УДК 519.711.7
ББК 22.1

ЦЕНА АНАРХИИ В ЗАДАЧЕ МАКСИМИЗАЦИИ МИНИМАЛЬНОЙ ЗАДЕРЖКИ МАШИН В СИСТЕМЕ ОБСЛУЖИВАНИЯ[1]

Чиркова Ю. В.[2]
(*ФГБУН Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, Петрозаводск*)

Исследуется игра максимизации минимальной задержки системы обслуживания. Игроки распределяют свои задачи различного объема между машинами, различающимися скоростями обслуживания. Каждый игрок стремится минимизировать время обслуживания своей задачи на выбранной им машине. Выигрышем системы является минимальная среди всех машин задержка. Оптимальным для системы распределением задач по машинам является такое, где максимизируется наименьшая среди всех машин задержка. Для общего случая N машин найдена нижняя граница цены анархии и для случая трех машин найдено ее точное значение. Для двух машин доказано, что при добавлении в систему новой третьей машины цена анархии не изменяется либо растет. Также предложен алгоритм вычисления точного значения цены анархии на примере системы трех машин.

Ключевые слова: система обслуживания, максимизация минимальной задержки, равновесие по Нэшу, цена анархии.

Введение

Баланс загрузки – одна из основных проблем в сетях и системах распределенных вычислений, поскольку оптимизация загруз-

---

[1] *Работа поддержана Программой фундаментальных исследований ОМН РАН и грантами РГНФ №15-02-00352_а и РФФИ №16-51-55006.*

[2] *Юлия Васильевна Чиркова, кандидат физико-математических наук, (julia@krc.karelia.ru).*

ки обеспечивает эффективное использование ресурсов. Современные системы, такие как телекоммуникационные сети, системы облачных вычислений, GRID и т.п., состоят из независимых компонент, в них зачастую отсутствует возможность централизованного управления компонентами. В частности, пользователи в узлах и протоколы передачи данных не могут взаимодействовать друг с другом для поддержания определенного уровня загрузки. Более того, на практике они ведут себя эгоистично по отношению к свободным ресурсам. Поэтому применение методов глобальной оптимизации часто оказывается неприемлемым, так как обычно нет возможности обеспечить выполнение получаемых оптимальных планов использования ресурсов систем (расписаний обращений к серверам, норм занимаемой пропускной способности каналов передачи данных и т.п.). Теоретико-игровой подход позволяет рассматривать баланс загрузки как игру, в которой участники действуют эгоистично и могут достигать некоторого равновесного состояния, когда никому не выгодно отклоняться от выбранной стратегии. Сравнение таких равновесий с глобальным оптимумом позволяет оценить эффективность системы.

В работе рассматривается задача максимизации минимальной задержки машин, также известная как задача составления расписания [1], в виде игры, которая аналогична KP-модели (Koutsoupias, Papadimitriou) [8, 9] с параллельными каналами различной пропускной способности, с тем отличием, что оптимизацией для системы считается максимизация минимальной задержки среди всех машин [4, 13, 14], а не минимизация максимальной задержки. Множество задач различных объемов должно быть распределено между машинами с различными скоростями обслуживания, на которых задачи будут выполняться. Объемом задачи считается время ее обслуживания на свободной машине со скоростью 1. Загрузкой машины является суммарный объем выполняющихся на ней задач. Отношение загрузки к скорости машины определяет ее задержку, т.е. время завершения работы данной машины. Каждый игрок выбирает машину для обслуживания своей задачи, стараясь минимизировать свою задержку. Игроки действуют эгоистично и достигают равновесия по Нэшу – такого распределения задач на машинах, когда никому из игроков не выгодно единолично менять выбранную машину на другую. В данной статье рассматривается только чистое равновесие по Нэшу, известно [5,6], что для игр такого типа оно всегда существует. Выигрышем системы (или социальным выигрышем) для полученного распределения задач на машинах является минимальная задержка среди всех машин. Цена анархии [4] – это максимум отношения оптимального выигрыша системы к выигрышу системы в наихудшем равновесии по Нэшу.

Постановка задачи, где система стремится максимизировать минимальную задержку среди всех машин, возникла из концепции справедливого разделения и эффективного использования ресурсов в сетях. В работе [4], впервые исследующей эффективность равновесия в данной модели, приводятся примеры мотивации выбора такого критерия оптимальности работы системы. Основная идея состоит в том, что все компоненты системы должны быть по-возможности максимально нагружены и как можно меньше простаивать. Например, если каждый игрок платит системе за выполнение своей задачи сумму, равную его задержке, то, во-первых, не должно быть «привилегированных» игроков, платящих значительно меньше остальных благодаря удачному выбору машины, во-вторых, не должно быть машин, приносящих мало или не приносящих прибыли.

В предшествующих работах получены следующие точные значения и оценки цены анархии в играх максимизации минимальной задержки в чистых стратегиях:

- для $N \geqslant 2$ машин со скоростями $1 \leqslant \ldots \leqslant s$ [4] цена анархии не ограничена, если $s \geqslant 2$;
- для произвольного числа одинаковых машин $[2, 4]$ цена анархии близка к значению 1,7, являющемуся верхней оценкой цены анархии;
- для двух машин со скоростями $1 \leqslant s$ [13] цена анархии

равна

$$\begin{cases} \frac{2+s}{(1+s)(2-s)} & \text{для } 1 \leqslant s \leqslant \sqrt{2}, \\ \frac{2}{s(2-s)} & \text{для } \sqrt{2} < s < 2; \end{cases}$$

- для трех машин со скоростями $1 = 1 \leqslant s$ [13] цена анархии равна

$$\frac{2+s}{2(2-s)} \text{ для } 1 \leqslant s < 2;$$

- для иерархической модели двух машин со скоростями $1 \leqslant s$ и задачами двух типов, где первая машина может выполнять задачи обоих типов, а вторая – только задачи второго типа [14], цена анархии равна

$$\begin{cases} \frac{1+s}{s} & \text{для } 1 \leqslant s \leqslant s_0, \\ \frac{2+s}{(1+s)(2-s)} & \text{для } s_0 < s \leqslant \sqrt{2}, \\ \frac{2}{s(2-s)} & \text{для } \sqrt{2} < s < 2, \end{cases}$$

где s_0 – наибольший корень уравнения $\frac{1+s}{s} = \frac{2+s}{(1+s)(2-s)}$.

В данной работе получена нижняя оценка цены анархии для системы с числом машин от трех, также найдено точное значение оценки цены анархии для трех машин со скоростями $1 \leqslant r \leqslant s < 2$:

$$\begin{cases} \frac{2+s}{(1+r)(2-s)} & \text{для } rs \leqslant 2, \\ \frac{2}{r(2-s)} & \text{для } rs > 2. \end{cases}$$

Также для трех машин доказано, что при добавлении в систему новой машины цена анархии не изменяется либо растет. Для случая N машин предлагается метод нахождения точного значения цены анархии путем решения ряда задач линейного программирования. Данный метод описан на примере трех машин и реализован в виде программы, позволяющей получать графики цены анархии как функции от скорости самой быстрой из трех машин и визуально сравнивать их с графиками оценок.

1. Модель

Рассмотрим систему $S = S(N, v)$, состоящую из N обслуживающих машин со скоростями $v_1 = 1 \leqslant \ldots \leqslant v_N = s$. Заметим, что такой выбор скоростей машин в системе не нарушает общность, так как всегда можно пронормировать скорости, разделив их на скорость самой медленной машины. Система используется множеством игроков $U = U(n, w)$, где каждый из n игроков выбирает машину для обслуживания своей задачи. Объем задачи игрока j равен w_j, $j = 1, \ldots, n$. Суммарный объем всех задач обозначим как $W = \sum\limits_{j=1}^{n} w_j$. Время выполнения задачи объемом w на свободной машине i со скоростью v_i равно w/v_i.

Рассмотрим следующую игру $\Gamma = \langle S(N, v), U(n, w), \lambda\rangle$ в чистых стратегиях. Полагаем, что каждый игрок может выбирать любую из машин. Стратегией игрока j является номер машины l_j, которую он выбирает для выполнения своей задачи. Тогда профиль стратегий в игре Γ – это вектор $L = (l_1, \ldots, l_n)$. Загрузку машины i, т.е. суммарный объем задач на ней, обозначим как $\delta_i(L) = \sum\limits_{j=1,\ldots,n: l_j = i} w_j$. Задержка машины i обозначается как

$$\lambda_i(L) = \sum_{j=1,\ldots,n: l_j = i} w_j/v_i = \frac{\delta_i(L)}{v_i};$$

заметим, что она одинакова для всех игроков, выбравших данную машину.

Предполагаем, что целью системы является минимизация простоя наименее занятой машины, т.е. максимизация времени ее работы или задержки на ней. Выигрыш системы определяется как минимальная среди всех машин задержка

$$SC(L) = \min_{i=1,\ldots,N} \lambda_i(L).$$

Обозначим

$$OPT = OPT(S, U) = \max_{L \text{ профиль в } \Gamma(S,U,\lambda)} SC(L)$$

– оптимальный выигрыш, или выигрыш системы в оптимальном случае, где максимум находится среди всех возможных профилей стратегий в игре $\Gamma(S, U, \lambda)$.

