

**С.А. КРАСНОВА, В.А. УТКИН, А.В. УТКИН**

**БЛОЧНЫЙ СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ  
РОБОТАМИ-МАНИПУЛЯТОРАМИ  
В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ**

ББК 22.18 22.21 32.811 32.816 32.96

**Краснова Светлана Анатольевна**

**Уткин Виктор Анатольевич**

**Уткин Антон Викторович**

**Блочный синтез систем управления роботами–манипуляторами  
в условиях неопределенности. – М.: ЛЕНАНД, 2014. – 208 с.**

Рассматриваются системы автоматического управления манипуляционными роботами с электрическими исполнительными устройствами. В рамках блочного подхода разработаны декомпозиционные процедуры синтеза обратной связи в задаче слежения за заданными траекториями, формализованными как в пространстве обобщенных координат, так и в пространстве рабочего органа (схвата) манипулятора. Предполагается, что объект управления функционирует в условиях параметрической и функциональной неопределенности, действия внешних неконтролируемых возмущений, а также при неполных измерениях компонент вектора состояния. Существенное внимание уделяется методам синтеза наблюдателей состояния электромеханических систем с разрывными и непрерывными корректирующими воздействиями.

Для преподавателей, научных работников и инженеров, специализирующихся в области теории и практики автоматического управления, а также для студентов и аспирантов.

Рецензенты:

д.р техн. наук *А.П. Курдюков,*

д-р физ.-мат. наук Л.Б. Рапопорт

Формат 60–90/16. Печ. л. 13. Зак. № ЗН-46.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».

117412, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

**ISBN 978–5–9710–0810–1**

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	5
<b>Глава 1. Манипуляционный робот как объект управления .....</b>	<b>10</b>
1.1. Функциональная схема управления роботом .....	10
1.2. Основные кинематические соотношения .....	13
1.3. Динамическая модель манипулятора .....	19
1.3.1. Общая динамическая модель механической системы .....	19
1.3.2. Динамическая модель трехзвенного манипулятора в цилиндрической системе координат .....	23
1.3.3. Динамическая модель двухзвенного плоскостного манипулятора .....	26
1.4. Модель манипулятора с учетом динамики исполнительных устройств .....	27
1.5. Состояние проблемы. Постановка задач.....	33
<b>Глава 2. Экспоненциальная сходимости к заданным траекториям в пространстве обобщенных координат .....</b>	<b>45</b>
2.1. Модель объекта управления. Постановка задачи .....	46
2.2. Базовые алгоритмы управления .....	47
2.3. Информационное обеспечение базовых алгоритмов управления ..	59
2.3.1. Наблюдатели состояния с разрывной коррекцией .....	60
2.3.2. Наблюдатели состояния с непрерывной коррекцией .....	65
2.4. Сравнительный анализ разработанных процедур синтеза .....	69
2.5. Результаты моделирования .....	73
<b>Глава 3. Решение задачи слежения с заданной точностью в пространстве обобщенных координат .....</b>	<b>87</b>
3.1. Модель объекта управления. Постановка задачи .....	88
3.2. Базовые алгоритмы управления .....	89

3.2.1. Алгоритмы управления без компенсации перекрестных связей .....	90
3.2.2. Алгоритмы управления с компенсацией перекрестных связей .....	95
3.3. Информационное обеспечение базовых алгоритмов управления ...	98
3.3.1. Наблюдатели состояния с разрывной коррекцией .....	98
3.3.2. Наблюдатель состояния с непрерывной коррекцией .....	102
3.4. Сравнительный анализ разработанных процедур синтеза .....	105
3.5. Результаты моделирования .....	108

#### **Глава 4. Прямое управление положением**

<b>рабочего органа манипулятора .....</b>	<b>118</b>
4.1. Модель объекта управления. Постановка задачи .....	119
4.2. Выходное отображение механической системы .....	120
4.3. Базовые алгоритмы управления в условиях определенности входных каналов управления .....	122
4.3.1. Общий закон управления .....	122
4.3.2. Линейная стабилизирующая обратная связь .....	124
4.3.3. Разрывная стабилизирующая обратная связь .....	129
4.3.4. Нелинейная стабилизирующая обратная связь .....	130
4.4. Базовые алгоритмы управления в условиях неопределенности входных каналов управления .....	132
4.4.1. Случай матрицы с преобладающей диагональю .....	133
4.4.2. Общий случай .....	138
4.4.3. Информационное обеспечение базовых алгоритмов управления .....	146
4.5. Сравнительный анализ разработанных процедур синтеза .....	148
4.6. Результаты моделирования .....	152
Список литературы .....	166

## Введение

Робототехника – быстроразвивающееся и перспективное направление науки и техники. Практической целью создания роботов явилась передача им тех видов деятельности, которые для человека являются трудоемкими, тяжелыми, монотонными, вредными. От традиционных средств автоматизации робототехнические системы (РС) отличаются универсальностью, возможностью их быстрой переналадки, что позволяет создавать на базе универсального оборудования гибкие автоматизированные производства. Круг задач, решаемых РС, постоянно расширяется, и, соответственно, возрастают требования к их функциональным возможностям и надежности функционирования.

Под управлением роботом понимают решение комплекса задач, связанных с выбором конструкции робота, его адаптацией к технологическому процессу, непосредственным программированием движений, а также синтезом и модификацией системы управления и его программным обеспечением.

Вопросы, связанные с конструированием робота и с особенностями технологических процессов, выполняемых манипулятором, остаются за рамками данной работы. В монографии рассматриваются проблемы синтеза автоматической системы управления роботом, при разработке которой требуется учитывать такие особенности объекта управления, как нелинейность, многосвязность, нестационарность, неопределенность динамической модели, действие внешних возмущений и др.

Объектом исследования являются манипуляционные роботы с электрическими исполнительными устройствами (ИУ) – технические устройства, снабженные манипуляторами и способные выполнять различные механические операции в своем рабочем пространстве. Манипуляционные роботы как средство автоматизации ручного труда являются сейчас наиболее распространенной и актуальной разновидностью роботов благодаря широкому классу решаемых задач.

Одним из перспективных направлений в проектировании систем управления электромеханическими объектами является использование теории систем с переменной структурой, в которых на многообразии переключений возникает скользящий режим. При работе в скользящем режиме система остается нечувствительной к параметрическим неопределенностям и внешним возмущениям, что позволяет обеспечить робастные свойства замкнутой системы. Алгоритмы управления на скользящих режимах просты в реализации, так как не требуют наличия детализированной динамической модели и длительного машинного времени для осуществления вычислений.

Эти методы использовались для синтеза систем управления РС в работах В.И. Уткина, Ф.Л. Черноусько, И.М. Ананьенского, Е.С. Пятницкого, В.И. Матюхина, А.Г. Лукьянова и др. Однако в силу большой общности в данных методах не всегда учитывалась специфика механических систем, например, законы сохранения или структура уравнений движения в форме Лагранжа или Гамильтона. Кроме того, в ряде исследований полагалось, что динамикой ИУ можно пренебречь и формировать управляющие моменты в виде разрывных функций. Отметим, что данные результаты непосредственно не реализуемы на практике из-за физических ограничений на силы и моменты, развиваемые ИУ.

Существенный пробел в подавляющем большинстве исследований по управлению электромеханическими объектами связан с тем, что фазовые переменные (обобщенные координаты, их скорости, ускорения, переменные состояния приводов) считаются доступными для измерения, т.е. задача наблюдения не ставится и не решается. В тоже время понятно, что полный комплект измерительных устройств может привести к существенному удорожанию системы управления, кроме того, измерительные устройства вносят в систему управления дополнительную динамику, что усложняет процедуру синтеза.

Авторы поставили цель разработать эффективные алгоритмы синтеза обратной связи в задаче слежения за заданными траекториями, формализо-

ванными как в пространстве обобщенных координат, так и в пространстве рабочего органа манипулятора. В модели объекта управления учитывается динамика исполнительных устройств (двигателей постоянного тока). Предполагается, что объект управления функционирует в условиях параметрической и функциональной неопределенности, действия внешних неконтролируемых возмущений, а также при неполных измерениях компонент вектора состояния. Последнее обстоятельство приводит к необходимости ввода в контур обратной связи наблюдателей состояния, с помощью которых решается задача оценивания неизмеряемых переменных не только объекта управления, но и (при определенных условиях) внешних воздействий.

Монография основана на работах авторов, опубликованных в последние 15 лет, и включает следующие основные проблемы:

1) обеспечение экспоненциальной сходимости к заданным траекториям обобщенных координат в предположении, что внешние возмущения и составляющие оператора объекта управления описываются гладкими, в общем случае, неизвестными функциями, а для измерений доступны только обобщенные координаты (глава 2);

2) обеспечение сходимости в заданную окрестность желаемых траекторий обобщенных координат в предположении, что внешние возмущения и составляющие оператора объекта управления описываются негладкими функциями, а для измерений доступны обобщенные координаты положения манипулятора и токи якорей электроприводов (глава 3);

3) разработка прямых процедур синтеза обратной связи в задаче слежения за заданными траекториями, формализованными в пространстве рабочего органа манипулятора, в предположении, что для измерений доступны только координаты рабочего органа (глава 4).

Основные научные результаты, представленные в монографии:

— показано, что приведение математических моделей электромеханических систем к блочным формам управляемости относительно выходных переменных является основой для последующего декомпозиционного синтеза и

наблюдателя состояния, и закона управления в одних и тех же преобразованных координатах, что существенно упрощает структуру регулятора;

– разработаны методы обеспечения инвариантности замкнутой системы к внешним возмущениям и неопределенностям оператора объекта управления широкого класса;

– на основе выходного отображения механической системы и измерений положения рабочего органа разработаны прямые процедуры синтеза обратной связи в задаче слежения за заданными траекториями, формализованными в терминах рабочего пространства, которые не требуют решения обратных задач кинематики и динамики в реальном времени;

– для информационной поддержки базовых законов управления электро-механическими системами разработаны методы построения наблюдателей состояния различного типа, что позволяет сократить количество измерений, объем вычислений, выполняемых в реальном времени, и объем априорной информации об объекте управления и среде его функционирования.

При решении указанных задач в рамках блочного подхода разработаны:

1) процедуры приведения математических моделей электромеханических систем к блочным формам управляемости относительно выходных переменных (обобщенных координат манипулятора или координат рабочего органа) и методы формирования управляющих моментов с учетом неопределенностей объекта управления и внешних возмущений широкого класса;

2) процедуры декомпозиционного синтеза базовых законов управления в задачах слежения за заданными траекториями, в частности, с обеспечением автономного управления;

3) процедура допредельной реализации метода иерархии управлений, обеспечивающих заданную точность отслеживания рабочим органом манипулятора программных траекторий в условиях неопределенности входных каналов управления;

4) процедуры каскадного синтеза наблюдателей состояния с разрывной

коррекцией, позволяющие за теоретически конечное время получить оценки преобразованных переменных, а также имеющихся модельных неопределенностей и внешних возмущений;

5) процедуры каскадного синтеза наблюдателей состояния с непрерывной коррекцией.

Монография предназначена для научных работников, студентов и аспирантов, инженеров и преподавателей, специализирующихся в области теории и практики автоматического управления.

# ГЛАВА 1

## МАНИПУЛЯЦИОННЫЙ РОБОТ КАК ОБЪЕКТ УПРАВЛЕНИЯ

В настоящее время робототехника представляет собой обширную, бурно развивающуюся область науки и техники, включающую вопросы кинематики, динамики, планирования стратегий, языков программирования и искусственного интеллекта. В данной работе в качестве объекта управления рассматриваются *манипуляционные роботы* – технические устройства, снабженные манипуляторами и способные выполнять различные механические операции в своем рабочем пространстве.

Глава имеет обзорно-постановочный характер. В разделе 1.1 приводится описание функциональной схемы управления роботом. В разделе 1.2 описан класс рассматриваемых манипуляторов, формулируются прямые и обратные задачи о положении и скорости. В разделе 1.3 приводится динамическая модель манипулятора в общем виде, конкретизируются математические модели манипуляторов с различным числом степеней свободы. В разделе 1.4 представлена модель манипулятора с учетом динамики исполнительных устройств – двигателей постоянного тока с независимым возбуждением. В разделе 1.5 дан краткий обзор состояния проблемы, формулируются цели и задачи, рассматриваемые в данной монографии.

### 1.1. Функциональная схема управления роботом

На рис. 1.1 представлена функциональная схема системы управления роботом [64]. Базовым элементом робота является манипулятор – механизм, обладающий несколькими степенями подвижности, который предназначен для перемещения и ориентации объектов в рабочем пространстве. Многозвенная конструкция манипулятора заканчивается схватом или сменным инструментом, которые предназначены для захвата объектов определенной формы и выполнения технологических операций соответственно.

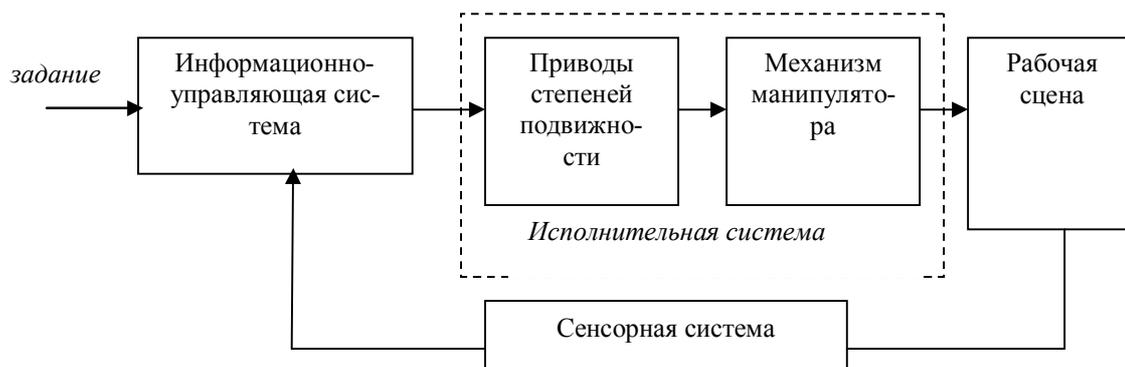


Рис. 1.1. Функциональная схема системы управления роботом

Звенья, образующие попарные соединения и допускающие относительные перемещения (поступательные или вращательные), называют кинематическими парами. Каждое звено, рассматриваемое как твердое тело, имеет шесть степеней свободы. Если в кинематической паре на относительное движение звеньев наложено  $S$  ( $S = 1 \div 6$ ) условий связи, определяющих класс кинематической пары, то число степеней свободы кинематической пары определяется выражением  $h = 6 - S$ . Например, для шарикового шарнира  $S = 3$ ,  $h = 3$ ; для цилиндрической пары  $S = 4$ ,  $h = 2$ ; для простого цилиндрического шарнира и призматической пары поступательного движения  $S = 5$ ,  $h = 1$ .

Манипуляционный механизм – кинематическая цепь (система звеньев), число степеней свободы которой определяется выражением [19]

$$v = 6n - \sum_{i=1}^5 ip_i, \quad (1.1)$$

где  $n$  – число подвижных звеньев,  $p_i$  – число кинематических пар  $i$ -го класса. Чтобы манипулятор мог свободно перемещаться и ориентировать в пространстве твердое тело, удерживаемое в хвате, он должен иметь не менее шести степеней подвижности. При  $v > 6$  имеет место кинематическая схема с избыточностью, необходимая в случаях, когда на функционирование манипулятора наложены дополнительные условия, например, обхождение препятствий в конфигурационном пространстве. Робот с шестью подвижностями является сложной автоматической системой как в изготовлении, так и в эксплуатации. Поэтому в реальных конструкциях промышленных роботов часто

используются механизмы с числом подвижностей менее шести. Наиболее простые манипуляторы имеют три, реже две, степени подвижности. Такие манипуляторы значительно дешевле в изготовлении и эксплуатации, но предъявляют специфические требования к организации рабочей среды, которые связаны с заданной ориентацией объектов манипулирования относительно механизма работа.

Звенья манипулятора связаны между собой с помощью соединений. Двигатели, приводящие в движение звенья, можно размещать в этих соединениях или передавать соответствующие силы и моменты через механизмы передачи движений, не меняющие кинематическую схему манипулятора [2].

Двигатель того или иного типа обычно выполняют в виде модуля, включающего также механизм передачи движений (редуктор), датчики обратной связи (потенциометры, тахомашины, вращающиеся трансформаторы и др.), сигналы с которых обрабатываются с помощью микропроцессоров или аналоговых устройств, вырабатывающих управляющие воздействия на двигатель [37]. Описанная система представляет собой *привод степени подвижности манипулятора* (см. рис. 1.1). В данной работе рассматриваются электромеханические манипуляторы с электрическим двигателем постоянного тока с обратной связью, замкнутой по моменту. *Исполнительная система* (см. рис. 1.1) – система управления, образованная приводами, работающими на общую механическую нагрузку, и обеспечивающая требуемое перемещение манипулятора и, соответственно, рабочего органа.

Первый тактический этап управления манипулятором – планирование траектории [12, 47], т.е. определение программного движения звеньев манипулятора или рабочего органа на некотором отрезке времени в режиме *off-line*. Движение робота моделируется с учетом имеющихся ограничений в рабочей зоне. На уровне планирования движений предполагаются известными цель движения, описание рабочей сцены с учетом имеющихся ограничений (препятствий), собственные возможности робота. Кроме того, при построении непрерывной траектории движения учитываются такие требования, как

обеспечения режима разгона/торможения, выполнение краевых условий и др. В системах с программным управлением траекторию (в общем случае – перемещение и текущую ориентацию рабочего органа) полностью программируют заранее. Когда это не представляется возможным, используют систему технического зрения (совокупность датчиков визуальной информации [7]), сигналы которой используют для коррекции траектории движения робота или для ее вычисления. Планирование траектории движения манипулятора промышленного робота осуществляется с помощью алгоритмов управления планированием. Эти алгоритмы управления рассматриваются как нелинейные алгоритмы разделения командного движения по степеням подвижности манипулятора. Их реализация связана с решением нелинейных уравнений, характеризующих конфигурацию механизма при заданном положении рабочих органов промышленных роботов. Для решения таких нелинейных задач прибегают либо к помощи ЭВМ, либо имитационному моделированию с использованием реальных моделей манипуляционных систем.

Второй стратегический этап – отработка заданной программной траектории приводами подвижных сочленений в режиме on-line.

## **1.2. Основные кинематические соотношения**

Предметом кинематики манипулятора является аналитическое описание геометрии движения манипулятора относительно некоторой заданной абсолютной системы координат без учета сил и моментов, порождающих это движение. В данной монографии будут рассматриваться манипуляторы, для которых выполняются следующие условия.

1. Звенья соединены последовательно и не имеют точек ветвления. Обычно нумерация звеньев начинается с нуля, в частности, манипулятор называют трехзвенным, если он имеет три подвижных звена, закрепленных на какой-либо опоре. Формально у такого манипулятора 4 звена, одно из которых (нулевое) является основанием и служит для закрепления.

2. Звенья манипулятора – абсолютно жесткие тела и упругие деформа-

ции в звеньях привода отсутствуют.

3. Звенья манипулятора образуют кинематические пары 5-го класса, т.е. в относительном движении звеньев одна степень свободы  $S = 5$ ,  $h = 1$ , а число степеней подвижности кинематической цепи (1.1) совпадает с числом кинематических пар. В свою очередь, число степеней подвижности кинематической цепи определяет число степеней свободы  $m$  рабочего органа (схвата). Существует два вида такого рода сочленений – вращательные и поступательные (телескопические) шарниры.

Наличие одной степени свободы позволяет задать положение одного звена относительно другого углом относительного поворота для вращательного сочленения и относительным смещением для телескопического сочленения. Набор этих параметров однозначно определяет конфигурацию манипулятора и, кроме того, является минимальным и независимым, его элементы называют *обобщенными координатами*.

Для  $n$ -степенного манипулятора с кинематическими парами 5-го класса каждая координата  $q_{1i}$  вектора обобщенных координат  $q_1 = \text{col}(q_{11}, \dots, q_{1n})$  представляет собой либо угол поворота, либо перемещение  $i$ -го звена относительно  $(i - 1)$ -го звена. Для систематического и обобщенного подхода к описанию и представлению расположения звеньев манипулятора относительно заданной абсолютной системы координат применяют матричную и векторную алгебру [6, 19].

С одной стороны, положение схвата манипулятора определяется  $m$  параметрами пространственного положения и ориентации связанной с ним системы координат. Для свободного твердого тела  $m_{\max} = 6$  – три координаты связанной со схватом системы координат и три угла, определяющие его ориентацию. С другой стороны, положение схвата полностью определяется положением всех остальных звеньев манипулятора, т.е.

$$y_1 = h(q_1), \quad y_1 = \text{col}(y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1m}), \quad h = \text{col}(h_1, h_2, \dots, h_m). \quad (1.2)$$

Значения обобщенных координат могут изменяться в определенных пределах, которые обусловлены конструкцией механизма, или их специально

назначают из соображений безопасности. Совокупность условий

$$q_{li\min} \leq q_{li} \leq q_{li\max}, \quad i = \overline{1, n} \quad (1.3)$$

определяет область изменения обобщенных координат  $q_1 \in Q_1 \subset R^n$ . Поскольку каждому сочетанию обобщенных координат соответствует некоторое положение объекта манипулирования, области  $Q_1$  соответствует некоторая область  $y_1 \in Y_1 \subset R^m$  в пространстве рабочей сцены, в которой может находиться рабочий орган. Область  $Y_1$  называют рабочим пространством или рабочей зоной манипулятора. Конфигурация и размеры рабочей зоны являются важными техническими характеристиками манипулятора, включаемыми в его паспортные данные. Их используют для того, чтобы правильно расположить манипулятор относительно обслуживаемого объекта. Граница рабочего пространства определяется кинематической схемой манипулятора.

Например, для манипулятора, работающего в декартовой системе координат, – это параллелепипед, грани которого параллельны осям координат; в цилиндрической – часть цилиндрического объема; в сферической – часть сферы. В общем случае построение границ рабочей зоны связано с решением прямой кинематической задачи, в частном случае – с геометрическими соотношениями, следующими из описания кинематической схемы.

*Прямая позиционная задача* формулируется следующим образом: по заданному вектору обобщенных координат манипулятора  $q_1$  и заданным геометрическим параметрам звеньев найти положение и ориентацию рабочего органа  $y_1 = h(q_1)$  относительно абсолютной системы координат.

Отображение допустимой области обобщенных координат в пространство рабочей зоны однозначно ( $Q_1 \mapsto Y_1$ ), но не взаимнооднозначно, так как одному и тому же положению рабочего органа могут соответствовать, вообще говоря, различные положения манипулятора.

*Обратная позиционная задача* формулируется следующим образом: при заданном векторе положения и ориентации рабочего органа  $y_1$  найти вектор обобщенных координат  $q_1$ . Решение обратной задачи  $q_1 = h^{-1}(y_1)$

сводится к решению нелинейной тригонометрической системы  $m$  уравнений с  $n$  неизвестными. Такого рода системы могут не иметь ни одного решения, т.е. заданные положение и ориентация рабочего органа не могут быть достигнуты никаким выбором углов (перемещений) в сочленениях; иметь единственное решение; иметь более одного решения, т.е. существует несколько (или бесконечно много) конфигураций манипулятора, обеспечивающих заданное положение рабочего органа. Проблема заключается в том, что не существует общего метода решения обратной задачи в явном виде, а именно это и является желательным, если программное движение манипулятора задано в виде траектории его рабочего органа  $y_{1d}(t)$ , а управление манипулятором осуществляется в режиме on-line. Применение численных методов решения также сопряжено с рядом трудностей, связанных с возможной расходимостью соответствующих итерационных схем. Исключение составляют некоторые конкретные манипуляторы (например, PUMA, PM-01), для которых обратная задача решается аналитически, но даже здесь для ее решения требуются большие вычислительные ресурсы.

Наряду с конфигурацией и размерами, используют такие численные характеристики рабочей зоны, как объем рабочего пространства, предел досягаемости, допустимый угол ориентации в рабочей точке, коэффициент сервиса, оценка манипулятивности в заданном направлении и др. [19].

Движение схвата задают как плоское перемещение вместе с некоторым центром и вращение вокруг оси, проходящей через этот центр. В общем случае скорость схвата также определяется шестеркой чисел, первая тройка – компоненты вектора угловой скорости, вторая – вектора линейной скорости.

Аналогично задачам о положении, формулируются задачи о скорости.

*Прямая задача о скорости:* по заданному вектору скоростей обобщенных координат  $\dot{q}_1$  найти вектор обобщенной скорости схвата  $\dot{y}_1$  (в общем случае угловую и линейную скорости).

Дифференцируя по времени выражение (1.2), имеем

$$\dot{y}_2 = J(q_1)\dot{q}_2, \quad (1.4)$$

где  $y_2 = \dot{y}_1$ ,  $y_2 = \text{col}(y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2m})$ ,  $q_2 = \dot{q}_1$ ,  $q_2 = \text{col}(q_{21}, q_{22}, \dots, q_{2n})$ ,  $J_{m \times n}$  – функциональная матрица Якоби для преобразования  $h$ , а именно,

$$J(q_1) = \frac{\partial h}{\partial q_1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial q_{11}} & \frac{\partial h_1}{\partial q_{12}} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial q_{1n}} \\ \frac{\partial h_2}{\partial q_{11}} & \frac{\partial h_2}{\partial q_{12}} & \dots & \frac{\partial h_2}{\partial q_{1n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_m}{\partial q_{11}} & \frac{\partial h_m}{\partial q_{12}} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial q_{1n}} \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Соотношение (1.4) показывает, что вектор обобщенной скорости схвата линейно зависит от вектора скоростей обобщенных координат. Существенно, что матрица Якоби функциональная (1.5), и ее ранг может быть разным в различных точках пространства обобщенных координат  $Q_1$ :  $\text{rank}J(q_1) = 0 \div \min\{m, n\}$ . При  $m = n$  матрица (1.5) становится квадратной, и для нее можно вычислить определитель  $\det J(q_1)$  – якобиан.

*Обратная задача о скорости:* по заданному вектору обобщенной скорости схвата  $y_2$  найти скорости в сочленениях  $q_2$ . В этом случае система (1.4) содержит  $m$  уравнений и  $n$  неизвестных  $q_2$ . Возможны следующие варианты.

1. При  $n = m$  обратная задача (1.4) имеет или единственное решение  $q_2 = J^{-1}(q_1)y_2$ ,  $\det J(q_1) \neq 0$ , или бесконечно много решений, если

$$\text{rank}J = \text{rank}(J, y_2) < n, \quad (1.6)$$

или не имеет ни одного решения, если

$$\text{rank}J < \text{rank}(J, y_2). \quad (1.7)$$

В последних двух случаях (1.6)–(1.7)  $\det J(q_1) = 0$ . Соответствующие конфигурации манипулятора  $q_1^*$  называются вырожденными (сингулярными). Такие точки должны быть заранее выделены в рабочем пространстве манипулятора. Далее будем полагать, что  $q_1 \in \bar{Q}_1 \subset Q_1$ , где  $\bar{Q}_1 = Q_1 \setminus \{q_1^*\}$ .

2. Если  $n > m$ , то  $\text{rank}J \leq m$ , обратная задача о скорости имеет беско-

нечно много решений при (1.6) или ни одного при (1.7). Такие манипуляторы называют избыточными. Их применяют при выполнении операций в загроможденном пространстве, когда требуется избежать столкновений с препятствиями в рабочей зоне, используя способность манипулятора при одном и том же положении схвата принимать различные конфигурации.

3. При  $n < m$  обратная задача (1.4) имеет или бесконечно много решений (1.6), или не имеет ни одного решения (1.7), или имеет единственное решение  $q_2 = J^+(q_1)y_2$ , если  $\text{rank}J(q_1) = n$ , где  $J^+ = (J^T J)^{-1} J^T$  – псевдообратная матрица матрицы  $J$ ,  $\det(J^T J)_{n \times n} \neq 0$ . Такие манипуляторы применяют для выполнения простых транспортных операций (загрузка–разгрузка, обслуживание конвейеров), когда не требуется обеспечить перемещение схвата в любую точку рабочего пространства с заданной ориентацией.

Отметим, что существует достаточно широкий класс манипуляторов, для которых возможно получить аналитическое решение обратной задачи о скорости. Процедура решения обратной задачи (1.4) часто является одной из составляющих алгоритма управления манипулятором, а вычислительная сложность процедуры обращения матрицы Якоби (1.5) определяет эффективность алгоритма управления в целом. Заметим, что вычислительная сложность данной процедуры чрезвычайно высока: по крайней мере, в настоящее время не существует представлений матриц  $J^{-1}(q_1)$ ,  $J^+(q_1)$  в замкнутой форме для манипулятора с произвольной кинематической схемой [19]. По этой причине часто используют приближенное решение уравнения (1.4) относительно  $q_2$ , приняв разумный критерий оценки степени приближения (например, метод наименьших квадратов).

При планировании движений манипулятора необходимо иметь информацию о том, какие линейные и угловые скорости могут быть развиты в процессе движения в каждой точке рабочей зоны, т.е. распределение допустимых скоростей и объем области допустимых скоростей, которые в совокупности определяют мобильность манипулятора. В частности, необходимо учитывать ограничения и по скорости, и по ускорению обобщенных координат.

Совокупность условий

$$q_{2i\min} \leq q_{2i} \leq q_{2i\max}, \dot{q}_{2i\min} \leq \dot{q}_{2i} \leq \dot{q}_{2i\max}, i = \overline{1, n}, \quad (1.8)$$

определяет области изменения обобщенных скоростей и ускорений  $q_2 \in Q_2 \subset R^n$ ,  $\dot{q}_2 \in Q_3 \subset R^n$ , которые учитываются при выборе исполнительных приводов по скорости, моменту и мощности.

### 1.3. Динамическая модель манипулятора

#### 1.3.1. Общая динамическая модель механической системы

Предметом динамики манипулятора является математическое описание действующих на манипулятор сил и моментов в форме уравнений движения. Динамические уравнения необходимы для моделирования движения манипулятора с помощью ЭВМ, при выборе законов уравнения и при оценке качества кинематической схемы и конструкции манипулятора. Динамическая модель манипулятора может быть построена на основе использования известных законов механики Ньютона и Лагранжа. Результатом применения этих законов является уравнения, связывающие действующие в сочленениях силы и моменты с кинематическими характеристиками и параметрами движения звеньев. В статике на манипулятор действуют силы тяжести звеньев, силы и моменты, развиваемые двигателями в осях кинематических пар, сила и момент реакции опоры, внешние силы и моменты, обусловленные воздействием внешней среды. Будем предполагать, что все внешние силы и моменты, действующие на  $i$ -е звено, приведены к главному вектору внешних сил, приложенному в его центре масс, и главному моменту внешних сил. Кинематические связи считаются идеальными. Это означает, что в случае вращательного соединения контакт осуществляется по абсолютно гладкой поверхности, а в случае поступательного – по абсолютно шероховатой. Связи считаются *голономными*, т.е. уравнения связей являются либо геометрическими (содержат только координаты), либо дифференциальными (содержат и производные от координат), но интегрируемыми [1, 10]. Для манипулятора, образующего разомкнутую кинематическую цепь, в качестве вектора обобщенных координат

$q_1$  целесообразно выбрать вектор положений звеньев, поскольку углы поворотов или перемещения в сочленениях непосредственно доступны измерению с помощью потенциометров или других датчиков [7].

В сделанных предположениях уравнения Лагранжа второго рода для манипулятора с  $n$  степенями свободы имеют вид [1, 10]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{2i}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_{1i}} = v_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.9)$$

где  $L$  – функция Лагранжа  $L = K - P$ ,  $K$  – полная кинетическая энергии манипулятора,  $P$  – полная потенциальная энергия манипулятора,  $v_i$  – обобщенная сила (или момент), приведенная к обобщенной координате  $q_{1i}$ .

При проектировании системы управления манипулятором для выбора двигателей и передаточных механизмов по степеням подвижности обычно используют матричную форму записи (1.9) вида

$$H(q_1)\dot{q}_2 + C(q_1, q_2)q_2 + G(q_1) = v, \quad (1.10)$$

где  $q_1 \in Q_1 \subset R^n$  – вектор положений звеньев манипулятора,  $\dot{q}_1 = q_2 \in Q_2 \subset R^n$  – вектор скоростей;  $H(q_1) = (H_{ij}(q_1))_{i,j=\overline{1,n}}$  – положительно-определенная нелинейная симметрическая матрица инерции;  $C(q_1, q_2) \in R^{n \times n}$  – матрица центробежных и кориолисовых сил, зависящих от обобщенных координат и скоростей, каждая компонента вектора  $Cq_2 = \text{col}(C_1, \dots, C_n)$  – квадратичная форма относительно угловых скоростей;  $G(q_1) \in R^n$  – вектор гравитационных сил,  $G = \text{col}(G_1, \dots, G_n)$ ;  $v \in R^n$  – вектор обобщенных сил или моментов, развиваемых ИУ. Компоненты вектора  $v = \text{col}(v_1, \dots, v_n)$  в механической системе (1.10) играют роль фиктивных управлений, которые могут быть реализованы в классе непрерывных гладких функций с ограниченными производными

$$v_{i \min} \leq v_i \leq v_{i \max}, \quad \dot{v}_{i \min} \leq \dot{v}_i \leq \dot{v}_{i \max}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.11)$$

что соответствует физическим ограничениям, не допускающим скачкообразного изменения сил и моментов в механических системах.

Под действием внешних сил в системе (1.10) обычно подразумевается только действие силы тяжести, учитываемое в векторе  $G(q_1)$ . Если внешние силовые факторы обусловлены другими причинами, то необходимо скорректировать соответствующие компоненты уравнений (1.10). Часто при этом правая часть уравнения (1.10) принимает вид  $(\nu + \eta)$ , где вектор  $\eta(t) \in R^n$  – часть обобщенных сил, трактуемых как неопределенные, но ограниченные внешние возмущения. Наличие вектора  $\eta$  обусловлено как воздействием внешней среды, так и тем фактом, что составляющие обобщенных сил (веса, сопротивления и др.) обычно известны лишь в общих чертах и могут существенно изменяться в процессе эксплуатации манипулятора. Далее эта составляющая внешних возмущений будет часто трактоваться как неучитываемые в исходной модели неопределенности.

Выражение (1.10), которое обеспечивает достаточно строгое описание динамики манипулятора, является многомерной, многосвязной нелинейной динамической системой  $n$  нелинейных дифференциальных уравнений 2-го порядка, т.е. суммарный порядок системы (1.10) равен  $2n$ . Отметим некоторые свойства системы (1.10), которые следуют из физических соображений.

1. Матрица  $H(q_1)$  является симметрической и положительно определенной, т.е.  $H(q_1) = H^T(q_1)$ ,  $H(q_1) > 0$ ,  $\det H(q_1) \neq 0 \Rightarrow \exists H^{-1}(q_1) \forall q_1, t$  [1, 10]. Существуют положительные скалярные величины  $\mu_1(q_1)$ ,  $\mu_2(q_1)$  такие, что  $\mu_1(q_1)I \leq H(q_1) \leq \mu_2(q_1)I$ , где  $I_{n \times n}$  – единичная матрица. Если все сочленения поступательные, то  $\mu_1(q_1)$ ,  $\mu_2(q_1)$  постоянны.

В общем случае предполагается, что для квадратичной формы относительно скоростей  $A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_{ij}(q_1) q_{2i} q_{2j}$  выполняются неравенства

$$\lambda_{\min} \sum_{i=1}^n q_{2i}^2 \leq A \leq \lambda_{\max} \sum_{i=1}^n q_{2i}^2 \quad \forall q_{1i}, q_{2i}, \quad (1.12)$$

где  $\lambda_{\min}, \lambda_{\max} = \text{const} > 0$ , т.е. собственные числа матрицы  $H(q_1) \forall q_1$  лежат в интервале  $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ .

2. Матрица  $\dot{H}(q_1) - 2C(q_1, q_2)$  – кососимметрическая и  $\forall q_1 \in Q_1$  выполняется условие

$$q_1^T [\dot{H}(q_1) - 2C(q_1, q_2)] q_1 \equiv 0. \quad (1.13)$$

В дальнейших построениях будем учитывать тот факт, что уравнения движения механических систем в форме уравнений Лагранжа (1.10), в частности соотношения (1.12), (1.13) ковариантны по отношению к преобразованию обобщенных координат [1, 10].

Для решения *прямой задачи динамики*, т.е. для определения движения манипулятора в виде  $q_1 = q_1(t)$ , вызванного приложенными силами и моментами в сочленениях  $v = v(t, q_1, q_2)$ , необходимо интерпретировать уравнения движения (1.10) как систему дифференциальных уравнений порядка  $2n$  относительно фазового вектора  $x = \text{col}(q_{11}, q_{12}, \dots, q_{1n}, q_{21}, q_{22}, \dots, q_{2n})$  и решить ее при соответствующих начальных условиях.

Чтобы решить *обратную задачу динамики* [13], т.е. найти вектор  $v$ , обеспечивающий заданное движение  $q_1 = q_1(t)$ , уравнения движения (1.10) следует интерпретировать как конечные соотношения, позволяющие после вычисления левой части найти требуемые силы и моменты.

Непосредственное решение обратной задачи динамики может привести к нелинейному закону управления [13], который будет, во-первых, достаточно громоздким, во-вторых, явно зависеть от динамических параметров объекта управления и, следовательно, потребовать значительных вычислительных затрат. Вычислительная сложность при использовании метода непосредственного интегрирования уравнений Лагранжа – одна из самых высоких по сравнению с другими методами моделирования движения манипуляционного механизма. Число операций умножения и сложения, необходимых для вычисления компонент уравнения (1.10), равно [19]:  $N_{\text{mul}} = 32n^4 + 86n^3 + 171n^2 + 53n - 128$ ,  $N_{\text{add}} = 25n^4 + 66n^3 + 129n^2 + 42n - 96$ . В связи с этим, на практике при управлении манипулятором в реальном времени используются некоторые упрощения.

Конкретизируем систему (1.10) для двух типов манипуляционных механизмов, модели которых используются в монографии для моделирования разработанных в содержательной части алгоритмов управления.

### **1.3.2. Динамическая модель трехзвенного манипулятора в цилиндрической системе координат**

Рассмотрим трехзвенный манипулятор, функционирующий в цилиндрической системе координат (см. рис. 1.2). На неподвижном основании (звено 0) размещается звено 1, которое вращается относительно неподвижного основания (относительное угловое перемещение  $q_{11}$ ). Звено 2 перемещается по вертикали относительно звена 1 (относительное линейное перемещение  $q_{12}$ ), звено 3 перемещается в горизонтальной плоскости относительно звена 2 (относительное линейное перемещение  $q_{13}$ ). На конце звена 3 укреплено захватное устройство (схват), предназначенное для захвата и удержания объекта манипулирования при работе манипулятора. Звенья манипулятора образуют между собой три одноподвижные кинематические пары (одну вращательную и две поступательные) и могут обеспечить перемещение объекта в пространстве без управления его ориентацией. Рабочей зоной рассматриваемого манипулятора является часть цилиндрического объема.

