{\tilde{\tau}}_i, \tilde{\tau}_i).$$

Откуда с учетом (II) получаем $f_i(x_i, x_i) \geqslant f_i(x_i, y_i)$. Следовательно, рациональными являются состояния с компонентами $y_{ij} \geqslant x_{ij}$, $j = \overline{1, m}$. Условие из утверждения 3 тоже обеспечивает выбор $y_i \overline{\geqslant} x_i$, так как в правой части этого неравенства записано максимально возможное увеличение функции $\zeta_i(x_i, y_i)$ при недовыполнении плана по j-му показателю.

Доказательство утверждения 4. Предположим, что одна из компонент рационального состояния $y_{ij}^* < x_{ij}$. Тогда возможный выигрыш при этом по остальным компонентам слагается из выигрышей по фиксированной и изменяемой составляющим целевой функции. Нетрудно видеть, что в правой части неравенства (I7) записана максимально допустимая величина такого выигрыша, умноженная на $\frac{\beta_i(\cdot)}{M_4}$. Как следует из (I7), проигрыш при этом по функции $\frac{M_4}{\beta_i(\cdot)} v_{ij}^*(x_{ij}, y_{ij})$ будет больше, следовательно, y_i^* не является рациональным состоянием. Значит рациональное состояние есть $y_i^* \overline{\geqslant} x_i$. Но из доказательства утверждения I следует, что функция $f_i(x_i, y_i)$ из утверждения 4 монотонно возрастает по y_{ij} при $y_i \geq x_i$. Таким образом, $R_i(x_i, \tau_i) \subset \subset L_i^4(x_i, \tau_i)$, что доказывает утверждение.

Доказательство леммы I. Так как элемент допускает получение в произвольном q-м периоде любого плана из множества $\mathcal{D}_i(\tilde{\tilde{\tau}}_i)$ вне зависимости от значения норматива a_i^q, то оптимизация критерия (22) сведется к максимизации целевой функции $f_i(x_i^t, y_i^t)$, и рациональными составляющими в t-м периоде будут $y_i^{*t} \in Arg\max_{y_i \in Y_i(\tau_i^t)} f_i(x_i^t, y_i)$. Если $x_i^t \in Y_i(\tau_i^t)$, то, очевидно $y_i^{*t} = x_i^t$ есть одно из рациональных состояний, и для цели L_A^1 справедливо условие (I). Теперь пусть $x_i^t \notin Y_i(\tau_i^t)$ тогда в условиях леммы в компактном множестве $Y_i(\tau_i^t)$ найдется рациональное состояние $y_i^{*t} \in T_i(x_i^t, \tau_i^t)$. Действительно, в противном случае $\exists \lambda \in (0,1): \hat{y}_i = \lambda x_i^t + (1-\lambda) y_i^{*t}$, причем $\hat{y}_i \in Y_i(\tau_i^t)$. Понятно, что для всех $j = \overline{1,m}$ справедливо неравенство $|x_{ij} - \hat{y}_{ij}| < |x_{ij} - y_i^{*t}|$, и в силу условий леммы $f_i(x_i^t, y_i^{*t}) < f_i(x_i^t, \hat{y}_i)$, следовательно, если $y_i^{*t} \notin T_i(x_i^t, \tau_i^t)$, то y_i^{*t} не является рациональным состоянием. Таким образом, условие (I) выполняется для всех допустимых планов, и цель L_A^1 реализована. Лемма доказана.

Доказательство утверждения 5. Целевая функция элемента есть

$$f_i(x_i, y_i) = \frac{M_5}{\beta_i(\cdot)} \left(\bar{K}_{ij}^{\wedge} - C_i (y_{ij} - x_{ij})^2\right) + \zeta_i(x_i, y_i).$$

Имеем $\frac{\partial \omega_i(x_i, y_i)}{\partial y_{ij}} = 2M_5 C_i (x_{ij} - y_{ij}) / \beta_i(\cdot)$. Пусть $x_i \in \mathcal{D}_i^{\varepsilon}$, тогда, используя выражение для ε_i, получаем

$$\forall y_i \in Y_i(\tau_i): \left| \frac{\partial \omega_i(x_i, y_i)}{\partial y_{ij}} \right| \geq \bar{u}_i(b_i, \tilde{\tilde{\tau}}_i). \qquad (П4)$$