Профиль стратегий L, где ни одному игроку не выгодно единолично менять выбранную в L машину на другую для выполнения своей задачи, называется чистым равновесием по Нэшу. Для того чтобы дать формальное определение, обозначим через $L(j \to i) = (l_1, \dots, l_{j-1}, i, l_{j+1}, \dots, l_n)$ профиль, получаемый из профиля L, если игрок j меняет выбранную им в L машину l_j на некоторую машину i, а все остальные игроки сохраняют свои стратегии неизменными.

Определение 1. *Профиль стратегий L называется чистым равновесием по Нэшу тогда и только тогда, когда каждый игрок выбрал машину с минимальной задержкой, т.е. для каждого игрока* $j = 1, \dots, n$ *выполняется* $\lambda_{l_j}(L) \leqslant \lambda_i(L(j \to i))$ *для всех машин* $i = 1, \dots, N$.

Определение 2. *Ценой анархии для системы* S *называется максимум отношения оптимального выигрыша к выигрышу системы в наихудшем равновесии:*

$$PoA(S) = \max_U \frac{OPT(S,U)}{\min\limits_{L \text{ – равновесие по Нэшу в } \Gamma(S,U,\lambda)} SC(L)}.$$

2. Общий случай N машин

Приведем в данном разделе предположения и результаты, которые будут использованы в дальнейшем анализе.

Пусть имеется $N \geqslant 2$ машин со скоростями $v_1 = 1 \leqslant \dots \leqslant v_N = s$. Если количество задач n меньше числа машин N, то очевидно, что для любого профиля выигрыш системы будет нулевым. Для этого случая значение отношения оптимального выигрыша к равновесному по определению считаем равным 1. Далее полагаем, что $n \geqslant N$.

Если $s \geqslant 2$, то цена анархии не ограничена [4]. Далее везде будем полагать, что $s < 2$. Если количество задач n более или равно числу машин N, то в оптимальном случае, очевидно, все машины будут заняты. Более того, в любом равновесии в этом случае также все машины будут заняты.

Очевидна следующая оценка для оптимального выигрыша системы:

$$OPT \leqslant \frac{W}{\sum\limits_{i=1}^{N} v_i}, \tag{1}$$

так как минимальная задержка на машине не может быть больше, чем в случае, когда все задержки на машинах одинаковы.

Следующие леммы определяют оценки для равновесных задержек и объемов некоторых задач на машинах. Для полноты изложения леммы, заимствованные из внешних источников, также приведем с доказательствами.

Лемма 1. [13] *Если общее число задач n не меньше числа машин N, то для любого равновесного профиля загрузки всех машин больше нуля.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный равновесный профиль L. Пусть на некоторой машине i загрузка равна 0. Тогда найдется машина k, на которой находится не менее двух задач. Так как $v_1 = 1 \leqslant \ldots \leqslant v_N = s < 2$, выполняется $v_i > \frac{v_k}{2}$. Пусть w_k – объем минимальной задачи на k. Если она перейдет на свободную машину i, то ее задержка станет равна $\frac{w_k}{v_i} < \frac{2w_k}{v_k} \leqslant \lambda_k(L)$, т.е. уменьшится по сравнению с задержкой в профиле L.

Для профиля L обозначим n_k число задач на машине k.

Лемма 2. [13] *Если L – равновесный профиль и $SC(L) = \lambda_i(L)$, то для любой машины k из $n_k > \frac{v_k}{v_i}$ следует $\lambda_k(L) \leqslant \frac{n_k v_i}{n_k v_i - v_k}\lambda_i(L)$;*

Доказательство. Пусть w – наименьшая по объему задача на машине k. Тогда $w \leqslant \frac{v_k}{n_k}\lambda_k(L)$. L – равновесие, тогда $\lambda_k(L) \leqslant \lambda_i(L) + \frac{w}{v_i} \leqslant \lambda_i(L) + \frac{v_k}{n_k v_i}$, откуда $\lambda_k(L) \leqslant \frac{n_k v_i}{n_k v_i - v_k}\lambda_i(L)$.

Лемма 3. *Если L – равновесный профиль и $SC(L) = \lambda_i(L)$, то для любой машины k из $n_k \geqslant 2$ и $1 \leqslant \frac{v_k}{v_i} < 2$ следует, что объем любой задачи w_j на машине k не более $\frac{v_i v_k}{2v_i - v_k}\lambda_i(L)$. Более* *того, суммарный объем остальных задач на k также не превосходит* $\frac{v_i v_k}{2v_i - v_k}\lambda_i(L)$.

Доказательство. Пусть на машине k не менее двух задач. Пусть w – объем наименьшей на k задачи. Тогда объем остальных задач на k равен $v_k\lambda_k(L) - w$. Так как L – равновесие, то $\lambda_k(L) = \frac{v_k\lambda_k(L)}{v_k} \leqslant \lambda_i(L) + \frac{w}{v_i}$, откуда $v_k\lambda_k(L) - w \leqslant v_k\lambda_i(L) + \left(\frac{v_k}{v_i} - 1\right) w \leqslant v_k\lambda_i(L) + \left(\frac{v_k}{v_i} - 1\right) w_{j:l_j=k} \leqslant v_k\lambda_i(L) + \left(\frac{v_k}{v_i} - 1\right)(v_k\lambda_k(L) - w)$. Тогда $w \leqslant w_{j:l_j=k} \leqslant v_k\lambda_k(L) - w \leqslant \frac{v_i v_k}{2v_i - v_k}\lambda_i(L)$.

Следующая теорема определяет нижнюю границу для цены анархии для системы с $N \geqslant 3$ машин. Данная граница определяется скоростями трех машин в системе: первой и второй, которые являются самыми медленными, и последней, самой быстрой.

Теорема 1. *Для системы $N \geqslant 3$ машин со скоростями $v_1 = 1 \leqslant v_2 = r \leqslant v_3 \leqslant \ldots \leqslant v_N = s < 2$ цена анархии не меньше чем*

$$est(r,s) = \min\{\frac{2+s}{(1+r)(2-s)}, \frac{2}{r(2-s)}\}. \tag{2}$$

Доказательство. Для доказательства верхней оценки цены анархии достаточно привести примеры систем, дающих указанные в условии теоремы значения отношения оптимального выигрыша к наихудшему равновесному. Пусть в системе каждая машина i имеет скорость v_i для всех $i = 1, \ldots, N$.

1. Пусть сначала $rs \leqslant 2$. Тогда $est(r,s) = \frac{2+s}{(1+r)(2-s)}$. Рассмотрим набор задач: $w_1 = w_2 = (1+r)s$, $w_3^i = v_i(2+s)$, где $i = 3\ldots, N$, $w_4 = 2r - s$, $w_5 = 2 - rs$. В равновесии L задачи w_1 и w_2 находятся на машине N, каждая задача w_3^i, $i = 3\ldots, N$, на машине $i-1$, задачи w_4 и w_5 на машине 1. Покажем, что это равновесие и найдем выигрыш системы.

Загрузка на машине N равна $2s(1+r)$, на машине 1 она равна $(1+r)(2-s)$. На каждой из машин $i = 2, \ldots, N-1$ загрузка равна $v_{i+1}(2+s)$. Так как $\lambda_N(L) = 2(1+r) > (1+r)(2-s) = \lambda_1(L)$ и $\lambda_i(L) = \frac{v_{i+1}(2+s)}{v_i} \geqslant (1+r)(2-s) = \lambda_1(L)$, $i = 2, \ldots, N-1$, благодаря тому, что $2+s > 1+r$, $v_{i+1} \geqslant v_i$ и $2-s \leqslant 1$, то на машине 1 задержка наименьшая и равна загрузке.

Обозначим $\lambda_i^j(L) = \lambda_i(L) + \frac{w_j}{v_i}$ задержку на машине i в случае, если задача j отклонится от профиля L и перейдет на машину i с другой машины. Задача w_1 или w_2 не перейдет на машину i, $i = 2, \dots, N-1$, так как $\lambda_N(L) = 2(1+r) \leqslant (2+s)+(1+r) \leqslant \frac{v_{i+1}(2+s)+s(1+r)}{v_i} = \lambda_i^1(L) = \lambda_i^2(L)$. Также она не перейдет на машину 1, так как $\lambda_N(L) = 2(1+r) = (1+r)(2-s)+s(1+r) = \lambda_1^1(L) = \lambda_1^2(L)$. Каждая из задач w_3^i, $i = 3, \dots, N$, не перейдет на машину N, так как $\lambda_{i-1}(L) = \frac{v_i(2+s)}{v_{i-1}} \leqslant 2(1+r)+\frac{v_i(2+s)}{s} = \lambda_N^{i3}(L)$, что равносильно неравенству $(s-v_{i-1})v_i(2+s) \leqslant 2sv_{i-1}(1+r)$, которое справедливо, благодаря $s - v_{i-1} < 1$, $2+s < 4$ и $2\frac{s}{v_i}v_{i-1}(1+r) \geqslant 4$. Также никакая из задач w_3^i, $i = 3, \dots, N$, не перейдет на машину $j > i-1$, так как $\lambda_{i-1}(L) = \frac{v_i(2+s)}{v_{i-1}} < \frac{2v_i(2+s)}{v_j} \leqslant \frac{(v_i+v_j)(2+s)}{v_j} = \lambda_j^{i3}(L)$. Кроме того, w_3^i не перейдет на более медленную машину 1 или $j < i-1$, и ни одна задача с машины 1 не перейдет на другую машину, так как на машине 1 задержка минимальна. Поэтому данный профиль является равновесием с выигрышем $(1+r)(2-s)$.