Показанная на рисунке 1.2 конструкция характерна для наиболее известных промышленных роботов VERSATRAN, UMS-2, M20П, предназначенных для переноса объекта в пространстве. Более сложные конструкции (например, РБ 241–02) дополнительно позволяют осуществлять поворот и покачивание объекта манипулирования при автоматической установке/снятии заготовок со станка, установке/взятии их с накопителя.

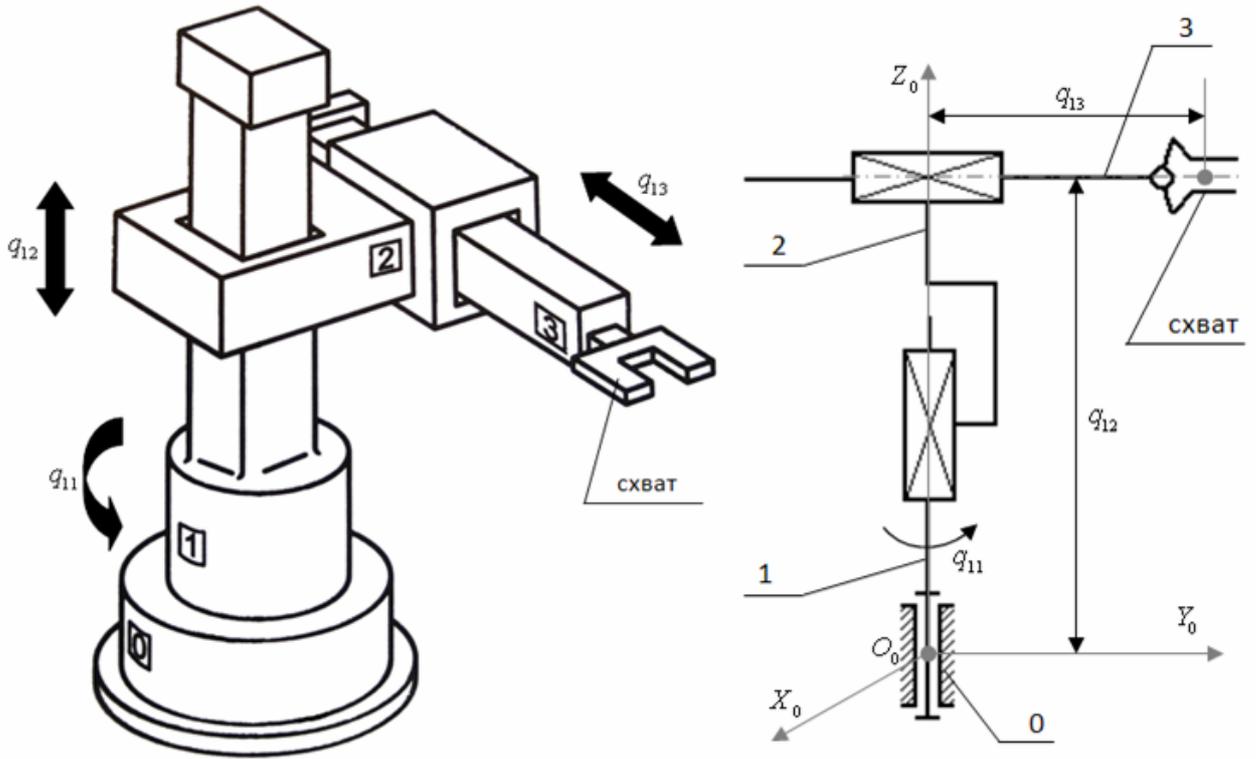


Рис. 1.2. Схема трехзвенного манипулятора

Динамическая модель манипулятора, показанного на рис. 1.2, представлена тремя нелинейными, взаимосвязанными подсистемами второго порядка [50, 51], при этом составляющие системы (1.10) имеют вид

$$H_{3 \times 3} = \text{diag}(H_i), \quad H_1 = (m'_3 + m_3)q_{13}^2 + m'_3 l q_{13} + m'_3 \frac{l^2}{3} + I_1 + I_2, \quad (1.14)$$

$$H_2 = m_2 + m'_3 + m_3, \quad H_3 = m'_3 + m_3; \quad C_1 = 2[(m'_3 + m_3)q_{13} - m'_3 \frac{l}{2}]q_{23}q_{21},$$

$$C_2 = 0, \quad C_3 = [m'_3 \frac{l}{2} - (m'_3 + m_3)q_{13}]q_{21}^2, \quad G_1 = 0, \quad G_2 = (m_2 + m'_3 + m_3)g, \quad G_3 = 0,$$

где  $q_1 = \text{col}(q_{11}, q_{12}, q_{13}) \in R^3$  – вектор обобщенных координат манипулятора,  $I_1$  [кг·м<sup>2</sup>] – приведенный момент инерции частей манипулятора, участвующих только во вращательном движении (совместно с частями электропривода и передаточного механизма);  $m_2$  [кг] – приведенная масса частей, участвующих в поступательном вертикальном движении;  $I_2$  [кг·м<sup>2</sup>] – момент инерции этих частей, приведенный к вертикальной оси;  $m'_3$  [кг] – масса руки, которая представляется в виде однородного стержня длиной  $l$  [м];  $m_3$

$[кг]$  – точечная масса, которой представляется схват с грузом;  $g = 9,8$   
 $[м/с^2]$  – ускорение силы тяжести.

Рабочий орган манипулятора движется по заданной пространственной траектории посредством управления движением отдельных звеньев манипулятора. Каждое звено оснащается электроприводом и датчиком положения звена,  $υ = \text{col}(υ_1, υ_2, υ_3)$  – вектор обобщенных сил и моментов, развиваемых исполнительными устройствами.

Программирование траектории движения схвата выполняется в неподвижной системе координат основания. Вектор обобщенных координат схвата  $y_1(t)$ , как функция времени технологического процесса, формируется через вектор обобщенных координат звеньев манипулятора  $q_1(t)$ , который в жесткой механической системе, по сути, является вектором обобщенных координат приводов. В данном простейшем случае движение точки  $P$  (центра масс схвата с грузом) рассматривается как прямолинейное движение в плоскости  $O_0X_0Y_0$  (см. рис. 1.3),  $P(x_p, y_p)$ .

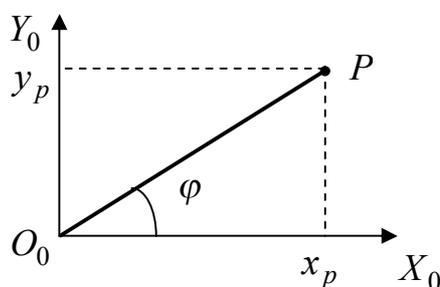


Рис. 1.3. Координаты центра масс схвата  
 в неподвижной системе координат основания

С учетом обозначений рис. 1.3 имеем уравнения прямой задачи о положении в виде

$$x_p = r \cos \varphi, \quad y_p = r \sin \varphi, \quad z_p = z, \quad (1.15)$$

откуда в аналитическом виде получим уравнения обратной задачи

$$r = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}, \quad \varphi = \text{arctg}(y_p / x_p), \quad z = z_p. \quad (1.16)$$

Таким образом, можно говорить о некотором классе манипуляторов, у которых матрица инерции  $H(q_1)$  имеет диагональный вид, и обратная задача о положении имеет однозначное аналитическое решение.

### 1.3.3. Динамическая модель двухзвенного плоскостного манипулятора

Динамическая модель двухзвенного плоскостного манипулятора описывается системой с двумя степенями свободы:  $q_1 = \text{col}(q_{11}, q_{12})$ ,  $y_1 = \text{col}(y_{11}, y_{12})$ ,  $n = m = 2$  (см. рис. 1.4). Данный манипулятор относится к типу SCARA (роботизированный манипулятор с избирательной настройкой), где две вращательные степени подвижности обеспечивают произвольное перемещение объекта в плоскости. Часто дополнительно осуществляется вертикальное перемещение плоскости позиционирования поступательной степенью подвижности. Такого рода схемы, сочетающие значительную гибкость при движении в плоскости с жесткостью конструкции в вертикальном направлении, эффективны при выполнении задач сборки и обработки плоских поверхностей.

Составляющие оператора системы (1.10) имеют вид [50, 51]

$$H_{2 \times 2} = (H_{ij}), \quad H_{11} = m_1 l_{c1}^2 + I_1 + m_2 (l_1^2 + l_{c1}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos q_{12}) + I_2, \quad (1.17)$$

$$H_{22} = m_2 l_{c2}^2 + I_2, \quad H_{12} = H_{21} = m_2 l_1 l_{c2} \cos q_{12} + m_2 l_{c2}^2 + I_2;$$

$$C_{2 \times 2} = (C_{ij}), \quad C_{11} = -m_2 l_1 l_{c2} \sin q_{12} q_{22},$$

$$C_{12} = -m_2 l_1 l_{c2} \sin q_{12} q_{22} - m_2 l_1 l_{c2} \sin q_{12} q_{21},$$

$$C_{21} = m_2 l_1 l_{c2} \sin q_{12} q_{21}, \quad C_{22} = 0; \quad G = \text{col}(G_1, G_2),$$

$$G_1 = m_1 l_{c1}^2 g \cos q_{11} + m_2 g [l_{c2} \cos(q_{11} + q_{12}) + l_1 \cos q_{11}],$$

$$G_2 = m_2 l_{c2} g \cos(q_{11} + q_{12}),$$

где  $I_1, I_2$  [ $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ ] – приведенные моменты инерции,  $m_1, m_2$  [ $\text{кг}$ ] – массы,  $l_1, l_2$  [ $\text{м}$ ] – длина звеньев,  $l_{c1}, l_{c2}$  [ $\text{м}$ ] – расстояния от начала до центров тяжести звеньев.

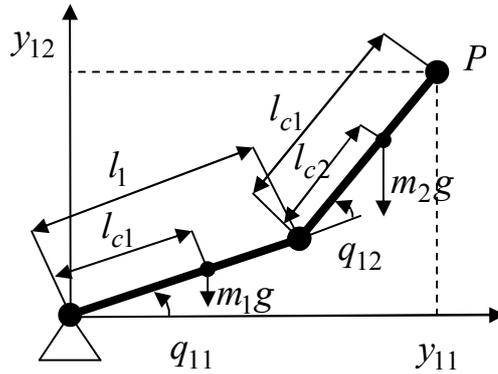


Рис. 1.4. Двухзвенный плоскостной манипулятор

Положение схвата определяется точкой с двумя координатами декартовой системы  $P(y_{11}, y_{12})$ , которые однозначно выражаются через угловые положения звеньев:

$$\begin{aligned} y_{11} &= h_1(q_1) = l_1 \cos q_{11} + l_2 \cos(q_{11} + q_{12}), \\ y_{12} &= h_2(q_2) = l_1 \sin q_{11} + l_2 \sin(q_{11} + q_{12}). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Как видим, нахождение уравнений обратной задачи в отличие от (1.15)–(1.16) уже представляет определенные трудности, в частности, ее решение неоднозначно. Для случая, когда в (1.18)  $l_1 = l_2 = l$ , решение обратной кинематической задачи имеет вид

$$q_{11} = a - \arccos\left(\frac{y_{11}}{2l \cos a}\right), \quad q_{12} = 2 \arccos\left(\frac{y_{11}}{2l \cos a}\right), \quad a = \arctg \frac{y_{12}}{y_{11}}.$$

## 1.4. Модель манипулятора

### с учетом динамики исполнительных устройств

Задачей управления РС является определение управляющих сил или моментов, которые должны обеспечивать максимально приближенное к заданной траектории движение конечного звена манипулятора в реальном времени. Задача управления включает задачу формирования динамической модели реального манипулятора и задачу выбора законов или стратегий управления, обеспечивающих выполнение поставленных целей. Промышленные роботы могут иметь электрические, гидравлические или пневматические приводы.

В данной работе в качестве исполнительных устройств рассматриваются электродвигатели постоянного тока (ДПТ). Главные достоинства такого привода – плавность хода и линейность нагрузочной характеристики. Несмотря на известные недостатки коллекторных машин и наметившуюся тенденцию к использованию более дешевых и надежных асинхронных двигателей с короткозамкнутым ротором, можно предположить, что в ближайшей перспективе ДПТ будут модернизироваться и эксплуатироваться в широких масштабах и, следовательно, сохранят свою значимость.

Удивительным представляется тот факт, что, несмотря на то, что уже на протяжении столетия ведутся работы по разработке управляемых электроприводов, интерес к этой проблематике не ослабевает и в настоящее время. Во многом это определяется тем обстоятельством, что широкое использование электроприводов на практике породило тенденцию консервативности по отношению к новым подходам в управлении ими ввиду наличия целой гаммы электроприводов разных поколений и вполне объяснимой осторожности к новым идеям из-за высоких требований к надежности работы и технологичности производства. Тем не менее, в связи с появлением и развитием микропроцессорной техники появляются возможности реализации все более сложных и, как следствие, эффективных алгоритмов управления, что и обуславливает развитие теории и практики создания автоматизированных электроприводов.

Из существующих электрических машин постоянного тока ДПТ с независимым возбуждением получил наибольшее распространение, его обмотки питаются от источников постоянного тока. При этом необходимым условием непрерывного процесса электромеханического преобразования энергии является протекание хотя бы по части обмотки переменного тока. Данное условие обеспечивается в ДПТ работой коллектора, который коммутирует поступающий на обмотку якоря от источника постоянный ток с частотой, равной частоте вращения ротора. Таким образом, ДПТ, с точки зрения внутренних процессов, является электрической машиной переменного тока. При этом

динамика процессов в ДПТ описывается уравнениями, являющимися частным случаем обобщенного математического описания электромеханического преобразования энергии в неподвижной системе координат  $(\alpha, \beta)$ .

Будем рассматривать математическую модель динамики ДПТ с независимым возбуждением, представленную в пространстве состояний в виде системы дифференциальных уравнений в относительных единицах [51]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = a_{21}(x_3x_4 - m_l(x_1, x_2, t)), \\ \dot{x}_3 &= a_{32}(u_1 - x_2x_4 - a_{31}x_3), \\ \dot{x}_4 &= a_{41}(u_2 - f(x_4)), \end{aligned} \quad (1.19)$$

где  $x_1 \in R$  – угол поворота вала двигателя;  $x_2 \in R$  – угловая скорость;  $x_3 \in R$  – ток якоря;  $x_4 \in R$  – магнитный поток;  $u_1, u_2 \in R$  – напряжения якоря и обмотки возбуждения соответственно,  $f(x_4)$  – функция, характеризующая процесс насыщения магнитной системы двигателя, обратная известной функции намагничивания.

Все моменты, обусловленные механическими потерями, входят в момент сопротивления нагрузки, который в общем случае представляет собой функцию времени, угла поворота и угловой скорости  $m_l(x_1, x_2, t)$ . В некоторых приложениях его можно полагать неизвестной постоянной величиной:  $\dot{m}_l = 0$ .

Коэффициенты системы (1.19) рассчитываются следующим образом:  $a_{21} = 1/T_m$ ;  $T_m = J\omega_b / M_b$  – механическая постоянная времени, где  $J$  – приведенный момент инерции, в состав которого при жесткой связи двигателя и исполнительного механизма входят моменты инерции двигателя и исполнительного механизма,  $\omega_b$  – базовое значение угловой скорости,  $M_b$  – базовое значение момента на валу двигателя;  $a_{31} = \rho_{я} = I_{яb}r_{я} / M_b$  – относительное сопротивление якорной цепи, где  $I_{яb}$  – базовое значение тока якоря,  $r_{я}$  – сопротивление якорной обмотки;  $a_{32} = 1/(\rho_{я}T_{я})$ ,  $a_{41} = 1/(T_{\epsilon} + T_{\epsilon m})$ ,  $T_{\epsilon} = 2p\xi\varpi_{\epsilon}\Phi_b / (r_{\epsilon}I_{\epsilon b})$  – постоянная времени обмотки возбуждения,  $T_{\epsilon m} = 2p\xi\varpi_{\epsilon m}\Phi_b / (r_{\epsilon m}I_{\epsilon m})$  – постоянная времени вихревых токов, где  $p$  –

число пар полюсов двигателя,  $\xi$  – коэффициент, связанный с коэффициентом рассеяния  $\sigma = 1,12 \div 1,18$  выражением  $\xi = 1 + (0,5 \div 0,7)(\sigma - 1)$ , в котором учтено, что часть потока рассеивания сцеплена не со всеми витками обмотки возбуждения,  $\varpi_g$  – число витков обмотки возбуждения,  $\Phi_b$  – базовое значение магнитного потока,  $r_g$  – сопротивление обмотки возбуждения,  $I_{gb}$  – базовое значение тока обмотки возбуждения,  $\varpi_{gm}$  – число витков фиктивной короткозамкнутой обмотки,  $r_{gm}$  – полное сопротивление короткозамкнутой обмотки,  $I_{gm}$  – базовое значение тока возбуждения.

За базовые значения потока, тока якоря, напряжения на якоре, угловой скорости и намагничивающей силы принимаются их номинальные значения:  $\Phi_b = \Phi_n$ ,  $I_{яb} = I_{яn}$ ,  $U_{яb} = U_{яn}$ ,  $\omega_b = \omega_n$ ,  $F_b = F_n$ . Базовые значения момента, тока возбуждения и напряжения возбуждения принимаются в виде:  $M_b = c_m \Phi_b I_{яb}$ ,  $I_{gb} = F_b / \omega$ ,  $U_{gb} = I_{gb} r_g$ .

Силовой канал электропривода в общем случае включает в себя электрический, электромеханический и механический преобразователи энергии. Современный ДПП, как правило, строится по принципу «управляемый выпрямитель напряжения – двигатель», когда электрическая энергия подается на обмотки двигателя через управляемые тиристорные преобразователи, позволяющие в широком диапазоне изменять напряжение на обмотке якоря или в обмотке возбуждения двигателя [62].

Иерархия движений по темпам в электроприводе обусловлена тем, что самым медленным контуром является механическая подсистема (первое и второе уравнения в (1.19)), более быстрой является модель поля (четвертое уравнение в (1.19), которое является автономно управляемым относительно напряжения обмотки возбуждения), а самым быстродействующим является токовый контур (третье уравнение в (1.19)). С учетом высокой скорости протекания электрических процессов в тиристорных преобразователях по сравнению с остальными частями электропривода, последние можно считать безынерционными элементами.

Для получения редуцированной модели ДПТ в задаче управления по моменту при жестком типе сочленений приводов со звеньями манипуляторов запишем уравнение Кирхгофа для цепи якоря

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e_b(t), \quad v(t) = K_a(i_g)i(t), \quad (1.20)$$

где  $u$  – напряжение на якорной обмотке двигателя [В];  $L$  – индуктивность якорной цепи [Гн];  $R$  – активное сопротивление якорной цепи [Ом];  $i$  – ток якоря [А];  $e_b$  – электродвижущая сила якоря [В], пропорциональная угловой скорости перемещения вала двигателя  $e_b(t) = K_b \dot{\theta}_m(t)$ ;  $k_b$  – коэффициент пропорциональности [Вс/рад];  $v(t)$  – электромагнитный момент, развиваемый на валу двигателя [Нм];  $K_a(i_g)$  [Нм/А] – коэффициент пропорциональности. Будем полагать, что  $i_g, K_a(i_g) = \text{const}$ .

Пусть  $p$  – передаточное отношение редуктора, связывающее угловое перемещение вала двигателя  $\theta_m$  [рад] с угловым перемещением вала нагрузки  $\theta_L$ , тогда  $\theta_m = p\theta_L$ . Перепишем уравнение (1.20) относительно момента, развиваемого двигателем:

$$\dot{v} = -\frac{R}{L}v - \frac{K_a K_b p}{L} \dot{\theta}_L + \frac{K_a}{L} u, \quad (1.21)$$

где с учетом сделанных предположений  $\theta_L = q_2$ .

Введем следующие обозначения для коэффициентов передачи

$$R/L = a > 0, \quad K_a K_b p/L = d > 0, \quad K_a/L = b > 0.$$

Таким образом, рассматриваемая динамическая модель манипулятора (1.10) с жестким типом сочленений с учетом действия внешних неконтролируемых возмущений и динамики исполнительных устройств принимает вид

$$\begin{aligned} H(q_1)\dot{q}_2 + C(q_1, q_2)q_2 + G(q_1) &= v + \eta; \\ \dot{v} &= -Av - Dq_2 + Bu, \end{aligned} \quad (1.22)$$

где  $A, D, B \in R^{n \times n}$  – диагональные матрицы с положительными, постоянными коэффициентами передачи;  $u \in R^n$  – вектор напряжений якорей электродвигателей, который является истинным (разрывным) управляющим воздей-

ствием в электромеханической системе (1.22).

При синтезе системы управления следует учитывать энергетические и другие ограничения на ресурсы управления:

$$|u_i| \leq U_i = \text{const}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.23)$$

Модель электромеханической системы (1.22) принята за основу дальнейшего изложения.

Для моделирования в качестве исполнительных устройств приняты двигатели PMDC Motors серии GNM4125 (Micro Electronics, Inc.) со следующими характеристиками:

1) двигатель серии GNM41125:

$$R = 0,86 [\Omega], L = 1,85 [mH], K_a = 0,064 [Hm / A], K_b = 0,634 [Bc / рад], \\ a = 464,9, d = 21,9, b = 34,6, U = 24 [в]; \quad (1.24)$$

2) двигатель серии GNM41175:

$$R = 0,24 [\Omega], L = 0,56 [mH], K_a = 0,068 [Hm / A], K_b = 0,674 [Bc / рад], \\ a = 369,2, d = 81,8, b = 121,4, U = 24 [в]; \quad (1.25)$$

3) двигатель серии GNM26A

$$R = 1,9 [\Omega], L = 1,9 [mH], K_a = 0,047 [Hm / A], K_b = 0,462 [Bc / рад], \\ a = 1000, d = 11,4, b = 24,7, U = 24 [в]. \quad (1.26)$$

Заметим, что при эластичном типе сочленений приводов со звеньями манипуляторов в качестве обобщенных сил, развиваемых исполнительными устройствами, принимаются невязки по угловым положениям звеньев манипулятора и приводов:

$$v = K(x_1 - q_1) = m_l(x_1, x_2, t),$$

где  $K \in R^{n \times n}$  – известная диагональная матрица постоянных коэффициентов жесткости электроприводов. Тогда динамическая модель электромеханической системы (1.10), (1.19) принимает вид

$$\begin{aligned}
H(q_1)\dot{q}_2 + C(q_1, q_2)q_2 + G(q_1) &= v + \eta; \\
\dot{v} &= K(x_2 - q_2), \quad \dot{x}_2 = a_{21}(x_3x_4 - v), \\
\dot{x}_3 &= a_{32}(u_1 - x_2x_4 - a_{31}x_3), \\
\dot{x}_4 &= a_{41}(u_2 - f(x_4)).
\end{aligned}$$

Перечислим основные особенности математической модели (1.22) электромеханической системы:

- высокая размерность  $3n$ ;
- нестационарность (зависимость от конфигурации манипулятора);
- взаимосвязанность степеней подвижности, влияние их друг на друга;
- наличие нелинейностей (в том числе разрывных зависимостей типа сухого трения);
- ограничения на управляющие воздействия и фазовые переменные;
- неполнота информации о внешних возмущениях, а часто и собственных параметрах системы и операторе объекта управления;
- не выполнены условия согласования, т.е. внешние возмущения не принадлежат пространству управления  $u$ ;
- отсутствие информации о некоторых компонентах вектора состояния при неполном комплекте измерительных устройств.

Перечисленные особенности свидетельствуют о нетривиальности задач управления системой (1.22), решение которых требует привлечения и разработки специальных методов.

### 1.5. Состояние проблемы. Постановка задач

При исследовании задач управления манипуляционными роботами необходимо, прежде всего, определить цель управления. В наиболее типичных приложениях она состоит в обеспечении достаточно быстрого и точного перемещения из одной заданной точки в другую. М. Вукобратович [8] акцентировал внимание и на другой задаче: обеспечить «практическую устойчивость» движения схвата манипулятора вдоль заданной пространственной траектории, которая означает требование ограниченности отклонений фактической траектории от заданной (номинальной). Следует отметить, что мани-

пуляционный робот с высокой точностью позиционирования (т.е. статической точностью), например PUMA–560, может и не обладать достаточной динамической точностью. Задачей управления является выработка алгоритма требуемого функционирования приводов манипулятора.

*Краткий обзор существующих методов управления манипуляторами*

*Метод управления по вектору скорости* состоит в задании скорости движения рабочих органов РС в виде шестимерного вектора, представляющего проекции векторов угловой скорости рабочего органа и скорости его некоторой точки в какой-либо системе координат, которые предусматриваются алгоритмами управления таким образом, чтобы полностью определить скорость рабочего органа в текущей точке траектории. Непосредственное использование этого решения ограничивается наличием вырожденных конфигураций механизма, которые должны учитываться алгоритмом управления. Данный, достаточно сложный в реализации метод является эффективным при необходимости быстрого перевода рабочего органа из одного положения в другое без требований высокой точности позиционирования.

*Метод последовательных корректировок положения* наиболее широко применяется в цифровых системах управления. В этом случае алгоритм управления по вектору скорости формируется как приращение координат манипулятора за один цикл вычисления алгоритма. Недостатком метода является частая выборка узловых точек сложной траектории, чтобы переходы от одной точки к другой при планировании траектории движения не меняли принципиально требуемой картины движения.

*Приближенные методы.* При синтезе системы управления манипулятором пользуются приближенными решениями, которые вытекают из ограниченности задания значений координат. Обычно берут по три значения: два крайних и одно среднее, и для них вычисляют обратную матрицу Якоби, зависящую от конфигурации манипулятора, для всех других значений координат (в том числе и узловых, характерных точек траектории) обратная матрица вычисляется интерполированием. Во многих случаях, особенно при наличии

обратной связи по положению, этого оказывается вполне достаточно при достижении конечной цели управления. Недостатком метода являются возникающие при интерполяции ошибки, достигающие большого значения при отсутствии обратной связи по положению.

*Метод управления по вектору силы.* К недостаткам метода управления по вектору скорости следует отнести невозможность обеспечивать формализацию стремления перемещения рабочего органа робота в заданном направлении, если на заданной траектории встречаются точки, в которых матрица конфигурации манипулятора является вырожденной. Тенденция к упрощению процесса управления и обусловленных этим вычислений привели к использованию метода управления по вектору силы, в котором имитационно реализуется идея управления по заданному направлению. В действительности к манипулятору не прилагаются никакие силы, но следящие приводы развивают такую совокупность обобщенных сил, которые динамически эквивалентны заданным силам, имитирующим их приложение к манипулятору. Вычислитель, получив на входе задающие сигналы, определяет обобщенные силы, отнесенные к координатам, непосредственно управляемыми приводами. В свою очередь, приводы постоянно вырабатывают такие обобщенные силы, которые получают на выходе вычислителя. В эти обобщенные силы могут автоматически вводиться поправки регуляторами и компенсаторами.

Основной задачей управления манипуляторами является генерирование внешних моментов таким образом, чтобы движение робота осуществлялось по выбранной траектории. Движение робота обычно осуществляется двумя различными контролируемыми фазами. Во время первой контрольной фазы (грубое движение) робот перемещается от изначальной позиции в окрестность места расположения заданной цели вдоль предварительно определенной траектории. Второй контрольной фазой является стадия точного движения, когда рабочий орган робота динамически взаимодействует с объектом, используя при этом информационный канал обратной связи от внешних датчиков для выполнения задачи. Если в роботах используется традиционная

следящая техника, то нелинейности и взаимодействия, присутствующие в динамике манипулятора, не могут быть скомпенсированы на стадии грубого движения. С повышением требований к рабочим характеристикам промышленных роботов требуется принимать во внимание перечисленные динамические эффекты. Поэтому в течение последнего времени было предложено большое число усовершенствований в схемах и алгоритмах непосредственного контроля промышленных роботов.

Некоторыми исследователями было предложено использовать линеаризованные модели систем в качестве основы для дальнейшей реализации развязки регулирования. Основанная на линеаризованной модели система регулирования может оказаться практически неприемлемой, если реальные рабочие условия будут отличаться от условий, заложенных при линеаризации.

Одним из первых методов, в которых робот рассматривается как нелинейная, взаимосвязанная система со многими входами и многими выходами, была методика вычислений вращающих моментов, исследованная Р. Полом [47]. При этом полагалось, что возможно точное вычисление инерционных сил реакции, сил Кориолиса и центробежных сил, а также гравитационных сил. Таким образом, эксплуатационные характеристики данной системы регулирования в значительной степени зависят от точности используемой модели. Метод определения моментов требует значительного количества вычислений, что часто рассматривается как его недостаток.

Регулирование скорости спроектированного движения представляет собой методику определения переменных скоростей движения сочленения, необходимых для обеспечения перемещения концевой точки робота в заданном направлении. При такой схеме управления все установленные траектории задаются в декартовых координатах. Это является определенным преимуществом, поскольку большинство пользователей с большей легкостью могут задать последовательность перемещения в декартовых координатах, чем в переменных координатах местоположения соединения. Способы вычисления вращающих моментов и регулирования скорости спроектированно-

го движения совмещены в методе *регулирования ускорения* спроектированного движения. В этом методе предполагается, что требуемые местоположения, скорости и ускорения заданного движения руки определяются пользователем. Перечисленные методы также обладают недостатками: они требуют наличия детализированной динамической модели и длительного машинного времени для осуществления вычислений.

Другая группа методов ориентирована на *компенсацию имеющихся неопределенностей*. К ним относятся: координатно-параметрическое управление [46]; методы адаптации к неизвестным параметрам [43, 58, 70, 74–76]. В случае, когда внешние возмущения описываются известной динамической моделью с неизвестными начальными условиями, используются принципы динамической компенсации внешних возмущений [55].

Основная причина повышенного интереса к адаптивным методам управления роботами состоит в том, что некоторые приложения робототехники к технологическим задачам требуют высокой точности воспроизведения заданной траектории (например, роботы испытательных стендов, сборочные роботы, робототехнические имитаторы маловысотных полетов, роботы лазерных технологических стендов, роботы для аварийных и чрезвычайных ситуаций, космические роботы и т.д.). Требуемой в этих задачах точности невозможно достичь путем применения линейной обратной связи в силу существенной нелинейности уравнений манипулятора, а также зависимости коэффициентов последних от массы переносимого груза.

В адаптивном управлении с эталонной моделью выбирается соответствующая модель, а алгоритм адаптации модифицирует коэффициенты усиления в каналах обратной связи контроллеров. Алгоритм адаптации задается разницей между выходными сигналами эталонной модели и фактическими выходными периметрами робота. Управление роботом осуществляется регулированием коэффициентов усиления в каналах обратной связи для местоположения и скорости так, чтобы характеристики замкнутого контура были близки к эталонной модели. В настоящее время уже известно значительное

число различных глобально устойчивых алгоритмов адаптивного управления манипуляторами, большинство из которых может быть получено путем применения стандартных процедур метода скоростного градиента при надлежащем выборе целевого функционала и выражения для ошибки. Следует отметить, что многие существующие адаптивные алгоритмы не полностью решают проблему построения систем автоматического управления манипуляторами, рассчитанных на реальное, в том числе промышленное, применение. Во-первых, препятствием для реализации глобально устойчивых адаптивных алгоритмов управления манипуляторами является трудность выполнения в реальном масштабе времени объема вычислений, необходимого для реализации даже простейшего алгоритма типа Слотина–Ли [74] для шестистепенного антропоморфного манипулятора типа PUMA–560. Вторая причина, более принципиальная, состоит в том, что все глобально устойчивые адаптивные алгоритмы ориентированы на так называемую параметрическую неопределенность уравнений объекта, то есть на знание математического описания объекта с точностью до конечного числа постоянных параметров. При таком подходе все составляющие нелинейного описания объекта должны быть скопированы в законе управления, следовательно, эти составляющие должны быть точно известны. На практике же достаточно точную модель объекта построить нелегко, а иногда и невозможно. Иными словами, глобально устойчивые адаптивные алгоритмы рассчитаны на меньший уровень неопределенности, чем тот, который обычно имеет место в практических задачах. Поэтому в основу подхода к построению адаптивных систем управления манипуляторами, ориентированных на применение в реальных условиях, целесообразно положить иные принципы, исключающие точное копирование нелинейностей объекта и, следовательно, рассчитанные на больший уровень неопределенности.

Современная тенденция управления объектами механической природы состоит в построении достаточно универсальных законов управления много-режимными, многоцелевыми системами широкого назначения, которые не

должны быть достаточно громоздкими и не требовать существенных вычислительных затрат. Для этого нужно, по возможности, ослабить зависимость законов управления от динамических параметров объекта управления.

Задача синтеза управления при неполной информации о динамике механической системы исследовалась еще в работах А.А. Андропова, Л.С. Понтрягина, которые проводили анализ грубости (робастности) динамических систем, нечувствительности их свойств к изменению параметров. Н.Н. Красовским [36], И.Г. Малкиным сформулированы критерии устойчивости систем по отношению к различного рода возмущающим факторам.

Принципиально другое направление в проектировании управляющих систем для РС связано с использованием *теории систем с переменной структурой*. В системах с переменной структурой на поверхности переключения имеет место скользящий режим [52, 57]. При работе в скользящем режиме система остается нечувствительной к изменениям параметров и возмущениям. Создание управления, индуцирующего скользящий режим, не требует точного моделирования – достаточно знать диапазоны измерения параметров модели. Данный подход предполагает построение законов управления в классе разрывных функций в предположении, что динамика исполнительных устройств мала и не может существенно влиять на движение механической системы. Перечислим ряд исследований, в которых использовались методы теории систем с разрывными управлениями для РС. В исследованиях Ф.Л. Черноусько [60] внешние силы, действующие на механическую систему, считаются неизвестными, но ограниченными. Предполагается, что управляющие воздействия доминируют. Полученные законы управления (в том числе с учетом совместных ограничений на фазовые переменные и управляющие воздействия) решают задачи терминального управления в рамках игрового подхода, т.е. неконтролируемые возмущения трактуются как проявление действий противника. В исследованиях И.М. Ананьенского [61] неизвестными дополнительно предполагаются также инерционные характеристики механической системы. Известен только интервал, где могут изме-

няться собственные числа матрицы кинетической энергии. В сделанных предположениях построен кусочно-непрерывный закон позиционного управления. В работах Е.С. Пятницкого [49] сформулирована задача управления для черного ящика механической природы. Исследовались предельные ситуации, когда информация о динамических параметрах системы являлась по существу недоступной. Выдвинут принцип декомпозиции, который является одним из подходов к решению задачи управления в условиях неопределенности. Принцип декомпозиции получил развитие в работах В.И. Матюхина [40], где известным предполагается только сам факт существования конечных интервалов изменения инерционных характеристик механической системы и внешних сил. Получены универсальные законы управления, стабилизирующие практически любое допустимое движение механической системы.

Манипуляторы как объекты управления представляют собой многомерные нелинейные взаимосвязанные системы. Хотя с точки зрения облегчения задачи управления желательно каким-то образом развязывать степени подвижности манипулятора, чтобы иметь возможность управлять ими независимо, такой подход в общем случае не является наилучшим в отношении качества управления. Существуют две группы способов компенсации взаимовлияния степеней подвижности: 1) конструктивные, основанные на уравновешивании масс звеньев манипулятора; 2) алгоритмические, реализуемые системой управления, в частности, упомянутый выше принцип декомпозиции. Общим средством уменьшения рассматриваемых взаимовлияний является повышение быстродействия систем управления степенями подвижности манипулятора, что повышает эффективность парирования возмущений, действующих на эти степени подвижности, включая и их взаимовлияния.

Учитывая особенности модели объекта управления (1.22), можно сделать вывод о том, что наиболее привлекательными представляются методы теории систем с разрывными управлениями в силу их универсальности. Данные методы, во-первых, позволяют подавить широкий класс как параметрических, так и внешних возмущений и обеспечить робастные свойства замк-

нутой системы; во-вторых, более просты в реализации, так как не требуют наличия детализованной динамической модели и длительного машинного времени для осуществления вычислений.

В ряде упомянутых исследований полагалось, что динамикой ИУ можно пренебречь и формировать управляющие моменты в виде разрывных функций. Отметим, что данные результаты непосредственно не реализуемы на практике из-за физических ограничений на силы и моменты, развиваемые ИУ. Использование преимуществ систем с разрывными управлениями в допределной ситуации, которая возникает при аппроксимации разрывных управлений с помощью непрерывных функций [30, 35, 73, 77], в какой-то мере позволяет обойти эту проблему.

Существенный пробел в подавляющем большинстве исследований по управлению электромеханическими объектами связан с тем, что фазовые переменные (обобщенные координаты, их скорости, ускорения, переменные состояния приводов) считаются доступными для измерения, т.е. задача наблюдения не ставится и не решается. Заметим, что полный комплект измерительных устройств может привести к существенному удорожанию системы управления, кроме того, измерительные устройства вносят в систему управления дополнительную динамику, что с ее учетом усложняет регулятор.

В данной монографии рассматриваются задачи управления манипулятором на основе математической модели (1.22) в двух аспектах:

- 1) управление движением звеньев и опосредовано – рабочего органа;
- 2) управление движением непосредственно рабочего органа.

Предполагается, что траектория движения задается:

- 1) совокупностью двух и более точек (позиционное управление);
- 2) непрерывной пространственной кривой с последующим ее отслеживанием (контурное управление) либо в конфигурационном пространстве, либо в координатах рабочего органа.

Разрабатываемая система автоматического управления манипулятором должна обеспечивать устойчивость достаточно широкого спектра различных

режимов движения объекта управления в условиях оперативного изменения цели управления (отвечающей динамическим возможностям объекта управления), непрерывных изменений динамических параметров объекта управления и внешней среды. Таким образом, искомый закон управления должен поддерживать выходные переменные системы и сигналы ошибки в заданных допустимых пределах, несмотря на наличие неопределенностей в контуре управления. Неопределенности могут принимать различные формы: наличие внешних неконтролируемых возмущений, неопределенности оператора объекта управления, неполнота измерений.

Основная цель состоит в синтезе инвариантных систем слежения, обеспечивающих работу электромеханической системы (1.22) в условиях параметрических неопределенности и при действии внешних неконтролируемых возмущений, а также при неполной информации о векторе состояния.

В работе предложен декомпозиционный подход к решению задач слежения с учетом указанных в разделе 1.4 особенностей модели объекта управления. В основу положен блочный принцип управления [3, 4, 16, 17, 26–35, 39, 54–56], позволяющий разделить задачу синтеза системы размерности  $3n$  на независимо решаемые элементарные подзадачи меньшей размерности.