Если коэффициенты удовлетворяют ограничению (24), а $x \in \mathcal{D}^{\varepsilon}$, тогда $\sum_{j=1}^{m} (y_{ij} - x_{ij})^2 \geq 1$ и, следовательно,

$$\forall x_i \in \mathcal{D}_i^{\varepsilon}: \underset{y_i \in Y_i(\tau_i)}{Arg\max}\, \omega_i(x_i, y_i) = \underset{y_i \in Y_i(\tau_i)}{Arg\min} \sum_{j=1}^{m} (y_{ij} - x_{ij})^2 = \underset{y_i \in Y_i(\tau_i)}{Arg\min} \sqrt{\sum_{j=1}^{m} (y_{ij} - x_{ij})^2}.$$

Рассматривая отдельно случаи $y_{ij} \leqslant x_{ij} - \varepsilon_i$, $y_{ij} \geqslant x_{ij} + \varepsilon_i$ с учетом замечания в доказательстве утверждения I, можно показать, что (П4) приводит к условию $\mathop{Arg\,max}_{y_i \in Y_i(\tau_i)} f_i(x_i, y_i) = \mathop{Arg\,max}_{y_i \in Y_i(\tau_i)} \omega_i(x_i, y_i)$. Тогда из предыдущего равенства получаем $\mathop{Arg\,max}_{y_i \in Y_i(\tau_i)} f_i(x_i, y_i) = \mathop{Arg\,min}_{y_i \in Y_i(\tau_i)} \|y_i - x_i\|$, что означает $R_i(x_i, \tau_i) = L_i^5(x_i, \tau_i)$ и цель L_A^5 реализована.

Теперь положим $x_i \notin \mathcal{D}_i^{\varepsilon}$. Пусть одна из компонент рационального состояния есть $y_{ij}^* < x_{ij} - \varepsilon_i$. Но из $x_i \notin \mathcal{D}_i^{\varepsilon}$ следует, что $\exists\, y_{ij} \in [\underline{y}_{ij}, \overline{y}_{ij}] : y_{ij} = x_{ij} - \varepsilon_i$. Так как для $y_{ij} \in [y_{ij}^*, x_{ij} - \varepsilon_i]$ справедливо (П4) и $\frac{\partial \omega_i(x_i, y_i)}{\partial y_{ij}} > 0$, то заключаем (см. замечание в доказательстве утверждения I), что y_{ij}^* не является компонентой рационального состояния, следовательно,

$$R_i(x_i, y_i) \subset \left\{ y_i \,\middle|\, |y_{ij} - x_{ij}| < \varepsilon_i \,,\; j = \overline{1,m} \right\}.$$

<u>Доказательство утверждения 6</u>. Возьмем произвольные точки $x_i^t \in \mathcal{D}_i(a_i^t)$ и $y_i^{*t} \notin L_i^2(x_i^t, \tau_i^t)$. Тогда среди компонент вектора y_i^{*t} найдется хотя бы одна такая, что $y_{i\nu}^{*t} < x_{i\nu}^t$. Покажем, что с учетом условия (25) значение критерия элемента при произвольной последовательности $y_i^{*t}, y_i^{t+1}, \ldots, y_i^{t+N_i}$ меньше, чем при $y_i^{*t} = y_i^{t+1} = \ldots = y_i^{t+N_i} = x_i^t$. Имеем:

$$f_i(x_i^t, y_i^{*t}) + \sum_{q=t+1}^{t+N_i} f_i(\mathcal{T}_i(a_i^{*q}, y_i^q)) - (N_i+1) f_i(x_i^t, x_i^t) \leqslant$$

$$\leqslant f_i(x_i^t, y_i^{*t}) + \sum_{q=t+1}^{t+N_i} \max_{x_i^q \in \mathcal{D}_i(\tilde{\tau}_i)} \max_{y_i^q \in Y_i(\tilde{\tau}_i)} f_i(x_i^q, y_i^q) - (N_i+1) f_i(x_i^t, x_i^t) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{\beta_i(\cdot)} \Big[\sum_{\substack{j \neq \nu \\ j=1}}^{m} v_{ij}^*(x_{ij}^t, x_{ij}^t) + v_{i\nu}^*(x_{i\nu}^t, y_{i\nu}^{*t}) \Big] + (N_i+1) \max_{\substack{x_i \in \mathcal{D}_i(\tilde{\tau}_i) \\ y_i \in Y_i(\tilde{\tau}_i)}} \zeta_i(x_i, y_i) -$$

$$- \frac{M}{\beta_i(\cdot)} \sum_{j=1}^{m} v_{ij}^*(x_{ij}^t, x_{ij}^t) - (N_i+1) \min_{x_i \in \mathcal{D}_i(\tilde{\tau}_i)} \zeta_i(x_i, x_i) =$$

$$= \frac{M}{\beta_i(\cdot)} \left[v^*_{i\nu}(x^t_{i\nu}, y^{*t}_{i\nu}) - v^*_{i\nu}(x^t_{i\nu}, x^t_{i\nu}) \right] + (N_i + 1)\Delta_i(\tilde{\tilde{\tau}}_i, \tilde{\tilde{\tau}}_i) < 0 .$$

Следовательно, $y^{*t}_i \notin L^2_i(x^t_i, \tau^t_i)$ не может быть рациональным состоянием, что и требовалось доказать.

