УДК 517.9
ББК 78.34

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СОСТОЯНИЯМИ ОДНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ В ОТНОСИТЕЛЬНО РАДИАЛЬНОМ СЛУЧАЕ

Шулепов А. Н.,[1] **Сагадеева М. А.**[2],
(*ФГБОУ ВПО Южно-Уральский государственный университет* (*НИУ*), *Челябинск*)

Рассмотрена модель, описываемая неклассическим уравнением математической физики, с коэффициентами зависящими от времени. Такие уравнения часто называют уравнениями соболевского типа в относительно радиальном случае, т.е. стационарное уравнение обладает разрешающей сильно непрерывной вырожденной полугруппой. Показано существование единственного оптимального управления решениями задачи Шоуолтера–Сидорова для нестационарной модели.

Ключевые слова: оптимальное управление, нестационарные уравнения соболевского типа, относительно радиальный случай.

Введение

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Рассмотрим краевую задачу

(1) $$\Delta x(s,t) = x(s,t) = 0, \qquad (s,t) \in \partial\Omega \times [0,T],$$

для уравнения в частных производных вида [1]

(2) $$(\lambda - \Delta)x_t = \nu(t)\Delta x - i\nu(t)d\Delta^2 x + u.$$

Здесь коэффициенты $\lambda, d \in \mathbb{R}$ описывают параметры системы, вектор-функция u отвечает внешним воздействиям на систему и является функцией управления.

---

[1] *Андрей Николаевич Шулепов, магистрант* (*andrewn92@mail.ru*).
[2] *Минзиля Алмасовна Сагадеева, кандидат физико-математических наук, доцент,* (*sagadeeva_ma@mail.ru*).

Задачу оптимального управления для модели (1), (2) будем исследовать с помощью абстрактных результатов. Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{U}$ – гильбертовы пространства. Пусть операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$.

Рассмотрим задачу Шоуолтера–Сидорова [4]

$$P(x(0) - x_0) = 0 \tag{3}$$

для уравнения соболевского типа [5, 6]

$$L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t) + u(t), \ (\ker L \neq \{0\}), \qquad t \in [0, \tau]. \tag{4}$$

Введем в рассмотрение функционал качества

$$J(u) = \alpha \sum_{q=0}^{1} \int_{0}^{\tau} \|z^{(q)}(t) - z_d^{(q)}(t)\|_{\mathfrak{Z}}^2 dt +$$

$$+(1-\alpha) \sum_{q=0}^{k} \int_{0}^{\tau} \left\langle N_q u^{(q)}(t), u^{(q)}(t) \right\rangle_{\mathfrak{U}} dt, \tag{5}$$

где $k = 0, 1, ..., p + 1$; $N_q \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, — самосопряженные и положительно определенные операторы; $z = Cx$, оператор $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Z})$, а $z_d = z_d(t, s)$ — плановое наблюдение из некоторого гильбертова пространства наблюдений $\mathfrak{Z}$. Отметим, что $\alpha \in (0, 1)$ и $(1 - \alpha)$ — весовые коэффициенты целей оптимального управления, заключающиеся в достижении плановых показателей наблюдаемой величины без скачкообразных изменений (первое слагаемое в (5)) и минимизации расходуемых для этого ресурсов управления (второе слагаемое в (5)). В работе приведено приложение абстрактных результатов, полученных в [2].

1. Абстрактные результаты

Доказательства утверждений этой части можно найти в работе [6].

Обозначим

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}, \quad \sigma^L(M) = \mathbb{C} \backslash \rho^L(M),$$

$$R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1} L, \quad L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}, \quad \mu \in \rho^L(M),$$

$$R^L_{(\lambda,p)}(M)=\prod_{k=0}^{p}R^L_{\lambda_k}(M),\ L^L_{(\lambda,p)}(M)=\prod_{k=0}^{p}L^L_{\lambda_k}(M),$$
$$\lambda_k\in\rho^L(M)\,(k=\overline{0,p}).$$

Определение 1. Оператор M называется *p-радиальным относительно* оператора L (или коротко (L,p)*-радиальным*), если

(i) $\exists\omega\in\mathbb{R}\ \forall\mu>\omega\ \Rightarrow\mu\in\rho^L(M)$;

(ii) $\exists K>0\ \forall\mu_k>\omega,\ k=\overline{0,p},\ \forall n\in\mathbb{N}$

$$\max\{\|(R^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})},\|(L^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Y})}\}\leqslant\frac{K}{\prod\limits_{k=0}^{p}(\mu_k-\omega)^n}.$$

Также введем обозначения $\mathfrak{X}^0=\ker R^L_{(\mu,p)}(M)$, $\mathfrak{Y}^0=\ker L^L_{(\mu,p)}(M)$, $L_0=L\Big|_{\mathfrak{X}^0}$, $M_0=M\Big|_{\mathrm{dom}M\cap\mathfrak{X}^0}$. Через $\mathfrak{X}^1$ ($\mathfrak{Y}^1$) обозначим замыкание линеала $\mathrm{im}R^L_{(\mu,p)}(M)$ ($\mathrm{im}L^L_{(\mu,p)}(M)$), а через $\tilde{\mathfrak{X}}$ ($\tilde{\mathfrak{Y}}$) – замыкание линеала $\mathfrak{X}^0\dot{+}\mathrm{im}R^L_{(\mu,p)}(M)$ ($\mathfrak{Y}^0\dot{+}\mathrm{im}L^L_{(\mu,p)}(M)$) в норме пространства $\mathfrak{X}$ ($\mathfrak{Y}$).