Суть метода состоит в последовательном использовании переменных вектора состояния в качестве фиктивных управлений, что позволяет осуществить алгоритмическую двухуровневую декомпозицию исходной задачи. Задачи синтеза управления в механической подсистеме и в исполнительных устройствах решаются независимо (декомпозиция верхнего уровня). В механической подсистеме решается задача слежения за заданными траекториями. Управляющими воздействиями являются обобщенные силы, развиваемые исполнительными устройствами. В результате появляется возможность непосредственного выбора различных комплектных исполнительных устройств, способных отработать задающее воздействие, а именно, управление, синтезированное в механической подсистеме. В электрических исполнительных устройствах управлением является напряжение в цепи якоря, которое может

быть реализованы в классе как разрывных так и непрерывных, ограниченных по модулю функций. Следовательно, управление в механической подсистеме может быть реализовано лишь в классе непрерывных функций с ограниченными производными. Последнее утверждение вполне соответствует физическим соображениям, не допускающим скачкообразного изменения сил и моментов в механических системах. При декомпозициях нижнего уровня задачи синтеза как в механической подсистеме, так и в исполнительных устройствах разделяются на независимо решаемые элементарные подзадачи (блоки), в каждой из которых размерность вектора состояния и управления совпадают. Непосредственное использование блочного синтеза для систем с полной информацией не вызывает трудностей, но потребует привлечения особых подходов для объектов, функционирующих в условиях неопределенности и действия внешних, неконтролируемых возмущений, не принадлежащих пространству управления. Для обеспечения инвариантности к таким возмущениям предлагаются процедуры синтеза управления двух типов, организованные по блочному принципу.

Во второй и третьей главах рассматривается задача слежения за заданными траекториями обобщенных координат объекта управления. В математической модели объекта управления учитывается динамика исполнительных устройств. Объект управления функционирует в условиях параметрической неопределенности и действия внешних неконтролируемых возмущений. Разработаны различные типы базовых алгоритмов управления, обеспечивающих, в том числе, и автономное управление положениями отдельных звеньев.

В первой задаче (см. главу 2) предполагается, что составляющие оператора объекта управления, задающие воздействия и внешние возмущения описываются гладкими ограниченными функциями, полные производные требуемого порядка которых существуют и ограничены. В этих предположениях решается задача синтеза обратной связи, обеспечивающей экспоненциальную сходимость к заданным траекториям обобщенных координат.

Во второй задаче (см. главу 3) предполагается, что внешние возмуще-

ния и производные задающих воздействий описываются негладкими ограниченными функциями, а в операторе объекта управления учитываются существенные нелинейности, в том числе разрывные зависимости типа сухого трения. В этих предположениях решается задача синтеза обратной связи, обеспечивающей сходимость в заданную окрестность программных траекторий обобщенных координат.

В третьей задаче (см. главу 4) решается задача слежения в рабочем пространстве рабочего органа манипулятора. Разработаны различные типы прямых процедур синтеза управляющих воздействий, основанных на декомпозиции выходного отображения механической системы и не требующих решения обратных задач кинематики и динамики в реальном времени.

Существенное внимание в монографии уделено проблеме информационного обеспечения алгоритмов управления. В каждой главе исследуется и определяется объем требуемой информации для организации обратной связи в контексте решаемых задач управления. Показано, что введение в контур обратной связи наблюдателей состояния, реализуемых в вычислительной среде, позволяет значительно снизить требования к объему априорной информации об объекте управления и среде его функционирования, т.е. свести к минимуму непосредственные измерения и вычисления в реальном времени. Разработаны методы построения наблюдателей состояния различных типов: полных и редуцированных, с разрывными и непрерывными корректирующими воздействиями. В конце каждой главы приведены результаты моделирования разработанных процедур синтеза обратной связи с наблюдателями различных типов и проведен их сравнительный анализ. Даны рекомендации по использованию тех или иных алгоритмов в зависимости от типов манипуляторов и технологических требований.

## ГЛАВА 2

### ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ К ЗАДАНЫМ ТРАЕКТОРИЯМ В ПРОСТРАНСТВЕ ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТ

В данной и следующей главах рассматривается задача слежения за заданными траекториями положений звеньев манипулятора. В математической модели объекта управления учитывается динамика ИУ. Объект управления функционирует в условиях параметрической неопределенности и действия внешних неконтролируемых возмущений.

В постановках задач данной главы предполагается, что составляющие оператора объекта управления, задающие воздействия и внешние возмущения описываются гладкими ограниченными функциями, полные производные которых требуемого порядка существуют и ограничены. В этих предположениях решается задача синтеза обратной связи, обеспечивающей экспоненциальную сходимость к заданным траекториям. Заметим, что проблема выбора допустимых траекторий из некоторой совокупности, отвечающей поставленной цели управления, решается на этапе проектирования в режиме off-line. Планирование программных режимов движения с учетом имеющихся конструктивных и прочих ограничений – самостоятельная, достаточно развитая задача робототехники [12, 19, 66], которая здесь не рассматривается.

В разделе 2.1 формализуется постановка задачи. В разделе 2.2 на основе блочного подхода разработаны базовые алгоритмы управления, в зависимости от структуры матрицы инерции предложены различные методы автономного управления. В разделе 2.3 в предположении, что не все фазовые переменные доступны для измерения, решается задача информационного обеспечения базовых алгоритмов управления. Разработаны каскадные процедуры синтеза наблюдателей состояния различных типов – с разрывными и непрерывными корректирующими воздействиями. В разделе 2.4 проведен сравнительный анализ разработанных алгоритмов синтеза обратной связи. В разделе 2.5 приведены результаты моделирования.

## 2.1. Модель объекта управления. Постановка задачи

Введенную в разделах 1.3, 1.4 математическую модель объекта управления (1.22) представим в виде

$$\dot{q}_1 = q_2, \quad \dot{q}_2 = H^{-1}(q_1)[v - C(q_1, q_2)q_2 - G(q_1) + \eta(t)], \quad (2.1.1)$$

$$\dot{v} = -Av - Dq_2 + Bu, \quad (2.1.2)$$

где (2.1.1) – модель механической подсистемы (манипулятора) в нормальной форме Коши [1]; (2.1.2) – редуцированная модель ИУ (в данном случае – электрическая подсистема, описывающая учитываемую динамику ДПТ с жестким типом сочленений). Используются принятые в главе 1 обозначения, в частности,  $q_1 \in Q_1 \in R^n$  – вектор положений звеньев манипулятора (1.3);  $v \in R^n$  – вектор обобщенных сил – электрических моментов, развиваемых ИУ, на которых накладывається требование ограниченности и гладкости (1.11);  $u \in R^n$  – вектор напряжений якорей электродвигателей, компоненты которого полагаются разрывными управляющими воздействиями (1.23). Вектор  $\eta(t) \in R^n$  – часть обобщенных сил, трактуемых как внешние возмущения.  $A, D, B$  – диагональные матрицы с положительными постоянными известными коэффициентами передачи.

В данной главе предполагается, что составляющие оператора объекта управления (2.1.1) являются гладкими ограниченными, в общем случае неизвестными функциями, полные производные которых также ограничены:

$$|H_{ij}| \leq \bar{H}_{ij}, \quad |\dot{H}_{ij}| \leq \tilde{H}_{ij}, \quad |C_i| \leq \bar{C}_i, \quad |\dot{C}_i| \leq \tilde{C}_i, \quad |G_i| \leq \bar{G}_i, \quad |\dot{G}_i| \leq \tilde{G}_i, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (2.1.3)$$

Требования к степени определенности компонент (2.1.3) оговариваются по ходу изложения. Предполагается, что внешние возмущения  $\eta(t)$  и задающие воздействия  $q_{1d}(t) \in R^n$  описываются гладкими функциями времени, производные которых ( $\dot{q}_{1d} = q_{2d}, \dot{q}_{2d} = q_{3d}, \dot{q}_{3d}$ ) неизвестны, но ограничены известными константами:

$$|\eta_i| \leq N_i = \text{const}, \quad |\dot{\eta}_i| \leq \bar{N}_i = \text{const}, \quad (2.1.4)$$

$$|q_{jid}| \leq S_{ji} = \text{const}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, 4}. \quad (2.1.5)$$

В сделанных предположениях (2.1.3)–(2.1.5) ставится задача синтеза обратной связи, обеспечивающей экспоненциальную сходимость к заданным траекториям с заданными темпами сходимости:

$$q_1(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} q_{1d}(t). \quad (2.1.6)$$

Предполагается, что желаемое движение (2.1.6) является допустимым с учетом имеющихся ограничений (1.3), (1.8). Обеспечение соотношений (2.1.6) при  $q_{1d}(t) = \text{const}$  решает задачу позиционного управления, в общем случае  $q_{1d}(t) = \text{var}$  решается задача контурного управления в рамках блочного подхода [3, 16, 17, 26–35, 39, 54–56]. Суть данного метода заключается в пошаговых невырожденных преобразованиях исходной модели (2.1.1)–(2.1.2) к блочной форме управляемости (БФУ) относительно ошибок слежения по выходным (регулируемым) переменным

$$e_1 = q_1 - q_{1d}, \quad e_1 \in R^n \quad (2.1.7)$$

и синхронном формировании виртуальных и истинных управлений в каждом блоке. Возможность невырожденных преобразований обусловлена предположениями о гладкости составляющих оператора объекта управления (2.1.1), задающих и возмущающих воздействий.

## 2.2. Базовые алгоритмы управления

В данном разделе разработаны базовые алгоритмы управления на основе блочного подхода. Процедура блочного синтеза управления, обеспечивающего решение задачи слежения (2.1.6) в системе (2.1.1)–(2.1.2), состоит из трех шагов, на каждом из которых исследуется и преобразуется подсистема (блок БФУ) порядка  $n$ , в которой независимо решается задача синтеза виртуального (или истинного) управления полной размерности. Данный подход позволяет осуществить также декомпозицию верхнего уровня и независимо рассматривать задачи синтеза в механической (2.1.1) и в электрической (2.1.2) подсистемах в силу двойной роли, отведенной моментам  $\upsilon$ : для механической подсистемы (2.1.1) они трактуются как виртуальные управления,

выбираемые в целях управления, выбранные соотношения  $u^*$  трактуются как задающие воздействия для отработки ИУ (2.1.2). В результате имеется возможность выбора различных комплектных ИУ, способных отработать выбранные задающие воздействия  $u^*$ .

Широко распространенная концепция синтеза управления в задаче стабилизации ошибок слежения  $e_1 = \text{col}(e_{11}, \dots, e_{1n})$  (2.1.7) в силу системы (2.1.1)–(2.1.2) состоит в обеспечении автономного управления, т.е. поведение выходных координат  $q_{11}, \dots, q_{1n}$  должно определяться собственными управляющими воздействиями  $u_{11}, \dots, u_{1n}$  соответственно, что возможно при полной компенсации взаимосвязей звеньев манипулятора или значительном их ослаблении. Условия автономности выходных координат можно обеспечить несколькими способами [51]:

- 1) учесть взаимосвязи при расчете управляющих воздействий (данный способ имеет ограниченное применение);
- 2) применить перекрестные корректирующие связи в устройствах управления исполнительными приводами;
- 3) применить динамическую декомпозицию, которая приводит к развязыванию по управляющим воздействиям общего движения системы на подсистемы, описывающие динамику отдельных выходных переменных и последующего независимого синтеза задач стабилизации в этих подсистемах.

В данном разделе показано, как реализация автономного управления зависит от структуры матрицы  $H^{-1}(q_1)$  и принципа выбора виртуальных управляющих моментов. Получены условия, при которых в замкнутой системе обеспечивается автономное управление выходными координатами.

#### *Процедура блочного синтеза управления*

*Шаг 1.* Представим первое уравнение системы (2.1.1) относительно ошибок слежения (2.1.7)  $\dot{e}_1 = q_2 - q_{2d}$ . Здесь, согласно блочному принципу управления, компоненты вектора  $q_2 \in R^n$  трактуются как виртуальное управление, размерность которого совпадает с размерностью регулируемого век-

тора  $e_1 \in R^n$ , т.е. решается элементарная задача синтеза. Сформируем комбинированное виртуальное управление  $q_2^* = -K_1 e_1 + q_{2d} \Rightarrow e_2 = q_2 + K_1 e_1 - q_{2d}$ , где  $K_1 = \text{diag}(k_{1i})$ ,  $k_{1i} > 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – коэффициенты обратной связи,  $e_2 \in R^n$  – невязка между реальным  $q_2$  и выбранным  $q_2^*$  управлением. Уравнение относительно ошибки слежения  $e_1$  является первым замкнутым блоком БФУ вида

$$\dot{e}_1 = -K_1 e_1 + e_2. \quad (2.2.1)$$

В подсистеме (2.2.1) обеспечивается экспоненциальная сходимость (2.1.6) с заданными темпами  $k_{1i} = k_{1i}^* > 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ) при условии, что на следующем шаге будет обеспечено соотношение

$$e_2 = (q_2 + K_1 e_1 - q_{2d}) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0. \quad (2.2.2)$$

*Шаг 2.* С учетом (2.1.1), (2.2.1) запишем дифференциальное уравнение относительно невязок (2.2.2)

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 &= H^{-1}(q_1)[v - C(q_1, q_2)q_2 - G(q_1) + \eta] + K_1(-K_1 e_1 + e_2) - q_{3d} = \\ &= H^{-1}[v - C e_2 - C(-K_1 e_1 + q_{2d}) - G(q_1) + \eta - H(K_1^2 e_1 - K_1 e_2 + q_{3d})], \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

где вектор  $v \in R^n$  полагаем виртуальным управлением, размерность которого совпадает с размерностью регулируемого вектора  $e_2 \in R^n$ . Обозначим  $e_3 \in R^n$  невязку между истинными  $v$  и выбранными  $v^*$  управляющими моментами ( $e_3 = v - v^*$ ), удовлетворяющими требованиям гладкости и цели управления (2.1.6). Тогда на этапе синтеза ИУ выбором истинного управления  $u$  также будет решаться задача слежения за заданными значениями  $v^*$ . Забегая вперед, отметим, что в рассматриваемой задаче истинные управления  $u$  принадлежат классу разрывных функций, и задача стабилизации невязки  $e_3$  решается за конечное время  $t^*$  [57], т.е. при  $t > t^*$  выполнится условие

$$e_3 = 0. \quad (2.2.4)$$

В сделанных предположениях о гладкости оператора объекта управления выбираемый закон виртуального управления  $v^*$  в подсистеме (2.2.3) может иметь составляющую, компенсирующую имеющиеся неопределенности.

Рассмотрим, при каких условиях тот или иной принцип выбора  $\upsilon$  обеспечит автономность выходных координат.

*Первый способ.* При выборе виртуального управления в виде  $\upsilon^* = -K_2 e_2 - W_{21}(q_1, q_2, \eta, q_{1d}, q_{2d}, q_{3d})$  с учетом  $\upsilon = e_3 + \upsilon^*$  имеем

$$\upsilon = e_3 - K_2 e_2 - W_{21}, \quad (2.2.5)$$

где  $W_{21} = -Cq_2 - G(q_1) + \eta(t) - H(K_1^2 e_1 - K_1 e_2 + q_{3d})$ ,  $K_2 = \text{diag}(k_{2i})$ ,  $k_{2i} > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , подсистема (2.2.3) примет вид

$$\dot{e}_2 = H^{-1}(-K_2 e_2 + e_3). \quad (2.2.6)$$

Отметим важный для дальнейшего изложения факт. В механической системе (2.1.1) матрица  $H(q_1)$  является симметрической и положительно определенной  $\forall q_1 \in Q_1$ . Существенно, что при этом обратная матрица  $H^{-1} = (H_{ij}^{-1})$ ,  $i, j = \overline{1, n}$  также будет симметрической и положительно определенной. В этом легко убедиться, например, в частном случае, когда  $H = \text{diag}(H_{ii})$ ,  $H_{ii} > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$  для  $\forall q_1 \in Q_1$  (например, в модели (1.14)), то тогда  $H^{-1}$  тоже будет диагональной с положительными элементами:

$$H^{-1} = \text{diag}(H_{ii}^{-1}), \quad H_{ii}^{-1} = 1/H_{ii} > 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.2.7)$$

В общем случае  $H_{n \times n}$  можно показать, что  $x^T H x > 0 \Rightarrow x^T H^{-1} x > 0$ .

Действительно, с учетом диффеоморфной замены  $x = Hz$  имеем

$$x^T H^{-1} x = z^T H^T H^{-1} H z = z^T H^T z > 0.$$

Очевидно, что при  $H^{-1}(q_1) > 0$  в системе (2.2.6) с учетом (2.2.4) обеспечивается экспоненциальная сходимость (2.2.2)  $\forall k_{2i} > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$  при  $t > t^*$ , а в случае (2.2.7) в замкнутой системе (2.2.1), (2.2.6), (2.2.4) будет также обеспечена автономность выходных координат. Для получения заданных характеристик переходных процессов по каждой координате  $q_{1i}$  требуется исследовать диапазоны изменения элементов  $H^{-1}$ , с учетом которых выбором  $K_1$ ,  $K_2$  можно обеспечить субоптимальный переходный процесс [5, 22].

В случае недиагональной матрицы  $H^{-1}$  законом управления (2.2.5)

можно существенно ослабить перекрестные связи только в том случае, если выбором коэффициентов матрицы  $K_2$  (в общем случае, не диагональной) в системе (2.2.6) может быть обеспечена сверхустойчивость. При этом собственные значения матрицы  $(-H^{-1}(q_1)K_2)$  должны лежать в секторе  $S_n = \{\lambda \in C : |\arg \lambda - \pi| \leq (1 - n^{-1})\frac{\pi}{2}\} \forall q_1 \in Q_1$  (например, при  $n = 2$  собственные значения должны лежать в прямом угле, биссектриса которого совпадает с отрицательной полуосью) [32]. Более конкретно, требуется исследовать проблему: существуют ли такие  $k_{2ij}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , при которых матрица  $P = H^{-1}(q_1)K_2$  будет иметь преобладающую диагональ с положительными элементами на главной диагонали, т.е.

$$\bar{P}_{ii} > \sum_{j=1, j \neq i}^n \bar{P}_{ij}, \quad (2.2.8)$$

где  $0 < \bar{P}_{ii} \leq P_{ii}$ ,  $|P_{ij}| \leq \bar{P}_{ij}$  ( $i, j = \overline{1, n}$ )  $\forall q_1 \in Q_1$ .

*Второй способ.* При выборе  $v^* = -K_2 e_2 - W_{22}(q_1, q_2, \eta, q_{1d}, q_{2d}, q_{3d})$ ,

$$v = e_3 + v^* = e_3 - K_2 e_2 - W_{22}, \quad (2.2.9)$$

где  $W_{22} = -C(-K_1 e_1 + q_{2d}) - G(q_1) + \eta(t) - H(K_1^2 e_1 - K_1 e_2 + q_{3d})$ , замкнутая подсистема (2.2.3) с учетом  $v^* = -K_2 e_2 - W_{22}(q_1, q_2, \eta, q_{1d}, q_{2d}, q_{3d})$  примет вид

$$\dot{e}_2 = H^{-1}(-K_2 e_2 - C e_2 + e_3). \quad (2.2.10)$$

Для выбора коэффициентов матрицы  $K_2$ , обеспечивающих (2.2.2), исследуем квадратичную форму  $V_2 = \frac{1}{2} e_2^T H e_2$ , производная которой с учетом (2.2.9), (2.2.4) имеет вид

$$\dot{V}_2 = e_2^T \dot{H} e_2 + \frac{1}{2} e_2^T \dot{H} e_2 = -e_2^T K_2 e_2 + e_2^T (\frac{1}{2} \dot{H} - C) e_2,$$

где в силу механической природы рассматриваемого объекта выполняется условие (1.13), которое можно представить в виде

$$e_2^T (\frac{1}{2} \dot{H} - C) e_2 \equiv 0. \quad (2.2.11)$$

С учетом (2.2.11)  $\dot{V}_2 < 0 \quad \forall k_{2i} > 0$  при  $t > t^*$ , что означает выполнение (2.2.2). Для обеспечения автономности в системе (2.2.10) требуется исследовать проблему: существует ли такая матрица  $K_2$ , при которой матрица  $P = H^{-1}(q_1)(K_2 + C(q_1, q_2))$  будет удовлетворять (2.2.8)  $\forall q_1 \in Q_1, q_2 \in Q_2$ .

*Третий способ.* Наиболее привлекательный способ – динамическая декомпозиция, полностью компенсирующая перекрестные связи и непосредственно обеспечивающая автономное управление выходными переменным при выборе виртуального управления в виде

$$v^* = H(-K_2 e_2 + e_3) - e_3 - W_{23}(q_1, q_2, \eta, q_{1d}, q_{3d}), \quad (2.2.12)$$

где  $W_{23} = -C(q_1, q_2)q_2 - G(q_1) + \eta - H(K_1^2 e_1 + q_{3d})$ . С учетом (2.2.12),

$v = e_3 + v^*$  подсистема (2.2.3) примет вид

$$\dot{e}_2 = -(K_2 - K_1)e_2 + e_3. \quad (2.2.13)$$

Очевидно, что  $\forall k_{2i} > k_{1i} > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$  и с учетом (2.2.4) в системе (2.2.13) выполняется (2.2.2), а задача обеспечения заданных характеристик переходного процесса (2.1.6) сводится к выбору  $K_1$ ,  $K_2$  и не требует на данном этапе знания и/или анализа матриц  $H(q_1)$  или  $H^{-1}(q_1)$ .

После выбора управляющих моментов в виде (2.2.5), (2.2.9) или (2.2.12) независимо решается задача синтеза истинных управлений  $u$  в исполнительных устройствах, обеспечивающих (2.2.4), где с учетом (2.2.5), (2.2.9)

$$e_3 = v + K_2 e_2 + W_{2j}, \quad j = 1, 2, \quad (2.2.14)$$

в третьем способе с учетом (2.2.12)

$$e_3 = H^{-1}(v + W_{23}) + K_2 e_2. \quad (2.2.15)$$

*Шаг 3.* Вначале исследуем дифференциальное уравнение относительно невязок (2.2.14) с учетом (2.1.2), которое является третьим блоком БФУ

$$\dot{e}_3 = \dot{v} + K_2 \dot{e}_2 + \dot{W}_{2j} = -Ae_3 + W_{3j} + Bu, \quad j = 1, 2, \quad (2.2.16)$$

где  $A = \text{diag}(a_i)$ ,  $B = \text{diag}(b_i)$   $a_i, b_i = \text{const} > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , компоненты вектор-функций  $W_{31} = (A(C - HK_1) + D + \dot{C} - CK_1 - \dot{HK}_1 + HK_1^2)K_1 e_1 +$

$$\begin{aligned}
& + (A(K_2 - C + HK_1) - D - \dot{C} + (C + \dot{H} - H)K_1 + \\
& + (C - K_2 - HK_1)H^{-1}K_2)e_2 + (K_2 - C + HK_1)H^{-1}e_3 - (AC + D + \dot{C})q_{2d} - \\
& - (AH + C + \dot{H})q_{3d} - H\dot{q}_{3d} + (A + CH^{-1})\eta + \dot{\eta} - AG - \dot{G}, \\
W_{32} = & (-AC - AHK_1 + D + \dot{C} - CK_1 - \dot{H}K_1 + HK_1^2)K_1e_1 + \\
& + (AK_2 + AHK_1 - D - K_2H^{-1}K_2 - K_2H^{-1}C + CK_1 + \\
& + \dot{H}K_1 - HK_1(K_1 + H^{-1}K_2 + H^{-1}C))e_2 + (K_2 + HK_1)H^{-1}e_3 - \\
& - (AC + D + \dot{C})q_{2d} - (AH + CH)q_{3d} - H\dot{q}_{3d} + A\eta + \dot{\eta} - AG - \dot{G}.
\end{aligned}$$

тракуются как неизвестные ограниченные возмущения  $|W_{3ji}| \leq \bar{W}_{3ji}$ ,  $j = 1, 2$ ,  $i = \overline{1, n}$ . В системе (2.2.16) сформируем разрывное управление вида

$$u = -K_3 \text{sign} e_3, \quad (2.2.17)$$

где  $K_3 = \text{diag}(k_{3i})$ ,  $k_{3i} = \text{const} > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , здесь и далее  $\text{sign} e_3 = \text{col}(\text{sign} e_{31}, \dots, \text{sign} e_{3n})$ , имеем замкнутую подсистему

$$\dot{e}_3 = -Ae_3 - BK_3 \text{sign} e_3 + W_{3j}, \quad j = 1, 2. \quad (2.2.18)$$

Как известно, разрывные управления позволяют обеспечить инвариантность движений в скользящем режиме к имеющимся неопределенностям, принадлежащим пространству управления. При выполнении достаточных условий возникновения скользящих режимов [57]

$$e_{3i} \dot{e}_{3i} < 0 \Rightarrow b_i k_{3i} > \bar{W}_{3ji}, \quad i = \overline{1, n} \quad (2.2.19)$$

в подсистеме (2.2.18) за конечное время  $t^*$  возникнет скользящий режим по многообразию (2.2.4). При  $t > t^*$  поведение переменных замкнутых систем (2.2.1), (2.2.6) или (2.2.10), (2.2.18) описывается логической цепочкой

$$e_3 = 0 \Rightarrow e_2 \rightarrow 0 \Rightarrow e_1 \rightarrow 0, \quad (2.2.20)$$

что и решает поставленную задачу слежения (2.1.6).

При планировании желаемых режимов движения  $q_{1d}(t)$  требуется учитывать ограничения на ресурсы управления (1.23), где величины  $U_i$  обуславливают верхние границы коэффициентов обратной связи  $K_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , т.е. задача разрешима, если при выбранных  $K_1$ ,  $K_2$  выполняются условия

$$\overline{W}_{3ji} / b_i < k_{3i} \leq U_i, \quad j=1,2, \quad \forall i = \overline{1, n}. \quad (2.2.21)$$

Заметим, что подавление внешних возмущений может потребовать большой амплитуды разрывных управлений (2.2.17), что на практике приводит к возникновению автоколебаний в установившемся режиме [24, 25]. С теоретической точки зрения, данную проблему можно обойти путем формирования в подсистеме (2.2.16) комбинированного управления вида

$$u = -B^{-1}(K_3 \text{sign} e_3 + W_{3j}), \quad (2.2.22)$$

что приведет к замкнутому блоку

$$\dot{e}_3 = -Ae_3 - K_3 \text{sign} e_3, \quad j=1,2, \quad (2.2.23)$$

где  $\forall k_{3i} > 0, i = \overline{1, n}$  за конечное время возникнет скользящий режим по многообразию (2.2.4). Диапазон допустимых значений  $k_{3i}$ :

$$0 < k_{3i} \leq b_i U_i - \overline{W}_{3ji} \Rightarrow b_i U_i > \overline{W}_{3ji}, \quad j=1,2, \quad \forall i = \overline{1, n}. \quad (2.2.24)$$

Если при выбранных  $K_1, K_2$  неравенства (2.2.21), (2.2.24) не обеспечиваются, требуется либо снизить требования к параметрам переходного процесса, либо использовать ИУ с большими коэффициентами передачи.

В случае частичной определенности (которая зависит от знания оператора объекта управления и/или возможности его оценивания) представим в системе (2.2.16) вектор-функцию  $W_{3j}$  ( $j=1,2$ ) в виде двух слагаемых  $W_{3j} = w_{1j} + w_{2j}$ , ограниченных покомпонентно  $\overline{w}_{1ji} \geq |w_{1ji}|, \quad \overline{w}_{2ji} \geq |w_{2ji}|$  ( $i = \overline{1, n}$ ), где только первое слагаемое  $w_{1j}$  подлежит компенсации с помощью комбинированного управления

$$u = -B^{-1}(K_3 \text{sign} e_3 + w_{1j}), \quad (2.2.22, a)$$

что приведет к замкнутой системе

$$\dot{e}_3 = -Ae_3 - K_3 \text{sign} e_3 + w_{2j}. \quad (2.2.23, a)$$

В системе (2.2.23, a) условия существования скользящего режима определяются меньшей амплитудой разрывных управлений:  $\overline{w}_{2ji} < k_{3i} \leq b_i U_i - \overline{w}_{1ji}$ .

Более сложная проблема возникает при обработке управляющих мо-

ментов, выбранных в виде (2.2.12), так как дифференциальное уравнение относительно невязки (2.2.15) с учетом (2.1.2) примет вид

$$\dot{e}_3 = \dot{H}^{-1}(v + W_{23}) + H^{-1}(\dot{v} + \dot{W}_{23}) + K_2 \dot{e}_2 = \quad (2.2.25)$$

$$= H^{-1}(W_{33} + Bu) + W_{33}^* = H^{-1}Bu + W_{33}^{**},$$

$$W_{33} = (AC - AHK_1 + D + \dot{C} - CK_1 - \dot{H}K_1)K_1 e_1 + AHK_2 e_2 - (C + AH)e_3 + \\ - (AC + D - \dot{C})q_{2d} - (AH + C - \dot{H})q_{3d} + A\eta + \dot{\eta} - AG - G,$$

$$W_{33}^* = K_1^3 e_1 + (-\dot{H}^{-1}HK_2 - K_1^2 - K_2^2 + K_2K_1 - AC - D - \dot{C} + CK_2)e_2 + \\ + (K_2\dot{H}^{-1}H)e_3 - \dot{q}_{3d}, \quad W_{33}^{**} = H^{-1}(-AHe_3 + W_{33}) + W_{33}^*, \quad |W_{33i}^{**}| \leq \bar{W}_{33i}^{**}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Напомним, что в данном случае в замкнутой механической системе (2.2.1), (2.2.13), (2.2.4) существенно облегчается проблема обеспечения автономного управления в силу того, что характеристики переходных процессов по каждой координате  $e_{1i}$  определяются выбором коэффициентов  $k_{1i}, k_{2i}$ . При этом анализ матрицы  $H^{-1}$  переносится на этап синтеза истинного управления в ИУ (2.2.25), где, в силу разрывного характера управления, вообще говоря, не требуется обеспечивать автономное управление координатами  $e_{3i}, i = \overline{1, n}$ . Замкнутая система (2.2.25), (2.2.17) примет вид

$$\dot{e}_3 = -H^{-1}BK_3 \text{sign}e_3 + W_{33}^{**}. \quad (2.2.26)$$

В частном случае (2.2.7),  $0 < \bar{H}_{ii}^{-1} \leq H_{ii}^{-1}$  и при выполнении достаточных условий возникновения скользящих режимов [57] вида

$$e_{3i} \dot{e}_{3i} < 0 \Rightarrow \bar{H}_{ii}^{-1} b_i k_{3i} > \bar{W}_{33i}^{**}, \quad i = \overline{1, n} \quad (2.2.27)$$

в диагонализированной системе (2.2.26) за конечное время  $t^* > 0$  возникнет скользящий режим по многообразию (2.2.4) и автономно обеспечатся соотношения (2.2.20). Поставленная задача (2.1.6) может быть реализована, если при выбранных  $K_1, K_2$  выполняются неравенства

$$\bar{W}_{33i}^{**} / \bar{H}_{ii}^{-1} b_i < k_{3i} \leq U_i \quad \forall i = \overline{1, n}. \quad (2.2.28)$$

Заметим, что можно понизить требуемый ресурс управления (2.2.28). Рассмотрим замкнутую систему (2.2.25), (2.2.17)

$$\dot{e}_3 = H^{-1}(W_{33} + HW_{33}^* - BK_3 \text{sign}e_3), \quad (2.2.26, a)$$

где условия возникновения скользящего режима на многообразии (2.2.4)

имеют вид  $b_i k_{3i} > \overline{W}_i \geq |W_{33i} + \sum_{j=1}^n H_{ij} W_{33j}^*|$ , а требуемый ресурс управления

определяется неравенствами  $\overline{W}_i / b_i < k_{3i} \leq U_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Полученные здесь и далее оценки являются достаточными, более точно нижнюю оценку допустимых значений  $k_{3i}$  можно получить при детальном исследовании составляющих  $W_{33}$ ,  $W_{33}^*$ .

В общем случае и с учетом  $H^{-1} > 0$  в системе (2.2.26) за конечное время  $t^*$  обеспечится (2.2.4) при выполнении условия [57]

$$\lambda_{\min}(q_1) > \lambda_0 > 0, \quad (2.2.29)$$

где  $\lambda_0 > \overline{W}_{33}^{**} \sqrt{n}$ ,  $\|W_{33}^{**}\| < \overline{W}_{33}^{**}$ ,  $\lambda_{\min}(q_1)$  – минимальное собственное значение матрицы  $\frac{1}{2}(P + P^T) > 0$ , где  $P = H^{-1}BK_3$ . Для (2.2.26,а) в (2.2.29)  $\lambda_0 > \overline{W} \sqrt{n}$ ,  $\overline{W} \geq \|H^{-1}W_{33} + W_{33}^*\|$ . Удовлетворяющее (2.2.29) значение  $\lambda_{\min}(q_1)$  можно обеспечить путем выбора коэффициентов матрицы  $K_3$ . Поставленная задача реализуема, если при этом  $\forall k_{3i} \leq U_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Синтез разрывного управления с компенсирующей составляющей в системе (2.2.25) возможен при соответствующей аппаратной реализации и при условии, что элементы матрицы  $H$  известны. Приведем некоторые варианты синтеза комбинированного управления и соответствующий вид замкнутой подсистемы.

В случае полной определенности оператора объекта управления (2.1.2) или при возможности получения соответствующих оценок (в том числе  $q_{2d}$ ,  $q_{3d}$ ,  $\dot{q}_{3d}$ ,  $\eta$ ,  $\dot{\eta}$ ) в системе (2.2.25) обеспечивается полная компенсация, например

$$u = B^{-1}H(-K_3 \text{sign} e_3 - W_{33}^{**}), \quad \dot{e}_3 = -K_3 \text{sign} e_3; \quad (2.2.30)$$

$$u = B^{-1}(-K_3 \text{sign} e_3 - HW_{33}^{**}), \quad \dot{e}_3 = -H^{-1}K_3 \text{sign} e_3;$$

$$u = B^{-1}[-HK_3 \text{sign} e_3 - (W_{33} + HW_{33}^*)], \quad \dot{e}_3 = -K_3 \text{sign} e_3;$$

$$u = B^{-1}[-K_3 \text{sign}e_3 - (W_{33} + HW_{33}^*)], \dot{e}_3 = -H^{-1}K_3 \text{sign}e_3,$$

где (2.2.4) обеспечивается  $\forall k_{3i} > 0, i = \overline{1, n}$ .

В случае частичной определенности (которая зависит от знания оператора объекта управления и/или возможностей оценивания) представим в системе (2.2.25) вектор-функцию  $W_{33}^{**}$  в виде двух слагаемых  $W_{33}^{**} = w_1 + w_2$ , где только первое слагаемое  $w_1$  подлежит компенсации. Тогда, например,

$$u = B^{-1}H(-K_3 \text{sign}e_3 - w_1), \dot{e}_3 = -K_3 \text{sign}e_3 + w_2, k_{3i} > \bar{w}_{2i} \geq |w_{2i}|; \quad (2.2.31)$$

$$u = B^{-1}(-K_3 \text{sign}e_3 - Hw_1), \dot{e}_3 = -H^{-1}K_3 \text{sign}e_3 + w_2, \quad (2.2.31, a)$$

где в последнем случае для обеспечения (2.2.4) минимальное собственное значение матрицы  $\frac{1}{2}(P + P^T) > 0$ ,  $P = H^{-1}K_3$  должно удовлетворять условию (2.2.29), где  $\lambda_0 > \bar{w}_2 \sqrt{n}$ ,  $\|w_2\| < \bar{w}_2$ . Выбор из указанных вариантов (2.2.30)–(2.2.31) определяется простотой реализации, требованиями к темпам сходимости, ограничениям на ресурсы управления, вычислительные ресурсы, а также возможностью оценивания компенсирующей составляющей.

Таким образом, в общем случае, когда матрица  $H^{-1}$  не диагональная, в замкнутых системах (2.2.26), (2.2.26,а) требуется исследовать следующую задачу: существует ли такая матрица  $K_3$  (в общем случае, не диагональная),

коэффициенты которой удовлетворяют  $\sum_{j=1}^n |k_{3ij}| \leq U_i, i = \overline{1, n}$  и одновременно

или  $P > 0$  и (2.2.29), или  $P$  удовлетворяет (2.2.8)  $\forall q_1 \in Q$ , где  $P = H^{-1}BK_3$ .

Выбор задачи определяется тем, какая из них проще реализуется.

Понятно, что в случае большой размерности решение указанных задач в общем виде может вызвать определенные трудности. Можно воспользоваться методом иерархии управлений [57], который при определенных условиях позволяет получить матрицу  $P$  с преобладающей диагональю (2.2.8) посредством итерационной процедуры, в которой последовательно осуществляется выбор коэффициентов  $K_3 = \text{diag}(k_{3i})$  на основе неравенств.

Поясним суть данного метода на примере системы второго порядка

$$\dot{x}_1 = \varphi_1(x, t) + b_{11}(x)u_1 + b_{12}(x)u_2, \quad (2.2.32)$$

$$\dot{x}_2 = \varphi_2(x, t) + b_{21}(x)u_1 + b_{22}(x)u_2,$$

где  $x = \text{col}(x_1, x_2) \in X \subset R^2$ ,  $|\varphi_i| \leq \Phi_i \quad \forall x \in X, \quad i=1,2$ . Предположим, что для системы (2.2.32) установлена иерархия  $x_1 = 0, x_2 = 0$ , которая означает, что скользящий режим возникнет на плоскости  $x_2 = 0$  только после возникновения скольжения на плоскости  $x_1 = 0$ . В предположении  $\Delta = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} \neq 0$  и  $\text{sign}b_{11} = \text{const} \quad \forall x \in X$ , сформируем в первом уравнении системы (2.2.32) разрывное управление  $u_1 = -\frac{m_1}{b_{11}} \text{sign}b_{11} \text{sign}x_1$ , что при выполнении условия

$$x_1 \dot{x}_1 < 0 \Rightarrow |\varphi_1 + b_{12}u_2| < m_1 \quad (2.2.33)$$

приведет к возникновению скользящего режима на поверхности  $x_1 = 0$ . Для регуляризации задачи найдем из уравнения статики значение эквивалентного управления  $\dot{x}_1 = \varphi_1 + b_{11}u_{1\text{eq}} + b_{12}u_2 = 0 \Rightarrow u_{1\text{eq}} = -(\varphi_1 + b_{12}u_2)/b_{11}$  и подставим его вместо  $u_1$  во второе уравнение системы (2.2.32). Получим выражение

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \varphi_2 - b_{21}(\varphi_1 + b_{12}u_2)/b_{11} + b_{22}u_2 = \\ &= \varphi_2 - b_{21}\varphi_1/b_{11} + (b_{22} - b_{21}b_{12}/b_{11})u_2, \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

которое не зависит от  $u_1$  и

$$\Delta \neq 0 \Rightarrow b_{22} - b_{21}b_{12}/b_{11} \neq 0 \Rightarrow \text{sign}(b_{22} - b_{21}b_{12}/b_{11}) = \text{const} \quad \forall x \in X. \quad \text{В}$$

системе (2.2.34) сформируем разрывное управление

$$u_2 = -\frac{m_2}{(b_{22} - b_{21}b_{12}/b_{11})} \text{sign}(b_{22} - b_{21}b_{12}/b_{11}) \text{sign}x_2, \quad m_2 = \text{const} > 0. \quad (2.2.35)$$

При выполнении достаточного условия  $x_2 \dot{x}_2 < 0 \Rightarrow |\varphi_2 - b_{21}\varphi_1/b_{11}| \leq F_2 < m_2$  на поверхности  $x_2 = 0$  возникнет скользящий режим.