Рассмотрим профиль, в котором каждая задача w_3^i, $i = 3, \dots, N$, находится на машине i, задачи w_1 и w_4 на машине 2 и задачи w_2 и w_5 на машине 1. Для этого профиля выигрыш системы равен $2+s$, значит, $OPT \geqslant 2+s$.

2. Пусть теперь $rs > 2$. Тогда $est(r,s) = \frac{2}{r(2-s)}$. Рассмотрим набор задач: $w_1 = w_2 = rs$, $w_3^i = 2v_i$, $i = 3, \dots, N$, $w_4 = r(2-s)$. В равновесии w_1 и w_2 находятся на машине N, каждая задача w_3^i, $i = 3, \dots, N$, на машине $i-1$, задача w_4 на машине 1. Покажем, что это равновесие и найдем выигрыш системы.

Так как $\lambda_N(L) = 2r > r(2-s) = \lambda_1(L)$ и $\lambda_i(L) = \frac{2v_{i+1}}{v_i} \geqslant r(2-s) = \lambda_1(L)$, $i = 2, \dots, N-1$, благодаря $\frac{2}{v_i} \geqslant 1$, $v_{i+1} \geqslant r$ и $2-s < 1$, то на машине 1 задержка наименьшая и равна $r(2-s)$. Задача w_1 или w_2 не перейдет на машину i, $i = 2, \dots, N-1$, так как $\lambda_N(L) = 2r = r+r \leqslant \frac{2v_{i+1}+rs}{v_i} = \lambda_i^1(L) = \lambda_i^2(L)$, а также на машину 1, так как $\lambda_N(L) = 2r = r(2-s)+rs = \lambda_1^1(L) = \lambda_1^2(L)$. Задача w_3^i, $i = 3, \dots, N$, не перейдет на машину N, так как $\lambda_{i-1}(L) = \frac{2v_i}{v_{i-1}} \leqslant 2r + \frac{2v_i}{s} = \lambda_N^{i3}(L)$, благодаря $\frac{2v_i(s-v_{i-1})}{s} \leqslant 2rv_i$.

Также никакая из задач w_3^i, $i = 3, \dots, N$, не перейдет на машину $j > i-1$, так как $\lambda_{i-1}(L) = \frac{2v_i}{v_{i-1}} \leqslant \frac{4v_i}{v_j} \leqslant \frac{2(v_i+v_j)}{v_j} = \lambda_j^{i3}(L)$. Кроме того, w_3^i не перейдет на более медленную машину 1 или $j < i-1$. Ни одна задача на машине 1 не перейдет на другие машины с не меньшей задержкой. Поэтому данный профиль является равновесием с выигрышем $r(2-s)$.

Рассмотрим профиль, в котором каждая задача w_3^i, $i = 3, \dots, N$, находится на машине i, задачи w_1 и w_4 на машине 2 и задача w_2 на машине 1. Для этого профиля выигрыш системы равен 2, значит, $OPT \geqslant 2$.

В обоих рассмотренных случаях отношение оптимального выигрыша к равновесному равно $est(r,s)$, следовательно, цена анархии не меньше данного значения.

Из полученной оценки (2) видно, что при увеличении скорости самой быстрой машины и приближении ее к значению 2 нижняя граница цены анархии неограниченно растет. Соответственно, получаем следствие из предыдущей теоремы.

Следствие 1. *Для системы $N \geqslant 3$ машин со скоростями $v_1 = 1 \leqslant v_2 = r \leqslant v_3 \leqslant \ldots \leqslant v_N = s < 2$ цена анархии стремится к бесконечности при $s \to 2-0$.*

Следующая теорема показывает, что для нахождения цены анархии достаточно ограничиться рассмотрением только тех игр, для которых оптимальный выигрыш системы равен 1.

Теорема 2. *Цена анархии для системы S равна*

$$PoA(S) = \max_{U_1 : OPT(S,U_1)=1} \frac{1}{\min\limits_{L \text{ – равновесие по Нэшу в } \Gamma(S,U_1,\lambda)} SC(L)}.$$

Доказательство. Покажем, что в любой игре $\Gamma(S,U,\lambda)$ объемы задач можно пронормировать таким образом, что оптимальный выигрыш будет равен единице, а значение отношения оптимального выигрыша к выигрышу в наихудшем равновесии не изменится.

Пусть L – наихудшее равновесие в игре $\Gamma(S,U,\lambda)$ с произвольным множеством игроков $U(n,w)$, где объем задачи каждого игрока j равен w_j, а L_{OPT} – оптимальный профиль в этой игре. Значение выигрыша системы в L равно SC, и выигрыш системы в оптимальном профиле равен OPT. Отношение оптимального выигрыша системы к наихудшему равновесному $\frac{OPT}{SC}$. Так как L – равновесие, то для любого игрока j $\frac{\sum\limits_{k=1,\ldots,n:l_k=l_j} w_k}{v_{l_j}} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1,\ldots,n:l_k=i} w_k+w_j}{v_i}$ для любой машины i.

Рассмотрим теперь игру с тем же набором машин и игроков, но где у каждого игрока j объем задачи равен $\frac{w_j}{OPT}$. Значение выигрыша системы в L равно $\frac{SC}{OPT}$, и выигрыш системы в L_{OPT} равен 1. Благодаря свойству линейной однородности задержек на машинах относительно их загрузок профили L и L_{OPT} являются, соответственно, наихудшим равновесием и оптимальным профилем в новой игре. В частности, L является равновесием в новой игре, так как для любого игрока j справедливо $\frac{\sum\limits_{k=1,\ldots,n:l_k=l_j} w_k}{v_{l_j}OPT} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1,\ldots,n:l_k=i} w_k+w_j}{v_iOPT}$ для любой машины i. Пусть L – не наихудшее равновесие в новой игре. Тогда в ней существует равновесие L' с выигрышем системы $\frac{SC'}{OPT}$, такое что выигрыш системы в L' меньше выигрыша системы в L, т.е. $\frac{SC'}{OPT} < \frac{SC}{OPT}$. Но тогда в исходной игре профилю L' соответствует выигрыш системы $SC' < SC$, и равновесие L' хуже равновесия L. Аналогично, L_{OPT} является оптимальным профилем в новой игре. Тогда отношение оптимального выигрыша системы к выигрышу в наихудшем равновесии в новой игре также равно $\frac{OPT}{SC}$.

Следовательно, любой игре $\Gamma(S, U, \lambda)$ соответствует игра $\Gamma(S, U_1, \lambda)$ с объемами задач, нормированными таким образом, что $OPT(S, U_1) = 1$. При этом отношения оптимального выигрыша к выигрышу в наихудшем равновесии для обеих игр одинаковы. Значит, для нахождения цены анархии достаточно рассмотреть только те игры, в которых оптимальный выигрыш равен 1.

3. Случай 3 машин

Точное значение цены анархии для случая двух машин найдено в работе [13]. Рассмотрим теперь случай, когда система S состоит из 3 машин. В данном разделе без потери общности полагаем, что скорости машин следующие: $v_1 = 1 \leqslant v_2 = r \leqslant v_3 = s$, т.е. машина 1 – самая медленная, машина 2 имеет среднюю скорость и машина 3 – самая быстрая.

Лемма 4. *Для системы трех машин со скоростями* $v_1 = 1 \leqslant v_2 = r \leqslant v_3 = s$ *для любой задачи объемом* w_k *справедливо* $OPT \leqslant \frac{W-w_k}{1+r}$.

Доказательство. Пусть существует такая задача w_k, находящаяся на машине i в оптимальном профиле L, что $OPT > \frac{W-w_k}{1+r}$. Тогда оптимальные задержки на всех машинах больше $\frac{W-w_k}{1+r}$. Кроме того, понятно, что $\lambda_i(L) \geqslant \frac{w_k}{v_i}$. Отсюда $W = v_i\lambda_i(L) + v_j\lambda_j(L)+v_l\lambda_l(L) > w_k+(v_j+v_l)\frac{W-w_k}{1+r} \geqslant w_k+(1+r)\frac{W-w_k}{1+r} = W$.

Лемма 5. *Для системы трех машин со скоростями* $v_1 = 1 \leqslant v_2 = r \leqslant v_3 = s$*, если известно, что две задачи с объемами* w_{k_1} *и* w_{k_2} *в оптимальном профиле находятся на одной и той же машине, то справедливо* $OPT \leqslant \frac{W-w_{k_1}-w_{k_2}}{1+r}$.