Определение 2. Сильно непрерывное отображение $V^\bullet:\mathbb{R}_+\to\mathcal{L}(\mathcal{V})$ называется *сильно непрерывной полугруппой разрешающих операторов* (или просто *разрешающей C_0-полугруппой*), если

(i) $V^sV^t=V^{s+t}\ \forall s,t>0$;

(ii) $v(t)=V^tv_0$ есть решение этого уравнения для любого v_0 из плотного в $\mathcal{V}$ линеала.

Полугруппу $\{V(t)\in\mathcal{L}(\mathcal{V}):t\in\overline{\mathbb{R}}_+\}$ будем называть *экспоненциально ограниченной* с константами C,ω, если

$$\exists C>0\ \ \exists\omega\in\mathbb{R}\ \ \forall t\in\overline{\mathbb{R}}_+\quad\|V(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})}\leqslant Ce^{\omega t}.$$

Теорема 1. *Пусть оператор M (L,p)-радиален. Тогда существует экспоненциально ограниченная с константами K,ω из определения* 1 *и сильно непрерывная разрешающая полугруппа для однородного уравнения* (4) *при $a\equiv1$, рассматриваемого на подпространстве $\tilde{\mathfrak{X}}$*

Замечание 1. Операторы разрешающей полугруппы для уравнения (4) при $a\equiv1$ и $t>0$ можно представить в виде

$$X(t) = s - \lim_{k\to\infty}\left(\left(L - \frac{t}{k}M\right)^{-1} L\right)^k = s - \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{t}R^L_{\frac{k}{t}}(M)\right)^k,$$

принимая во внимание поправки формулы, обсуждаемые в работе [3].

Замечание 2. Единицей полугруппы $\{X(t) \in \mathcal{L}(\tilde{\mathfrak{X}}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ является проектор P вдоль $\mathfrak{X}^0$ на $\mathfrak{X}^1$.

Определение 3. Оператор M называется *сильно* (L,p)-*радиальным*, если при любых $\lambda, \mu_0, \mu_1, ..., \mu_p > \omega$ выполняются условия

(i) существует плотный в $\mathfrak{Y}$ линеал $\overset{\circ}{\mathfrak{Y}}$ такой, что для всех $y \in \overset{\circ}{\mathfrak{Y}}$

$$\|M(\lambda L - M)^{-1} L^L_{(\mu,p)}(M) y\|_{\mathfrak{Y}} \leqslant \frac{\mathrm{const}(y)}{(\lambda-\omega)\prod\limits_{k=0}^{p}(\mu_k - \omega)};$$

(ii) $$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Y};\mathfrak{X})} \leqslant \frac{K}{(\lambda-\omega)\prod\limits_{k=0}^{p}(\mu_k - \omega)}.$$

Теорема 2. *Пусть M сильно (L,p)-радиален. Тогда*

(i) $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^0 \oplus \mathfrak{X}^1$, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}^0 \oplus \mathfrak{Y}^1$;

(ii) $L_k = L\Big|_{\mathfrak{X}^k} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^k;\mathfrak{Y}^k)$, $\quad M_k = M\Big|_{\mathrm{dom}M_k} \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X}^k;\mathfrak{Y}^k)$, $\mathrm{dom}M_k = \mathrm{dom}M \cap \mathfrak{X}^k$, $k = 0, 1$;

(iii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^0;\mathfrak{X}^0)$ *и* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^1;\mathfrak{X}^1)$.

2. Оптимальное управление для модели в относительно радиальном случае

Определение 4. Вектор-функция $x \in H^1(\mathfrak{X}) = \{x \in L_2(0,\tau;\mathfrak{X}) : \dot{x} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{X})\}$ называется *сильным решением уравнения* (4), если она почти всюду на $(0,\tau)$ обращает его в тождество. Сильное решение $x = x(t)$ уравнения (4) называется *сильным решением задачи Шоуолтера–Сидорова* (3), (4), если оно удовлетворяет (3).

Обозначим $\mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$. Построим гильбертово пространство $H^{p+1}(\mathfrak{Y}) = \{y \in L_2(0, \tau; \mathfrak{Y}) : y^{(p+1)} \in L_2(0, \tau; \mathfrak{Y}),\ p \in \mathbb{N}_0\}$ со скалярным произведением $[y, z] = \sum\limits_{q=0}^{p+1} \int\limits_0^{\tau} \left\langle y^{(q)}, z^{(q)} \right\rangle_{\mathfrak{Y}} dt.$

В силу результатов [2] при условии сильной (L, p)-радиальности оператора M для любых $x_0 \in \mathfrak{X}$ и $f \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$ существует единственное сильное решение $x \in H^1(\mathfrak{X})$ задачи Шоуолтера–Сидорова (3) для уравнения (4) вида

$$x(t) = X^{\int\limits_0^t a(\zeta)d\zeta} Px_0 + \int\limits_0^t X^{\int\limits_s^t a(\zeta)d\zeta} L_1^{-1}Q(f(s) + Bu(s))ds -$$
$$- \sum_{k=0}^{p} (M_0^{-1}L_0)^k M_0^{-1}(I - Q)(AD)^k A\,(f(t) + Bu(t))\,.$$

Определим пространства $\mathfrak{X} = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\mathfrak{Y} = W_2^{-1}(\Omega)$.