Второй этап данного метода заключается в том, чтобы обеспечить указанные соотношения. Зафиксировав значение  $m_2 = m_2^*$ , подставляем (2.2.35) в неравенство (2.2.33), откуда определяем

$$m_1^* = m_1 > \left| \varphi_1 + \frac{b_{12}m_2^*}{|b_{22} - b_{12}b_{21}/b_{11}|} \right|, \quad (2.2.36)$$

что и решает задачу стабилизации системы (2.2.32) за конечное время.

Заметим, что в большинстве разработанных в данном разделе базовых алгоритмах синтеза, вообще говоря, не требуется точное знание компонент матриц  $H(q_1)$ ,  $H^{-1}(q_1)$ , достаточно знать диапазоны изменения их параметров  $\forall q_1 \in Q_1$ , что существенно упрощает процедуру настройки. В тоже время, для реализации базового алгоритма управления (2.2.17) требуется информация о текущих значениях преобразованных переменных  $e_3$ , а для реализации комбинированных управлений (2.2.22), (2.2.30), (2.2.31) – дополнительно текущие оценки компонент вектор-функций  $W_{3j}$ ,  $i = \overline{1,3}$ , для получения которых может потребоваться детальная информация о матрицах  $H(q_1)$ ,  $H^{-1}(q_1)$ .

В следующем разделе решаются задачи информационного обеспечения базовых алгоритмов управления с помощью динамических наблюдателей состояния при минимально возможном количестве измерительных устройств – предполагается, что для измерения доступны только положения звеньев манипулятора  $q_1(t)$  и задающие воздействия  $q_{1d}(t)$ , т.е. имеется текущая информация об ошибках слежения  $e_1(t)$ .

### 2.3. Информационное обеспечение базовых алгоритмов управления

Особенность рассматриваемой электромеханической системы в предположении гладкости составляющих оператора объекта управления (2.1.1)–(2.2.2) заключается в том, что полученная в различных вариантах БФУ является одновременно и блочно-наблюдаемой относительно выходных переменных (2.1.6) [29]. Данный факт позволяет построить наблюдатель состояния относительно преобразованных переменных  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  и непосредственно получить их оценки для целей управления без выполнения громоздких вычислений, прямых и обратных преобразований в реальном времени.

За основу построения наблюдателей выбраны преобразованные системы при первом (2.2.5) и третьем (2.2.12) способе формирования управляющих моментов в предположении, что матрица  $H^{-1}(q_1)$  известна. Тогда для систем (2.2.1), (2.2.6), (2.2.16) и (2.2.1), (2.2.13), (2.2.25) соответственно на-

блюдатели состояния полной размерности имеют вид

$$\dot{z}_1 = -K_1 z_1 + z_2 + v_1, \quad \dot{z}_2 = H^{-1}(q_1)(z_3 - K_2 z_2 + v_2), \quad \dot{z}_3 = -Az_3 + Bu + v_3; \quad (2.3.1)$$

$$\dot{z}_1 = -K_1 z_1 + z_2 + v_1, \quad \dot{z}_2 = -(K_2 - K_1)z_2 + z_3 + v_2, \quad \dot{z}_3 = H^{-1}Bu + v_3, \quad (2.3.2)$$

где  $z_i \in R^n$  – переменные состояния,  $v_i \in R^n$  – корректирующие воздействия наблюдателя, которые формируются так, чтобы решить задачу стабилизации системы, записанную относительно невязок  $\varepsilon_i = e_i - z_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ . С учетом (2.2.1), (2.2.6), (2.2.16), (2.3.1) и (2.2.1), (2.2.13), (2.2.25), (2.3.2), имеем

$$\dot{\varepsilon}_1 = -K_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - v_1, \quad \dot{\varepsilon}_2 = H^{-1}(q_1)(\varepsilon_3 - K_2 \varepsilon_2 - v_2), \quad (2.3.3)$$

$$\dot{\varepsilon}_3 = -A\varepsilon_3 + W_{31} - v_3;$$

$$\dot{\varepsilon}_1 = -K_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - v_1, \quad \dot{\varepsilon}_2 = -(K_2 - K_1)\varepsilon_2 + \varepsilon_3 - v_2, \quad \dot{\varepsilon}_3 = -W_{33}^{**} - v_3. \quad (2.3.4)$$

В параграфе 2.3.1 разработаны каскадные процедуры синтеза наблюдателей состояния (2.3.1), (2.3.2) с разрывными корректирующими воздействиями, функционирующих в скользящем режиме; в 2.3.2 – асимптотических наблюдателей с непрерывными корректирующими воздействиями, которые также как и в алгоритмах управления разделяются на независимо решаемые элементарные подзадачи размерности  $n$  и состоят из 3-х шагов.

### 2.3.1. Наблюдатели состояния с разрывной коррекцией

#### *Каскадная процедура синтеза наблюдателя (2.3.1)*

*Шаг 1.* В первом блоке наблюдателя (2.3.1) сформируем разрывные корректирующие воздействия  $v_1 = M_1 \text{sign} \varepsilon_1$ , где здесь и далее  $M_1 = \text{diag}(m_{1i})$ ,  $m_{1i} > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  $\text{sign} \varepsilon_1 = \text{col}(\text{sign} \varepsilon_{11}, \dots, \text{sign} \varepsilon_{1n})$ . При этом первое уравнение (2.3.3) примет вид  $\dot{\varepsilon}_1 = -K_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - M_1 \text{sign} \varepsilon_1$ . При выполнении достаточных условий  $\varepsilon_{1i} \dot{\varepsilon}_{1i} < 0 \Rightarrow m_{1i} > |\varepsilon_{2i}|$ ,  $i = \overline{1, n}$  на многообразии  $S_1 = \{\varepsilon_1 = 0\} \Rightarrow z_1 = e_1$  за конечное время  $t_1 > 0$  возникнет скользящий режим и выполняться соотношения статики

$$\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2 - v_{1\text{eq}} = 0 \Rightarrow v_{1\text{eq}} = \varepsilon_2. \quad (2.3.5)$$

*Шаг 2.* С учетом (2.3.5) сформируем разрывные корректирующие воз-

действия во втором блоке наблюдателя (2.3.1) в виде

$$v_2 = M_2 \text{sign} v_{1\text{eq}} = M_2 \text{sign} \varepsilon_2. \quad (2.3.6)$$

При этом второе уравнение (2.3.3) примет вид

$$\dot{\varepsilon}_2 = H^{-1}(q_1)(\varepsilon_3 - K_2 \varepsilon_2 - M_2 \text{sign} \varepsilon_2).$$

При выполнении достаточных условий  $\varepsilon_{2i} \dot{\varepsilon}_{2i} < 0 \Rightarrow m_{2i} > |\varepsilon_{3i}|$  за теоретически конечное время  $t_2 > t_1$  на многообразии

$$S_2 = \{S_1 \cap \varepsilon_2 = 0\} \Rightarrow z_2 = e_2 \quad (2.3.7)$$

возникнет скользящий режим и выполняются соотношения статики

$$\dot{\varepsilon}_2 = H^{-1}(q_1)(\varepsilon_3 - v_{2\text{eq}}) = 0 \Rightarrow v_{2\text{eq}} = \varepsilon_3. \quad (2.3.8)$$

*Шаг 3.* С учетом (2.3.8) сформируем разрывные корректирующие воздействия в третьем блоке наблюдателя (2.3.1) в виде

$$v_3 = M_3 \text{sign} v_{2\text{eq}} = M_3 \text{sign} \varepsilon_3. \quad (2.3.9)$$

При этом третье уравнение (2.3.3) примет вид  $\dot{\varepsilon}_3 = -A\varepsilon_3 + W_{31} - M_3 \text{sign} \varepsilon_3$ .

При выполнении достаточных условий  $\varepsilon_{3i} \dot{\varepsilon}_{3i} < 0 \Rightarrow m_{3i} > \overline{W}_{31i}$ ,  $i = \overline{1, n}$  за теоретически конечное время  $t_3 > t_2$  на многообразии

$$S_3 = \{S_2 \cap \varepsilon_3 = 0\} \Rightarrow z_3 = e_3 \quad (2.3.10)$$

возникнет скользящий режим и выполняются соотношения статики

$$\dot{\varepsilon}_3 = W_{31} - v_{3\text{eq}} = 0 \Rightarrow v_{3\text{eq}} = W_{31}. \quad (2.3.11)$$

Текущие значения эквивалентных управлений  $v_{j\text{eq}}$ ,  $j = \overline{1, 3}$ , которые соответствуют средним значениям разрывных управлений, могут быть получены с выходов линейных фильтров первого порядка с малыми постоянными времени [57]. Математическая модель данных фильтров имеет вид

$$\mu_j \dot{\tau}_j = -\tau_j + v_j, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (2.3.12)$$

где  $\tau_j \in R^n$  – векторы состояния,  $\mu_j > 0$  – постоянные времени фильтров.

При  $t > t_j$  справедливы следующие соотношения:

$$\lim_{\mu_j \rightarrow 0} \tau_j(t) = v_{j\text{eq}}(t), \quad j = \overline{1, 3}; \quad (2.3.13)$$

$$\varepsilon_{j+1} = \tau_j + O_j(\mu_j, t), \quad j = 1, 2; \quad W_{31} = \tau_3 + O_3(\mu_3, t), \quad \lim_{\mu_j \rightarrow 0} O_j(\mu_j, t) = 0.$$

Текущие оценки (2.3.8), (2.3.11), полученные с выходов фильтров (2.3.12), позволяют сформировать в подсистеме (2.2.16) обратную связь (2.2.17) или (2.2.22), а соотношения (2.2.20) начнут выполняться с момента времени  $t^* > t_3$ . Темпы сходимости переменных состояния наблюдателя (2.3.1) к соответствующим преобразованным переменным определяются с учетом  $t^* > t_3$  выбором коэффициентов коррекции  $m_{ji}$  ( $j = \overline{1,3}$ ,  $i = \overline{1,n}$ ) и быстрой работой вычислительной среды.

Для реализации разрывного управления (2.2.17) требуются только оценки  $e_3$ , которые можно получить с помощью укороченного наблюдателя

$$\dot{z}_1 = -K_1 z_1 + z_2 + v_1, \quad \dot{z}_2 = H^{-1}(q_1)(-K_2 z_2 + v_2). \quad (2.3.14)$$

С учетом (2.2.1), (2.2.6), (2.3.14) имеем уравнения относительно ошибок наблюдения

$$\dot{\varepsilon}_1 = -K_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - v_1, \quad \dot{\varepsilon}_2 = H^{-1}(q_1)(e_3 - K_2 \varepsilon_2 - v_2). \quad (2.3.15)$$

Тогда с учетом (2.3.5) во втором блоке (2.3.14) формирование разрывного корректирующего воздействия (2.3.6), где  $m_{2i} > |e_{3i}|$ , при  $t_2 > t_1$  приведет к соотношениям статики  $\dot{\varepsilon}_2 = H^{-1}(q_1)(e_3 - v_{2\text{eq}}) = 0 \Rightarrow v_{2\text{eq}} = e_3$ . Соответственно, для получения значений эквивалентных управлений  $v_{j\text{eq}}$ ,  $j = 1, 2$  потребуются два первых блока фильтров (2.3.12).

В то же время, построение полного наблюдателя (2.3.1) с полным комплектом фильтров ( $i = \overline{1,3}$ ) позволит организовать автоматическую настройку амплитуды [63] разрывного управления (2.2.17) (если это технически реализуемо) а, следовательно, уменьшить автоколебания в установившемся режиме. Алгоритм настройки амплитуды разрывной обратной связи в подсистеме (2.2.16), (2.2.17) в скользящем режиме при  $t > t^*$  с учетом (2.3.13) имеет вид

$$k_{3i} > |W_{31i}| \Rightarrow k_{3i}(t) = |\tau_{3i}(t)| + \alpha_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.3.16)$$

где  $\alpha_i$  – произвольные, положительные, сколь угодно малые константы. Ана-

Аналогичные (2.3.16) алгоритмы настройки могут быть использованы и для выбора коэффициентов разрывной коррекции наблюдателя (2.3.1).

На рис. 2.1 приведена структурная схема замкнутой системы (2.2.1), (2.2.6), (2.2.16) с полным наблюдателем (2.3.1), (2.3.12), функционирующим в скользящем режиме, и базовым алгоритмом (2.2.22) в виде

$$u = -B^{-1}(K_3 \text{sign}z_3 + \tau_3). \quad (2.3.17)$$

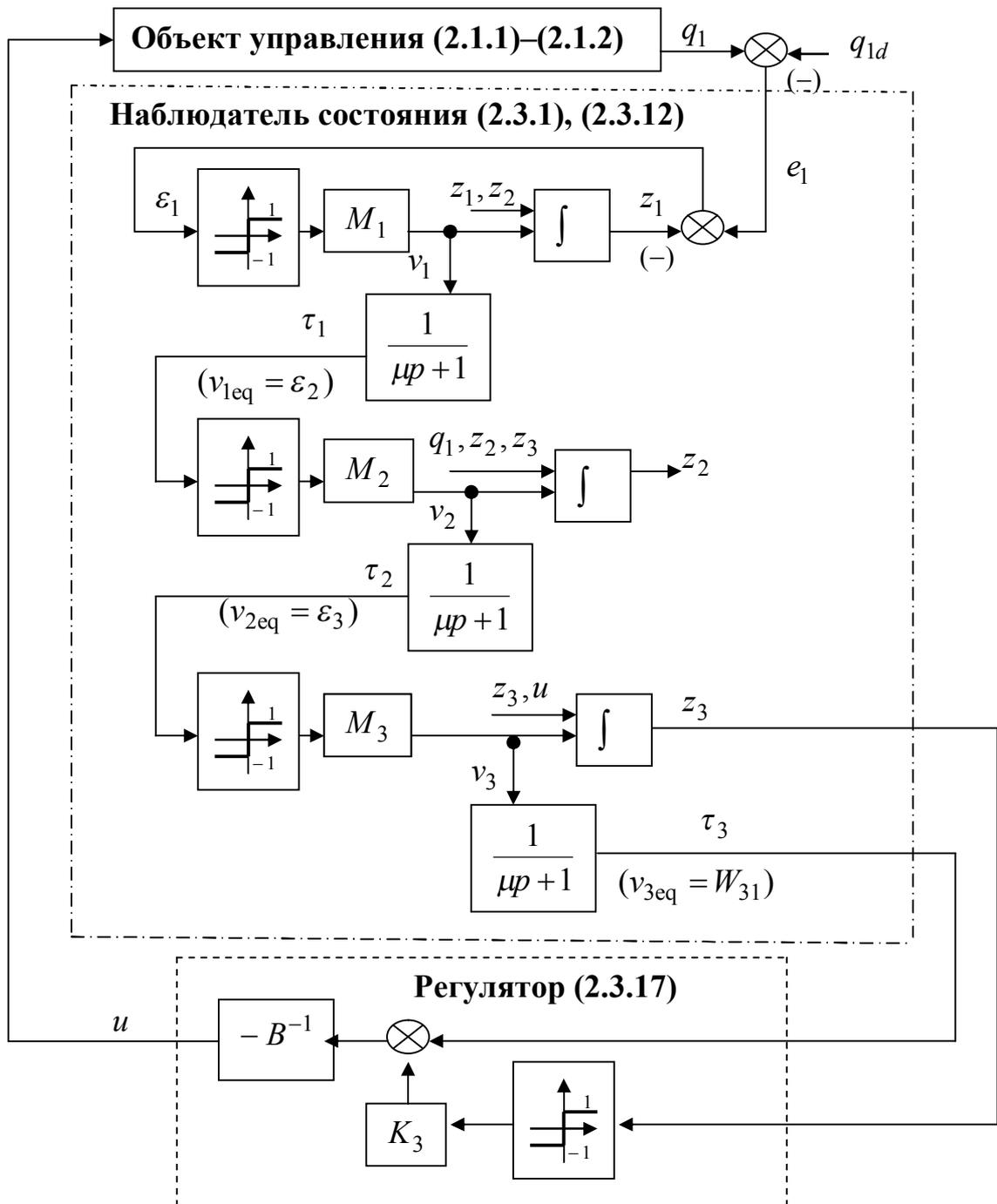


Рис. 2.1. Структурная схема замкнутой системы (2.2.1), (2.2.6), (2.2.16), (2.2.22)

### *Каскадная процедура синтеза наблюдателя (2.3.2)*

Первый шаг процедуры синтеза корректирующих разрывных воздействий наблюдателя (2.3.2) аналогичен случаю (2.3.1).

*Шаг 2.* С учетом (2.3.5), (2.3.6) второе уравнение (2.3.4) примет вид  $\dot{\varepsilon}_2 = -(K_2 - K_1)\varepsilon_2 + \varepsilon_3 - M_2 \text{sign} \varepsilon_2$ . При выполнении достаточных условий  $\varepsilon_{2i} \dot{\varepsilon}_{2i} < 0 \Rightarrow m_{2i} > |\varepsilon_{3i}|$  за теоретически конечное время  $t_2 > t_1$  на многообразии (2.3.7) возникнет скользящий режим, и выполнятся соотношения статики

$$\dot{\varepsilon}_2 = \varepsilon_3 - v_{2\text{eq}} \Rightarrow v_{2\text{eq}} = \varepsilon_3. \quad (2.3.18)$$

*Шаг 3.* С учетом (2.3.18), (2.3.9) третье уравнение (2.3.4) примет вид  $\dot{\varepsilon}_3 = W_{33}^{**} - M_3 \text{sign} \varepsilon_3$ . При выполнении достаточных условий  $\varepsilon_{3i} \dot{\varepsilon}_{3i} < 0 \Rightarrow \Rightarrow m_{3i} > \overline{W_{33i}^{**}}$ ,  $i = \overline{1, n}$  за теоретически конечное время  $t_3 > t_2$  на многообразии (2.3.10) возникнет скользящий режим и выполнятся соотношения статики

$$\dot{\varepsilon}_3 = W_{33}^{**} - v_{3\text{eq}} = 0 \Rightarrow v_{3\text{eq}} = W_{33}^{**}. \quad (2.3.19)$$

Для реализации (2.3.18), (2.3.19) используются фильтры (2.3.12). Заметим, что только в случае замкнутой системы (2.2.1), (2.2.13), (2.2.25) с разрывным управлением без компенсирующей составляющей (2.2.17) для синтеза обратной связи не потребуется детального знания матриц  $H(q_1)$ ,  $H^{-1}(q_1)$ , если использовать укороченный наблюдатель состояния вида

$$\dot{z}_1 = -K_1 z_1 + z_2 + v_1, \quad \dot{z}_2 = -(K_2 - K_1) z_2 + v_2, \quad (2.3.20)$$

что приводит к уравнениям относительно ошибок наблюдения

$$\dot{\varepsilon}_1 = -K_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - v_1, \quad \dot{\varepsilon}_2 = -(K_2 - K_1) \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - v_2. \quad (2.3.21)$$

С учетом (2.3.5), (2.3.6), где  $m_{2i} > |\varepsilon_{3i}|$ , при  $t_2 > t_1$  имеем соотношения статики  $\dot{\varepsilon}_2 = \varepsilon_3 - v_{2\text{eq}} = 0 \Rightarrow v_{2\text{eq}} = \varepsilon_3$ .

Наблюдатель состояния на скользящих режимах при втором способе формирования управляющих моментов (2.2.9) имеет структуру, аналогичную (2.2.1), (2.2.10), (2.2.16) и синтезируется указанным образом, но дополнительно требуется информация о матрице  $C(q_1, q_2)$  и, возможно, о сигнале  $q_{2d}(t)$ .

### 2.3.2. Наблюдатели состояния с непрерывной коррекцией

Преимущество разработанных в предыдущем параграфе наблюдателей с разрывными корректирующими воздействиями, функционирующими в скользящем режиме, заключается в том, что можно получить текущие оценки не только преобразованных переменных  $z_j = e_j$ , но и имеющихся неопределенностей  $W_{3j}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) за теоретически конечное время [3, 28, 29]. Последнее обстоятельство весьма существенно, поскольку позволяет декомпозировать систему управления и независимо осуществлять анализ и синтез собственно системы управления объектом (регулятора) и наблюдателя состояния. Кроме того, коэффициенты коррекции  $m_{ji}$  выбираются независимо в каждом блоке на основе неравенств, что существенно упрощает настройку наблюдателя.

Наблюдатели с непрерывными корректирующими воздействиями такой возможности не предоставляют, т.е. непосредственно могут обеспечить только информационную поддержку алгоритма управления (2.2.17) без компенсирующей составляющей, кроме того, в силу наличия неопределенностей в последних блоках (2.2.16) или (2.2.25) задача наблюдения может быть решена только с заданной точностью [29].

Обеспечение асимптотической сходимости переменных наблюдателя к преобразованным переменным, а также реализация законов управления типа (2.2.22), (2.2.30), (2.2.31) в этом случае потребуют более полной информации об операторе объекта управления (2.1.1) и, в общем случае, *вычислений* в реальном времени составляющих вектор-функций  $W_{3j}$  ( $j = \overline{1,3}$ ) вплоть до составления динамических моделей генераторов задающих и возмущающих воздействий [26, 44, 55]. Таким образом, проблема наблюдения и настройка наблюдателя существенно усложняется.

Учитывая практическую направленность данной работы, необходимость разработки наблюдателей состояния с непрерывной коррекцией обусловлена тем, что, во-первых, микропроцессорная реализация разрывных корректирующих воздействий с большой, но конечной частотой переключений может

привести к наложению на оцениваемый сигнал паразитной высокочастотной составляющей с малой амплитудой. Во-вторых, на практике и в измеряемых сигналах, и в объекте управления присутствуют шумы. Учитывая, что наблюдатели состояния с непрерывной коррекцией имеют структуру фильтров Калмана [21], при их синтезе могут быть использованы методы оптимальной фильтрации [5]. Несмотря на то, что в данной работе задачи фильтрации не рассматривались, отметим, что при наличии шумов приходится искать компромисс между точностью оценивания и удовлетворительной фильтрацией сигналов.

В данном параграфе за основу наблюдателя с непрерывной коррекцией принята преобразованная система (2.2.1), (2.2.13), (2.2.25) при третьем (2.2.12) способе формирования управляющих моментов. Ставится задача оценивания преобразованных переменных  $e_1, e_2, e_3$  с заданной точностью.

Настройка наблюдателя состояния (2.3.2) с непрерывными корректирующими воздействиями типа  $v_j = L_j \varepsilon_j, j = \overline{1,3}$ , где  $L_j$  – матрицы с постоянными коэффициентами размерности  $n \times n$ , потребует анализа полной задачи размерности  $3n$  [21]. С целью остаться в рамках блочного подхода и разделить задачу синтеза наблюдателя на независимо решаемые элементарные подзадачи размерности  $n$ , введем невырожденную замену переменных [29]

$$s_1 = e_1, s_2 = -L_2 e_1 + e_2, s_3 = P e_1 - L_3 e_2 + e_3, \quad (2.3.22)$$

где  $L_2 = \text{diag}(l_{2i}), L_3 = \text{diag}(l_{3i})$  – диагональные матрицы с постоянными коэффициентами ( $i = \overline{1,n}$ ), которые будут выбраны при синтезе наблюдателя состояния,  $P = \text{diag}(p_i)$ . Обратные соотношения (2.3.22) имеют вид

$$e_1 = s_1, e_2 = s_2 + L_2 s_1, e_3 = s_3 + L_3 s_2 + (L_3 L_2 - P) s_1. \quad (2.3.23)$$

Дифференциальные уравнения относительно новых координат (2.3.22) в силу системы (2.2.1), (2.2.13), (2.2.25) и с учетом (2.3.23) имеют вид

$$\dot{s}_1 = (L_2 - K_1) s_1 + s_2, \quad (2.3.24)$$

$$\dot{s}_2 = (L_2 K_1 + L_3 L_2 - P - L_2^2 - K_2 L_2 + K_1 L_2) s_1 + (L_3 - L_2 + K_1 - K_2) s_2 + s_3,$$

$$\begin{aligned} \dot{s}_3 = & (PL_2 - PK_1 + L_3K_2L_2 - L_3K_1L_2 - L_3^3L_2 + L_3P)s_1 + \\ & + (P + L_3K_2 - L_3K_1 - L_3^2)s_2 - L_3s_3 + H^{-1}Bu + W_{33}^{**}. \end{aligned}$$

Положим

$$P = -L_3K_2 + L_3K_1 + L_3^2, \quad (2.3.25)$$

тогда система (2.3.24) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 = & (L_2 - K_1)s_1 + s_2, \quad \dot{s}_2 = P_2s_1 + (L_3 - L_2 + K_1 - K_2)s_2 + s_3, \\ \dot{s}_3 = & P_3s_1 - L_3s_3 + H^{-1}Bu + W_{33}^{**}, \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

где  $P_2 = L_3(L_2 + K_2 - K_1 - L_3) + L_2K_1 - L_2^2 - K_2L_2 + K_1L_2$ ,  $P_3 = L_3(K_2K_1 - K_1^2 - L_3K_2 + L_3^2)$ .

С целью свести к минимуму объем априорной информации об операторе объекта наблюдения, для системы (2.3.26) строится наблюдатель состояния с аналогичной структурой, на который не подаются управляющие воздействия  $u$ , а именно

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = & (L_2 - K_1)z_1 + z_2 + v_1, \\ \dot{z}_2 = & P_2z_1 + (L_3 - L_2 + K_1 - K_2)z_2 + z_3 + v_2, \quad \dot{z}_3 = P_3z_1 - L_3z_3 + v_3, \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

где  $z_i \in R^n$  – переменные состояния,  $v_i \in R^n$  – корректирующие воздействия наблюдателя, которые выбираются в классе непрерывных функций так, чтобы получить верхнюю треугольную форму системы, записанной относительно невязок  $\varepsilon_i = s_i - z_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ . С учетом

$$v_1 = (L_1 - K_1)\varepsilon_1, \quad v_2 = P_2\varepsilon_1, \quad v_3 = P_3\varepsilon_1, \quad (2.3.28)$$

где  $L_1 = \text{diag}(l_{1i})$ ,  $l_{1i} = \text{const} > 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ), а также (2.3.26)–(2.3.27), имеем

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 = & (L_2 - L_1)\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon}_2 = & (L_3 - L_2 + K_1 - K_2)\varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad \dot{\varepsilon}_3 = -L_3\varepsilon_3 + H^{-1}Bu + W_{33}^{**}. \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

В предположении, что неизвестные составляющие последнего уравнения системы (2.3.29) ограничены, а именно

$$\left| \sum_{j=1}^n H_{ij}^{-1} b_j u_j + W_{33i}^{**} \right| \leq \sum_{j=1}^n \bar{H}_{ij}^{-1} b_j U_j + \bar{W}_{33i}^{**} = F_i, \quad i = \overline{1, n},$$

где  $|H_{ij}^{-1}| \leq \overline{H}_{ij}^{-1}$ , покажем, что путем последовательного выбора коэффициентов коррекции  $L_3, L_2, L_1$  на основе неравенств в системе (2.3.29) можно обеспечить заданную точность оценивания, а именно,

$$|\varepsilon_{ji}| \leq \Delta_{ji}, \quad j = \overline{1,3} \quad i = \overline{1,n}. \quad (2.3.30)$$

Исследуем квадратичную форму в виде суммы квадратичных форм:

$$V = \sum_{j=1}^3 V_j, \quad V_j = \sum_{i=1}^n V_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ji}^2. \quad (2.3.31)$$

Покажем, что общую оценку производной  $\dot{V}$  квадратичной формы (2.3.31) можно получить, оценивая последовательно производные каждого слагаемого выражения (2.3.31) покомпонентно:

$$\dot{V}_{1i} = \varepsilon_{1i} \dot{\varepsilon}_{1i} = \varepsilon_{1i} ((l_{2i} - l_{1i}) \varepsilon_{1i} + \varepsilon_{2i}) \leq |\varepsilon_{1i}| (|(l_{2i} - l_{1i}) \varepsilon_{1i}| + |\varepsilon_{2i}|), \quad (2.3.32)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2i} &= \varepsilon_{2i} \dot{\varepsilon}_{2i} = \varepsilon_{2i} ((l_{3i} - l_{2i} + k_{1i} - k_{2i}) \varepsilon_{2i} + \varepsilon_{3i}) \leq \\ &\leq |\varepsilon_{2i}| (|(l_{3i} - l_{2i} + k_{1i} - k_{2i}) \varepsilon_{2i}| + |\varepsilon_{3i}|), \end{aligned}$$

$$\dot{V}_{3i} = \varepsilon_{3i} \dot{\varepsilon}_{3i} = \varepsilon_{3i} (-l_{3i} \varepsilon_{3i} + \sum_{j=1}^n H_{ij}^{-1} b_j u_j + W_{33i}^{**}) \leq |\varepsilon_{3i}| (-l_{3i} |\varepsilon_{3i}| + F_i), \quad i = \overline{1,n}.$$

В системе (2.3.32) неравенства  $\dot{V}_{ji} < 0$  справедливы вне областей

$$|\varepsilon_{1i}| \leq \frac{|\varepsilon_{2i}|}{l_{1i} - l_{2i}} < \Delta_{1i}, \quad |\varepsilon_{2i}| \leq \frac{|\varepsilon_{3i}|}{l_{2i} - l_{3i} + k_{2i} - k_{1i}} < \Delta_{2i}, \quad |\varepsilon_{3i}| \leq \frac{F_i}{l_{3i}} < \Delta_{3i}, \quad i = \overline{1,n}.$$

В системе (2.3.29) обеспечивается заданная точность (2.3.30), если коэффициенты коррекции выбирать на основе следующей иерархической схемы:

$$\begin{aligned} l_{3i} &> \frac{F_i}{\Delta_{3i}}, \quad l_{2i} > \frac{F_i}{l_{3i} \Delta_{2i}} + l_{3i} + (k_{1i} - k_{2i}) > 0, \\ l_{1i} &> \frac{|\varepsilon_{2i}|}{\Delta_{1i}} + l_{2i} > \frac{F_i}{l_{3i} (l_{2i} - l_{3i} + k_{2i} - k_{1i}) \Delta_{1i}} + l_{2i}, \quad i = \overline{1,n}. \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

С учетом (2.3.23), (2.3.25) управление (2.2.17) будет реализовано в виде

$$u = -K_3 \text{sign} \tilde{e}_3 = -K_3 \text{sign}(z_3 + L_3 z_2 + L_3 (L_2 + K_2 - K_1 - L_3) z_1), \quad (2.3.34)$$

где  $\tilde{e}_{3i} = (s_{3i} - \varepsilon_{3i}) + l_{3i} (s_{2i} - \varepsilon_{2i}) + l_{3i} (l_{2i} + k_{2i} - k_{1i} - l_{3i}) (s_{1i} - \varepsilon_{1i}) = e_{3i} \pm \delta_i$ ,  $\delta_i = \Delta_{3i} + l_{3i} \Delta_{2i} + l_{3i} (l_{2i} + k_{2i} - k_{1i} - l_{3i}) \Delta_{1i}$ ,  $i = \overline{1,n}$ . Заметим, что при удовлетво-

рительном качестве измерений, когда задача фильтрации не ставится, в законе управления (2.2.17) непосредственно используются значения  $e_1 = q_1 - q_{1d}$  вместо оцененных с погрешностью переменных  $s_1$ , а именно

$$u = -K_3 \text{sign} \tilde{e}_3 = -K_3 \text{sign}(z_3 + L_3 z_2 + L_3(L_2 + K_2 - K_1 - L_3)e_1), \quad (2.3.35)$$

где  $\tilde{e}_{3i} = e_{3i} \pm \delta_i$ ,  $\delta_i = \Delta_{3i} + l_{3i}\Delta_{2i}$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Таким образом, при учете погрешностей оценивания (2.3.30) закон управления (2.2.17) имеет вид  $u = -K_3 \text{sign}(e_3 \pm \delta)$ . Известно [24, 25, 40, 57], что системы с разрывными управлениями грубы к малым неидеальностям  $\delta \leq \bar{\delta}$ , однако при этом возникает *реальный* скользящий режим, обуславливающий решение задачи слежения (2.1.6) с некоторой точностью. При выборе коэффициентов коррекции (2.3.33) следует учитывать соотношение  $\delta \leq \bar{\delta}$  с тем, чтобы обеспечить заданные характеристики переходного процесса замкнутой системы (2.2.1), (2.2.13), (2.2.25), (2.3.34) или (2.3.34,а).

#### 2.4. Сравнительный анализ разработанных процедур синтеза

При первом способе формирования управляющих моментов (2.2.5), система (2.1.1), (2.1.2) преобразуется к виду (2.2.1), (2.2.6), (2.2.16):

$$\dot{e}_1 = -K_1 e_1 + e_2, \quad \dot{e}_2 = H^{-1}(q_1)(-K_2 e_2 + e_3), \quad \dot{e}_3 = -A e_3 + W_{31} + B u. \quad (2.4.1)$$

Процедура настройки (в частности выбор матрицы  $K_2$ ) на основе системы (2.4.1) не вызывает трудностей, если к характеристикам переходного процесса не предъявляется специфических требований. В общем случае в системе (2.4.1) имеет место взаимовлияние степеней подвижности, автономное управление выходными координатами обеспечивается только в том случае, когда матрица  $H^{-1}$  – диагональная. Ослабление взаимосвязей звеньев манипулятора возможно, если  $\exists K_2$ , при которой матрица  $P = H^{-1}K_2$  будет иметь преобладающую диагональ (2.2.8). Для обеспечения заданных характеристик переходного процесса (2.1.6) требуется анализ матрицы  $H^{-1}(q_1)$ .

Информационное обеспечение законов управления без компенсирующей и с компенсирующей составляющей (соответственно (2.2.17), (2.2.22))

осуществляется с помощью наблюдателей состояния с разрывной коррекцией, для построения которых требуется знание параметров матрицы  $H^{-1}(q_1)$ . Непосредственная реализация данных наблюдателей возможна при высоком качестве измерений, в противном случае потребуется предварительно осуществить фильтрацию измеряемых сигналов  $q_1(t)$ .

Для системы (2.4.1) разработаны три процедуры синтеза обратной связи. В следующем перечне каждая последующая процедура обеспечивает более высокое качество установившихся режимов по сравнению с предыдущей, «платой» за это является повышение порядка динамических устройств наблюдения и специальные требования к технической реализации.

*Процедура 1.1:* замкнутая система (2.4.1), (2.2.17), где  $k_{3i} = \text{const}$  ( $i = \overline{1, n}$ ), укороченный наблюдатель состояния (2.3.14) – наиболее проста и универсальна в реализации, но требует значительных ресурсов управления.

*Процедура 1.2:* замкнутая система (2.4.1), (2.2.17), полный наблюдатель состояния (2.3.1) – рекомендуется при использовании исполнительных устройств с переменной амплитудой разрывных управлений  $k_{3i} = \text{var}$ , реализация алгоритма настройки которой (2.3.16) позволяет минимизировать требуемые ресурсы управления в установившемся режиме.

*Процедура 1.3:* замкнутая система (2.4.1), (2.2.22), полный наблюдатель состояния (2.3.1) – рекомендуется при возможности технической реализации комбинированного управления, обеспечивает наилучшее качество переходных процессов с экономией ресурсов управления. Существенно сокращается объем вычислений на стадии исследования, так как выбор амплитуды разрывных управлений не требует оценок имеющихся неопределенностей.

При втором способе формирования управляющих моментов (2.2.9), система (2.1.1), (2.1.2) преобразуется к виду (2.2.1), (2.2.10), (2.2.16):

$$\dot{e}_1 = -K_1 e_1 + e_2, \quad \dot{e}_2 = H^{-1}(-K_2 e_2 - C e_2 + e_3), \quad \dot{e}_3 = -A e_3 + W_3 + B u. \quad (2.4.2)$$

Синтез обратной связи на основе блочного представления (2.4.2) во многом аналогичен приведенному выше для системы (2.4.1). Существенное

отличие состоит в том, что в системе (2.4.2) в большей степени учитывается механическая природа объекта управления (2.2.11), что позволит синтезировать менее «жесткий» регулятор с меньшей потребностью в ресурсах управления для подавления имеющихся неопределенностей. В тоже время, для построения наблюдателей состояния и информационной поддержки законов управления (2.2.17), (2.2.22) потребуются дополнительно знание структуры матрицы  $C(q_1, q_2)$  и, возможно, производной задающего сигнала  $q_{2d}(t)$ .

При третьем способе формирования управляющих моментов (2.2.12), система (1.22), (2.1.2) преобразуется к виду (2.2.1), (2.2.13), (2.2.25):

$$\dot{e}_1 = -K_1 e_1 + e_2, \quad \dot{e}_2 = -(K_2 - K_1)e_2 + e_3, \quad \dot{e}_3 = H^{-1}Bu + W_{33}^{**}. \quad (2.4.3)$$

В системе (2.4.3) обеспечивается автономное управление выходными координатами, а задача обеспечения заданных характеристик переходного процесса (2.1.6) существенно упрощается и сводится к выбору коэффициентов диагональных матриц  $K_1, K_2$ . Для системы (2.4.4) разработаны четыре процедуры синтеза обратной связи. В следующем перечне при реализации каждой последующей процедуры обеспечивает более высокое качество установившихся режимов по сравнению с предыдущей.

*Процедура 3.1:* замкнутая система (2.4.3) с разрывным управлением (2.2.17), где  $k_{3i} = \text{const}$ , наблюдатель состояния (2.3.27) с непрерывными корректирующими воздействиями (2.3.28) – рекомендуется при наличии шумов в каналах измерения и необходимости фильтрации выходных сигналов. В данной процедуре не требуется точного знания матрицы  $H^{-1}(q_1)$  ни для синтеза закона управления (2.2.29), ни для решения задачи оценивания, но неточное решение задачи оценивания (2.3.30) приведет к решению задачи слежения (2.1.6) не в экспоненциальном смысле, а с некоторой точностью.

*Процедура 3.2:* замкнутая система (2.4.3) с разрывным управлением (2.2.17), где  $k_{3i} = \text{const}$ , укороченный наблюдатель состояния (2.3.20) с разрывными корректирующими воздействиями – наиболее проста и универсальна в реализации, но может потребовать значительных ресурсов управле-

ния. Не требует точного знания матрицы  $H^{-1}$  ни для синтеза закона управления (2.2.29), ни для решения задачи оценивания. Рекомендуется в случае существенной неопределенности оператора объекта управления (2.1.1).