<u>Доказательство леммы 2</u>. Пусть $y^{*t}_i, y^{t+1}_i(t), \ldots, y^{t+N_i}(t)$ есть решение задачи (24) и $y^{*t}_i \notin L^3_i(\tau^t_i)$. Тогда найдется $y^t_i \geqslant y^{*t}_i$, $y^t_i \in Y_i(\tau^t_i)$. Из (20), (21) и (23) следует $a^{t+1}_i = \varphi_i(a^t_i, y^t_i) \geqslant \varphi_i(a^t_i, y^{*t}_i) = a^{*t+1}_i$, что в силу (22) приводит к $a^{t+2}_i = \varphi_i(a^{t+1}_i, y^{t+1}(t)) \geqslant \varphi_i(a^{*t+1}_i, y^{t+1}_i(t)) = a^{*t+2}_i$ и т.д. В силу (26) и (27) имеем:

$$f_i(x^t_i, y^{*t}_i) + \sum_{q=t+1}^{t+N_i} \min_{x^q_i \in \mathcal{D}_i(a^{*q}_i)} f_i(x^q_i, y^q_i(t)) <$$

$$< f_i(x^t_i, y^t_i) + \sum_{q=t+1}^{t+N_i} \min_{x^q_i \in \mathcal{D}_i(a^{*q}_i)} f_i(x^q_i, y^q_i(t)) \leqslant$$

$$\leqslant f_i(x^t_i, y^t_i) + \sum_{q=t+1}^{t+N_i} \min_{x^q_i \in \mathcal{D}_i(a^q_i)} f_i(x^q_i, y^q_i(t)).$$

Значит $y^{*t}_i \notin L^3_i(\tau^t_i)$ не может быть рациональным состоянием. Полученное противоречие доказывает лемму.

<u>Доказательство утверждения 7</u>. Как следует из замечания в доказательстве утверждения I, функция $f_i(x_i, y_i)$ монотонно возрастает по всем аргументам, то есть условие (26) выполнено. Так как функция $f_i(x^t_i, y^t_i)$ возрастает по x^t_{ij}, $j = \overline{1,m}$ и допустимыми планами в t-м периоде при оценке a^{t+1}_i являются планы из множества $\mathcal{D}_i(a^{t+1}_i, x^t_i) = \{x^{t+1}_i \mid x^{t+1}_i \geqslant x^t_i, x_i \in \mathcal{D}_i(a^{t+1}_i)\}$ получаем

$$\max_{y_i \in Y_i(\tau^t_i)} \min_{x_i \in \mathcal{D}_i(a^{t+1}_i, x^t_i)} f_i(x_i, y_i) = \max_{y_i \in Y_i(\tau^t_i)} f_i(x^t_i, y_i) \geqslant$$

$$\geqslant \max_{y_i \in Y_i(\tau^t_i)} f_i(x^{t-1}_i, y_i) = \max_{y_i \in Y_i(\tau^t_i)} \min_{x_i \in \mathcal{D}_i(a^t_i, x^{t-1}_i)} f_i(x_i, y_i) ,$$

что означает справедливость (27) и завершает доказательство.

<u>Доказательство леммы 3</u>. Пусть в произвольном t-м периоде для i-го элемента определена оценка a_i^t и назначен некоторый план $x_{i.}^t \in \mathcal{D}_i(a_i^t)$. Покажем, что $y_i^{*t} = z_i^t$ входит в решение задачи (24). Для этого предварительно установим справедливость неравенства

$$\forall x_i^q \leqslant y_i^q \leqslant y_i^{q+1}: \; f_i(x_i^q, y_i^q) + f_i(y_i^q, y_i^{q+1}) \leqslant \\ \leqslant f_i(x_i^q, y_i^{q+1}) + f_i(y_i^{q+1}, y_i^{q+1}). \qquad (\Pi5)$$