Пусть $\lambda, d \in \mathbb{R}$ фиксированы, тогда определим операторы соотношениями $L = \lambda - \Delta, M = \Delta - id\Delta^2$, где Δ – оператор Лапласа. Как показано в [1], оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ и оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ с $\mathrm{dom} M = \{x \in W_2^3(\Omega) : \Delta x(s,t) = x(s,t) = 0, s \in \partial\Omega\}$. Обозначим через $\{\lambda_k\}$ последовательность собственных значений однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа Δ в области Ω. Последовательность $\{\lambda_k\}$ занумерована по невозрастанию с учетом кратности. Обозначим через $\{\varphi_k\}$ ортонормированную (в смысле $L_2(\Omega)$) последовательность соответствующих собственных функций, $\varphi_k \in C^\infty(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$.

Лемма 1. *При любых $\lambda, d \in \mathbb{R}$ оператор M сильно $(L, 0)$-радиален.*

Доказательство Леммы приводится в [1].

Переопределим условие Шоуолтера–Сидорова:

$$P(x(0) - x_0) = \lim_{t \to 0+} \sum_{\mu_k \in \sigma^L(M)} \langle (x(t) - x_0), \varphi_k \rangle \varphi_k$$

.

Определение 5. Вектор-функцию $v \in H^1_\partial(\mathfrak{U})$ назовем *оптимальным управлением модели* (1), (2) решениями задачи (3), (4), если

$$J(v) = \min_{(x,u)\in\mathfrak{X}\times H^1_\partial(\mathfrak{U})} J(u), \tag{6}$$

где пары $(x,u) \in \mathfrak{X} \times H^1_\partial(\mathfrak{U})$ удовлетворяют (3), (4) и $H^1_\partial(\mathfrak{U})$ — замкнутое, выпуклое подмножество в $H^1(\mathfrak{U})$.

Теорема 3. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $p \in \mathbb{N}_0$, функция $a \in C^{p+1}([0,\tau);\mathbb{R}_+)$. Тогда при любых $x_0 \in \mathfrak{X}$ существует единственное оптимальное управление $v \in H^{p+1}_\partial(\mathfrak{U})$ модели* (1), (2) *задачи* (3), (5), (6).

Литература

1. САГАДЕЕВА М.А., ШУЛЕПОВ А.Н. *Об одной нелинейной модели на основе относительно радиального уравнения соболевского типа* // Вестник Одесского национального университета. Математика и механика. — 2013. — Т. 18, вып. 2(18). — С. 35–43.
2. САГАДЕЕВА М.А., ШУЛЕПОВ А.Н. *Задачи оптимального и жесткого управления решениями специального вида нестационарных уравнений соболевского типа* // Вестник СамГТУ. Серия: Физико-математические науки. — 2014. — №2(35). — С. 33—38.
3. САГАДЕЕВА М.А., ШУЛЕПОВ А.Н. *Аппроксимации вырожденных C_0-полугрупп* // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2013. – Т. 6, №2. – С. 133–137.
4. СВИРИДЮК Г.А., ЗАГРЕБИНА С.А. *Задача Шоуолтера-Сидорова как феномен уравнений соболевского типа* // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, №1. – С. 104–125.
5. FAVINI A., YAGI A. *Degenerate differential equations in Banach spaces.* – New York, Basel, Hong Kong: Marcel Dekker, Inc, 1999. — 236 p.

6. SVIRIDYUK G.A., FEDOROV V.E. *Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators.* – Utrecht, Boston: VSP, 2003. — 216 p.

OPTIMAL CONTROL OF STATES FOR A NONSTATIONARY MODEL IN THE RELATIVELY RADIAL CASE

Minzilya Sagadeeva, South Ural State University, Chelyabinsk, Cand.Sc., associate professor (sagadeeva_ma@mail.ru).
Andrew Shulepov, South Ural State University, Chelyabinsk, student (andrewn92@mail.ru).

Abstract: In this paper we prove the existence of a unique optimal and hard control over solutions of Showalter–Sidorov problem for the nonstationary model, which is described by Sobolev type equations. In this case, one of the operators in the equation is multiplied by a scalar function of the time-variable, besides stationary equation has a strong continuous degenerate resolving semigroup of operators.

Keywords: optimal control, nonstationary Sobolev type equations, relatively radial case.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии М.В. Губко.

*Поступила в редакцию 29.05.2015.
Дата опубликования 31.05.2016.*