Доказательство. Пусть $OPT > \frac{W-w_{k_1}-w_{k_2}}{1+r}$ и задачи с объемами w_{k_1} и w_{k_2} в оптимальном профиле находятся на машине i. Тогда оптимальные задержки на всех машинах больше $\frac{W-w_{k_1}-w_{k_2}}{1+r}$ и $\lambda_i(L) \geqslant \frac{w_{k_1}+w_{k_2}}{v_i}$. Тогда $W = v_i\lambda_i(L) + v_j\lambda_j(L) + v_l\lambda_l(L) > w_{k_1} + w_{k_2} + (v_j + v_l)\frac{W-w_{k_1}-w_{k_2}}{1+r} \geqslant w_{k_1} + w_{k_2} + (1 + r)\frac{W-w_{k_1}-w_{k_2}}{1+r} = W$.

Теорема 3. *Для системы трех машин со скоростями* $v_1 = 1 \leqslant v_2 = r \leqslant v_3 = s < 2$ *цена анархии не превосходит* $est(r,s) = \min\{\frac{2+s}{(1+r)(2-s)}, \frac{2}{r(2-s)}\}$.

Доказательство. В ходе доказательства рассматриваются случаи с определенным количеством задач на каждой из двух машин с наибольшей задержкой. Для каждого случая показывается справедливость указанной в условии теоремы оценки цены анархии. Пусть L – равновесный профиль и $SC(L) = \lambda_i(L)$, т.е. машина i имеет наименьшую задержку. Рассмотрим различные случаи равновесия L.

1. На машинах j и l находится по одной задаче. В оптимальном профиле эти две задачи займут не более двух машин. Тогда в оптимальном профиле будет машина k, на которую попадет частично или полностью равновесная загрузка машины i и ничего больше. То есть $OPT \leqslant \frac{v_i \lambda_i(L)}{v_k} \leqslant s\lambda_i(L)$. По лемме 9 $s \leqslant est(r, s)$.

2. На машине j находится $n_j \geqslant 2$ задач, на машине l находится $n_l = 1$ задача. По лемме 2 $\lambda_j(L) \leqslant \frac{2v_i}{2v_i - v_j}\lambda_i(L)$. По лемме 4 $OPT \leqslant \frac{v_i\lambda_i(L) + \frac{2v_iv_j}{2v_i - v_j}\lambda_i(L)}{1+r} = \lambda_i(L)\frac{2v_i^2 + v_iv_j}{(1+r)(2v_i - v_j)}$.

а) Пусть сначала $v_i \geqslant v_j$. Тогда $2v_i^2 + v_iv_j \leqslant 3v_i^2$, так как данное выражение возрастает по v_j. Также $2v_i - v_j \geqslant v_i$, так как данное выражение убывает по v_j. Тогда $OPT \leqslant \lambda_i(L)\frac{3v_i}{1+r} \leqslant \lambda_i(L)\frac{3s}{1+r} \leqslant \lambda_i(L)est(r, s)$ по лемме 10.

б) Пусть теперь $v_i < v_j$. Тогда по лемме 11 $\frac{2v_i^2 + v_iv_j}{(1+r)(2v_i - v_j)} < \frac{2+s}{(1+r)(2-s)}$.

Рассмотрим теперь два случая. Первый, когда $v_i = r$ и $v_j = s$. В этом случае по лемме 12 $\frac{2r^2 + rs}{(1+r)(2r-s)} < \frac{2}{r(2-s)}$.

Второй случай, когда $v_i = 1$. По лемме 3 $w_k \leqslant \frac{v_k}{2-v_k}\lambda_i(L) \leqslant \frac{s}{2-s}\lambda_i(L)$ и $v_j\lambda_j(L) - w_k \leqslant \frac{s}{2-s}\lambda_i(L)$ для любой задачи объемом w_k из находящихся на машине j.

Если все задачи, находящиеся в профиле L на машине j, останутся там же и в оптимальном профиле, то возможны два варианта. Либо единственная в равновесии задача на машине l остается там же и в оптимальном профиле, тогда загрузка машины i может только уменьшиться при переходе к оптимальному профилю. Либо единственная задача уходит с машины l, тогда на машине l в оптимальном профиле может оказаться загрузка не более чем $\lambda_i(L)$, которая придет с машины i. В обоих вариантах $OPT \leqslant \lambda_i(L)$.

Если при переходе к оптимальному профилю задачи с машины j уходят только на l, то возможны те же два варианта. Если единственная в равновесии задача на машине l остается там же и в оптимальном профиле, то загрузка машины i может только уменьшиться при переходе к оптимальному профилю. Тогда $OPT \leqslant \lambda_i(L)$. Либо единственная задача уходит с машины l, тогда на машине l в оптимальном профиле может оказаться загрузка не более чем $\lambda_i(L) + \frac{s}{2-s}\lambda_i(L)$, которая придет с машин i и j. Тогда $OPT \leqslant \lambda_i(L)\frac{1+\frac{s}{2-s}}{v_l} \leqslant \lambda_i(L)\frac{1+\frac{s}{2-s}}{r} = \lambda_i(L)\frac{2}{r(2-s)}$.

Если при переходе к оптимальному профилю часть задач с машины j попадает на i, то возможны те же два варианта. Если единственная в равновесии задача на машине l остается там же и в оптимальном профиле, то на машине j загрузка станет не более чем $\lambda_i(L) + \frac{s}{2-s}\lambda_i(L)$, которая складывается из того, что останется на j и может прийти с i. Тогда $OPT \leqslant \lambda_i(L)\frac{1+\frac{s}{2-s}}{v_j} \leqslant \lambda_i(L)\frac{1+\frac{s}{2-s}}{r} = \lambda_i(L)\frac{2}{r(2-s)}$. Если единственная задача уходит с машины l, тогда на машине l в оптимальном профиле может оказаться загрузка не более чем $\lambda_i(L) + \frac{s}{2-s}\lambda_i(L)$, которая придет с машин i и j.

3. На машинах j и l находится ровно по две задачи: $n_j = n_l = 2$. Всего на машинах j и l четыре задачи, машин всего три, поэтому в оптимальном профиле как минимум две из этих задач (w_{k_1} и w_{k_2}) попадут на одну машину. Тогда по лемме 5 $OPT \leqslant \frac{W-w_{k_1}-w_{k_2}}{1+r} = \frac{v_i\lambda_i(L)+w_{k_3}+w_{k_4}}{1+r}$, где w_{k_3} и w_{k_4} – остальные две задачи, находящиеся на машинах j и l.

Рассмотрим машину $k \in \{j, l\}$. Если $v_i \leqslant v_k$, то по лемме 3 объем любой из задач на машине k не превосходит $\lambda_i(L)\frac{v_i v_k}{2v_i - v_k}$.

Пусть теперь $v_i > v_k$. L – равновесие, поэтому $\lambda_k(L) \leqslant \lambda_i(L) + \frac{w}{v_i}$, где w – меньшая по объему задача на машине k. Отсюда $w \geqslant v_i\lambda_k(L) - v_i\lambda_i(L)$. По лемме 2 $\lambda_k(L) \leqslant \lambda_i(L)\frac{2v_i}{2v_i - v_k} \leqslant 2\lambda_i(L)$, так как $2v_i - v_k \geqslant v_i$, откуда $w \leqslant \lambda_i(L)$. Вторая, большая по объему задача на машине k имеет объем $v_k\lambda_k(L) - w \leqslant v_k\lambda_k(L) = v_i\lambda_i(L) - (v_i - v_k)\lambda_k(L) \leqslant v_i\lambda_i(L) - (v_i - v_k)\lambda_i(L) = v_k\lambda_i(L) \leqslant r\lambda_i(L) \leqslant \lambda_i(L)\frac{rs}{2r-s} \leqslant \lambda_i(L)\frac{s}{2-s}$.

а) Пусть $v_i = s$, тогда $OPT \leqslant \lambda_i(L)\frac{s+2r}{1+r} \leqslant \lambda_l(L)\frac{3s}{1+r} \leqslant \lambda_i(L)est(r,s)$ по лемме 10.

б) Пусть $v_i = r$, тогда $OPT \leqslant \lambda_i(L)\frac{r+2\frac{rs}{2r-s}}{1+r} = \lambda_i(L)\frac{2r^2+rs}{(1+r)(2r-s)} \leqslant \lambda_i(L)est(r,s)$ по лемме 11.

в) Пусть $v_i = 1$, тогда $OPT \leqslant \lambda_i(L)\frac{r+2\frac{s}{2-s}}{1+r} = \lambda_i(L)\frac{2+s}{(1+r)(2-s)}$. С другой стороны, так как машин три, то обязательно будут две машины α и β, на которые попадет не более одной задачи из рассматриваемой четверки задач и, возможно, часть загрузки с машины i. Тогда OPT не больше, чем минимум задержки из этих машин: $OPT \leqslant \min\limits_{\alpha\neq\beta}\{\lambda_i(L)\frac{2}{v_\alpha(2-s)}, \lambda_i(L)\frac{2}{v_\beta(2-s)}\} \leqslant \min\{\lambda_i(L)\frac{2}{1(2-s)}, \lambda_i(L)\frac{2}{r(2-s)}\} = \lambda_i(L)\frac{2}{r(2-s)}$.