Для произвольных векторов $x_i \leqslant y_i \leqslant z_i$ всегда найдутся значения $\lambda_1', \ldots, \lambda_m'$ такие, что $0 < \lambda_l' < 1$, $l = \overline{1,m}$ и $y = \{\lambda_j' x_{ij} + (1-\lambda_j') z_{ij}\}_{j=\overline{1,m}}$. Выпуклость функции $f_{ij}(\Delta_{ij})$ означает, что при всех $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ имеет место условие

$$f_{ij}(x_{ij}, \lambda x_{ij} + (1-\lambda) z_{ij}) \leqslant \lambda f_{ij}(x_{ij}, x_{ij}) + (1-\lambda) f_{ij}(x_{ij}, z_{ij}). \qquad (\Pi6)$$

Для этой функции также справедливо равенство

$$f_{ij}(\lambda_{ij}' x_{ij} + (1-\lambda_{ij}') z_{ij}, z_{ij}) = f_{ij}(x_{ij}, (1-\lambda_{ij}') x_{ij} + \lambda_{ij}' z_{ij}). \qquad (\Pi7)$$

С учетом условий (П6) и (П7) можно сделать оценку:

$$f_i(x_i, y_i) + f_i(y_i, z_i) =$$

$$= \sum_{j=1}^m c_j [f_{ij}(x_{ij}, \lambda_{ij}' x_{ij} + (1-\lambda_{ij}') z_{ij}) + f_{ij}(x_{ij}, (1-\lambda_{ij}') x_{ij} + \lambda_{ij}' z_{ij})] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^m c_j [\lambda_{ij}' f_{ij}(x_{ij}, x_{ij}) + (1-\lambda_{ij}') f_{ij}(x_{ij}, z_{ij}) + (1-\lambda_{ij}') f_{ij}(x_{ij}, x_{ij}) + \lambda_{ij}' f_{ij}(x_{ij}, z_{ij})] =$$

$$= f_i(x_i, z_i) + f_i(z_i, z_i).$$

Следовательно, условие (П5) выполняется.

Пусть $y_i^{*t}, y_i^{t+1}(t), \ldots, y_i^{t+N_i}(t)$ есть решение задачи (22). В силу монотонного возрастания функции $f_i(y_i - x_i)$, свойств (I8), (I9) и с учетом $Y_i(a_i^q) = \prod_{j=1} [y_{ij}, a_{ij}^q]$ получаем $x_i^t \lessapprox y_i^{*t} \lessapprox \ldots \lessapprox y_i^{t+N_i}(t)$. Сделаем оценку

$$f_i(x_i^t, y_i^{*t}) + \sum_{q=t+1}^{t+N_i} \min_{x_i^q \in Y_i(a_i^q)} f_i(x_i^q, y_i^q(t)) \leqslant$$

$$\leqslant f_i(x_i^t, y_i^{*t}) + \sum_{q=t+1}^{t+N_i} f_i(y_i^{q-1}(t), y_i^q(t)) \leqslant$$

$$\leqslant f_i(x_i^t, y_i^{t+N_i}(t)) + N_i f_i(y_i^{t+N_i}(t), y_i^{t+N_i}(t)) \leqslant$$

$$\leqslant f_i(x_i^t, \tau_i^t) + N_i f_i(\tau_i^t, \tau_i^t).$$

Причем, в этой цепочке неравенств второе неравенство строгое, если $\exists q : y_i^q(t) > y_i^{q-1}(t)$. Здесь первое неравенство записано в силу возрастания функции $f_i(y_i - x_i)$ и в силу $y_i^{q-1} \in Y_i(a_i^q)$. Второе неравенство следует из (П5) повторным применением последнего к каждой паре слагаемых, а третье - из монотонного возрастания функции $f_i(y_i - x_i)$. Таким образом, либо $y_i^{*t} = \ldots = y_i^{t+N_i}(t) = \tau_i^t$, либо $y_i^{*t}, \ldots, \ldots, y_i^{t+N_i}(t)$ не есть решение задачи (24). Следовательно рациональное состояние единственно и $y_i^{*t} = \tau_i^t$ при любом $x_i^t \in \mathcal{D}_i(a_i^t)$. Очевидно, $\tau_i^t \in L_i^3(\tau_i^t)$, $\tau_i^t \in L^4(x_i^t, \tau_i^t)$. Лемма доказана.

С.П. Андрэев, В.Н. Бурков, В.В. Кондратьев, А.М. Черкашин

МЕХАНИЗМЫ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМ (Синтез процедур оценки деятельности и стимулирования). Препринт

Редактор В.В. Андреянова
Художественный редактор Г.А. Крулев
Технический редактор В.А. Морозова

Т–22867 от 12.12.84 г.
Уч.-изд.л. 2,0. Заказ 41.
Тираж 500. Цена 20 коп.
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ 117342, Москва
Профсоюзная, 65

Цена 20 коп.