*Процедура 3.3:* замкнутая система (2.4.3) с разрывным управлением (2.2.17), полный наблюдатель состояния (2.3.2) с разрывной коррекцией (требуется знание  $H^{-1}(q_1)$ ) – аналогична процедуре 1.2.

*Процедура 3.4:* замкнутая система (2.4.3) с комбинированным управлением (2.2.30), полный наблюдатель состояния (2.3.2) (требуется знание  $H^{-1}(q_1)$ ) – аналогична процедуре 1.3.

В табл. 2.1 дана сводная характеристика разработанных процедур.

Таблица 2.1.

Сводная характеристика разработанных процедур синтеза

	<i>Номер процедуры</i>						
	<i>1.1.</i>	<i>1.2.</i>	<i>1.3.</i>	<i>3.1.</i>	<i>3.2.</i>	<i>3.3.</i>	<i>3.4.</i>
Автономное управление	в общем случае не обеспечивается			обеспечивается			
Качество установившихся режимов	хуже	высокое		хуже		высокое	
Знание $H^{-1}$	требуется			не требуется		требуется	
Размерность устройства наблюдения	$4n$	$6n$	$6n$	$3n$	$4n$	$6n$	$6n$
Необходимость в дополнительной фильтрации измерений	в общем случае есть			нет	в общем случае есть		
Потребление ресурсов управления	избыточное	экономное		избыточное		экономное	
Требования к аппаратурной реализации законов управления: – переменная амплитуда; – комбинированное управление.	нет	да	нет	нет	нет	да	нет
	нет	нет	да	нет	нет	нет	да

## 2.5. Результаты моделирования

В качестве примера, иллюстрирующего эффективность разработанных процедур синтеза, рассмотрим систему управления трехзвенным манипулятором в цилиндрической системе координат (см. рис. 1.2). В этом случае составляющие оператора объекта управления (2.1.1) имеют вид (1.14). Моделирование проводилось на ПК в среде MATLAB–SIMULINK при следующих параметрах механической подсистемы [50]:

$$I_1 = 0,029 [\text{кг} \cdot \text{м}^2], I_2 = 0,055 [\text{кг} \cdot \text{м}^2]; m_2 = 7 [\text{кг}], \quad (2.5.1)$$

$$m'_3 = 5,6 [\text{кг}], m_3 = [0,1 \div 3] [\text{кг}], l = 0,5 \text{ м}.$$

Параметры исполнительных устройств (2.1.2) с учетом (1.24) имеют следующие значения:  $A_{3 \times 3} = \text{diag}(464,9)$ ,  $D_{3 \times 3} = \text{diag}(2,2)$ ,  $B_{3 \times 3} = \text{diag}(34,6)$ .

Компоненты вектора состояния  $q_1 = \text{col}(q_{11}, q_{12}, q_{13})$  совершают вращательные, вертикальные линейные и горизонтальные линейные движения соответственно. Ограничения (1.3), (1.8) на области изменения компонент вектора состояния системы (2.1.1) с учетом (1.14), (2.5.1) имеют вид

$$q_{11\max} = 5,5 [\text{rad}], q_{21\max} = 1,05 [\text{rad} / \text{с}], \quad (2.5.2)$$

$$q_{1i\max} = l [\text{м}], q_{2i\max} = 1 [\text{м} / \text{с}], i = 2, 3.$$

С учетом (2.5.1)–(2.5.2) ограничения (2.1.3) для составляющих оператора (1.14) имеют вид

$$H_{1\min}(q_{13\min}) = m'_3 \frac{l^2}{3} + I_1 + I_2 = 0,152, \quad (2.5.3)$$

$$H_{1\max}(q_{13\max}) = ((m'_3 + m_3) + m'_3 + \frac{1}{3}m'_3)l^2 + I_1 + I_2 = 1,691,$$

$$H_{2\min} = m_2 + m'_{3\min} + m_3 = 12,7, H_{2\max} = m_2 + m'_{3\max} + m_3 = 15,6,$$

$$H_{3\min} = m'_{3\min} + m_3 = 5,7, H_{3\max} = m'_{3\max} + m_3 = 8,6;$$

$$H_i^{-1} = 1/H_i > 0, H_{i\min}^{-1} = 1/H_{i\max}, H_{i\max}^{-1} = 1/H_{i\min},$$

$$H_{1\min}^{-1} = 0,5915, H_{1\max}^{-1} = 6,6; H_{2\min}^{-1} = 0,064, H_{2\max}^{-1} = 0,079;$$

$$H_{3\min}^{-1} = 0,116, H_{3\max}^{-1} = 0,175; |C_1| \leq \bar{C}_1 = 4,5, C_2 = 0, |C_3| \leq \bar{C}_3 = 24,3,$$

$$G_1 = 0, G_{2\min} = 125, G_{2\max} = 153, G_3 = 0.$$

Полные производные составляющих оператора объекта управления (1.14) имеют вид:

$$\dot{H}_1 = (2(m'_3 + m_3)q_{13} + m'_3 l)q_{23}, \quad \dot{H}_2 = 0, \quad \dot{H}_3 = 0; \quad (2.5.4)$$

$$\dot{C}_1 = 2(m'_3 + m_3)q_{23}^2 q_{21} + 2[(m'_3 + m_3)q_{13} - m'_3 \frac{l}{2}](q_{33}q_{21} + q_{23}q_{31}), \quad \dot{C}_2 = 0,$$

$$\dot{C}_3 = -(m'_3 + m_3)q_{23}q_{21}^2 + 2[m'_3 \frac{l}{2} - (m'_3 + m_3)q_{13}]q_{21}q_{31}, \quad \dot{G}_j = 0, \quad i = \overline{1,3}.$$

Внешние возмущения описываются гладкими, ограниченными (2.1.4) функциями времени вида

$$\eta_i(t) = 0,01 \sin(5t), \quad N_i = 0,01, \quad \dot{\eta}_i(t) = 0,05 \cos(5t), \quad \bar{N}_i = 0,05, \quad i = \overline{1,3}. \quad (2.5.5)$$

Требуется обеспечить равномерное движение схвата (конечной точки манипулятора) по заданной пространственной траектории, показанной на рис. 2.2 в пространстве и в плоскости  $(q_{12}; q_{13})$ .

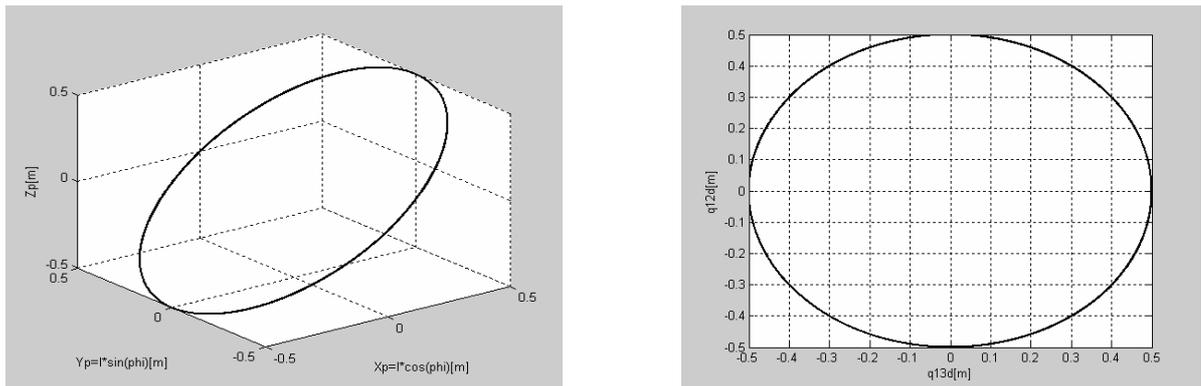


Рис. 2.2. Заданная траектория схвата в пространстве и плоскости  $(q_{12}; q_{13})$

Заданная траектория движения схвата пересчитана в программные движения звеньев манипулятора (напомним, что в данном случае обратная задача о положении имеет аналитическое решение (1.15)–(1.16)), которые описываются гладкими, ограниченными (2.1.5) функциями времени вида

$$q_{11d}(t) = 0,5 \sin(0,5t) [рад], \quad q_{12d}(t) = 0,5 \cos(0,5t), \quad q_{13d}(t) = 0,5 \sin(0,5t) [м],$$

$$S_{i0} = 0,5, \quad S_{i1} = 0,25, \quad S_{i2} = 0,125, \quad i = \overline{1,3}, \quad (2.5.6)$$

При первом способе формирования управляющих моментов (2.2.5), система (2.1.1), (2.1.2) преобразуется к виду (2.4.1). Коэффициенты обратной связи в первых двух блоках приняты в виде  $k_{1i} = 5, k_{2i} = 15, i = \overline{1,3}$ , с учетом которых, а также (2.5.1)–(2.5.6) для компонент вектор-функции

$W_{31} = \text{col}(W_{31,1}, W_{31,2}, W_{31,3})$  имеют место оценки

$$|W_{31,1}| \leq \bar{W}_1 = 145, \quad |W_{31,2}| \leq \bar{W}_2 = 374, \quad |W_{31,3}| \leq \bar{W}_3 = 150, \quad (2.5.7)$$

которые удовлетворяют верхним оценкам на ресурсы управления (1.23) при  $k_{31} = 24, k_{32} = 24, k_{33} = 24$  двигателей (1.24)–(1.26).

Ниже приведены результаты моделирования разработанных процедур синтеза обратной связи в задаче слежения за заданными траекториями (2.5.6).

На рис. 2.3 в качестве эталона для сравнения приведены результаты моделирования в условиях полной определенности, в предположении, что компоненты вектора состояния, оператора объекта управления, производные задающих и возмущающие воздействия известны. Экспоненциальная сходимость к заданным траекториям  $e_{1i}(t) \rightarrow 0$  ( $i = \overline{1,3}$ ) обеспечивается за 2–3 сек.

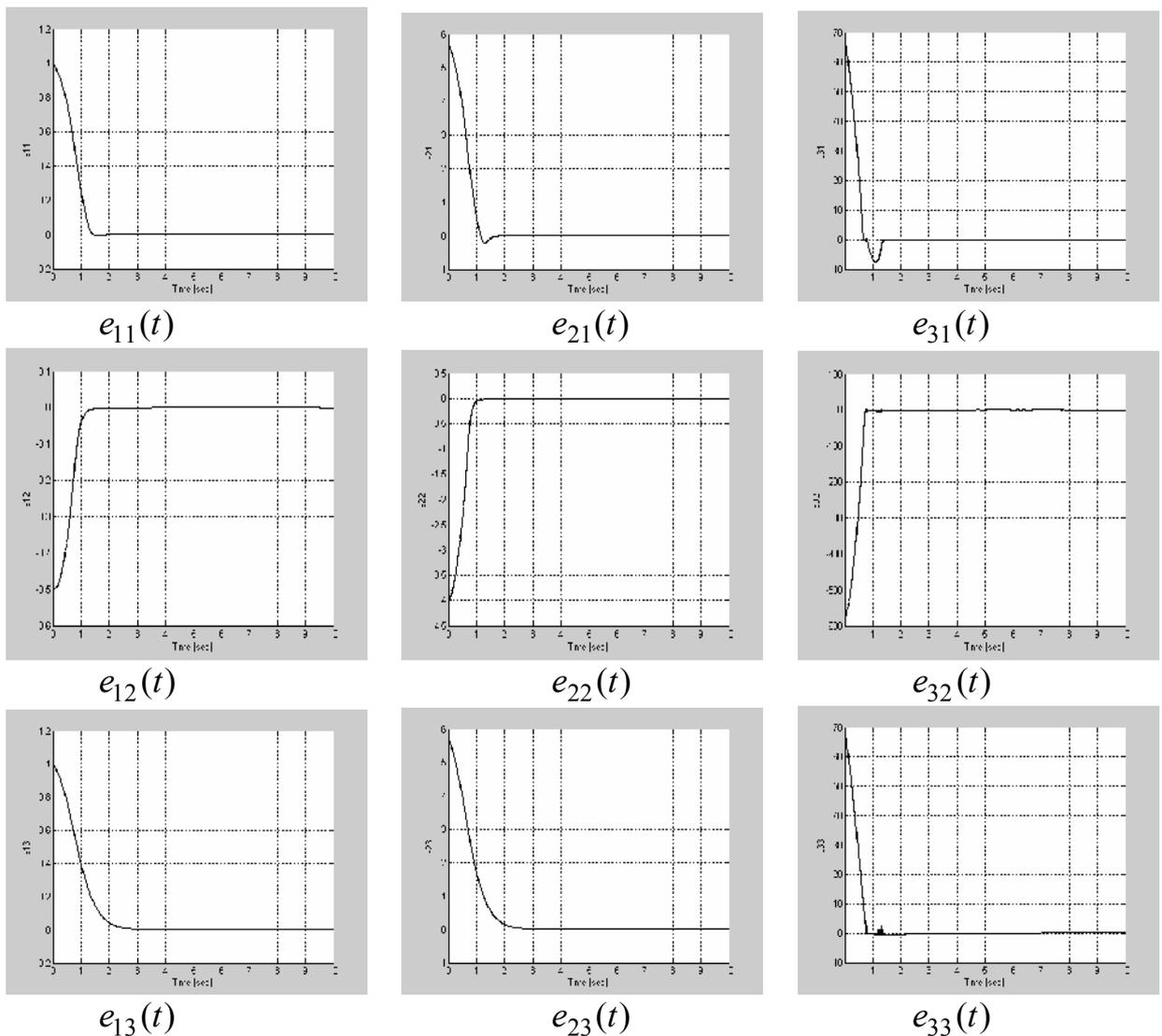


Рис. 2.3. Динамика преобразованных переменных эталонной системы

На рис. 2.4 показаны результаты моделирования *процедуры 1.1*: замкнутая система (2.4.1), (2.2.17) и укороченный наблюдатель (2.3.14) с коэффициентами разрывной коррекции

$$M_{1(3 \times 3)} = \text{diag}\{10\}, M_{2(3 \times 3)} = \text{diag}\{80\}. \quad (2.5.8)$$

Для каждой степени подвижности ( $i = \overline{1,3}$ ) показаны графики  $e_{1i}(t)$ ,  $z_{1i}(t)$ ,  $z_{2i}(t)$ ,  $v_{2ieq}(t) = e_{3i}(t)$ .

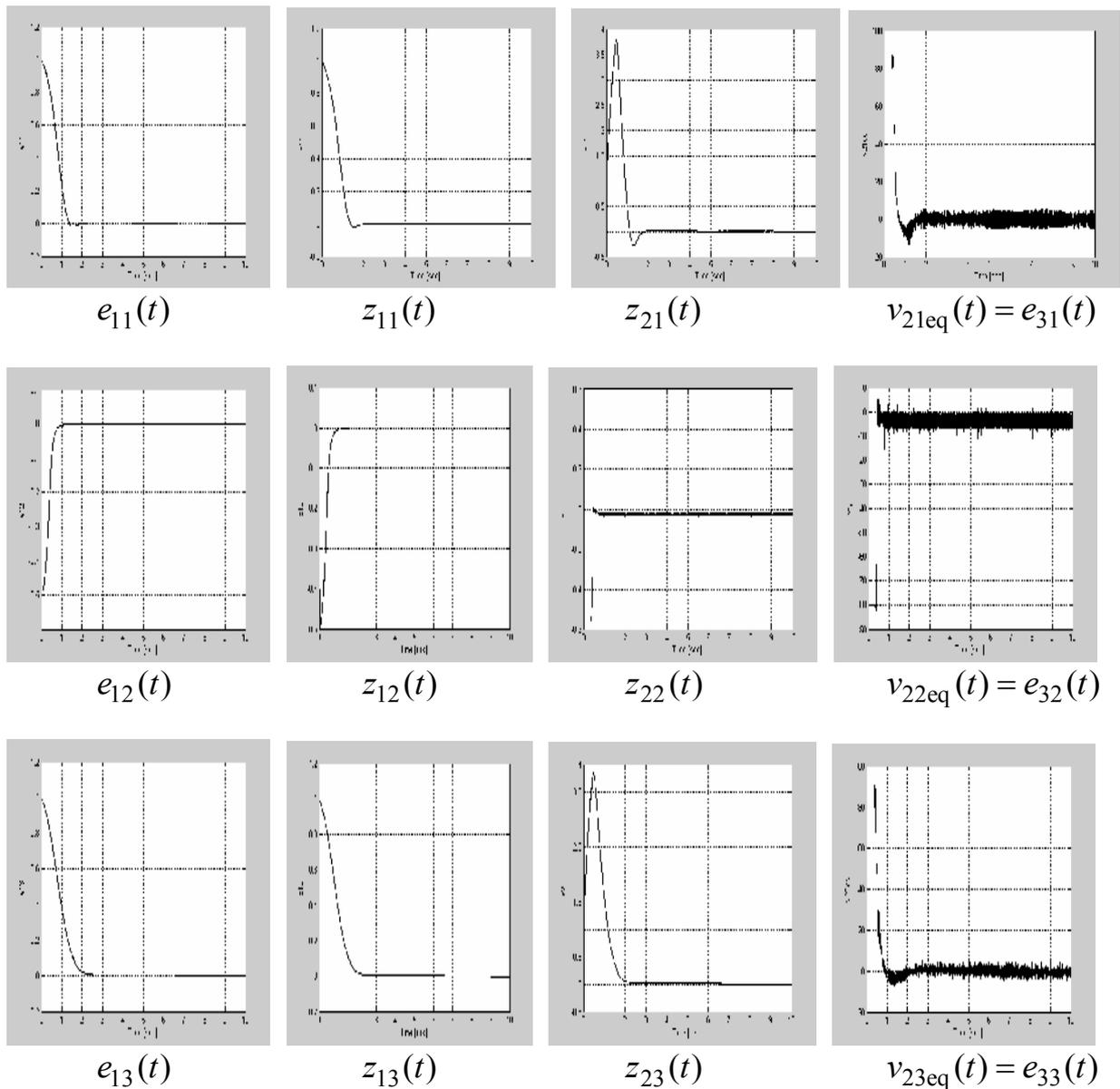


Рис. 2.4. Результаты моделирования процедуры 1.1

На рис. 2.5 показаны результаты моделирования *процедуры 1.3*: замкнутая система (2.4.1), (2.2.22) и полный наблюдатель (2.3.1) с коэффициента-

ми разрывной коррекции

$$M_{1(3 \times 3)} = \text{diag}\{10\}, M_{2(3 \times 3)} = \text{diag}\{80\}, M_{3(3 \times 3)} = \text{diag}\{400, 1000, 400\}. \quad (2.5.9)$$

Для каждой степени подвижности ( $i = \overline{1,3}$ ) показаны графики  $e_{1i}(t)$ ,  $z_{1i}(t)$ ,  $z_{2i}(t)$ ,  $z_{3i}(t)$ ,  $v_{3ieq}(t) = W_{31,i}(t)$ ,  $u_i(t)$ .

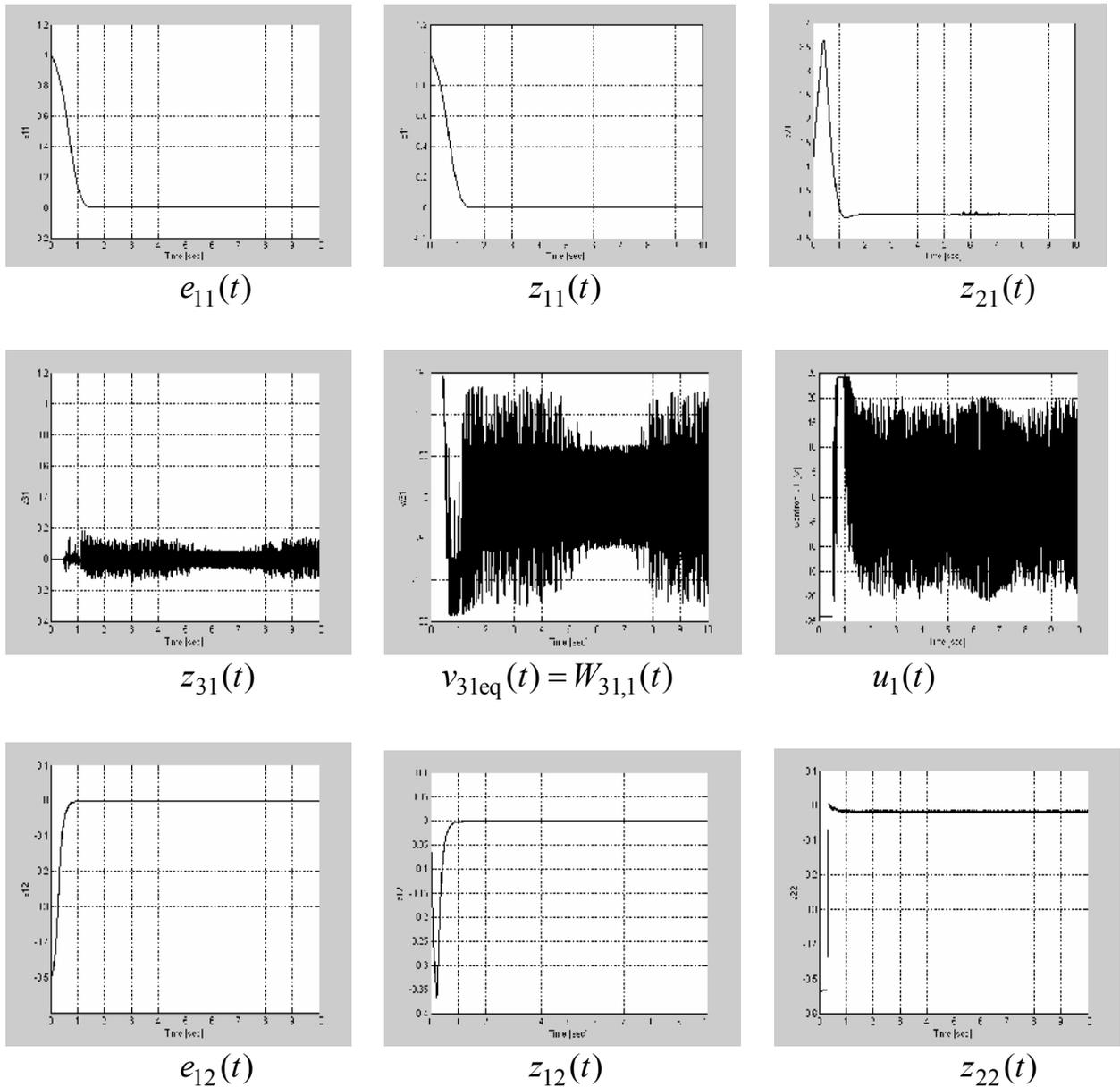


Рис. 2.5. Результаты моделирования процедуры 1.3

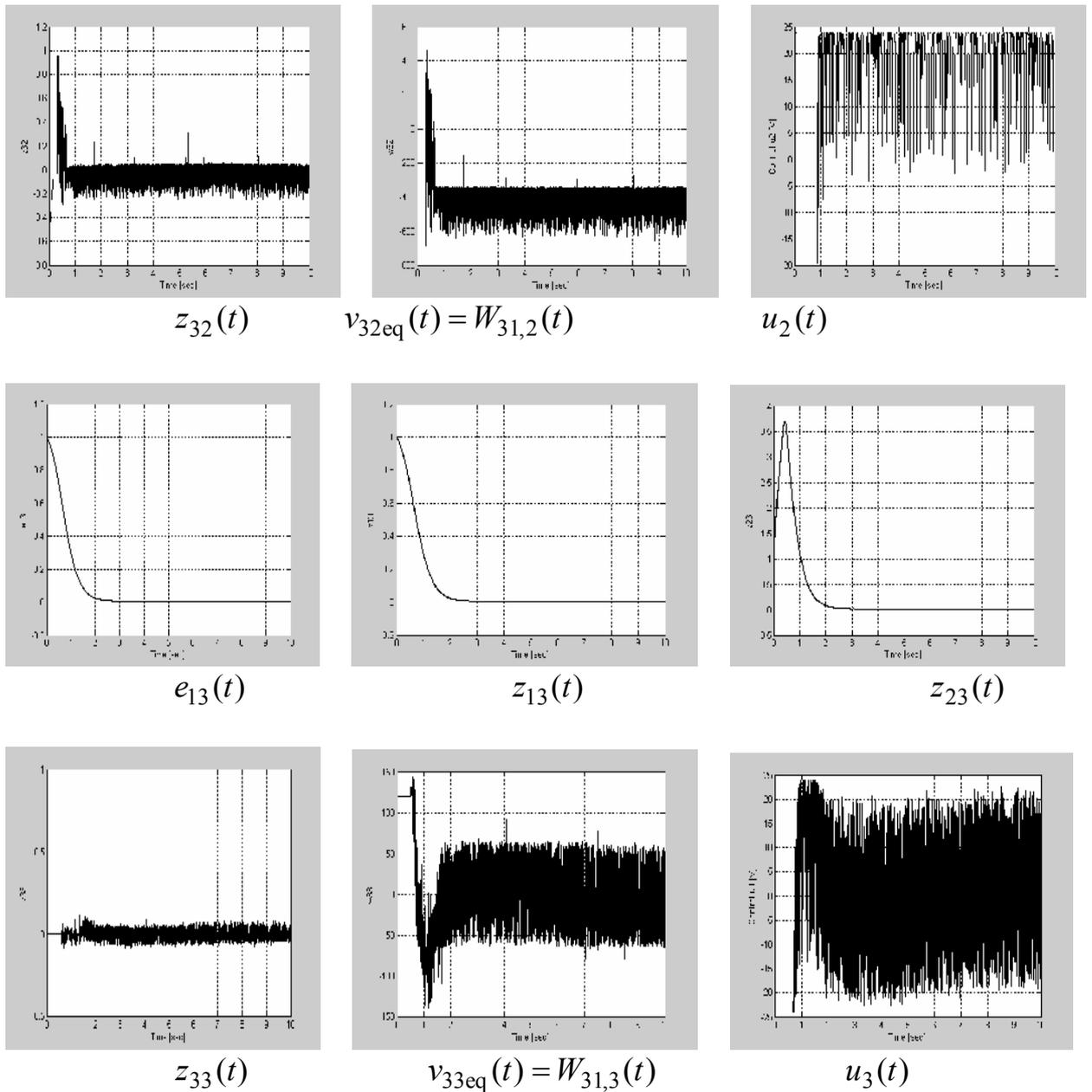


Рис. 2.5. Результаты моделирования процедуры 1.3

При третьем способе формирования управляющих моментов (2.2.12), система (2.1.1), (2.1.2) преобразуется к виду (2.4.2). Коэффициенты обратной связи в первых двух блоках приняты в виде  $k_{1i} = 5$ ,  $k_{2i} = 15$ ,  $i = \overline{1,3}$ , с учетом которых, а также (2.5.1)–(2.5.6) для компонент вектор-функции  $W_{33}^{**} = \text{col}(W_{33,1}, W_{33,2}, W_{33,3})$  имеют место следующие оценки:

$$|W_{33,1}| \leq \overline{W}_1 = 228, \quad |W_{33,2}| \leq \overline{W}_2 = 981, \quad |W_{33,3}| \leq \overline{W}_3 = 229, \quad (2.5.10)$$

которые удовлетворяют ограничениям на ресурсы управления (1.23) только для двигателя (1.25) при  $k_{31} = 24$ ,  $k_{32} = 24$ ,  $k_{33} = 24$ .

На рис. 2.6 в качестве эталона для сравнения приведены результаты моделирования ( $e_{ji}(t)$ ,  $j, i = \overline{1,3}$ ) закона управления (2.2.17) в условиях полной определенности, в предположении, что компоненты вектора состояния, оператора объекта управления, производные задающих и возмущающие воздействия известны,  $e_2$  вычисляется по формуле (2.2.2),  $e_3$  – (2.2.15).

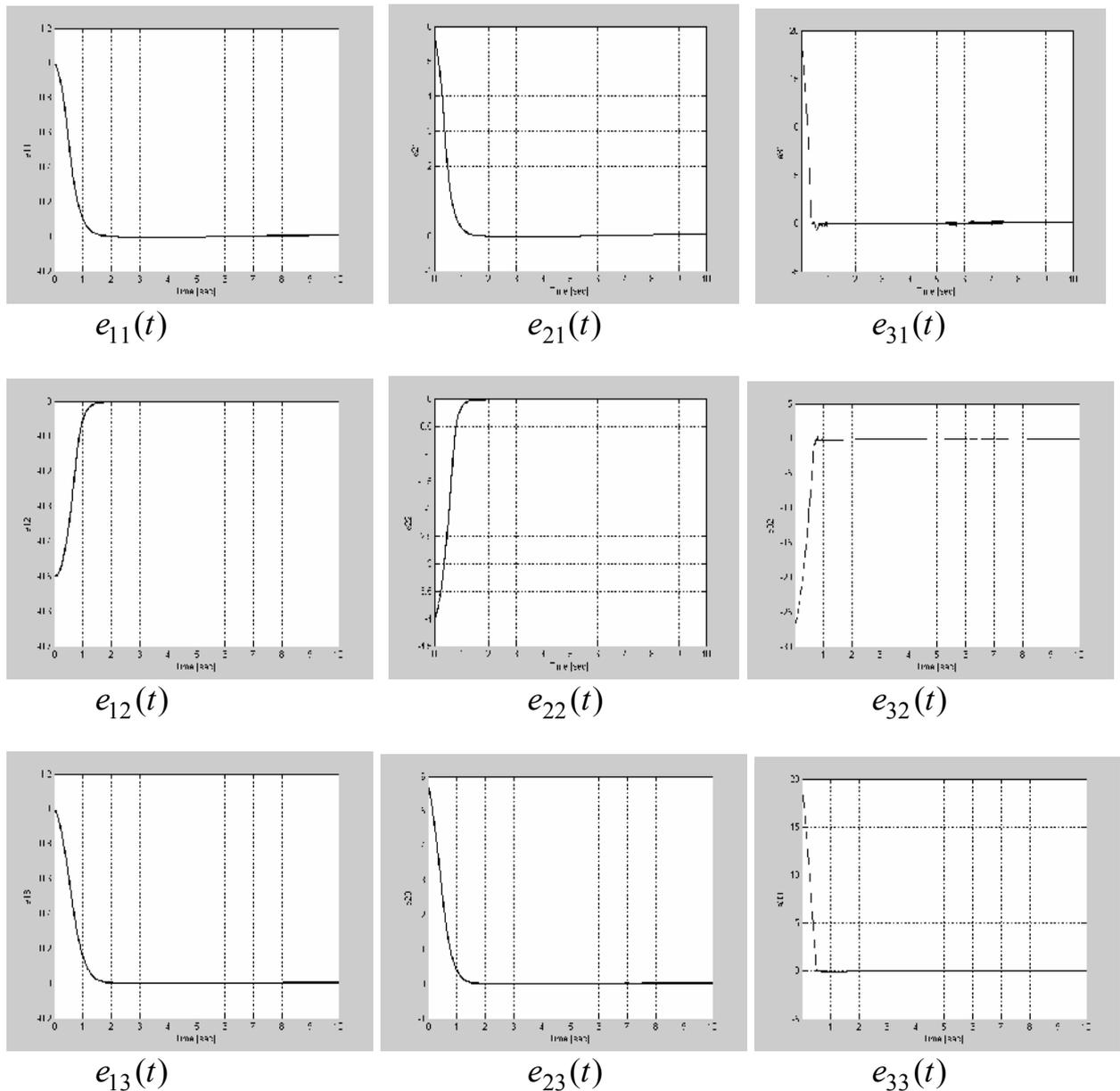


Рис. 2.6. Результаты эталонного моделирования

На рис. 2.7 показаны результаты моделирования *процедуры 3.1*: замкнутая система (2.4.3) с разрывным управлением (2.2.17), наблюдатель состояния (2.3.27) с непрерывными корректирующими воздействиями (2.3.28),

с параметрами  $L_1 = \text{diag}\{2400, 10000, 2400\}$ ,  $L_2 = \text{diag}\{2300, 9900, 2300\}$ ,  $L_3 = \text{diag}\{2280, 9810, 2290\}$ , обеспечивающими с учетом (2.5.5), (2.5.6), (2.5.8) заданную точность оценивания  $\Delta_{ji} = 0,01$ ,  $i, j = \overline{1,3}$  (2.3.30).

Для каждой степени подвижности ( $i = \overline{1,3}$ ) показаны графики  $e_{1i}(t)$ ,  $z_{1i}(t)$ ,  $z_{2i}(t)$ ,  $z_{3i}(t)$ ,  $u_i(t)$  (в различных масштабах).

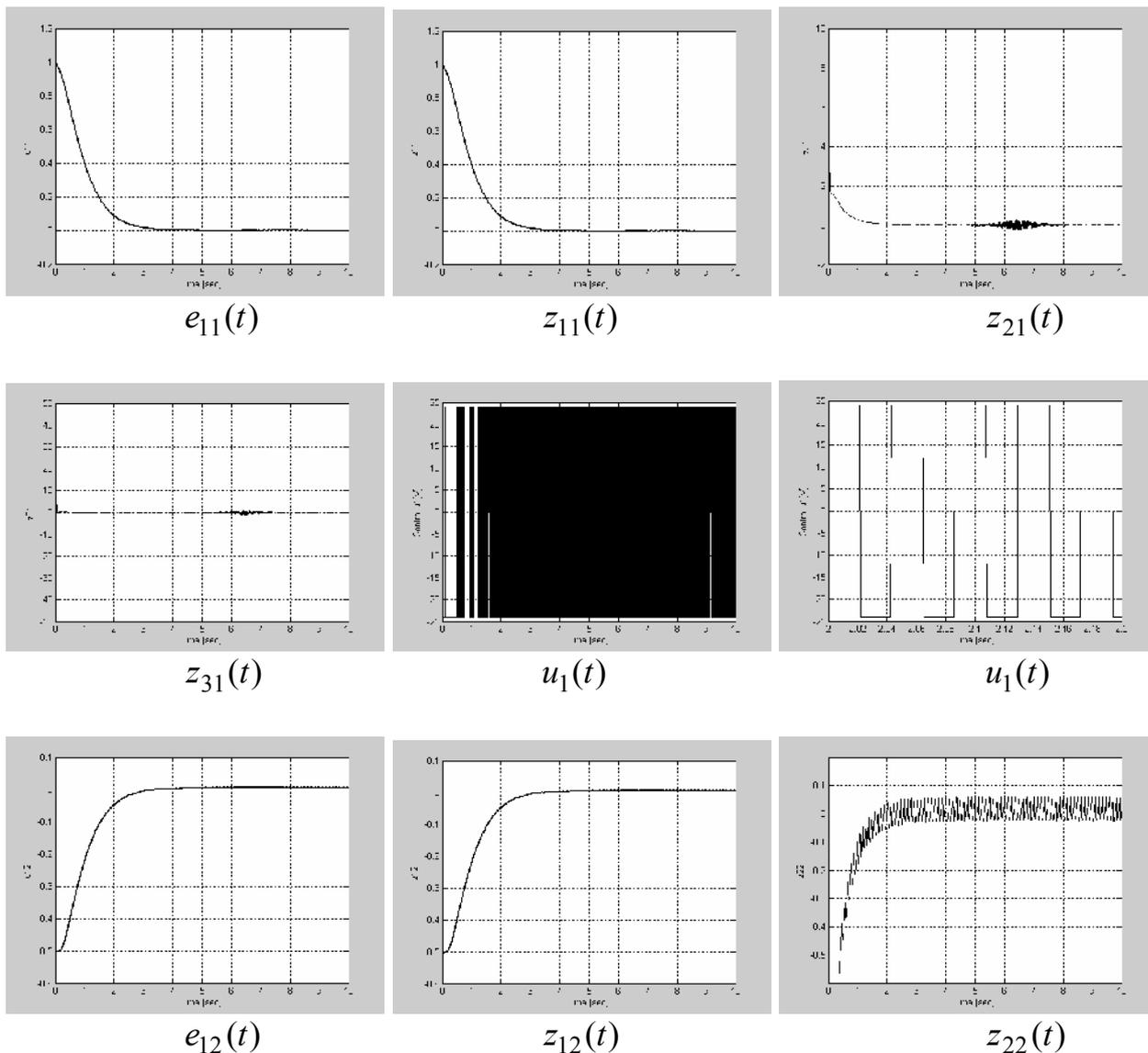


Рис. 2.7. Результаты моделирования процедуры 3.1

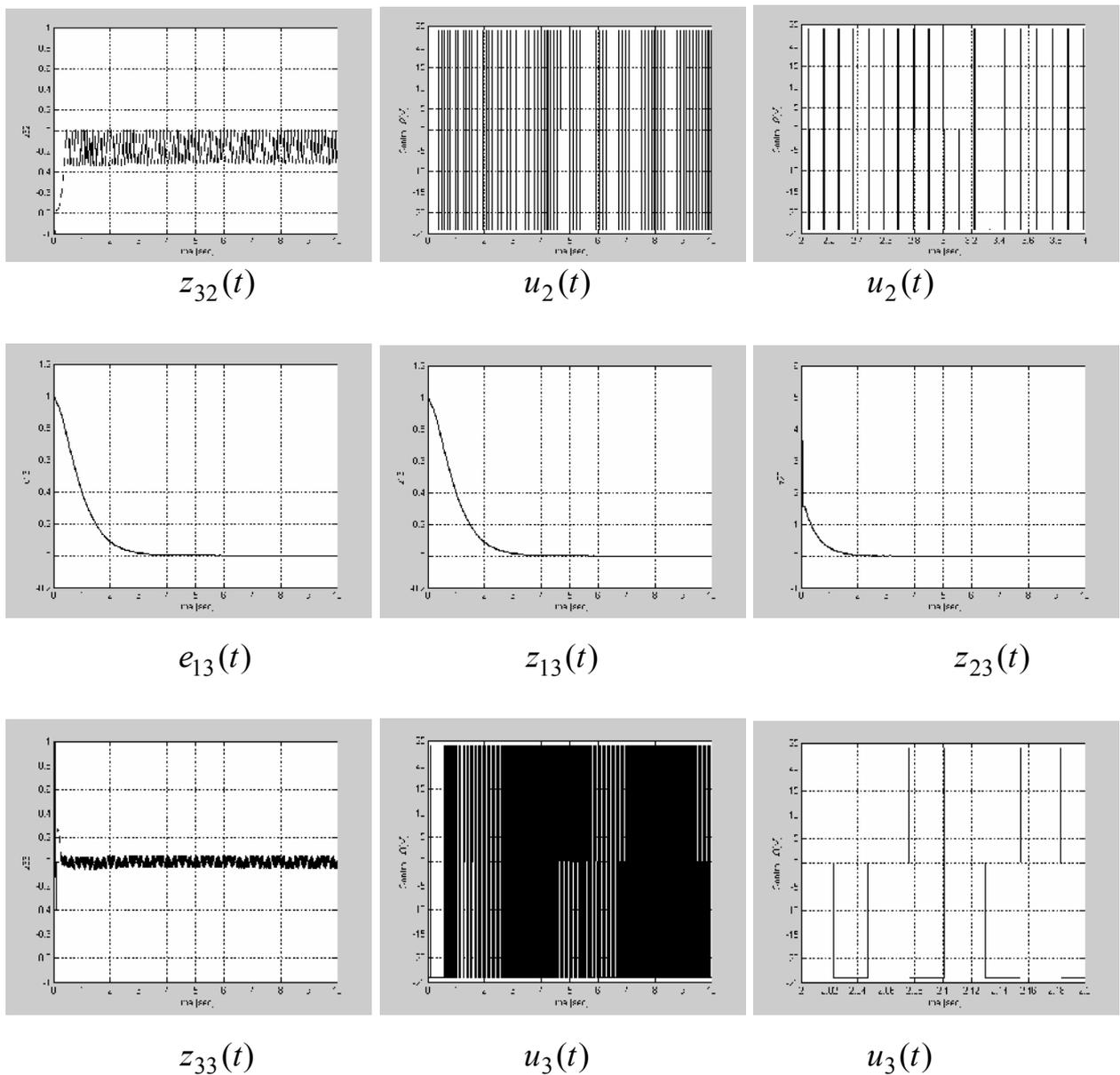


Рис. 2.7. Результаты моделирования процедуры 3.1

На рис. 2.8 показаны результаты моделирования *процедуры 3.2*: замкнутая система (2.4.3) с разрывным управлением (2.2.17), укороченный наблюдатель (2.3.20) с параметрами (2.5.8). Для каждой степени подвижности ( $i = \overline{1,3}$ ) показаны графики  $e_{1i}(t)$ ,  $z_{1i}(t)$ ,  $z_{2i}(t)$ ,  $v_{2ieq}(t) = e_{3i}(t)$ ,  $u_i(t)$ .