4. На машинах j и l следующее распределение задач: $n_j \geqslant 2$, $n_l \geqslant 3$. По лемме 2 $\lambda_j(L) \leqslant \lambda_i(L)\frac{2v_i}{2v_i-v_j}$ и $\lambda_l(L) \leqslant \lambda_i(L)\frac{3v_i}{3v_i-v_l}$. Тогда, в соответствии с оценкой (1), $OPT \leqslant \lambda_i(L)\frac{v_i+\frac{2v_iv_j}{2v_i-v_j}+\frac{3v_iv_l}{3v_i-v_l}}{1+r+s} \leqslant \lambda_i(L)est(r,s)$ по леммам 13 и 14.

Следующая теорема является частным случаем теоремы 1 для системы трех машин.

Теорема 4. *Для системы N машин со скоростями $v_1 = 1 \leqslant v_2 = r \leqslant v_3 = s < 2$ цена анархии не менее чем $est(r,s) = \min\{\frac{2+s}{(1+r)(2-s)}, \frac{2}{r(2-s)}\}$.*

Тогда из теорем 3 и 4 следует точное значение цены анархии для системы трех машин.

Теорема 5. *Для системы трех машин со скоростями $v_1 = 1 \leqslant v_2 = r \leqslant v_3 = s < 2$ цена анархии точно равна*

$$\begin{cases} \frac{2+s}{(1+r)(2-s)} & \text{для } rs \leqslant 2, \\ \frac{2}{r(2-s)} & \text{для } rs > 2. \end{cases}$$

Наличие точного значения цены анархии позволяет установить возможность роста цены анархии при добавлении в систему новой машины, т.е. ситуации, качественно аналогичной парадоксу Браесса [7, 10–12], когда при наращивании мощности системы ухудшаются ее характеристики. Следующая теорема доказывает, что при добавлении в систему новой машины цена анархии либо растет, либо не меняется.

Теорема 6. *Для системы S, состоящей из 2 машин со скоростями $1 \leqslant s$ цена анархии не уменьшается при добавлении новой машины со скоростью $1 \leqslant q < 2$.*

Доказательство. 1. Пусть в систему добавляется новая машина со скоростью $q \leqslant s$. Если $qs \leqslant s^2 < 2$, то цена анархии не уменьшается, так как $\frac{2+s}{(1+s)(2-s)} \leqslant \frac{2+s}{(1+q)(2-s)}$. Если $s^2 > 2$ и $qs \leqslant 2$, то цена анархии не уменьшается, так как $\frac{2}{s(2-s)} \leqslant \frac{2+s}{(1+s)(2-s)} \leqslant \frac{2+s}{(1+q)(2-s)}$. Если $s^2 > 2$ и $qs > 2$, то цена анархии не уменьшается, так как $\frac{2}{s(2-s)} \leqslant \frac{2}{q(2-s)}$.

2. Пусть в систему добавляется машина, которая по скорости превосходит имеющиеся, $s < q < 2$. Если $qs \leqslant 2$, то $s^2 \leqslant 2$, и цена анархии не уменьшается, так как $\frac{2+s}{(1+s)(2-s)} \leqslant \frac{2+q}{(1+s)(2-q)}$. Если $qs > 2$ и $s^2 \leqslant 2$, то цена анархии не уменьшается, так как $\frac{2+s}{(1+s)(2-s)} \leqslant \frac{2}{s(2-s)} \leqslant \frac{2}{s(2-q)}$. Если $qs > 2$ и $s^2 > 2$, то цена анархии не уменьшается, так как $\frac{2}{s(2-s)} \leqslant \frac{2}{s(2-q)}$.

4. Численный метод нахождения цены анархии

В предыдущем разделе получено аналитическое выражение для цены анархии для системы трех машин. В данном разделе предлагается метод вычисления цены анархии на примере системы трех машин, аналогичный вычислению цены анархии для игры баланса загрузки [3]. Данный метод может быть обобщен на системы с произвольным количеством машин, при этом возрастает количество задач линейного программирования, которые необходимо решать, а также число переменных и ограничений в них. В частности, для системы N машин необходимо решить $N!$ задач линейного программирования с $(2^N - 1)^{N-1}$ подзадачами в каждой на N^2 неизвестных.

Рассмотрим следующую систему линейных уравнений для компонент векторов $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$,

$c = (c_1, c_2, c_3)$.

$$(3)\qquad \begin{cases} \frac{a_1+a_2+a_3}{v_i} \leqslant \frac{b_1+b_2+b_3+\min\limits_{k=1,2,3:a_k>0} a_k}{v_j}, \\ \frac{a_1+a_2+a_3}{v_i} \leqslant \frac{c_1+c_2+c_3+\min\limits_{k=1,2,3:a_k>0} a_k}{v_l}, \\ \frac{b_1+b_2+b_3}{v_j} \leqslant \frac{c_1+c_2+c_3+\min\limits_{k=1,2,3:b_k>0} b_k}{v_l}, \\ \frac{a_1+a_2+a_3}{v_i} \geqslant \frac{b_1+b_2+b_3}{v_j} \geqslant \frac{c_1+c_2+c_3}{v_l}, \\ \max\limits_{k=1,2,3} a_k > 0, \\ \max\limits_{k=1,2,3} b_k > 0, \\ a_k, b_k, c_k \geqslant 0, k = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Данная система представляет собой набор гиперплоскостей в 9-мерном пространстве, проходящих через точку $(0,0,0,0,0,0,0,0,0)$, и множество решений представляет собой область пространства, ограниченную данными гиперплоскостями. Система совместна, так как, например, $a_1 = a_2 = a_3 = \alpha v_i$, $b_1 = b_2 = b_3 = \alpha v_j$, $c_1 = c_2 = c_3 = \alpha v_l$ является ее решением для всех $\alpha > 0$. При этом множество ее решений не ограничено, так как α может быть сколь угодно большим.

Рассмотрим систему S с тремя обслуживающими машинами со скоростями $1 \leqslant r \leqslant s < 2$. Пусть L – равновесие по Нэшу для системы S с тремя машинами и n игроками, такое что i – номер машины с наибольшей задержкой в данном профиле, машина j имеет среднюю по порядку задержку, l – наименьшую. Положим, что в равновесии L на машине i находится суммарный объем задач, равный $\sum\limits_{k=1,\ldots,n:l_k=i} w_k = a_1 + a_2 + a_3$, на машине j – объем $\sum\limits_{k=1,\ldots,n:l_k=j} w_k = b_1 + b_2 + b_3$ и на машине l – объем $\sum\limits_{k=1,\ldots,n:l_k=l} w_k = c_1 + c_2 + c_3$. Объем задач на каждой машине некоторым образом разделен на три части, так, что каждая из компонент трехмерных векторов a, b и c либо нулевая, либо положительная и включает в себя объем не менее чем одной задачи.

Лемма 6. *Пусть L – такое равновесие по Нэшу для игры с* *тремя машинами i, j, l и n игроков, что*

$$\begin{gathered}\lambda_i(L) \geqslant \lambda_j(L) \geqslant \lambda_l(L),\\ \sum_{k=1,\ldots,n:l_k=i} w_k = a_1 + a_2 + a_3,\\ \sum_{k=1,\ldots,n:l_k=j} w_k = b_1 + b_2 + b_3,\\ \sum_{k=1,\ldots,n:l_k=l} w_k = c_1 + c_2 + c_3,\end{gathered}$$

где для всех $k = 1, 2, 3$ каждая компонента a_k равна либо нулю, либо объему не менее чем одной задачи на машине i, b_k равна либо нулю, либо объему не менее чем одной задачи на машине j, и c_k равна либо нулю, либо объему не менее чем одной задачи на машине l. Тогда набор векторов a, b, c является решением системы (3).

Доказательство. Пусть L – равновесие по Нэшу и $\lambda_i(L) \geqslant \lambda_j(L) \geqslant \lambda_l(L)$. При этом по лемме 1 все $\lambda_k(L) > 0$, $k = i, j, l$. Тогда выполняются следующие неравенства

$$\begin{cases} \dfrac{\sum\limits_{k=1,\ldots,n:l_k=i} w_k}{v_i} \leqslant \dfrac{\sum\limits_{k=1,\ldots,n:l_k=j} w_k + \min\limits_{k=1,\ldots,n:l_k=i,w_k>0} w_k}{v_j},\\ \dfrac{\sum\limits_{k=1,\ldots,n:l_k=i} w_k}{v_i} \leqslant \dfrac{\sum\limits_{k=1,\ldots,n:l_k=l} w_k + \min\limits_{k=1,\ldots,n:l_k=i,w_k>0} w_k}{v_l},\\ \dfrac{\sum\limits_{k=1,\ldots,n:l_k=j} w_k}{v_j} \leqslant \dfrac{\sum\limits_{k=1,\ldots,n:l_k=l} w_k + \min\limits_{k=1,\ldots,n:l_k=j,w_k>0} w_k}{v_l},\\ \dfrac{\sum\limits_{k=1,\ldots,n:l_k=i} w_k}{v_i} \geqslant \dfrac{\sum\limits_{k=1,\ldots,n:l_k=j} w_k}{v_j} \geqslant \dfrac{\sum\limits_{k=1,\ldots,n:l_k=l} w_k}{v_l}. \end{cases}$$

Поскольку каждое ненулевое значение a_k, где $k = 1, 2, 3$, равно объему не менее чем одной задачи на машине i, то $\min\limits_{k:a_k>0} a_k \geqslant \min\limits_{k:l_k=i,w_k>0} w_k$, что обеспечивает выполнение первых двух неравенств системы (3). Аналогично, $\min\limits_{k:b_k>0} b_k \geqslant \min\limits_{k:l_k=j,w_k>0} w_k$. Это означает выполнение системы (3).

Лемма 7. *Любое решение системы (3) определяет равновесие по Нэшу L в игре с системой S из 3 машин i, j, l и игроками,* *задачи которых соответствуют ненулевым компонентам векторов a, b и c, а задержки упорядочены следующим образом: $\lambda_i(L) \geqslant \lambda_j(L) \geqslant \lambda_l(L)$.*

Доказательство. Пусть набор векторов a, b и c является решением системы (3). Рассмотрим игру с тремя машинами i, j и l. Пусть каждая из ненулевых компонент векторов a, b и c является объемом задачи очередного игрока. Предположим, что профиль L такой, что задачи с объемами $a_k > 0$ размещаются на машине i, задачи с объемами $b_k > 0$ – на машине j и задачи с объемами c_k – на машине l. Поскольку выполняются все неравенства системы (3), профиль L является искомым равновесием по Нэшу.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Любому равновесию по Нэшу L в игре с системой S, состоящей из 3 машин i, j, l и с n игроками соответствует равновесие по Нэшу L' в игре с той же системой S и не более 9 игроками, в котором на каждой машине размещено не более 3 задач, а задержки на машинах в L и L' совпадают.*

Доказательство. Рассмотрим равновесие по Нэшу L в игре с системой S, состоящей из 3 машин с n игроками. Пронумеруем машины так, что $\lambda_i(L) \geqslant \lambda_j(L) \geqslant \lambda_l(L)$. Согласно лемме 6, для любого равновесия по Нэшу в игре с системой S и любым количеством игроков есть соответствующее решение a, b, c системы (3). Согласно лемме 7, это решение определяет такое равновесие по Нэшу L' в игре с системой S, что ненулевые компоненты вектора a являются объемами задач на машине i, ненулевые компоненты b – объемами задач на машине j и ненулевые компоненты c – объемами задач на машине l. По определению сумма компонент вектора a равна загрузке на машине i в профиле L. Следовательно, задержки на машине i совпадают в обоих равновесиях L и L'. Аналогично, для машин j и l задержки на них в равновесии L совпадают с соответствующими задержками в равновесии L'.

Из данной теоремы следует, что достаточно рассматривать только те игры, где в равновесии на каждой машине находится не более трех задач и равновесие является решением системы (3). При этом область значений затрат системы совпадает с областью значений для игр с произвольным числом игроков.

Пусть компоненты векторов a, b, c выбираются таким образом, что в оптимальном профиле, дающем максимум выигрыша системы, на машине i находится суммарный объем задач, равный $a_1 + b_1 + c_1$, на j – объем $a_2 + b_2 + c_2$, на l – объем $a_3 + b_3 + c_3$. При этом в оптимальном профиле наименьшей может оказаться задержка на любой из трех машин. Кроме того, согласно теореме 2, объемы задач можно считать пронормированными таким образом, чтобы в оптимальном профиле минимальная среди всех машин задержка была строго равна 1. В нашем случае это означает, что справедливы следующие неравенства

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 + c_1 &\geqslant v_i, \\ a_2 + b_2 + c_2 &\geqslant v_j, \\ a_3 + b_3 + c_3 &\geqslant v_l, \end{aligned}$$

причем как минимум одно из них выполняется как равенство.

Лемма 8. *Решение задачи линейного программирования относительно компонент векторов a, b, c*

$$(4)\quad LPP(v_i, v_j, v_l) : \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 \to \min \\ (r1) \quad \frac{a_1+a_2+a_3}{v_i} \leqslant \frac{b_1+b_2+b_3+\min\limits_{k:a_k>0} a_k}{v_j}, \\ (r2) \quad \frac{a_1+a_2+a_3}{v_i} \leqslant \frac{c_1+c_2+c_3+\min\limits_{k:a_k>0} a_k}{v_l}, \\ (r3) \quad \frac{b_1+b_2+b_3}{v_j} \leqslant \frac{c_1+c_2+c_3+\min\limits_{k:b_k>0} b_k}{v_l}, \\ (r4) \quad \frac{a_1+a_2+a_3}{v_i} \geqslant \frac{b_1+b_2+b_3}{v_j} \geqslant \frac{c_1+c_2+c_3}{v_l}, \\ (r5) \quad \max\limits_{k=1,2,3} a_k > 0, \\ (r6) \quad \max\limits_{k=1,2,3} b_k > 0, \\ (r7) \quad a_k, b_k, c_k \geqslant 0, k = 1, 2, 3, \\ (r8) \quad a_1 + b_1 + c_1 \geqslant v_i, \\ (r9) \quad a_2 + b_2 + c_2 \geqslant v_j, \\ (r10) \quad a_3 + b_3 + c_3 \geqslant v_l \end{cases}$$

дает минимальное значение выигрыша системы в равновесии по Нэшу среди всех игр, в которых в равновесии не более трех задач *на каждой машине, i, j, l – номера машин в порядке уменьшения задержки, а оптимальный выигрыш системы равен 1.*

Доказательство. По лемме 7 любое решение неравенств $(r1) - (r7)$ задачи $LPP(v_i, v_j, v_l)$ определяет равновесие в игре с тремя машинами, где на каждой машине находится не более трех задач и i, j, l – номера машин в порядке уменьшения задержки.

Целевая функция в данной задаче ограничена снизу гиперплоскостями, соответствующими неравенствам (r8)–(r10). Неравенства (r1)–(r7) допускают сколь угодно малые неотрицательные значения целевой функции, в том числе нулевое. Следовательно, минимум задачи достигается на одной из границ, соответствующих трем последним неравенствам, что гарантирует выполнение одного из них как равенства, а значит, оптимальные затраты для игры, соответствующей решению задачи $LPP(v_i, v_j, v_l)$, строго равны 1.

Тогда для нахождения точного значения цены анархии для системы S с тремя машинами нужно решить ряд задач линейного программирования $LPP(v_i, v_j, v_l)$ для всех перестановок $(1, r, s)$. Минимальное из этих решений соответствует значению $\frac{1}{PoA(S)}$. То есть справедлива следующая теорема.

Теорема 8. *Цена анархии для системы трех машин S равна величине $PoA(S)$, обратной значению*

$$\frac{1}{PoA(S)} = \min_{(v_i,v_j,v_l)\text{ – перестановки }(1,r,s)} \left\{ \frac{c_1+c_2+c_3}{v_l} | a, b, c \text{ – решение } LPP(v_i, v_j, v_l) \right\},$$

где $LPP(v_i, v_j, v_l)$ – задача линейного программирования (4).

Доказательство. Согласно лемме 8, решение задачи (4) дает минимальное значение выигрыша системы в равновесии по Нэшу, где i, j, l – номера машин в порядке уменьшения задержки, среди всех игр, в которых в равновесии не более трех задач на каждой машине, а оптимальный выигрыш равен 1. Минимум решения среди задач для всех возможных перестановок $(1, r, s)$ в качестве значений (v_i, v_j, v_l) даст минимальное значение выигрыша системы в равновесии по Нэшу среди всех игр, в которых в равновесии не более трех задач на каждой машине, а оптимальный выигрыш равен 1.

По теореме 7 для любого равновесия в игре с системой обслуживания трех машин S и произвольным числом игроков можно найти соответствующее равновесие в игре с теми же машинами и множеством не более 9 игроков, где на каждой машине находится не более трех задач, причем выигрыши системы в обоих равновесиях совпадают. Значит, для нахождения цены анархии достаточно органичиться рассмотрением игр, где в равновесии на каждой машине находится не более трех задач.

По теореме 2 для нахождения цены анархии достаточно ограничиться рассмотрением игр, где выигрыш системы в оптимальном профиле строго равен 1.

5. Вычислительные эксперименты

Для нахождения оценок цены анархии в модели с тремя машинами разработано программное обеспечение, реализующее метод нахождения цены анархии, приведенный в предыдущем разделе. Данное программное обеспечение позволяет визуально сравнить на графике теоретические значения цены анархии и численно найденные путем решения ряда задач линейного программирования. Кроме того, данная программа дает возможность увидеть изменение цены анархии для большего числа машин, для которого еще не получены теоретические оценки. Параметры системы S задаются как опции программы, при этом скорость первой машины считается равной 1, для следующих задаются точные значения, при этом для скорости одной из машин задается диапазон значений. Таким образом можно наблюдать, как изменяется значение цены анархии при изменении скорости одной из машин.