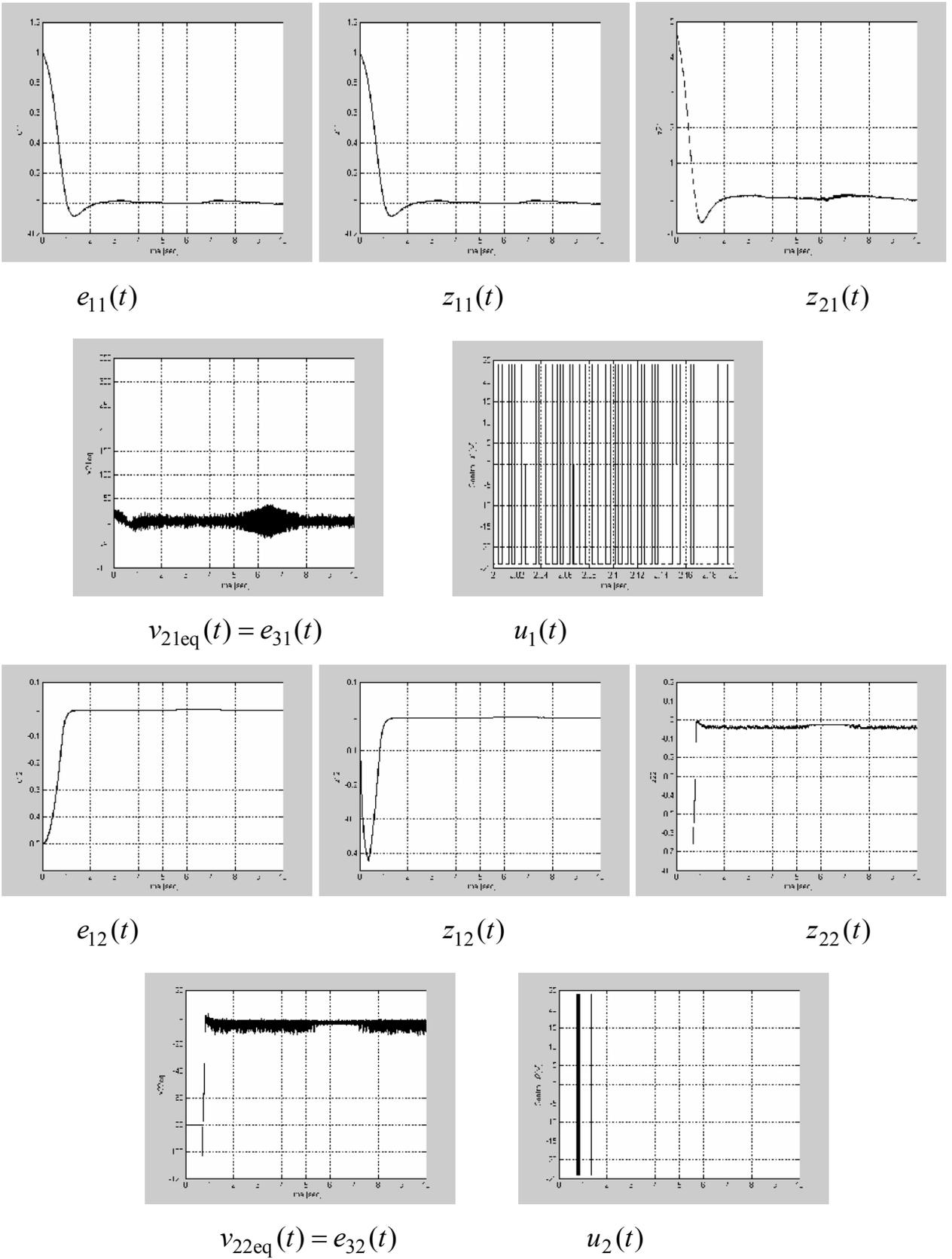


Рис. 2.8. Результаты моделирования процедуры 3.2

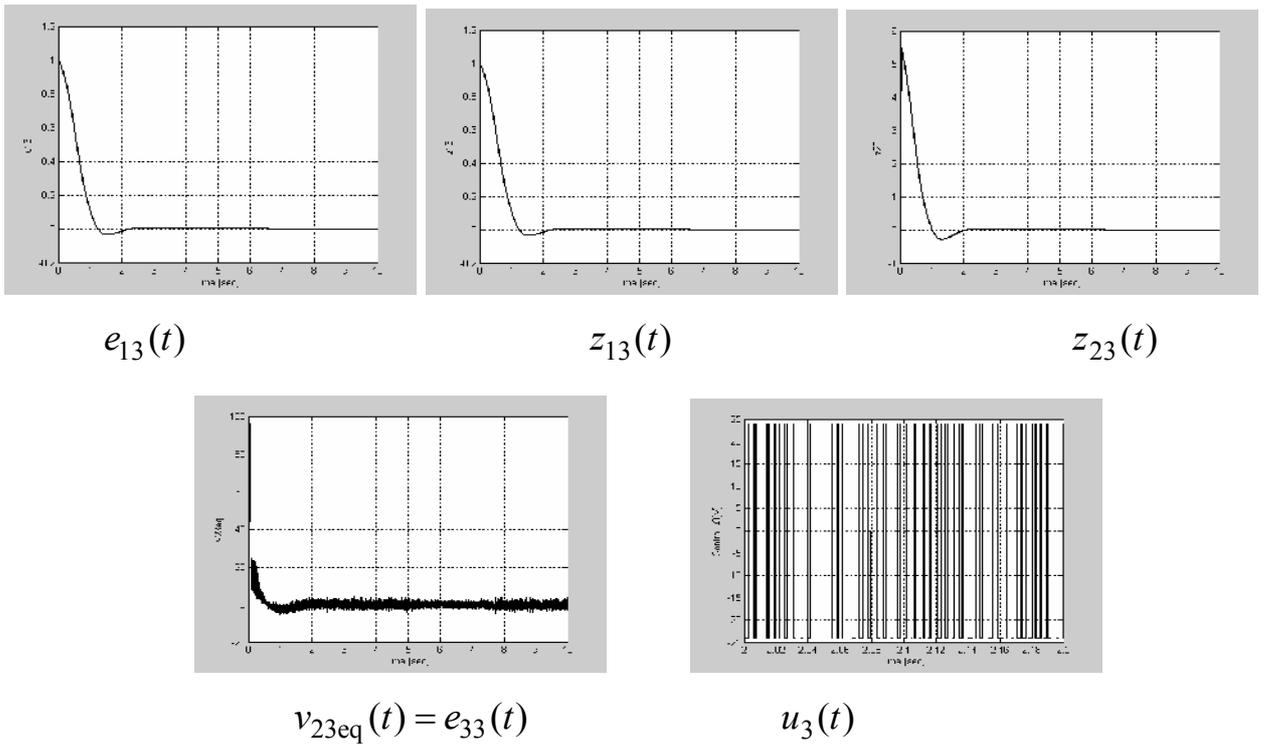


Рис. 2.8. Результаты моделирования процедуры 3.2

На рис. 2.9 показаны результаты моделирования *процедуры 3.3*: замкнутая система (2.4.3) с разрывным управлением (2.2.17), полный наблюдатель состояния (2.3.2) с параметрами (2.5.9). Для каждой степени подвижности ( $i = \overline{1,3}$ ) показаны графики  $e_{1i}(t)$ ,  $z_{1i}(t)$ ,  $z_{2i}(t)$ ,  $z_{3i}(t) = e_{3i}(t)$ ,  $u_i(t)$ .

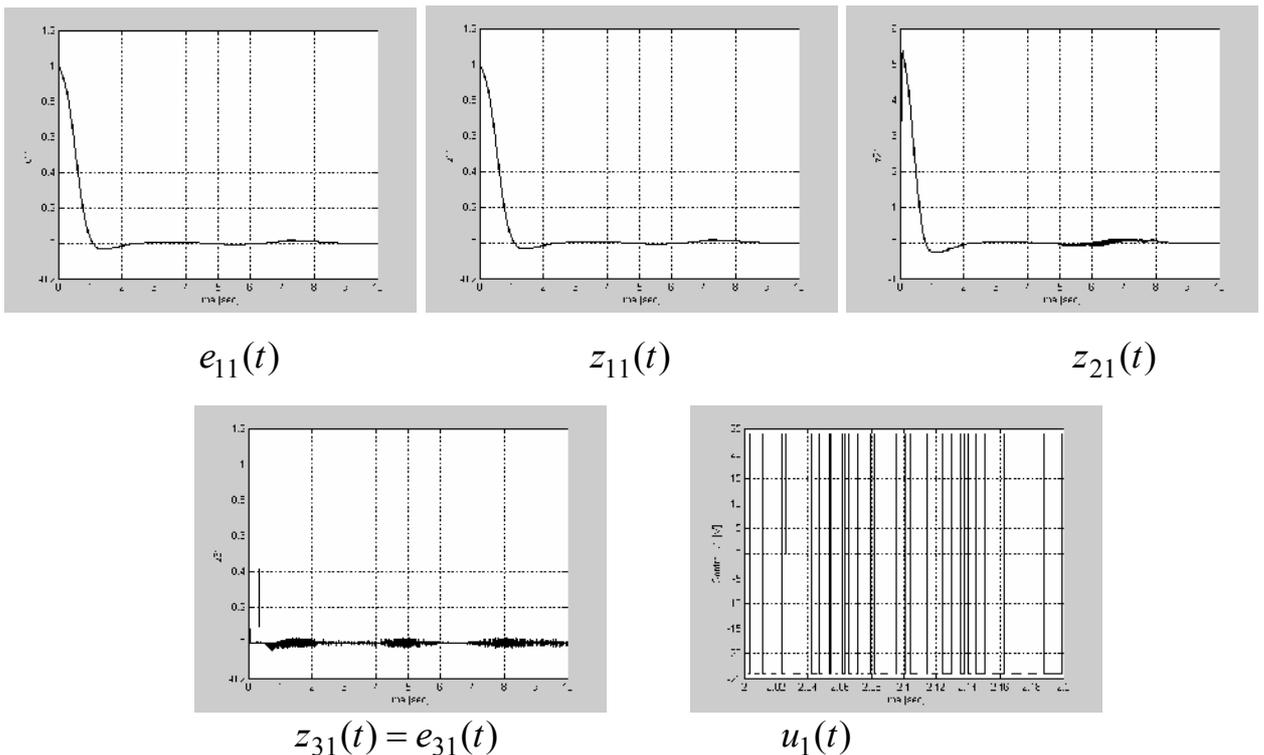


Рис. 2.9. Результаты моделирования процедуры 3.3

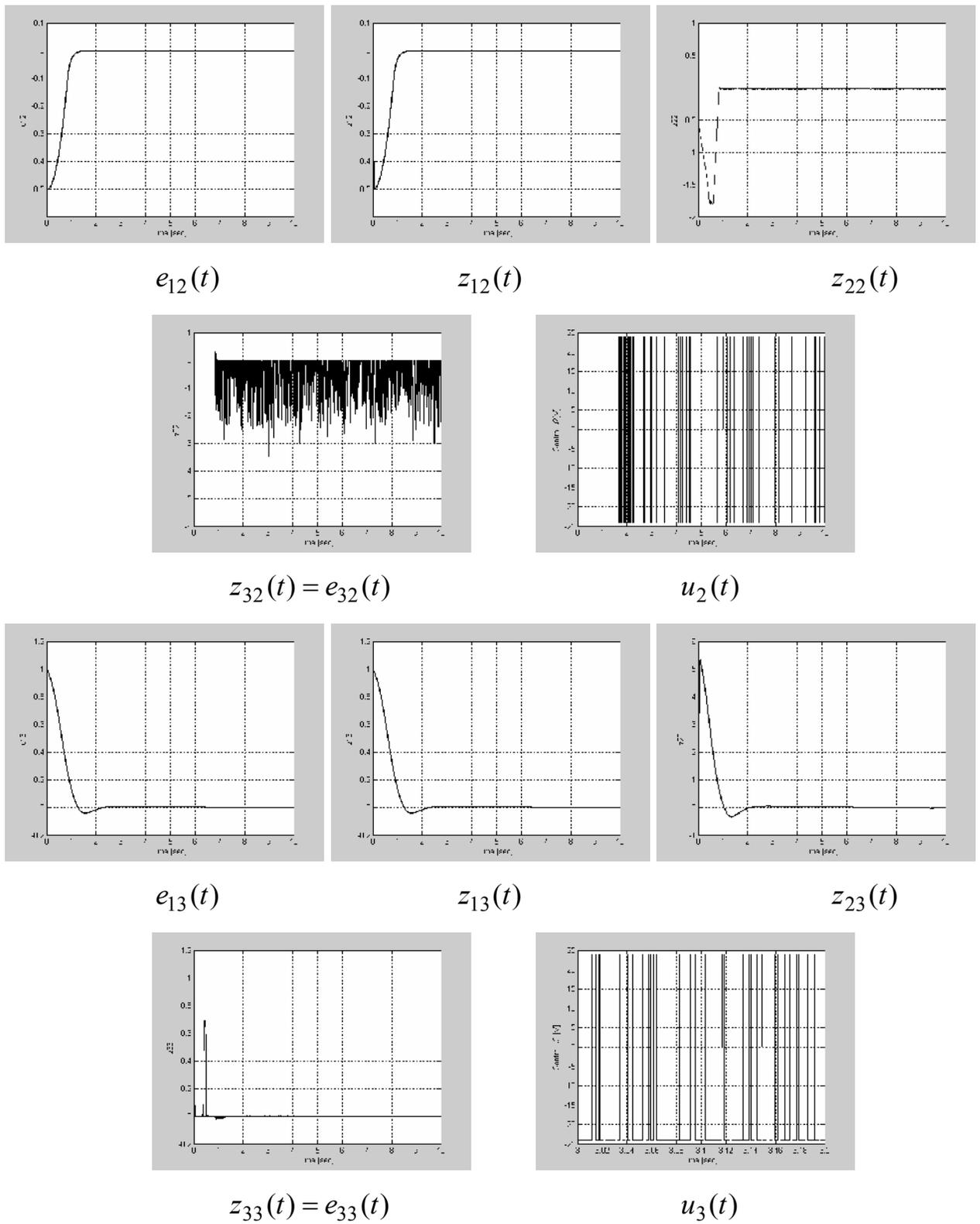


Рис. 2.9. Результаты моделирования процедуры 3.3

На рис. 2.10 показаны результаты моделирования *процедуры 3.4*: система (2.4.3) с комбинированным управлением (2.2.30), полный наблюдатель состояния (2.3.2) с параметрами (2.5.9). Для каждой степени подвижности ( $i = \overline{1,3}$ ) показаны графики  $e_{1i}(t)$ ,  $z_{1i}(t)$ ,  $z_{2i}(t)$ ,  $z_{3i}(t)$ ,  $v_{3ieq}(t) = W_{33,i}(t)$ ,  $u_i(t)$ .

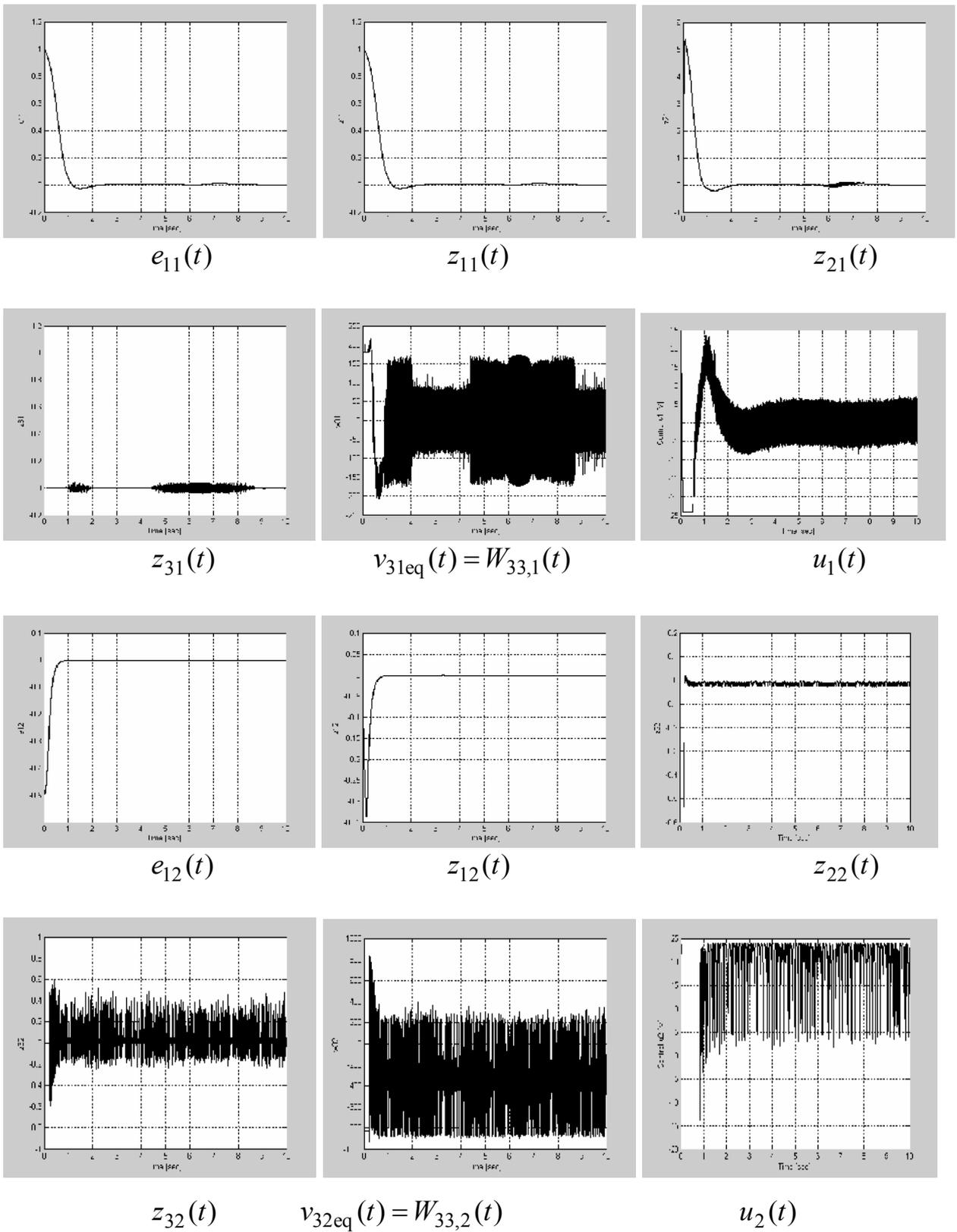


Рис. 2.10. Результаты моделирования процедуры 3.4

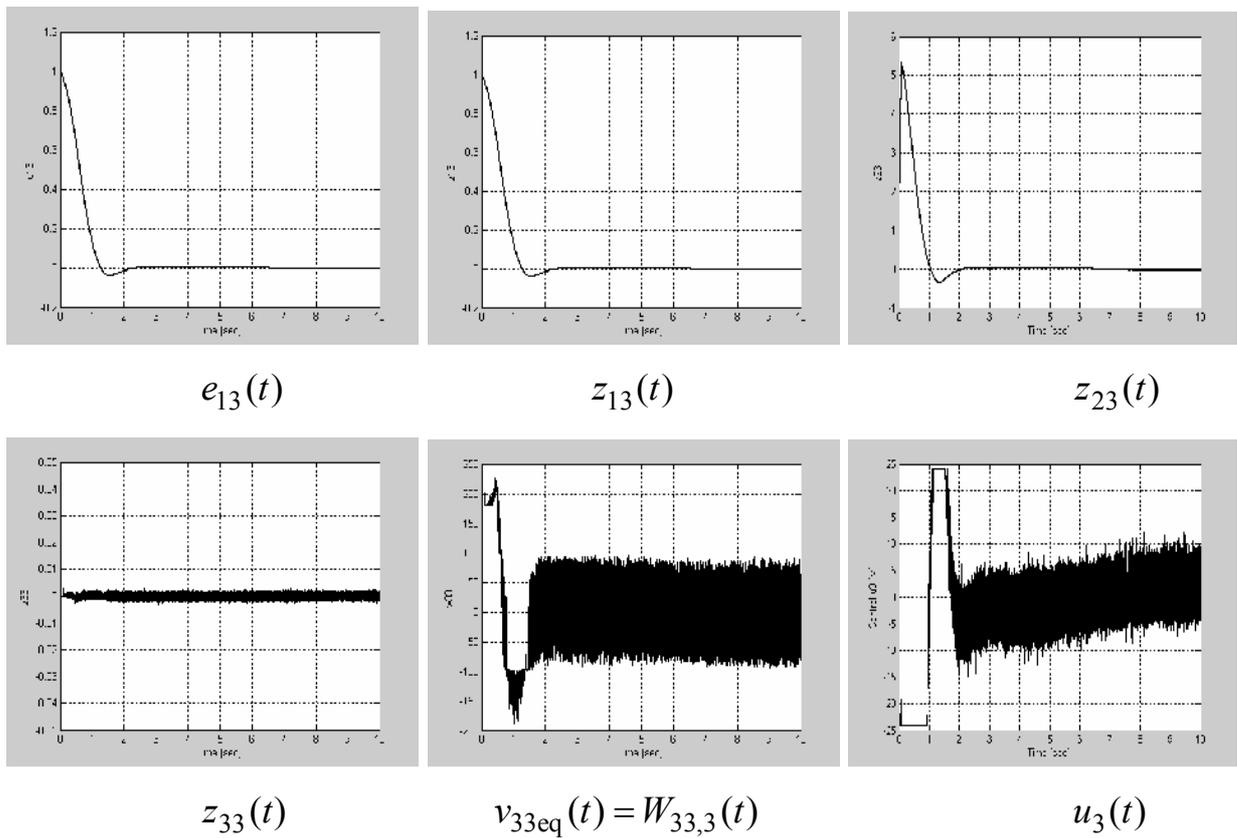


Рис. 2.10. Результаты моделирования процедуры 3.4

Как видим, результаты моделирования подтверждают результаты сравнительного анализа разработанных алгоритмов синтеза обратной связи, проведенного в разделе 2.4.

### ГЛАВА 3

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СЛЕЖЕНИЯ С ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ В ПРОСТРАНСТВЕ ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТ

В данной главе также рассматривается задача слежения за заданными траекториями положений звеньев манипулятора. В математической модели объекта управления, функционирующего в условиях параметрической неопределенности и действия внешних возмущений, учитывается динамика ИУ. В отличие от постановок задач второй главы здесь полагается, что внешние возмущения и первые производные задающих воздействий описываются негладкими ограниченными функциями, в операторе объекта управления учитываются существенные нелинейности, в том числе разрывные зависимости типа сухого трения. В этих предположениях решается задача синтеза обратной связи, обеспечивающей сходимость в заданную окрестность желаемых траекторий.

В разделе 3.1 формализуются особенности модели объекта управления, дается содержательная постановка задачи. В разделе 3.2 на основе блочного подхода разработаны базовые алгоритмы управления, основанные на приведении нелинейной модели объекта управления к блочной форме управляемости с учетом возмущений, что позволяет декомпозировать задачу синтеза размерности  $3n$  на независимо решаемые элементарные подзадачи размерности  $n$ . Разработаны два типа процедур синтеза, которые отличаются способом формирования управляющих моментов и вычислительной реализацией. В разделе 3.3 решаются задачи информационного обеспечения базовых алгоритмов управления с помощью наблюдателей состояния механической подсистемы. Наличие негладких неопределенностей требует большего объема измерений: предполагается, что для измерений доступны не только положения звеньев манипулятора  $q_1$ , но и токи якоря электроприводов, пересчитанные в электрические моменты  $\nu$ . В разделе 3.4 проведен сравнительный анализ разработанных алгоритмов синтеза обратной связи. В разделе 3.5 приве-

дены результаты моделирования разработанных алгоритмов для трехзвенного манипулятора в цилиндрической системе координат.

### 3.1. Модель объекта управления. Постановка задачи

Математическую модель электромеханической системы (2.1.1)–(2.1.2) с  $n$  степенями свободы представим в виде

$$\dot{q}_1 = q_2, \quad \dot{q}_2 = H_0^{-1}(q_1)[v - C_0(q_1, q_2)q_2 + \eta(t) + f(q_1, q_2, t)], \quad (3.1.1)$$

$$\dot{v} = -Av - Dq_2 + Bu, \quad (3.1.2)$$

где  $H_0 > 0$ ,  $H_0^{-1} > 0$ ,  $C_0$  – функционально и параметрически определенные матрицы размерности  $n \times n$ ,  $f(q_1, q_2, t) \in R^n$  – вектор функциональных и параметрических неопределенностей. Остальные обозначения соответствуют модели (2.1.1)–(2.2.2).

Ставится задача синтеза системы управления движением звеньев манипулятора  $q_1(t) = \text{col}(q_{11}, \dots, q_{1n}) \in R^n$  по заданным (допустимым) траекториям  $q_{1d}(t) = \text{col}(q_{11d}, \dots, q_{1nd}) \in R^n$  в рамках блочного подхода [4, 16, 17, 26–35, 39, 54–56].

В главе 2 данная проблема была решена в предположении, что составляющие оператора объекта управления (2.1.1), задающие воздействия  $q_{1d}(t)$  и внешние неконтролируемые возмущения  $\eta(t)$  описываются гладкими функциями времени, что позволило привести математическую модель исходной системы (2.1.1)–(2.1.2) к БФУ, в которой все неопределенности сосредоточились в пространстве управления  $u$  ((2.2.16) или (2.2.25)). Построение на основе БФУ наблюдателя состояния на скользящих режимах (см. §2.3.1) позволило по измерениям положений звеньев манипулятора получить текущие оценки преобразованных переменных и имеющих неопределенностей и сформировать комбинированное управление (2.2.22) (2.2.30), обеспечивающее экспоненциальную сходимость к заданным траекториям.

В данной главе класс допустимых траекторий и внешних возмущений расширяется. Предполагается, что первые производные  $q_{2d}(t)$  задающих

воздействий  $q_{1d}(t)$ , функциональные неопределенности  $f(q_1, q_2, t)$ , неконтролируемые возмущения  $\eta(t)$  описываются неизвестными, в общем случае, негладкими ограниченными функциями времени

$$\|q_{1d}\| \leq S_1, \|q_{2d}\| \leq S_2, \|\eta\| \leq N, \|f\| \leq F \quad \forall t \geq 0; \quad (3.1.3)$$

где  $S_1, S_2, N, F$  – известные положительные константы. При детализации алгоритмов используются покомпонентные оценки:  $|q_{1id}| \leq S_{1i}, i = \overline{1, n}$ , и т.п.

Особенность постановки задачи слежения с учетом (3.1.3)–(3.1.3) заключается в том, что негладкие возмущения и неопределенности отделены от управлений  $u$  интегрирующим звеном и возможность их компенсации отсутствует. В данных предположениях задача слежения за заданными траекториями  $q_{1d}$  может быть решена только с некоторой точностью:

$$\|q_1 - q_{1d}\| < \delta_1 \text{ или } |q_{1i} - q_{1id}| < \delta_{1i}, i = \overline{1, n}. \quad (3.1.4)$$

### 3.2. Базовые алгоритмы управления

Поставленную задачу будем решать в рамках блочного метода, который заключается в пошаговых невырожденных преобразованиях исходной математической модели (3.1.1)–(3.1.2) к блочной форме управляемости с учетом возмущений (БФУВ) относительно невязок (2.1.7) по выходным переменным и синхронном формировании виртуальных и истинных управлений в каждом блоке, обеспечивающих заданную точность слежения (3.1.4).

В данном разделе разработаны два типа процедур синтеза, которые, как и в предыдущей главе, отличаются способом формирования управляющих моментов. В первом, более простом в вычислительной реализации способе не предусмотрена компенсация перекрестных связей. Второй, более сложный в реализации способ позволит существенно ослабить взаимосвязи и обеспечить автономное управление выходными координатами с заданной точностью.

### 3.2.1. Алгоритмы управления без компенсации перекрестных связей

*Шаг 1.* В силу (3.1.1) составим дифференциальное уравнение относительно ошибок слежения (2.1.7):

$$\dot{e}_1 = q_2 - q_{2d}. \quad (3.2.1)$$

Уравнение (3.2.1) является первым блоком БФУВ, где вектор  $q_2$ , размерность которого совпадает с размерностью регулируемого вектора  $e_1$ , трактуется как виртуальное управление; компоненты вектора  $q_{2d}$  трактуются как неизвестные негладкие возмущения, не подлежащие компенсации. Ставится задача выбора виртуального управления с целью подавить внешние возмущения и обеспечить заданную точность слежения (3.1.4). Сформируем виртуальное управление в виде линейной функции

$$q_2^* = -K_1 e_1 \Rightarrow e_2 = q_2 + K_1 e_1, \quad (3.2.2)$$

где  $K_1 = \text{diag}(k_{1i})$ ,  $k_{1i} > 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – коэффициенты обратной связи, подлежащие определению (здесь для простоты изложения  $k_{1i} = k_1$ ),  $e_2 \in R^n$  – невязка между реальным  $q_2$  и выбранным  $q_2^*$  управлением. Рассмотрим замкнутую подсистему (3.2.1)–(3.2.2):

$$\dot{e}_1 = -K_1 e_1 + e_2 - q_{2d}. \quad (3.2.3)$$

Достаточные условия сходимости вектора состояния системы (3.2.3) в заданную окрестность (3.1.4) определим с помощью второго метода Ляпунова, в котором также применяется блочный принцип, т.е. на каждом шаге проводится анализ слагаемых квадратичной формы

$$V = V_1 + V_2 + V_3. \quad (3.2.4)$$

Первое слагаемое (3.2.4) имеет вид  $V_1 = \frac{1}{2} e_1^T e_1 > 0 \quad \forall e_1 \neq 0$ . Для производной данной квадратичной формы, составленной в силу (3.2.3), с учетом (3.1.3) справедлива оценка  $\dot{V}_1 = e_1^T (e_2 - k_1 e_1 - q_{2d}) \leq \|e_1\| (\|e_2\| - k_1 \|e_1\| + S_2)$ . Неравенство  $\dot{V}_1 < 0$  обеспечивается вне окрестности  $\|e_1\| \leq (\|e_2\| + S_2) / k_1 \leq \delta_1$  при выполнении условий

$$\bar{k}_1 > S_2 / \delta_1, \quad \tilde{k}_1 > \|e_2\| / \delta_1, \quad k_1 = \bar{k}_1 + \tilde{k}_1. \quad (3.2.5)$$

Первое неравенство (3.2.5) является нижней оценкой для выбора  $\bar{k}_1 = \bar{k}_1^*$ ; из второго при фиксированном значении  $\tilde{k}_1 = \tilde{k}_1^*$  определяется точность, которую требуется обеспечить при стабилизации невязки  $e_2$  (3.2.2), а именно:

$$\|e_2\| < \tilde{k}_1^* \delta_1 = \delta_2 = \text{const}. \quad (3.2.6)$$

При выборе коэффициента обратной связи следует учитывать, что с ростом  $k_1^* = \bar{k}_1^* + \tilde{k}_1^*$  увеличивается точность отработки задания (3.1.4) (в предельном случае  $k_1^* \rightarrow +\infty \Rightarrow \delta_1 \rightarrow 0$  [41]) и темпы переходных процессов, но наличие ограничений на ресурсы управления (1.23) подразумевает, что существует верхняя граница для выбора коэффициента  $k_1^* \leq k_{1\max}(U)$ ,  $K_1^* = \text{diag}(k_1^*)$  и соответствующая минимально возможная ошибка слежения  $\delta_{1\min} \leq \delta_1$ .

*Шаг 2.* В силу (3.2.2), (3.1.1), (3.2.3) запишем дифференциальное уравнение относительно невязки  $e_2$ , которое является вторым блоком БФУВ вида

$$\dot{e}_2 = H_0^{-1}(q_1)[v - C_0(q_1, q_2)e_2 + \eta(t) + f(q_1, q_2, t) + W_2], \quad (3.2.7)$$

где  $\eta(t)$ ,  $f(q_1, q_2, t)$  и компоненты вектор-функции  $W_2 = \text{col}(w_{21}, \dots, w_{2n})$ ,

$$W_2(q_1, q_2, e_1, e_2, q_{2d}, t) = C_0(q_1, q_2)K_1^*e_1 + H_0(q_1)K_1^*(e_2 - K_1^*e_1 - q_{2d})$$

трактуются как возмущения, не подлежащие компенсации. Виртуальное управление  $v$  выбирается в виде линейной функции так, чтобы обеспечить (3.2.6) – заданную точность сходимости переменной  $e_2$ :

$$v^* = -K_2e_2 \Rightarrow e_3 = v + K_2e_2, \quad (3.2.8)$$

где  $K_2 = \text{diag}(k_{2i})$ ,  $k_{2i} = k_2 > 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – коэффициенты обратной связи, подлежащие определению,  $e_3 \in R^n$  – невязка между реальным  $v$  и выбранным  $v^*$  управлением. Рассмотрим замкнутую подсистему (3.2.7)–(3.2.8):

$$\dot{e}_2 = H_0^{-1}[e_3 - K_2e_2 - C_0e_2 + \eta + f + W_2]. \quad (3.2.9)$$

Получим достаточные условия устойчивости системы (3.2.9), исследуя второе слагаемое квадратичной формы (3.2.4) вида  $V_2 = \frac{1}{2}e_2^T H_0 e_2 > 0 \forall e_2 \neq 0$ . С учетом (3.2.9) имеем

$$\dot{V}_2 = e_2^T H_0 \dot{e}_2 + \frac{1}{2} e_2^T \dot{H}_0 e_2 = e_2^T (e_3 - K_2 e_2 + \eta + f + W_2) + e_2^T \left( \frac{1}{2} \dot{H}_0 - C_0 \right) e_2,$$

где в силу механической природы рассматриваемого объекта предполагается

$$\|W_2\| \leq L_0 + L_1 \|e_1\| + L_2 \|e_2\|, \quad L_j = \text{const} > 0, \quad j = \overline{0, 2}, \quad (3.2.10)$$

а также выполнение условия типа (1.13), а именно

$$e_2^T \left[ \frac{1}{2} \dot{H}_0 - C_0 \right] e_2 \equiv 0. \quad (3.2.11)$$

В сделанных предположениях и с учетом (3.1.3), (3.2.6) для производной квадратичной формы справедлива оценка:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = e_2^T (e_3 - k_2 e_2 + \eta + f + W_2) &\leq \|e_2\| (\|e_3\| - k_2 \|e_2\| + N + F + L_0 + L_1 \|e_1\| + \\ &+ L_2 \|e_2\|) \leq \|e_2\| (\|e_3\| - k_2 \|e_2\| + N + F + L_0 + L_1 (\|e_2\| + S_2) / k_1^* + L_2 \|e_2\|). \end{aligned}$$

Неравенство  $\dot{V}_2 < 0$  обеспечивается вне окрестности

$$\|e_2\| \leq \frac{N + F + L_0 + L_1 S_2 / k_1^* + \|e_3\|}{k_2 - L_1 / k_1^* - L_2} \leq \delta_2$$

при выполнении условий

$$\bar{k}_2 > L_1 / k_1^* + L_2 + (N + F + L_0 + L_1 S_2 / k_1^*) / (\tilde{k}_1^* \delta_1), \quad \tilde{k}_2 > \|e_3\| / (\tilde{k}_1^* \delta_1), \quad (3.2.12)$$

где  $k_2 = \bar{k}_2 + \tilde{k}_2$ . Первое неравенство (3.2.12) является нижней оценкой для выбора  $\bar{k}_2 = \bar{k}_2^*$ , из второго при фиксированном значении  $\tilde{k}_2 = \tilde{k}_2^*$  определяется точность, которую требуется обеспечить при стабилизации  $e_3$ :

$$\|e_3\| < \tilde{k}_2^* \tilde{k}_1^* \delta_1 = \delta_3 = \text{const}. \quad (3.2.13)$$

*Шаг 3.* В силу (3.2.8), (3.1.2), (3.2.2) запишем дифференциальное уравнение относительно невязки  $e_3$ , которое является последним блоком БФУВ:

$$\dot{e}_3 = -Ae_3 + W_3 + Bu, \quad (3.2.14)$$

где компоненты вектор-функции  $W_3 = \text{col}(w_{31}, w_{32}, \dots, w_{3n})$ ,

$$W_3 = DK_1^* e_1 + (AK_2^* - D)e_2 + K_2^* H_0^{-1} [e_3 - K_2^* e_2 - C_0 e_2 + \eta + f + W_2]$$

трактуются как неизвестные ограниченные возмущения:

$$|w_{3i}| \leq \bar{W}_{3i}, \quad \bar{W}_{3i} = \text{const} > 0. \quad (3.2.15)$$

Заметим, что если аппаратная реализация предполагает формирование непрерывных управлений, то на третьем шаге решается аналогичная за-

дача: выбрать управляющие воздействия  $u$  так, чтобы обеспечить в подсистеме (3.2.14) заданную точность сходимости (3.2.13). В рассматриваемом случае управляющие воздействия принадлежат классу разрывных функций, и стабилизация переменной  $e_3 = 0$  при определенных условиях будет обеспечена за конечное время, т.е. в (3.2.12) можно положить  $\tilde{k}_2 = 0$ .

Рассмотрим различные способы реализации разрывного управления.

*Разрывное управление без компенсирующей составляющей*

Для системы (3.2.14) сформируем разрывное управление

$$u = -K_3 \text{sign} e_3, \quad (3.2.16)$$

где  $\text{sign} e_3 = \text{col}(\text{sign} e_{31}, \dots, \text{sign} e_{3n})$ ,  $K_3 = \text{diag}(k_{3i})$ ,  $k_{3i} > 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – амплитуды разрывных управлений. Рассмотрим достаточные условия устойчивости замкнутой системы (3.2.14)–(3.2.16)

$$\dot{e}_3 = -Ae_3 + W_3 - BK_3 \text{sign} e_3, \quad (3.2.17)$$

исследуя покомпонентно третье слагаемое квадратичной формы (3.2.4)

$V_3 = V_{31} + \dots + V_{3n}$ ,  $V_{3i} = \frac{1}{2} e_{3i}^2 > 0 \quad \forall e_{3i} \neq 0$ . Для производной  $\dot{V}_3$ , составленной в силу системы (3.2.17), с учетом (3.2.15) справедлива оценка

$$\dot{V}_3 = \sum_{i=1}^n \dot{V}_{3i} = \sum_{i=1}^n e_{3i} (w_{3i} - a_i e_{3i} - b_i k_{3i} \text{sign} e_{3i}) \leq \sum_{i=1}^n |e_{3i}| (\overline{W}_{3i} - a_i |e_{3i}| - b_i k_{3i}).$$

Неравенство  $\dot{V}_3 < 0$  обеспечивается при выполнении условий

$$e_{3i} \dot{e}_{3i} < 0 \Rightarrow k_{3i} > \overline{W}_{3i} / b_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.2.18)$$

которые одновременно являются условиями возникновения за конечное время  $t^*$  скользящего режима по многообразию  $e_3 = 0$  [57]. С учетом (1.37),

(3.2.16) верхняя оценка амплитуды разрывного управления имеет вид

$$k_{3i} \leq U_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.2.19)$$

Если существуют такие значения  $k_{3i} = k_{3i}^*$ ,  $i = \overline{1, n}$ , которые одновременно удовлетворяют условиям (3.2.18) и (3.2.19), то поставленная задача (3.1.4) считается выполненной.

Синтез разрывного управления (3.2.16) выполнен на основе достаточных условий сходимости переменных состояния замкнутой БФУВ (3.2.3), (3.2.9), (3.2.17) в заданные окрестности. Выполнение неравенств (3.2.5), (3.2.12), (3.2.18) обеспечивает  $\dot{V} < 0$  квадратичной формы (3.2.4). Поведение переменных БФУВ подчиняется следующей логической цепочке:

$$e_3 = 0 \Rightarrow \|e_2\| < \delta_2 \Rightarrow \|e_1\| < \delta_1. \quad (3.2.20)$$

Для реализации базового алгоритма управления (3.2.16) требуется информация о знаке преобразованных переменных  $e_3$ , где

$$e_3 = v + K_2^*(q_2 + K_1^*(q_1 - q_{1d})). \quad (3.2.21)$$

Проблема оценивания переменных  $q_2$  решается в следующем разделе с помощью наблюдателей состояния.

### *Разрывное управление с переменной амплитудой*

Заметим, что дополнительная установка  $n$  фильтров типа (2.3.12) позволит получить средние (эквивалентные) значения разрывных управлений (3.2.17) и организовать автоматическую настройку амплитуд  $k_{3i}$  (если это технически реализуемо) а, следовательно, уменьшить автоколебания в установившемся режиме [57, 63].

Алгоритм настройки амплитуды (аналогично (2.3.16)) разрывной обратной связи (3.2.17) в скользящем режиме при  $t > t^*$  имеет вид

$$\dot{e}_{3i} = -a_i e_{3i} + w_{3i} - b_i u_{ieq} = 0 \Rightarrow u_{ieq} = w_{3i} / b_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.2.22)$$

$$\mu_i \dot{\tau}_i = -\tau_i + u_i, \quad \lim_{\mu_i \rightarrow 0} \tau_i(t) = u_{ieq}(t), \quad k_{3i} > \overline{w}_{3i} / b_i \Rightarrow k_{3i}(t) = |\tau_i(t)| + \alpha_i,$$

где  $\alpha_i$  – произвольные, положительные, сколь угодно малые константы.

Структурная схема настройки амплитуды (3.2.22)  $i$ -й компоненты разрывного управления  $u$  показана на рис. 3.1.

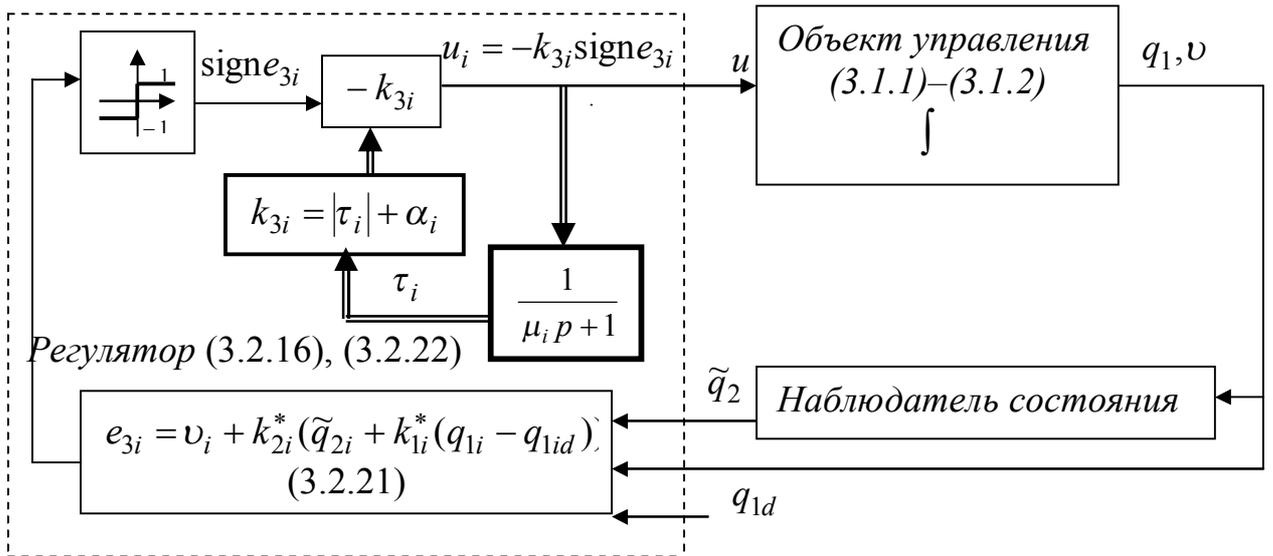


Рис. 3.1. Структурная схема формирования переменной амплитуды  $i$ -й компоненты разрывного управления  $u$ ,  $\tilde{q}_2$  – оценки  $q_2$

### Разрывное управление с компенсирующей составляющей

Для системы (3.2.14) сформируем комбинированное управление вида

$$u = -B^{-1}(W_3 + K_3 \text{sign}e_3), \quad (3.2.23)$$

что приведет к замкнутой системе

$$\dot{e}_3 = -Ae_3 - K_3 \text{sign}e_3, \quad (3.2.24)$$

где  $\forall k_{3i} > 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ) за конечное время  $t^*$  возникнет скользящий режим по многообразию  $e_{3i} = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$  [57]. С учетом ограничения на ресурсы управления (1.23) поставленная задача (3.1.4) имеет решение, если  $\overline{W}_{3i} + k_{3i} \leq b_i U_i$ . Для реализации закона управления (3.2.23) требуются информация о знаке  $e_3$  и текущие оценки неопределенностей  $W_3$ .

### 3.2.2. Алгоритмы управления с компенсацией перекрестных связей

*Шаг 1.* Аналогично первому шагу процедуры из параграфа 3.2.1 для системы (3.2.3) при покомпонентном исследовании первого слагаемого квадратичной формы (3.2.4) в виде  $V_1 = \frac{1}{2} e_1^T e_1 = \sum_{i=1}^n V_{1i}$ ,  $V_{1i} = \frac{1}{2} e_{1i}^2 > 0 \quad \forall e_{1i} \neq 0$  полу-

члены следующие неравенства:  $|e_{1i}| \leq (|e_{2i}| + S_{2i}) / k_{1i} \leq \delta_{1i}$  при  $\bar{k}_{1i} > S_{2i} / \delta_{1i}$ ,

$\tilde{k}_{1i} > |e_{2i}|/\delta_{1i}$ ,  $k_{1i} = \bar{k}_{1i} + \tilde{k}_{1i}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Первое неравенство является нижней оценкой для выбора  $\bar{k}_{1i} = \bar{k}_{1i}^*$ ; из второго при фиксированном значении  $\tilde{k}_{1i} = \tilde{k}_{1i}^*$  определяется точность, которую требуется обеспечить при стабилизации невязки  $e_2$  (3.2.2), а именно:

$$|e_{2i}| < \tilde{k}_{1i}^* \delta_{1i} = \delta_{2i} = \text{const}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.2.6, a)$$

*Шаг 2.* Уравнение относительно невязки  $e_2$  (3.2.7) представим в виде

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 = H_0^{-1}(q_1)[v - C_0(q_1, q_2)q_2 + \eta(t) + f(q_1, q_2, t)] + \\ + K_1^*(e_2 - K_1^*e_1 - q_{2d}). \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

С целью ослабить взаимовлияние звеньев манипулятора и осуществить динамическую декомпозицию выберем в системе (3.2.25) виртуальное управление в виде

$$\begin{aligned} H_0^{-1}v^* = -K_2e_2 + H_0^{-1}C_0(q_1, q_2)q_2 - K_1^*(e_2 - K_1^*e_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow e_3 = v - C_0(q_1, q_2)q_2 + H_0((K_2 + K_1^*)e_2 - K_1^{*2}e_1), \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

что приведет к замкнутой подсистеме (3.2.25)–(3.2.26) вида

$$\dot{e}_2 = -K_2e_2 + H_0^{-1}(q_1)[e_3 + \eta(t) + f(q_1, q_2, t)] - K_1^*q_{2d}. \quad (3.2.27)$$

Определим нижние границы для выбора коэффициентов  $k_{2i}$  ( $i = \overline{1, n}$ ), при которых обеспечивается заданная точность (3.2.6,а). С этой целью исследуем покомпонентно второе слагаемое квадратичной формы (3.2.4), которое,

в отличие от предыдущей процедуры, имеет вид  $V_2 = \frac{1}{2}e_2^T e_2 = \sum_{i=1}^n V_{2i}$ ,

$V_{2i} = \frac{1}{2}e_{2i}^2 > 0$  при  $e_{2i} \neq 0$ . Для производных  $\dot{V}_{2i}$ , составленных в силу системы (3.2.27), с учетом (3.1.3), (3.1.3),  $|(H_0^{-1})_{ij}| \leq (\bar{H}_0^{-1})_{ij}$  (где  $(H_0^{-1})_{ij}$  – компоненты матрицы  $H_0^{-1}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ), а также, принимая во внимание, что на третьем шаге за конечное время  $t^*$  при определенных условиях будет обеспечен скользящий режим по многообразию  $e_3 = 0$ , справедливы оценки

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \sum_{i=1}^n \dot{V}_{2i} = \sum_{i=1}^n e_{2i} (-k_{2i} e_{2i} + \sum_{j=1}^n (H_0^{-1})_{ij} [e_{3j} + \eta_j + f_j] - k_{1i}^* q_{2id}) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n |e_{2i}| (-k_{2i} |e_{2i}| + \sum_{j=1}^n (\bar{H}_0^{-1})_{ij} [N_j + F_j] + k_{1i}^* S_{2i}), \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Неравенства  $\dot{V}_{2i} < 0$  обеспечиваются вне окрестности

$$|e_{2i}| < (\sum_{j=1}^n (\bar{H}_0^{-1})_{ij} [N_j + F_j] + k_{1i}^* S_{2i}) / k_{2i} < \delta_{2i}, \quad i = \overline{1, n}$$

при выполнении условий

$$k_{2i} > \frac{\sum_{j=1}^n (\bar{H}_0^{-1})_{ij} [N_j + F_j] + k_{1i}^* S_{2i}}{\tilde{k}_{1i}^* \delta_{i1}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.2.28)$$

которые являются нижней оценкой для выбора  $k_{2i} = k_{2i}^*$ .

*Шаг 3.* В силу (3.2.26), (3.2.27), (3.1.2) получим дифференциальное уравнение относительно невязки  $e_3$  в виде (3.2.14), где компоненты вектор-функции

$$\begin{aligned} W_3 &= (AC_0 + D + \dot{C}_0 + (H_0 K_1^* - AH_0 - C_0 - \dot{H}_0) K_1^*) K_1^* e_1 + \quad (3.2.29) \\ &+ ((AH_0 + C_0 + \dot{H}_0)(K_2^* + K_1^*) - AC_0 - D - \dot{C}_0 - H_0(K_2^* + K_1^*) K_2^* - H_0 K_1^{*2}) e_2 + \\ &+ (H_0(K_2^* + K_1^*) - C_0) H_0^{-1} (e_3 + \eta + f) - H_0 K_2^* K_1^* q_{2d} \end{aligned}$$

тракуются как ограниченные возмущения (3.2.15).

Для системы (3.2.14) с учетом (3.2.29) в зависимости от технической реализуемости формируются законы управления (3.2.16), (3.2.22) или (3.2.23). Существенное отличие данной процедуры от процедуры из §3.2.1 заключается в том, что обратная связь формируется по преобразованной переменной  $e_3$ , которая определяется более сложным, чем (3.2.21), выражением, в котором задействованы функциональные матрицы, а именно

$$e_3 = v - C_0(q_1, q_2) q_2 + H_0(q_1) ((K_2^* + K_1^*) q_2 + K_2^* K_1^* (q_1 - q_{1d})). \quad (3.2.30)$$

### 3.3. Информационное обеспечение базовых алгоритмов управления

В отличие от алгоритмов, разработанных в главе 2, в данном случае полученная БФУВ (3.2.3), (3.2.9) (или (3.2.25)), (3.2.14) не является наблюдаемой относительно выходных переменных  $e_1$  из-за наличия в первых двух блоках неконтролируемых возмущений [16, 27, 29], т.е. преобразованные переменные  $e_2$  и  $e_3$  не могут быть непосредственно восстановлены. В предположении, что для измерения доступны положения звеньев манипулятора  $q_1$  и токи якоря электроприводов, пересчитанные в электрические моменты  $\upsilon$ , ставится задача оценивания неизмеряемых координат  $q_2$  для вычисления знака  $e_3$  (3.2.21), (3.2.30). Данная проблема решается с помощью наблюдателей состояния, которые имеют структуру исходной системы (3.1.1)–(3.1.2).

#### 3.3.1. Наблюдатели состояния с разрывной коррекцией

##### *Наблюдатель размерности $n$*

Анализ разрешимости задачи наблюдения переменных  $q_2$  в системе (3.1.1)–(3.1.2) относительно измерений  $q_1$ ,  $\upsilon$  показал, что имеются два способа реализации редуцированного наблюдателя с разрывной коррекцией.

*Первый способ.* На основе измерений  $q_1$  построим наблюдатель состояния для первого уравнения системы (3.1.1) вида

$$\dot{z}_1 = v_1, \quad (3.3.1)$$

где  $z_1 \in R^n$  – вектор состояния,  $v_1 \in R^n$  – вектор разрывных корректирующих воздействий, которые выбираются так, чтобы за конечное время решить задачу стабилизации невязки  $\varepsilon_1 = q_1 - z_1$ ,  $\varepsilon_1 \in R^n$ , дифференциальное уравнение относительно которой с учетом (3.1.1), (3.3.1) имеет вид

$$\dot{\varepsilon}_1 = q_2 - v_1, \quad (3.3.2)$$

$$v_1 = M_1 \text{sign} \varepsilon_1, \quad (3.3.3)$$

где  $\text{sign} \varepsilon_1 = \text{col}(\text{sign} \varepsilon_{11}, \dots, \text{sign} \varepsilon_{1n})$ ,  $M_1 = \text{diag}(m_{1i})$ ,  $m_{1i} > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ . При выполнении достаточных условий  $\varepsilon_{1i} \dot{\varepsilon}_{1i} < 0 \Rightarrow m_{1i} > |q_{2i}|$  в системе (3.3.2) за ко-

нечное время  $t_1 > 0$  возникнет скользящий режим по многообразию  $\varepsilon_1 = 0$  и выполняются соотношения статики:  $\dot{\varepsilon}_1 = q_2 - v_{1\text{eq}} = 0 \Rightarrow v_{1\text{eq}} = q_2$ . Текущие значения эквивалентных управлений  $v_{1\text{eq}}$  получим с выходов  $n$  линейных фильтров типа (2.3.12), что при  $t > t_1$  приведет к соотношениям

$$\lim_{\mu_1 \rightarrow 0} \tau_1(t) = v_{1\text{eq}}(t), \quad q_2(t) = \tau_1(t) + O(\mu_1, t). \quad (3.3.4)$$

*Второй способ.* На основе измерений  $v$  построим наблюдатель состояния для системы (3.1.2) вида

$$\dot{z}_1 = -Az_1 + Bu + v_1, \quad (3.3.5)$$

где корректирующие воздействия  $v_1$  имеют вид (3.3.3). Дифференциальное уравнение относительно ошибки наблюдения  $\varepsilon_1 = v - z_1$ ,  $\varepsilon_1 \in R^n$  с учетом (3.1.2), (3.3.5) имеет вид  $\dot{\varepsilon}_1 = -A\varepsilon_1 - Dq_2 - M_1 \text{sign} \varepsilon_1$ . При выполнении достаточных условий  $\varepsilon_{1i} \dot{\varepsilon}_{1i} < 0 \Rightarrow m_{1i} > d_i |q_{2i}|$  за конечное время  $t_1 > 0$  возникнет скользящий режим по многообразию  $\varepsilon_1 = 0$  и выполняются соотношения статики:  $\dot{\varepsilon}_1 = -A\varepsilon_1 - Dq_2 - v_{1\text{eq}} = 0 \Rightarrow v_{1\text{eq}} = -Dq_2$ . Использование  $n$  фильтров типа (2.3.12) при  $t > t_1$  приведет к соотношениям

$$\lim_{\mu_1 \rightarrow 0} \tau_1(t) = v_{1\text{eq}}(t), \quad q_2(t) = -D^{-1}(\tau_1(t) + O(\mu_1, t)). \quad (3.3.6)$$

Полученные значения (3.3.4) или (3.3.6) используются для формирования обратной связи (3.2.16). Для первого базового алгоритма управления, где  $e_3$  вычисляется по формуле (3.2.21), имеем соответственно

$$u = -K_3 \text{sign}(v + K_2^*(\tau_1 + K_1^*(q_1 - q_{1d}))),$$

$$u = -K_3 \text{sign}(v + K_2^*(-D^{-1}\tau_1 + K_1^*(q_1 - q_{1d})));$$

для второго, где  $e_3$  вычисляется по формуле (3.2.30), имеем соответственно

$$u = -K_3 \text{sign}(v - C_0(q_1, \tau_1)\tau_1 + H_0(q_1)((K_2^* + K_1^*)\tau_1 + K_2^*K_1^*(q_1 - q_{1d}))),$$

$$u = -K_3 \text{sign}(v + C_0(q_1, D^{-1}\tau_1)D^{-1}\tau_1 + H_0(q_1)(K_2^*K_1^*(q_1 - q_{1d}) - (K_2^* + K_1^*)D^{-1}\tau_1)).$$

Соотношения (3.2.20) будут обеспечены при  $t > t^* > t_1$ .

Для практической реализации выбирается тот способ, в котором обес-

печивается более высокое качество оценивания. Влияющими факторами являются параметрическая определенность и обусловленность соответствующих матриц, объем вычислений, а также качество измерений. Как было отмечено, наличие шумов в каналах измерения может оказаться препятствием для непосредственного построения наблюдателей состояния с разрывной коррекцией, функционирующих в скользящем режиме.

### *Наблюдатель размерности $2n$*

Как видим, для решения поставленной задачи (оценивания  $q_2$  и вычисления  $e_3$  (3.2.21) или (3.2.30)) достаточно наблюдателя размерности  $n$  (3.3.1) или (3.3.5) и  $n$  фильтров типа (2.3.12). В тоже время, построение наблюдателя размерности  $2n$  с фильтрующими устройствами размерности  $2n$  даст больше информации об объекте управления и среде его функционирования.

Наблюдатель состояния размерности  $2n$  для системы (3.1.1) имеет вид

$$\dot{z}_1 = z_2 + v_1, \quad \dot{z}_2 = H_0^{-1}(q_1)[v - C_0(q_1, z_2)z_2 + v_2]. \quad (3.3.7)$$

С учетом (3.1.1), (3.3.7) имеем систему уравнений относительно ошибок наблюдения  $\varepsilon_i = q_i - z_i$ ,  $\varepsilon_i \in R^n$ ,  $i = \overline{1,2}$ :

$$\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2 - v_1, \quad \dot{\varepsilon}_2 = H_0^{-1}(q_1)[- \alpha + \eta(t) + f(q_1, q_2, t) - v_2], \quad (3.3.8)$$

где  $\alpha = C_0(q_1, z_2 + \varepsilon_2)(z_2 + \varepsilon_2) - C_0(q_1, z_2)z_2$ ,  $\|\alpha\| \leq L\|\varepsilon_2\|$ ,  $L = \text{const} > 0$ .

*Шаг 1.* В первом уравнении системы (3.3.7) выбор разрывной коррекции в виде (3.3.3), где  $M_1 = \text{const} > 0$ , при выполнении достаточных условий  $\varepsilon_1^T \dot{\varepsilon}_1 < 0 \Rightarrow M_1 > \|\varepsilon_2\|$  обеспечит возникновение за конечное время  $t_1 > 0$  скользящего режима по многообразию  $S_1 = \{\varepsilon_1 = 0\} \Rightarrow z_1 = q_1$ . Из соотношений статики  $\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2 - v_{1\text{eq}} = 0$  имеем эквивалентные управления  $v_{1\text{eq}} = \varepsilon_2$ , значения которых получим с выходов  $n$  фильтров типа (2.3.12):

$$\lim_{\mu_1 \rightarrow 0} \tau_1(t) = v_{1\text{eq}}(t), \quad \varepsilon_2(t) = \tau_1(t) + O(\mu_1, t). \quad (3.3.9)$$

*Шаг 2.* Во втором уравнении системы (3.3.7) выбор с учетом (3.3.9) разрывной коррекции  $v_2 = M_2 \text{sign} \varepsilon_2$ , где  $M_2 = \text{const} > 0$ , при выполнении

достаточных условий  $\varepsilon_2^T \dot{\varepsilon}_2 < 0 \Rightarrow M_2 > N + F$  обеспечит возникновение за конечное время  $t_2 > t_1$  скользящего режима по многообразию  $S_2 = \{S_1 \cap \varepsilon_2 = 0\} \Rightarrow z_2 = q_2$ . Из соотношений статики

$$\dot{\varepsilon}_2 = H_0^{-1}(q_1)[- \alpha(\varepsilon_2) + \eta(t) + f(q_1, q_2, t) - v_{2\text{eq}}] = 0 \quad (3.3.10)$$

имеем эквивалентные управления  $v_{2\text{eq}} = \eta(t) + f(q_1, q_2, t)$ , значения которых получим с выходов  $n$  фильтров типа (2.3.12):

$$\lim_{\mu_2 \rightarrow 0} \tau_2(t) = v_{2\text{eq}}(t), \quad \eta(t) + f(q_1, q_2, t) = \tau_2(t) + O(\mu_2, t). \quad (3.3.11)$$

Оценки (3.3.11) могут быть использованы для настройки коэффициентов обратной связи (3.2.10), (3.2.12) или (3.2.28) при  $t > t_2$ .

В первом базовом алгоритме расчет  $e_3$  (3.2.21) и закон управления (3.2.16) реализуются в виде

$$e_3 = v + K_2^*(z_2 + K_1^*(q_1 - q_{1d})), \quad (3.3.12)$$

$$u = -K_3 \text{sign}(v + K_2^*(z_2 + K_1^*(q_1 - q_{1d}))); \quad (3.3.13)$$

во втором расчет  $e_3$  (3.2.30) реализуется согласно выражению

$$e_3 = v - C_0(q_1, z_2)z_2 + H_0(q_1)((K_2^* + K_1^*)z_2 + K_2^*K_1^*(q_1 - q_{1d})). \quad (3.3.14)$$

Соотношения (3.2.20) будут обеспечены при  $t > t^* > t_2$ .

### *Наблюдатель размерности $3n$*

Расчетные значения (3.3.12), (3.3.14) могут быть использованы для построения наблюдателя состояния с разрывной коррекцией для подсистемы (3.2.14), что позволит получить текущие оценки имеющихся неопределенностей и сформировать комбинированное управление (3.2.23). В таком случае третий блок наблюдателя (3.3.7) имеет вид

$$\dot{z}_3 = -Az_3 + Bu + v_3. \quad (3.3.15)$$

С учетом (3.2.14), (3.3.15) относительно ошибки наблюдения  $\varepsilon_3 = e_3 - z_3$ ,  $\varepsilon_3 \in R^n$  имеем  $\dot{\varepsilon}_3 = -A\varepsilon_3 + W_3 - v_3$ . Выбор в наблюдателе (3.3.15) с учетом (3.3.11) разрывного управления  $v_3 = M_3 \text{sign} \varepsilon_3$ , где  $M_3 = \text{const} > 0$ , при вы-

полнении достаточных условий  $\varepsilon_3^T \dot{\varepsilon}_3 < 0 \Rightarrow M_3 > \overline{W}_3$ , где с учетом (3.2.15)  $\overline{W}_3 = \max\{\overline{W}_{3i}\}_{i=\overline{1,n}}$ , обеспечит возникновение скользящего режима по многообразию  $S_3 = \{S_2 \cap \varepsilon_3 = 0\} \Rightarrow z_3 = e_3$  за конечное время  $t_3 > t_2$ . Из статики  $\dot{\varepsilon}_3 = -A\varepsilon_3 + W_3 - v_{3\text{eq}} = 0$  имеем эквивалентные управления  $v_{3\text{eq}} = W_3$ , значения которых получим с выходов  $n$  фильтров типа (2.3.12):

$$\lim_{\mu_3 \rightarrow 0} \tau_3(t) = v_{3\text{eq}}(t), \quad W_3 = \tau_3(t) + O(\mu_3, t). \quad (3.3.16)$$

С учетом (3.3.16) комбинированное управление (3.2.23) реализуется в виде  $u = -B^{-1}(\tau_3 + K_3 \text{sign} z_3)$  или

$$u = -B^{-1}(\tau_3 + K_3 \text{sign} e_3), \quad (3.3.17)$$

где  $e_3$  вычисляется по формулам (3.3.12) или (3.3.14).

Соотношения (3.2.20) будут обеспечены при  $t > t^* > t_3$ .

### 3.3.2. Наблюдатель состояния с непрерывной коррекцией

Построение для системы (3.1.1) наблюдателя состояния с непрерывной коррекцией из-за наличия неопределенностей во втором уравнении приведет к решению задачи оценивания с заданной точностью [29].

Используем невырожденную замену переменных типа (2.3.22), а именно,

$$s_1 = q_1, \quad s_2 = -L_2 q_1 + q_2, \quad (3.3.18)$$

где  $L_2 = \text{diag}(l_{2i})$ ,  $l_{2i} = l_2 = \text{const} > 0$ ,  $i = \overline{1,n}$ , обратные соотношения (3.3.18) имеют вид

$$q_1 = s_1, \quad q_2 = s_2 + L_2 s_1. \quad (3.3.19)$$

В силу (3.1.1), (3.3.18), (3.3.19) получим дифференциальные уравнения относительно новых координат  $s_1, s_2 \in R^n$  в виде

$$\dot{s}_1 = s_2 + L_2 s_1, \quad (3.3.20)$$

$$\dot{s}_2 = -L_2^2 s_1 + H_0^{-1}(q_1)[v - C_0(q_1, q_2)q_2 + \eta + f] - L_2 s_2.$$

Для системы (3.3.20) построим наблюдатель состояния вида

$$\dot{z}_1 = z_2 + L_2 z_1 + v_1, \quad (3.3.21)$$

$$\dot{z}_2 = -L_2^2 z_1 + H_0^{-1}(q_1)[v - C_0(q_1, (z_2 + L_2 q_1))(z_2 + L_2 q_1)] - L_2 z_2 + v_2,$$

где  $z_{1,2} \in R^n$  – переменные состояния,  $v_{1,2} \in R^n$  – корректирующие воздействия наблюдателя, которые выбираются в классе непрерывных функций

$$v_1 = L_1 \varepsilon_1, \quad v_2 = -L_2^2 \varepsilon_1, \quad (3.3.22)$$

где  $\varepsilon_1 = s_1 - z_1$ ,  $L_1 = \text{diag}(l_{1i})$ ,  $l_{1i} = l_1 = \text{const} > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ . С учетом (3.3.20)–(3.3.22) имеем систему относительно невязок  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2 = s_2 - z_2$ :

$$\dot{\varepsilon}_1 = (L_2 - L_1)\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad (3.3.23)$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = H_0^{-1}(q_1)[-C_0(q_1, q_2)\varepsilon_2 + \Delta C_0 \varepsilon_2 - \Delta C_0 q_2 + \eta + f] - L_2 \varepsilon_2,$$

где  $\Delta C_0 = C_0(q_1, z_2 + \varepsilon_2 + L_2 q_1) - C_0(q_1, z_2 + L_2 q_1)$ . Для составляющих системы (3.3.23) выполняются ограничения (3.1.3), а также

$$\|\Delta C_0\| < \overline{C}\|\varepsilon_2\|, \quad \|q_2\| \leq \overline{Q}_2, \quad \overline{H}_0 \leq \|H_0(q_1)\| \leq \overline{\overline{H}}_0 \quad \forall q_1 \in Q_1, \quad (3.3.24)$$

где  $\overline{C}, \overline{Q}_2, \overline{H}_0, \overline{\overline{H}}_0 = \text{const} > 0$ , с учетом которых получим иерархическую схему выбора конечных коэффициентов коррекции  $l_1, l_2$ , при которых в системе (3.3.23) задача стабилизации решается с заданной точностью:

$$\|\varepsilon_j\| \leq \Delta_j, \quad j = 1, 2. \quad (3.3.25)$$

С этой целью исследуем квадратичную форму вида

$$V = V_1 + V_2, \quad V_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_1^T \varepsilon_1, \quad V_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_2^T H_0 \varepsilon_2. \quad (3.3.26)$$

Для производных  $\dot{V}_1, \dot{V}_2$  квадратичной формы (3.3.26) с учетом (3.1.3), (3.3.24), (3.2.11) справедливы следующие оценки:

$$\dot{V}_1 = \varepsilon_1^T \dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1^T ((L_2 - L_1)\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \leq \|\varepsilon_1\|((l_2 - l_1)\|\varepsilon_1\| + \|\varepsilon_2\|), \quad (3.3.27)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \varepsilon_2^T H_0 \dot{\varepsilon}_2 + \frac{1}{2} \varepsilon_2^T \dot{H}_0 \varepsilon_2 = \varepsilon_2^T (\Delta C_0 \varepsilon_2 - \Delta C_0 q_2 + \eta + f - H_0 L_2 \varepsilon_2) + \\ &+ \varepsilon_2^T (\frac{1}{2} \dot{H}_0 - C_0(q_1, q_2)) \varepsilon_2 \leq \|\varepsilon_2\|(\overline{C}\|\varepsilon_2\| + \overline{C}\overline{Q}_2\|\varepsilon_2\| + N + F - \overline{H}_0 l_2 \|\varepsilon_2\|). \end{aligned}$$

В системе (3.3.27) неравенства  $\dot{V}_1 < 0$ ,  $\dot{V}_2 < 0$  справедливы вне областей

$$\|\varepsilon_1\| \leq \frac{\|\varepsilon_2\|}{l_1 - l_2} < \Delta_1, \quad \|\varepsilon_2\| \leq \frac{N + F}{\overline{H}_0 l_2 - \overline{C}\overline{Q}_2} < \Delta_2, \quad i = \overline{1, n},$$

откуда следует иерархическая схема выбора коэффициентов коррекции

$$l_2 > \frac{1}{\bar{H}_0} \left( \frac{N+F}{\Delta_2} + \bar{C}\bar{Q}_2 \right), \quad l_1 > \frac{N+F}{(\bar{H}_0 l_2 - \bar{C}\bar{Q}_2)\Delta_1} + l_2, \quad (3.3.28)$$

что обеспечивает стабилизацию системы (3.3.23) с точностью (3.3.25).

Расчет  $q_2$  осуществляется по формуле  $q_2 = z_2 + L_2 z_1$  (3.3.19) с точностью  $\tilde{q}_2 = (s_2 + \varepsilon_2) + L_2(s_1 + \varepsilon_1) = q_2 \pm \Delta$ , где  $\Delta = \Delta_2 + L_2 \Delta_1$ . Соответственно, оценка расчетного значения  $e_3$  по формуле (3.2.21) имеет вид  $\tilde{e}_3 = e_3 \pm (K_2^* \Delta + K_2^* K_1^* \Delta_1)$ . Структурная схема реализации закона управления (3.2.16), (3.2.21) для системы (3.2.3), (3.2.9), (3.2.14) с наблюдателем состояния (3.3.21)–(3.2.22) показана на рис. 3.2.

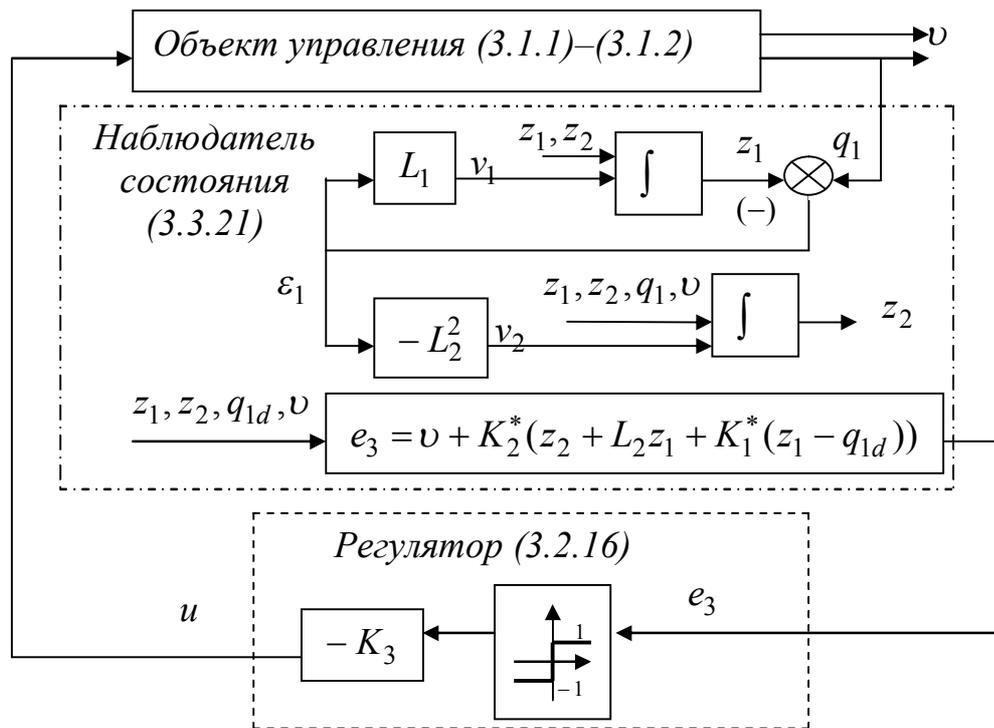


Рис. 3.2. Информационная поддержка закона управления (3.2.16), (3.2.21) с помощью наблюдателя состояния (3.3.21)–(3.2.22)

Во втором алгоритме, где  $e_3$  рассчитывается по формуле (3.2.30), оценочное значение определяется более сложной зависимостью вида

$$\tilde{e}_3 = v - C_0(q_1 \pm \Delta_1, q_2 \pm \Delta)(q_2 \pm \Delta) + H_0(q_1 \pm \Delta_1)((K_2^* + K_1^*)(q_2 \pm \Delta) + K_2^* K_1^*((q_1 \pm \Delta_1) - q_{1d})).$$

В случае, когда для синтеза обратной связи непосредственно используются измеряемые значения  $q_1$ , расчет  $q_2$  осуществляется по формуле  $q_2 = z_2 + L_2 q_1$  с точностью  $\tilde{q}_2 = q_2 \pm \Delta_2$ . Соответственно, оценка переменной  $e_3$  по формуле (3.2.21) имеет вид  $\tilde{e}_3 = e_3 \pm K_2^* \Delta_2$ , по формуле (3.2.30) –  $\tilde{e}_3 = v - C_0(q_1, q_2 \pm \Delta_2)(q_2 \pm \Delta_2) + H_0(q_1)((K_2^* + K_1^*)(q_2 \pm \Delta_2) + K_2^* K_1^*(q_1 - q_{1d}))$ .

### 3.4. Сравнительный анализ разработанных процедур синтеза

При первом способе формирования управляющих моментов (3.2.8) система (3.1.1), (3.1.2) преобразуется к виду (3.2.3), (3.2.9), (3.2.14), а именно

$$\dot{e}_1 = -K_1 e_1 + e_2 - q_{2d}, \quad \dot{e}_2 = H_0^{-1}[e_3 - K_2 e_2 - C_0 e_2 + \eta + f + W_2], \quad (3.4.1)$$

$$\dot{e}_3 = -A e_3 + W_3 + B u.$$

В системе (3.4.1) отражены свойства механической природы объекта управления. Процедура настройки коэффициентов обратной связи ( $K_1$ ,  $K_2$ ) на основе системы (3.4.1) не вызывает трудностей, если к характеристикам переходного процесса не предъявляются специфические требования. Более тонкая настройка затруднительна, так как связана с анализом функциональной матрицы  $P = H_0^{-1}(q_1)(K_2 + C_0(q_1, q_2))$ . Автономное управление выходными координатами не обеспечивается. В отличие от процедур, разработанных в главе 2, отсутствует возможность непосредственного оценивания преобразованных переменных  $e_2, e_3$ . Наблюдатель состояния строится на основе исходной системы (3.1.1)–(3.1.2), для решения задачи оценивания требуются дополнительные измерения  $v$  и непосредственный расчет знаков переменных  $e_3$  по формуле (3.2.21).