На графиках рис. 1 и рис. 2 представлены примеры оценок цены анархии для различных значений скоростей второй и третьей машины. На рис. 1 скорость второй машины равна $r = 1{,}1$, а скорость третьей меняется в диапазоне $s \in [r, 2)$. На рис. 2 скорость самой быстрой машины равна $s = 1{,}7$, а скорость второй меняется в диапазоне $r \in [1, s]$. Здесь теоретические и расчетные значения цены анархии совпадают.

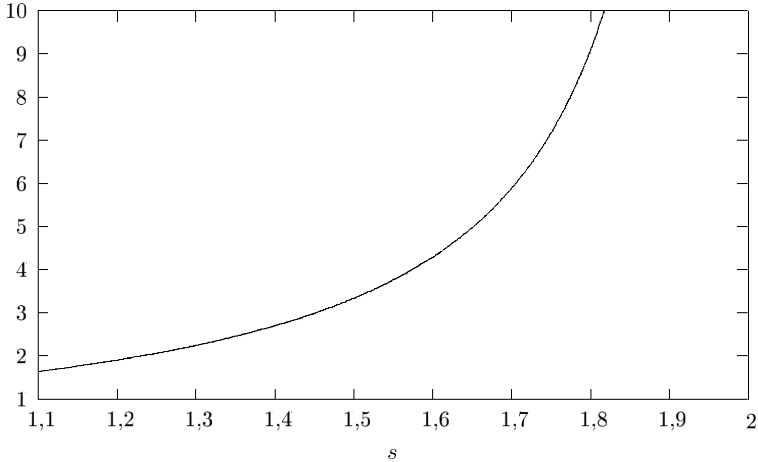

Рис. 1. Цена анархии для системы S, где $r = 1{,}1$, $s \in [r, 2)$

Более интересным является следующий пример. Рассматривается система четырех машин со скоростями $v_1 = 1 \leqslant v_2 = q \leqslant v_3 = r \leqslant v_4 = s < 2$. На графике рис. 3 и рис. 4 представлено изменение цены анархии в сравнении с нижней оценкой цены анархии (2), которая, фактически является значением цены анархии для трех из этих четырех машин со скоростями $1 \leqslant r \leqslant s < 2$. На рис. 3 представлено изменение цены анархии для следующих случаев. В области A значение q изменяется в диапазоне $[1, r]$, $r = 1{,}3$, $s = 1{,}5$. В области B $q = 1{,}3$, значение r изменяется в диапазоне $[q, s]$, $s = 1{,}5$. В области C $q = 1{,}3$, $r = 1{,}5$, значение s изменяется в диапазоне $[r, 2)$. Для этих случаев цена анархии для четырех машин совпадает с ее нижней оценкой (2).

На рис. 4 представлено изменение цены анархии для систем, где скорости машин достаточно мало отличаются друг от друга, т.е. в нормированном виде достаточно близки к единице. В этом случае наблюдается превышение значения цены анархии, представленной тонкой линией на рис. 4, над значением ее оценки

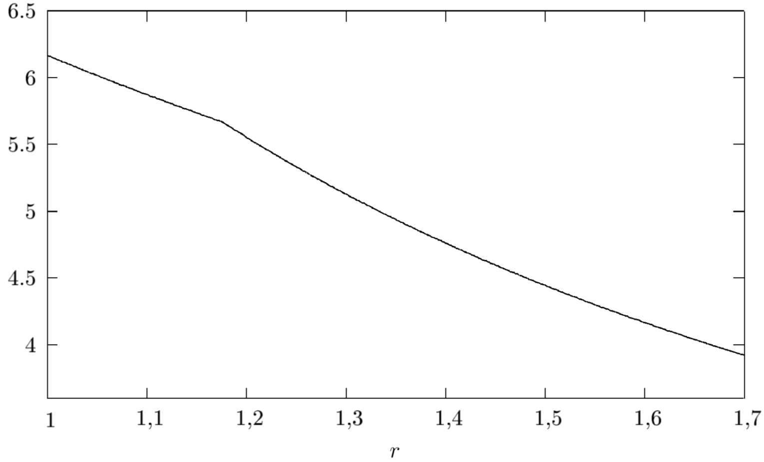

Рис. 2. Цена анархии для системы S, где $s = 1{,}7, r \in [1, s]$

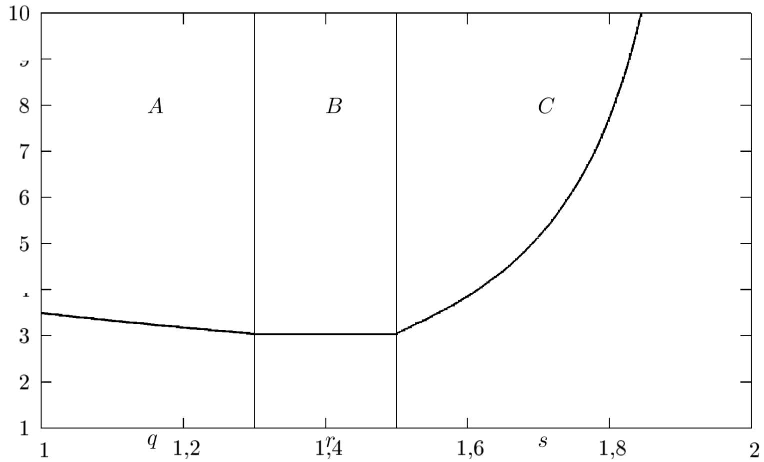

Рис. 3. Цена анархии для системы S четырех машин

(2), представленной жирной линией. При росте скоростей машин оба графика сливаются. В области A значение q изменяется в диапазоне $[1, r]$, $r = 1{,}05$, $s = 1{,}1$. В области B $q = 1{,}05$, значение r изменяется в диапазоне $[q, s]$, $s = 1{,}1$. В области C $q = 1{,}05$, $r = 1{,}1$, значение s изменяется в диапазоне $[r, 1{,}3)$.

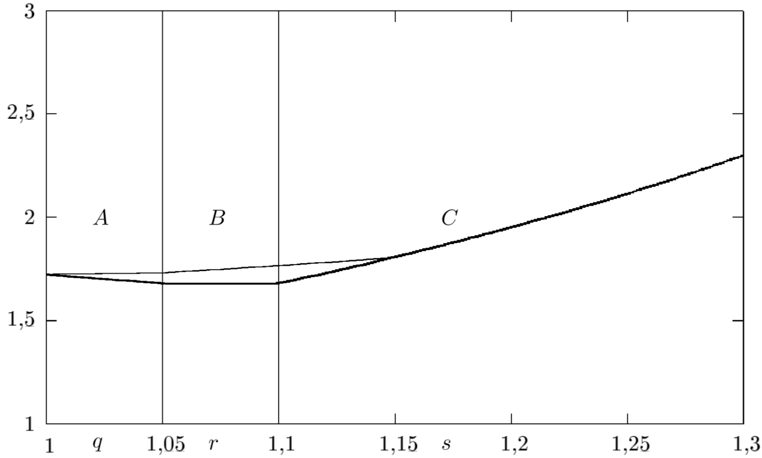

Рис. 4. Цена анархии для системы S четырех машин с малыми значениями скоростей

6. Заключение

Для системы обслуживания с N машинами и n игроками получена нижняя граница цены анархии в игре баланса загрузки. Более детально рассмотрена модель с тремя машинами, для которой найдено точное значение цены анархии и доказано, что цена анархии не меняется или растет при добавлении новой машины в систему трех машин. Также разработана методика вычисления точного значения цены анархии на примере трех машин. Данная методика может быть обобщена на системы с большим количеством машин, при этом возрастает количество задач линейного программирования, которые необходимо решать, а также число переменных и ограничений в них. Разработана программная реализация алгоритма вычисления точного значения цены анархии, с помощью которой проведены численные эксперименты сравнения полученных оценок цены анархии с ее точным значением, показывающие корректность полученных оценок. Для случая четырех машин в системе вычислительные эксперименты показывают частичное совпадение цены анархии для трех и четырех машин в системе, аналитическое подтверждение данного факта требует дальнейшего исследования.

7. Приложение

В данное приложение вынесены вспомогательные леммы, которые были использованы в доказательствах в разделе 3.

Лемма 9. *Для любых вещественных* $1 \leqslant r \leqslant s < 2$ *справедливо* $s \leqslant \min\{\frac{2+s}{(1+r)(2-s)}, \frac{2}{r(2-s)}\}$.

Доказательство. $\frac{2}{r(2-s)} \geqslant \frac{2}{s(2-s)} \geqslant s$, так как $s^3 - 2s^2 + 2 = s(s-1)^2 + (2-s) > 0$.

$\frac{2+s}{(1+r)(2-s)} \geqslant \frac{2+s}{(1+s)(2-s)} \geqslant s$, так как $s^3 - s^2 - s + 2 > s^3 - 2s^2 + 2 = s(s-1)^2 + (2-s) > 0$.

Лемма 10. *Для любых вещественных* $1 \leqslant r \leqslant s < 2$ *справедливо* $\frac{3s}{1+r} \leqslant \min\{\frac{2+s}{(1+r)(2-s)}, \frac{2}{r(2-s)}\}$.

Доказательство. Во-первых, $3s \leqslant \frac{2+s}{2-s}$, так как $3s^2 - 5s + 2 = (s-1)(3s-2) > 0$. Во-вторых, $\frac{3s}{1+r} \leqslant \frac{2}{r(2-s)}$, поскольку $6rs - 3rs^2 - 2 - 2r = r(6s - 3s^2 - 2) - 2 = r(1 - 3(s-1)^2) - 2 \leqslant r - 2 < 0$.

Лемма 11. *Для* $v_i < v_j$, $v_i, v_j \in \{1, r, s\}$, *где вещественные* $1 \leqslant r \leqslant s < 2$, *справедливо* $\frac{2v_i^2 + v_i v_j}{2v_i - v_j} \leqslant \frac{2+s}{2-s}$.

Доказательство. Если $v_i < v_j$, то $\frac{2v_i^2 + v_i v_j}{2v_i - v_j}$ убывает по v_i и возрастает по v_j, так как $4v_i^2 - 4v_i v_j - v_j^2 < 0$ и $v_i(2v_i - v_j) + 2v_i^2 + v_i v_j > 0$.

Лемма 12. *Для любых вещественных* $1 \leqslant r \leqslant s < 2$ *справедливо* $\frac{2r^2 + rs}{(1+r)(2r-s)} < \frac{2}{r(2-s)}$.

Доказательство. Неравенство в условии равносильно $f(r,s) = -r^2s^2 - 2s(r^3 - r^2 - r - 1) + 4(r^3 - r^2 - r) < 0$, проверим его истинность. Покажем, что $f'_r(r,s) = -2rs^2 + 2(2-s)(3r^2 - 2r - 1) < 0$, тогда $f(r,s) \leqslant f(1,s) = -s^2 + 4s - 4 = -(2-s)^2 < 0$.

Для каждого фиксированного s функция $f'_r(r,s)$ представляет собой параболу с ветвями, направленными вверх. Следовательно, наибольшее ее значение достигается на одном из концов отрезка $r \in [1,s]$. На левом конце $f'_r(1,s) = -2s^2 < 0$. На правом конце $f'_r(s,s) = -8s^3 + 16s^2 - 6s - 4 = -8s(s-1)^2 - 2(2-s) < 0$.

Лемма 13. *Для* $v_i \neq v_j \neq v_l$, $v_i, v_j, v_l \in \{1, r, s\}$, *где вещественные* $1 \leqslant r \leqslant s < 2$, *справедливо* $f(v_i, v_j, v_l) = v_i + \frac{2v_iv_j}{2v_i - v_j} + \frac{3v_iv_l}{3v_i - v_l} \leqslant 1 + \frac{2s}{2-s} + \frac{3s}{3-s}$.

Доказательство. Очевидно, что $f(v_i, v_j, v_l)$ возрастает по v_j и v_l, поэтому $f(v_i, v_j, v_l) \leqslant v_i + \frac{2sv_i}{2v_i - s} + \frac{3sv_i}{3v_i - s} = g(v_i)$.

Покажем, что $g(v_i)$ убывает по v_i. Производная $g'_{v_i}(v_i) = 1 - \frac{2s^2}{(2v_i - s)^2} - \frac{3s^2}{(3v_i - s)^2}$ возрастает по v_i и, значит, не превосходит $g'_{v_i}(s) = 1 - 2 - \frac{3}{4} < 0$.

Тогда $g(v_i) \leqslant g(1) = 1 + \frac{2s}{2-s} + \frac{3s}{3-s}$.

Лемма 14. *Для любых вещественных* $1 \leqslant r \leqslant s < 2$ *справедливо* $\frac{1 + \frac{2s}{2-s} + \frac{3s}{3-s}}{1+r+s} \leqslant \min\{\frac{2+s}{(1+r)(2-s)}, \frac{2}{r(2-s)}\}$.

Доказательство. Покажем сначала, что $1 + \frac{2s}{2-s} + \frac{3s}{3-s} \leqslant \frac{(1+r+s)(2+s)}{(1+r)(2-s)}$. Правая часть неравенства убывает по r, поэтому достаточно показать, что $1 + \frac{2s}{2-s} + \frac{3s}{3-s} \leqslant \frac{(1+2s)(2+s)}{(1+s)(2-s)}$. Это равносильно $s \leqslant s^2$, что выполняется при $s \geqslant 1$.

Покажем теперь, что $1 + \frac{2s}{2-s} + \frac{3s}{3-s} \leqslant \frac{2(1+r+s)}{r(2-s)}$. Правая часть неравенства убывает по r, поэтому достаточно показать, что $1 + \frac{2s}{2-s} + \frac{3s}{3-s} \leqslant \frac{2(1+2s)}{s(2-s)}$. Это неравенство равносильно $-4s^3 + 11s^2 - 4s - 6 = -s(2s-3)^2 - (2-s)(3-s) < 0$.

Литература

1. ANDELMAN N., FELDMAN M., MANSOUR Y. *Strong*

price of anarchy // Proc. of the 18th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA), 2007. – P. 189–198.

2. CHEN X., EPSTEIN L., KLEIMAN E. ET AL. *Maximizing the minimum load: The cost of selfishness* // Theoretical Computer Science. – 2013. – Vol. 482. – P. 9–19.
3. CHIRKOVA YU. V. *Price of anarchy in machine load balancing game* // Automation and Remote Control. – 2015. – Vol.76, Issue 10. – P. 1849–1864.
4. EPSTEIN L., KLEIMAN E., VAN STEE R. *Maximizing the minimum load: the cost of selfishness.* // Proc. of the 5th International Workshop on Internet and Network Economics, Lecture Notes in Computer Science, 2009. – Vol. 5929. – P. 232–243.
5. EVEN-DAR E., KESSELMAN A., MANSOUR Y. *Convergence time to Nash equilibria* // Proc. of the 30th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP2003), 2003. – P. 502–513.
6. FOTAKIS D., KONTOGIANNIS S. C., KOUTSOUPIAS E., ET AL. *The structure and complexity of nash equilibria for a selfish routing game* // Proc. of the 29th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP2002), 2002. – P. 123–134.
7. KORILIS Y. A., LAZAR A. A., ORDA A. *Avoiding the Braess paradox in non-cooperative networks* // J. Appl. Prob. – 1999. – No. 36. – P. 211–222.
8. KOUTSOUPIAS E., PAPADIMITRIOU C. H. *Worst-case Equilibria* // Proc. of STACS, 1999. – P. 404–413.
9. LÜCKING T., MAVRONICOLAS M., MONIEN B., AND ETC. *Which is the Worst-case Nash Equilibrium?* // Proc. of the 26th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science, 2003, LNCS 2747. – P. 551–561.
10. MAZALOV V. V. *Mathematical Game Theory and Applications.* – New York: Wiley, 2014. – 432 p.

11. MURCHLAND J. D. *Braess's paradox of traffic flow* // Transportation Research. – 1970. – No. 4. – P. 391–394.
12. ROUGHGARDEN T., TARDOS É. *How bad is selfish routing?* // Journal of the ACM. – 2002. – Vol. 49, No. 2. – P. 236–259.
13. TAN Z., WAN L., ZHANG Q., AND ETC. *Inefficiency of equilibria for the machine covering game on uniform machines* // Acta Informatica. – Vol. 49, Issue 6, September 2012. – P. 361–379.
14. WU Y., CHENG T. C. E., JI M. *Inefficiency of the Nash equilibrium for selfish machine covering on two hierarchical uniform machines* // Information Processing Letters. – Vol. 115, Issue 11, 1 July 2015. – P. 838–844.

PRICE OF ANARCHY FOR MAXIMIZING THE MINIMUM MACHINE LOAD

Julia Chirkova, Institute of Applied Mathematical Research of Karelian Research Centre of RAS, Petrozavodsk, Cand.Sc. (julia@krc.karelia.ru).

Abstract: The maximizing the minimum machine delay game with uniformly related machines is considered. Players choose machines with different speeds to run their jobs trying to minimize job's delay, i.e. chosen machine's completion time. The social payoff is the minimal delay over all machines. For the general case of N machines we find the lower bound for Price of Anarchy (PoA), and for the case of 3 machines we find its exact value. We prove that the PoA either remains the same or increases when an additional third machine is included into the system with two machines. Also we propose a method of computation the PoA value and illustrate it for 3 machines.

Keywords: Nash equilibrium, cover, maximizing the minimum load, price of anarchy, selfish load balancing.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.В. Савватеевым.

Поступила в редакцию 17.04.2016.
Дата опубликования 31.07.2016.