При втором способе формирования управляющих моментов (3.2.26), система (3.1.1), (3.1.2) преобразуется к виду (3.2.3), (3.2.27), (3.2.14):

$$\dot{e}_1 = -K_1 e_1 + e_2 - q_{2d}, \quad (3.4.2)$$

$$\dot{e}_2 = -K_2 e_2 + H_0^{-1}(q_1)[e_3 + \eta(t) + f(q_1, q_2, t)] - K_1^* q_{2d},$$

$$\dot{e}_3 = -Ae_3 + W_3 + Bu.$$

Отличие от системы (3.4.1) состоит в том, что в системе (3.4.2) обеспечивается автономное управление выходными координатами, а задача обеспечения заданных характеристик переходного процесса сводится к выбору коэффициентов диагональных матриц  $K_1$ ,  $K_2$ . В то же время, расчет знаков переменных  $e_3$  (3.2.30) существенно сложнее, чем (3.2.21).

На основе систем (3.4.1), (3.4.2) разработаны восемь основных типов процедур синтеза обратной связи. В следующем перечне каждая последующая процедура обеспечивает более высокое качество установившихся режимов по сравнению с предыдущей. «Платой» за это (как и в главе 2) является повышение порядка динамических устройств наблюдения и специальные требования к технической реализации.

В *процедуре 1.1* – для системы (3.4.1), в *процедуре 2.1* – для систем (3.4.2) закон управления (3.2.16), где  $k_{3i} = \text{const}$  ( $i = \overline{1, n}$ ), не содержит компенсирующей составляющей. Информационная поддержка обеспечивается с помощью наблюдателя состояния размерности  $2n$  с непрерывной коррекцией (3.3.21)–(3.3.22). Рекомендуются при наличии шумов в каналах измерения и необходимости фильтрации выходных сигналов.

В *процедуре 1.2* – для системы (3.4.1), в *процедуре 2.2* – для систем (3.4.2) закон управления (3.2.16), где  $k_{3i} = \text{const}$  ( $i = \overline{1, n}$ ), не содержит компенсирующей составляющей. Информационная поддержка обеспечивается с помощью наблюдателя состояния размерности  $n$  с разрывной коррекцией (3.3.1) или (3.3.5) и  $n$  линейных фильтров типа (2.3.12). Данные процедуры наиболее просты и универсальны в реализации, но требуют значительных ресурсов управления.

В *процедуре 1.3* – для системы (3.4.1), в *процедуре 2.3* – для систем (3.4.2) закон управления (3.2.16), где  $k_{3i} = \text{var}$  при  $t > t^*$  ( $i = \overline{1, n}$ ), не содержит компенсирующей составляющей, но предполагает возможность аппаратной реализации автоматической настройки амплитуды разрывного управ-

ления в скользящем режиме. Информационная поддержка обеспечивается с помощью  $n$  фильтров (3.2.22), наблюдателя состояния размерности  $n$  с разрывной коррекцией (3.3.1) или (3.3.5) и  $n$  фильтров типа (2.3.12). Позволяет минимизировать требуемые ресурсы управления в установившемся режиме.

В процедуре 1.4 – для системы (3.4.1), в процедуре 2.4 – для систем (3.4.2) закон управления (3.2.23) содержит компенсирующую составляющую и предполагает возможность соответствующей технической реализации. Информационная поддержка обеспечивается с помощью наблюдателя состояния размерности  $3n$  с разрывной коррекцией (3.3.7), (3.3.15) и  $3n$  фильтров типа (2.3.12). Обеспечивают наилучшее качество переходных процессов с экономией ресурсов управления. Существенно сокращается объем вычислений на проектной стадии.

В табл. 3.1 дана сводная характеристика перечисленных процедур синтеза.

Таблица 3.1.

Сводная характеристика разработанных процедур синтеза

	Номер процедуры							
	1.1	1.2	1.3	1.4	2.1	2.2	2.3	2.4
Автономное управление	не обеспечивается				обеспечивается			
Вычисление $H_0, C_0$	да	нет	нет	да	да			
Размерность устройства наблюдения	$2n$	$2n$	$3n$	$6n$	$2n$	$2n$	$3n$	$6n$
Необходимость в дополнительной фильтрации измерений	нет	есть	есть	есть	нет	есть	есть	есть
Потребление ресурсов управления	избыточное		экономное		избыточное		экономное	
Качество установившихся режимов	хуже		высокое		хуже		высокое	
Требования к аппаратурной реализации:								
– переменной амплитуды	нет	нет	да	нет	нет	нет	да	нет
– комбинированного управления	нет	нет	нет	да	нет	нет	нет	да

### 3.5. Результаты моделирования

В качестве примера, иллюстрирующего эффективность разработанных процедур синтеза, вновь рассмотрим систему управления трехзвенным манипулятором в цилиндрической системе координат (см. рис. 1.2). Неизвестной величиной в выражениях (1.14) полагается  $m_3$  – точечная масса схвата с грузом, соответствующие члены и прочие функциональные неопределенности составляют вектор-функцию  $f(q_1, q_2, t)$ . Известные компоненты оператора объекта управления (3.1.1)–(2.1.2) имеют вид

$$H_{0(3 \times 3)} = \text{diag}(H_{0i}), \quad C_0(q_1, q_2)q_2 = (C_{0i}), \quad (3.5.1)$$

$$H_{01} = m'_3 q_{13}^2 + m'_3 l q_{13} + m'_3 \frac{l^2}{3} + I_1 + I_2, \quad H_{02} = m_2 + m'_3, \quad H_{03} = m'_3;$$

$$C_{01} = 2(m'_3 q_{13} - m'_3 \frac{l}{2})q_{23}q_{21}, \quad C_{02} = 0, \quad C_{03} = [m'_3 \frac{l}{2} - m'_3 q_{13}]q_{21}^2.$$

Моделирование проводилось на ПК в среде MATLAB–SIMULINK при указанных в разделе 2.5 параметрах (2.5.1)–(2.5.2) выражений (3.5.1).

Внешние возмущения  $\eta = \text{col}(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  описываются негладкими, ограниченными ( $N_i = 0,2$ ) функциями времени вида (см. рис. 3.4)

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \begin{cases} 0 & \text{при } t = 0, 2T, \quad T = 1, 2, 3, \dots; \\ -0,2 + 0,2t & \text{при } 0,2T < t < 0,2(T + 1). \end{cases} \quad (3.5.2)$$

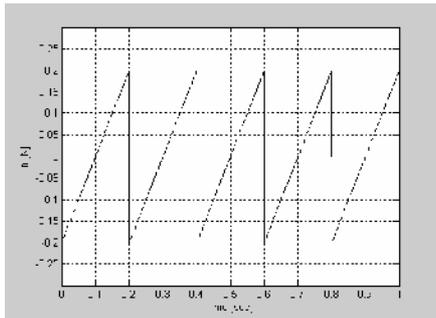


Рис. 3.3. Внешние возмущения  $\eta_i(t)$

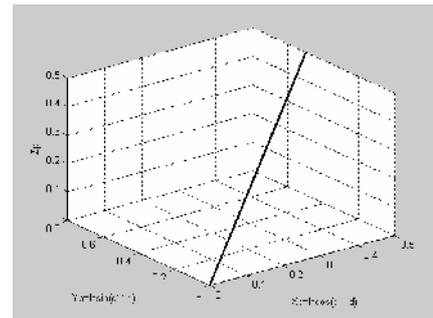


Рис. 3.4. Заданная траектория схвата

Требуется обеспечить возвратно-поступательные движения схвата по заданной пространственной траектории, которая в системе координат  $(q_{12}, q_{13})$  имеет вид прямой (см. рис. 3.4). Соответствующие задающие воздействия для звеньев манипулятора  $q_{1d} = (q_{1id})$  ограничены  $S_{1i} \leq 0,05$  ( $i = \overline{1,3}$ )

и имеют вид

$$q_{11d} = q_{12d} = q_{12d} = \begin{cases} 0 & \text{при } t = 10T, T = 0, 1, 2, \dots; \\ 0,05t & \text{при } 10T < t < 10(T+1). \end{cases} \quad (3.5.3)$$

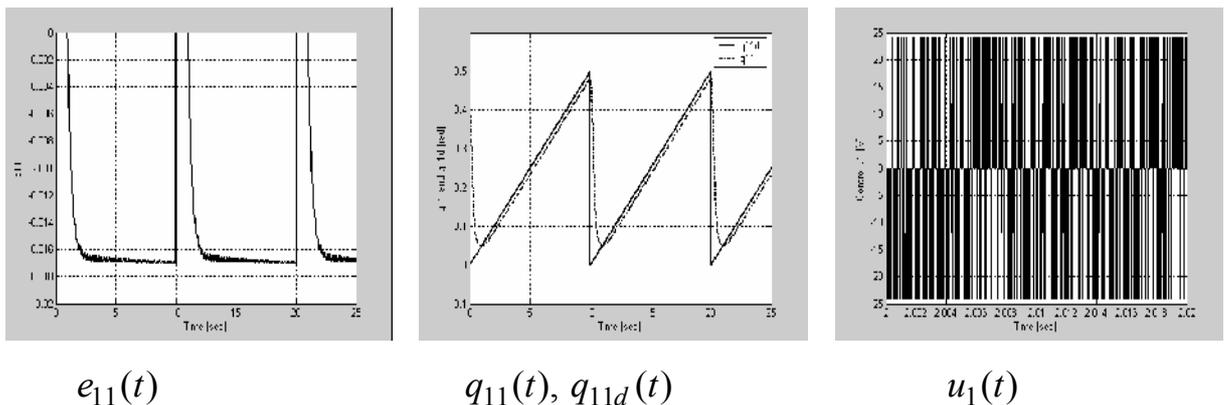
Ниже приведены результаты моделирования разработанных процедур синтеза обратной связи в задаче слежения за заданными траекториями (3.5.3) с заданной точностью

$$|e_{1i}| \leq \delta_{1i} = 0,02, i = \overline{1,3}. \quad (3.5.4)$$

С учетом (3.5.3)–(3.5.4) на основе (3.2.5) выбраны коэффициенты  $K_{1(3 \times 3)}^* = \text{diag}\{3\}$ ,  $\bar{k}_{1i}^* = 2,5$ ,  $\tilde{k}_{1i}^* = 0,5$ , определяющие точность, которую требуется обеспечить при стабилизации переменных  $e_2$  (3.2.2):  $\delta_{2i} = 0,01, i = \overline{1,3}$ .

В БФУВ (3.4.1) без компенсации перекрестных связей с учетом (2.5.1)–(2.5.2), (3.5.1)–(3.5.4) на основе (3.2.12) приняты коэффициенты  $K_2^* = \text{diag}\{15, 150, 50\}$ , с учетом которых для компонент вектор-функции  $W_3$  справедливы оценки  $|w_{31}| \leq \bar{W}_{31} = 346$ ,  $|w_{32}| \leq \bar{W}_{32} = 440$ ,  $|w_{33}| \leq \bar{W}_{33} = 340$ , которые для двигателей (1.24)–(1.26) удовлетворяют верхним ограничениям на ресурсы управления (1.23) при  $K_{3(3 \times 3)} = \{24\}$ .

На рис. 3.5 в качестве *эталона* для сравнения приведены результаты моделирования системы (3.4.1) с законом управления (3.2.16), в условиях полной определенности, в предположении, что компоненты вектора состояния, оператора объекта управления, производные задающих и возмущающие воздействия известны. Показано поведение переменных  $e_{1i}(t)$ ,  $u_i(t)$  ( $i = \overline{1,3}$ ).



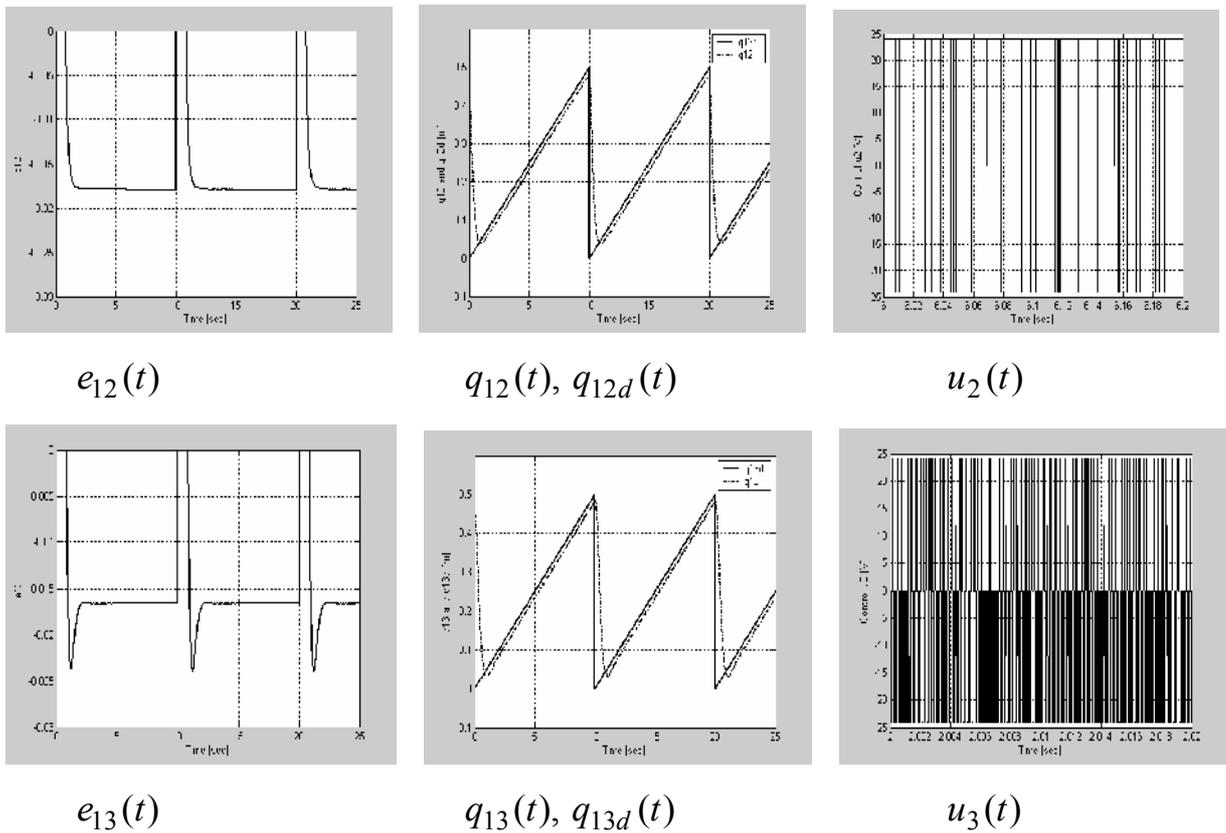
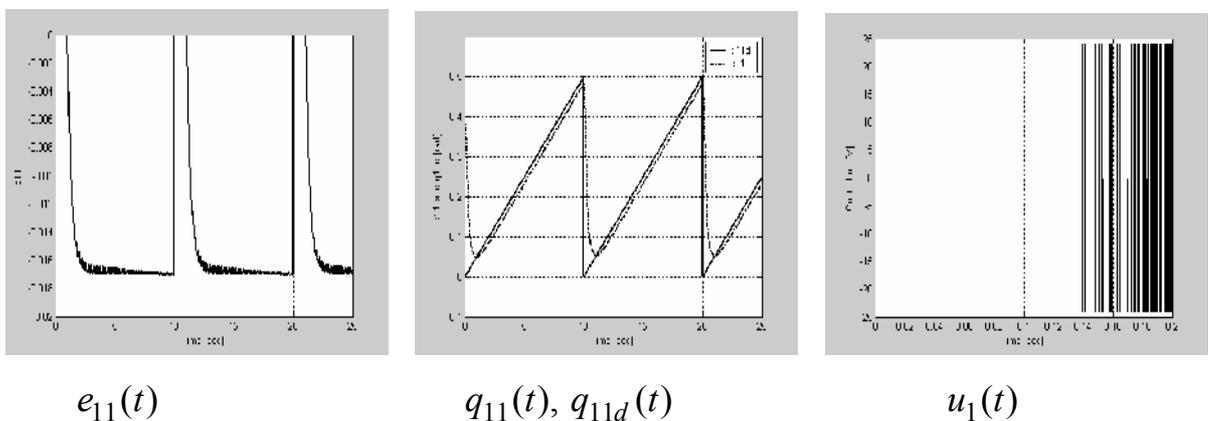


Рис. 3.5. Результаты эталонного моделирования

*Процедура 1.1:* система (3.4.1), закон управления (3.2.16), коэффициенты наблюдателя (3.3.21)–(3.3.22) с непрерывной коррекцией приняты в виде

$$L_{1(3 \times 3)} = \text{diag}\{300\}, L_{2(3 \times 3)} = \text{diag}\{100\}. \quad (3.5.5)$$

На рис. 3.6 показаны графики  $e_{li}(t)$ ,  $q_{li}(t)$ ,  $q_{lid}(t)$ ,  $u_i(t)$  ( $i = \overline{1,3}$ ).



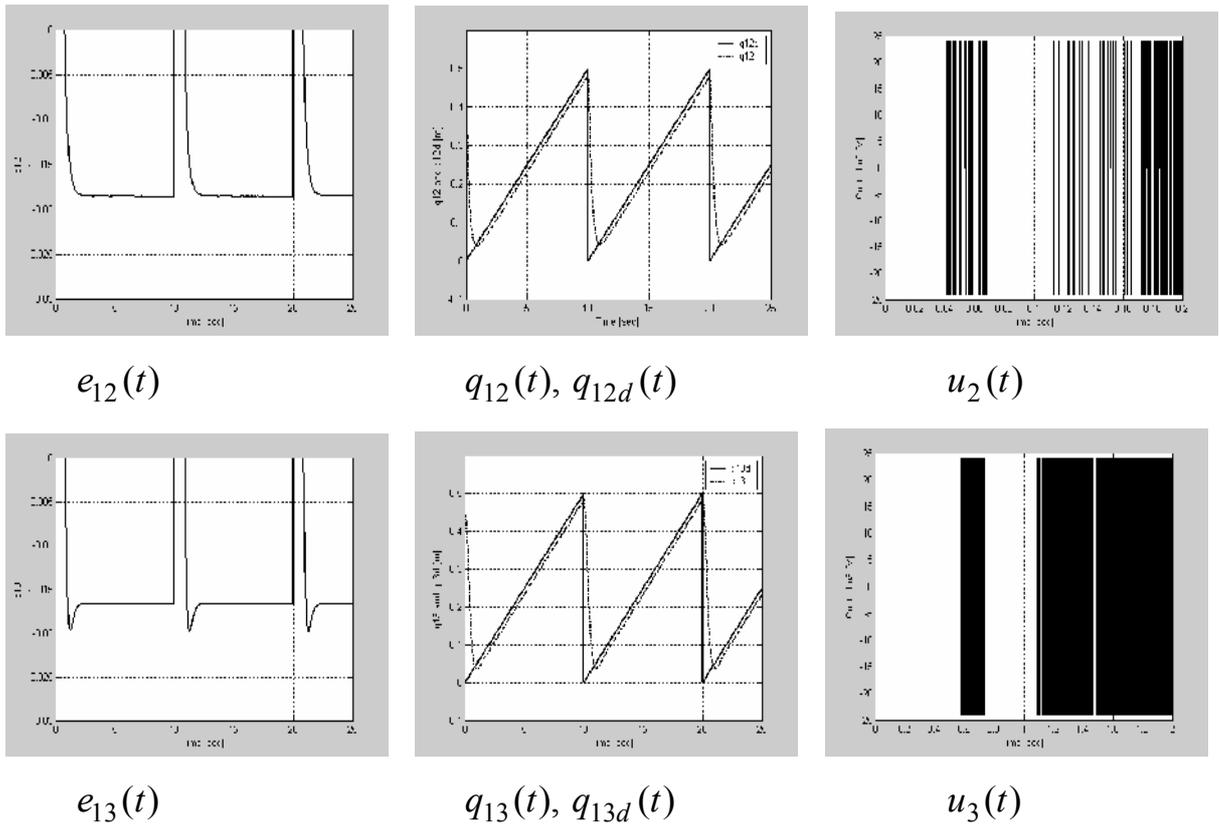
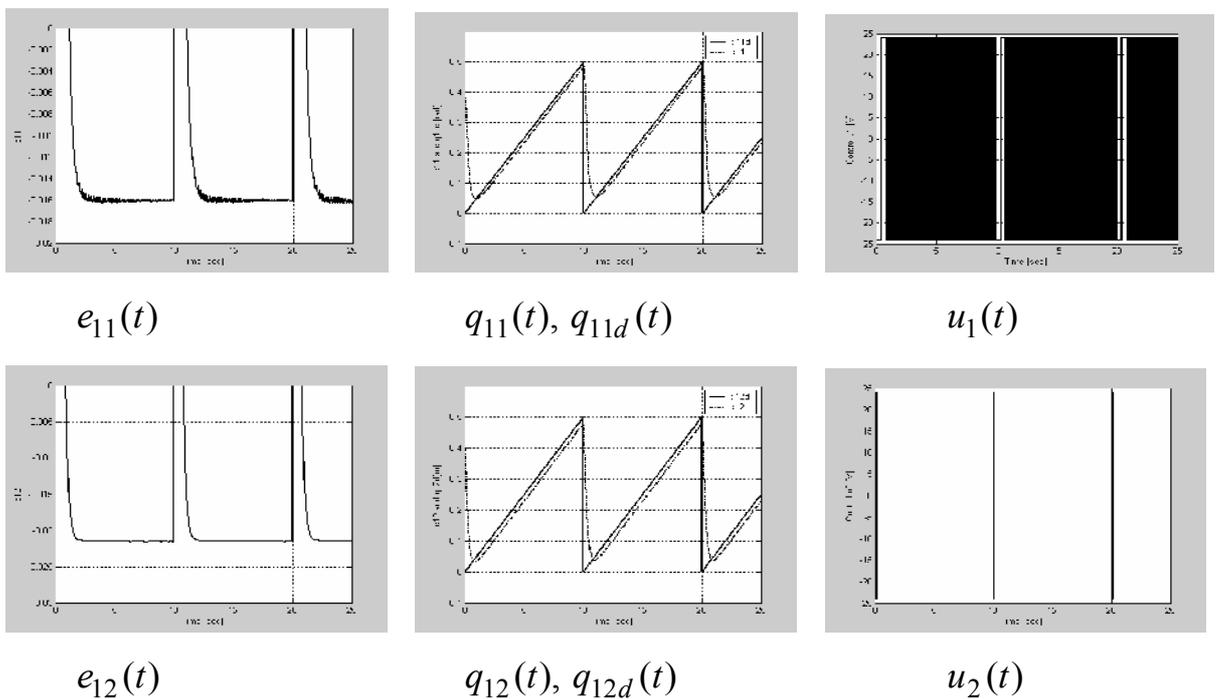


Рис. 3.6. Результаты моделирования процедуры 1.1

Процедура 1.2: система (3.4.1), закон управления (3.2.16), коэффициенты наблюдателя (3.3.1) с разрывной коррекцией приняты в виде

$$M_{1(3 \times 3)} = \text{diag}\{20\}, \mu_1 = 0,01. \quad (3.5.6)$$

На рис. 3.7 показаны графики  $e_{li}(t)$ ,  $q_{li}(t)$ ,  $q_{lid}(t)$ ,  $u_i(t)$  ( $i = \overline{1,3}$ ).



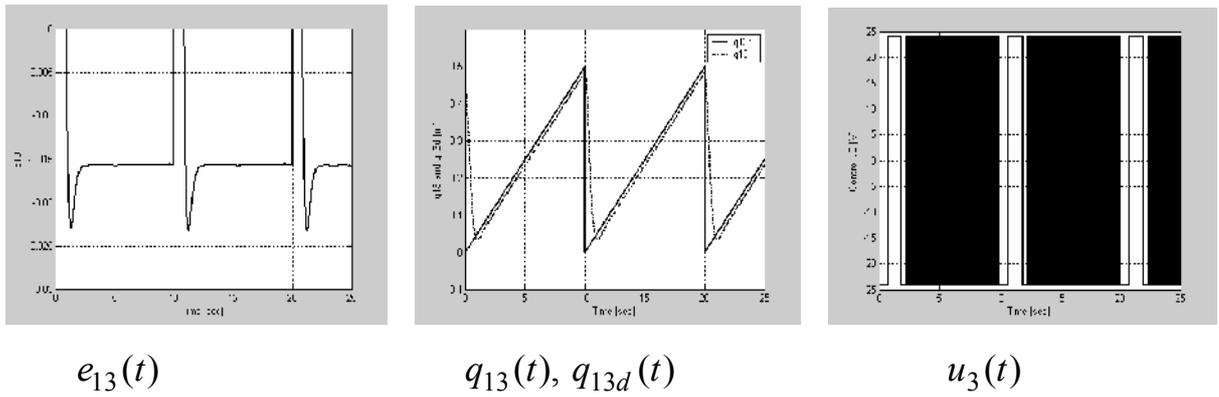


Рис. 3.7. Результаты моделирования процедуры 1.2

*Процедура 1.3:* система (3.4.1), закон управления (3.2.16), наблюдатель состояния с разрывной коррекцией (3.3.1) с параметрами (3.5.6). На рис. 3.8 показаны графики  $e_{li}(t)$ ,  $q_{li}(t)$ ,  $q_{lid}(t)$ ,  $u_i(t)$  ( $i = \overline{1,3}$ ).

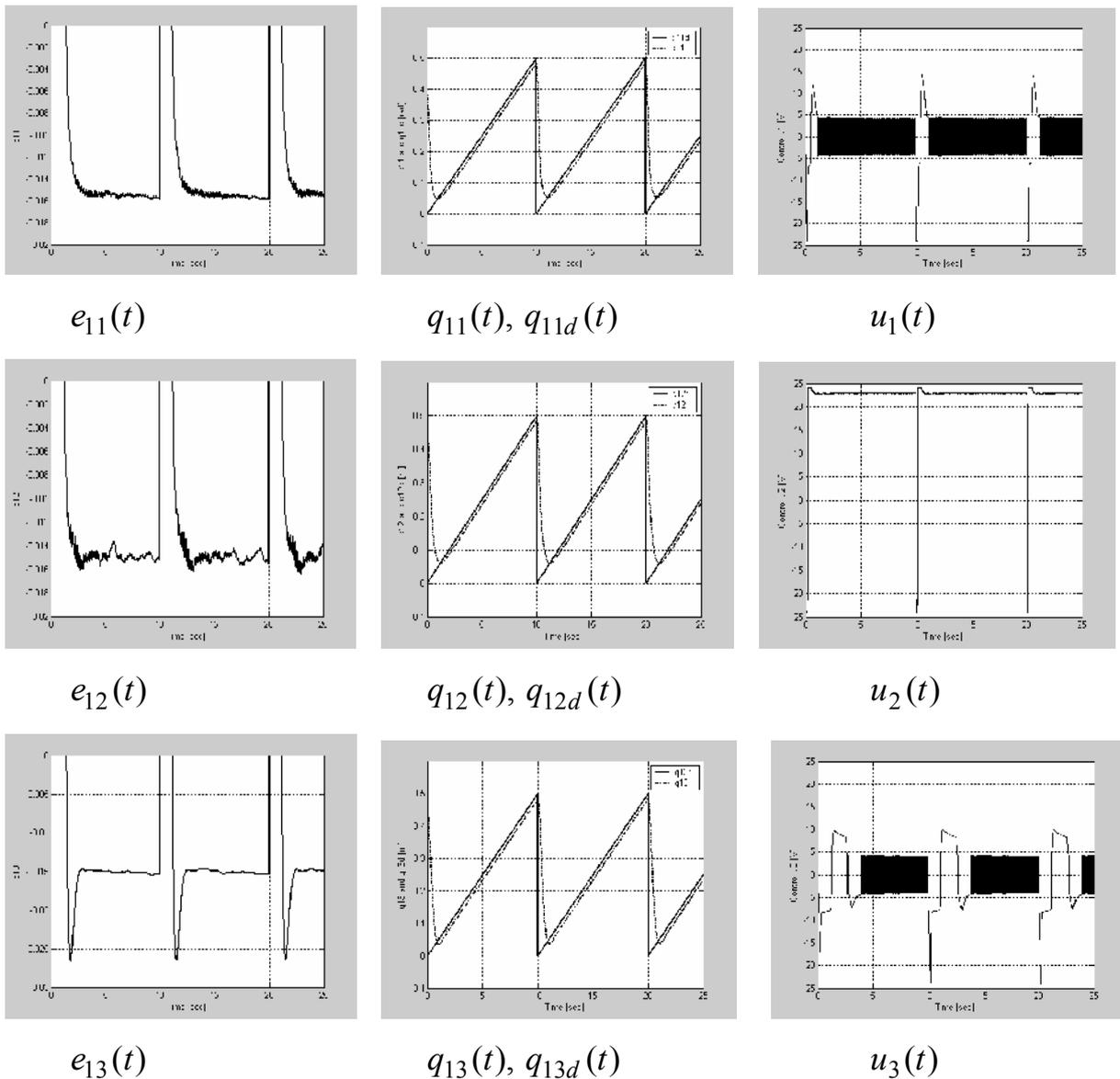


Рис. 3.8. Результаты моделирования процедуры 1.3

Процедура 1.4: система (3.4.1), закон управления (3.2.23), наблюдатель состояния с разрывной коррекцией (3.3.7), (3.3.15) с параметрами

$$M_{1(3 \times 3)} = \text{diag}\{20\}, M_{2(3 \times 3)} = \text{diag}\{180, 450, 180\},$$

$$M_{3(3 \times 3)} = \text{diag}\{500\}, \mu_{1,2,3} = 0,01. \quad (3.5.7)$$

На рис. 3.9 показаны графики  $e_{li}(t)$ ,  $q_{li}(t)$ ,  $q_{lid}(t)$ ,  $u_i(t)$  ( $i = \overline{1,3}$ ).

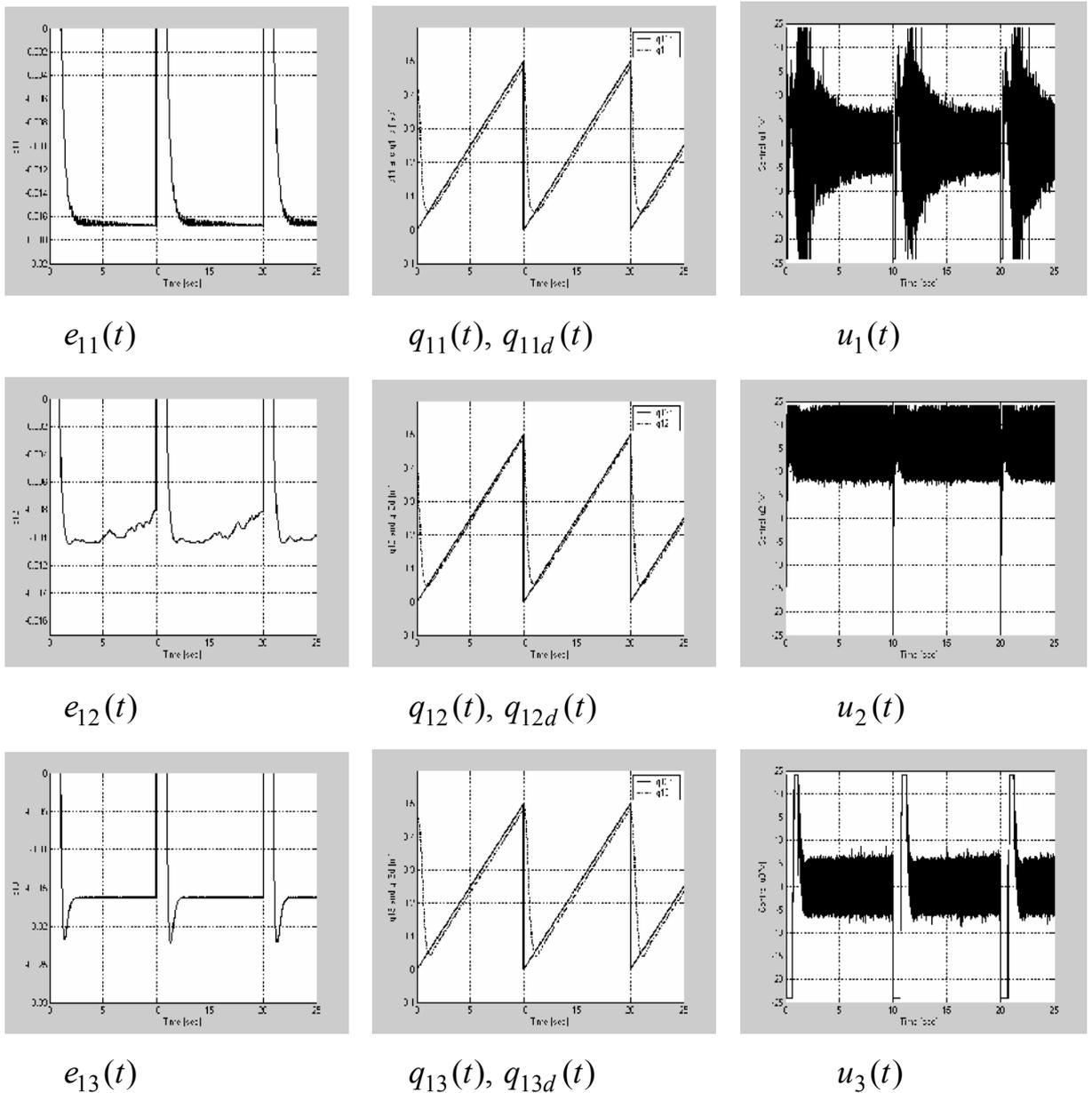


Рис. 3.9. Результаты моделирования процедуры 1.4

В БФУВ (3.4.2) с компенсацией перекрестных связей с учетом (2.5.1)–(2.5.2), (3.5.1)–(3.5.4) на основе (3.2.28) приняты коэффициенты

$K_2^* = \text{diag}\{38, 550, 150\}$ , с учетом которых для компонент вектор-функции  $W_3$  справедливы оценки  $|w_{31}| \leq \overline{W}_{31} = 450$ ,  $|w_{32}| \leq \overline{W}_{32} = 536$ ,  $|w_{33}| \leq \overline{W}_{33} = 440$ , которые для двигателей (1.24)–(1.26) удовлетворяют верхним ограничениям на ресурсы управления (1.23) при  $K_{3(3 \times 3)} = \{24\}$ .

*Процедура 2.1:* система (3.4.2), закон управления (3.2.16), наблюдатель состояния с непрерывной коррекцией (3.3.21)–(3.3.22) с параметрами (3.5.5). На рис. 3.10 показаны графики  $e_{li}(t)$ ,  $q_{li}(t)$ ,  $q_{lid}(t)$ ,  $u_i(t)$  ( $i = \overline{1,3}$ ).

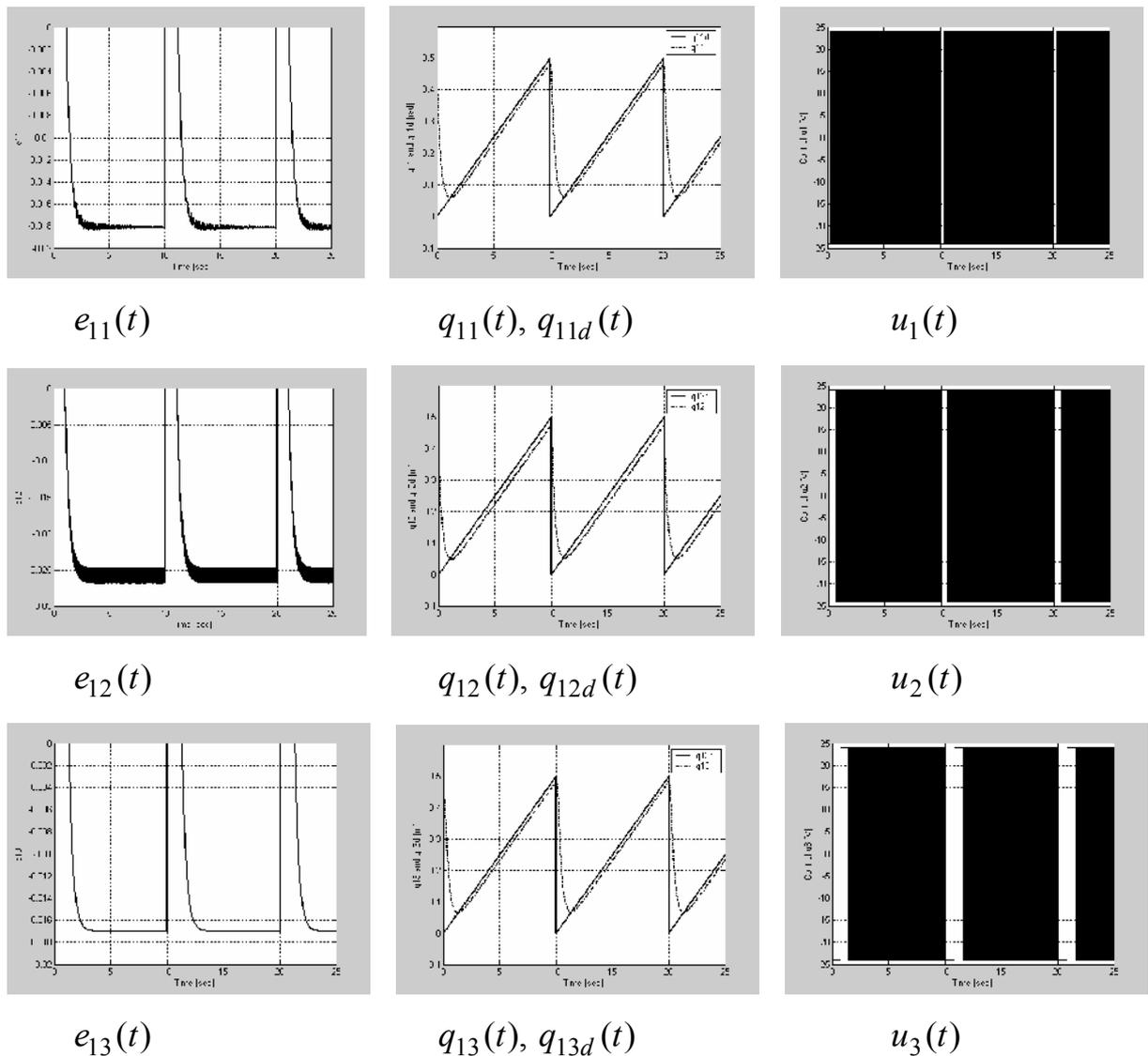


Рис. 3.10. Результаты моделирования процедуры 2.1

*Процедура 2.2:* система (3.4.2), закон управления (3.2.16), наблюдатель состояния с разрывной коррекцией (3.3.1) с параметрами (3.5.6). На рис. 3.11 показаны графики  $e_{li}(t)$ ,  $q_{li}(t)$ ,  $q_{lid}(t)$ ,  $u_i(t)$  ( $i = \overline{1,3}$ ).

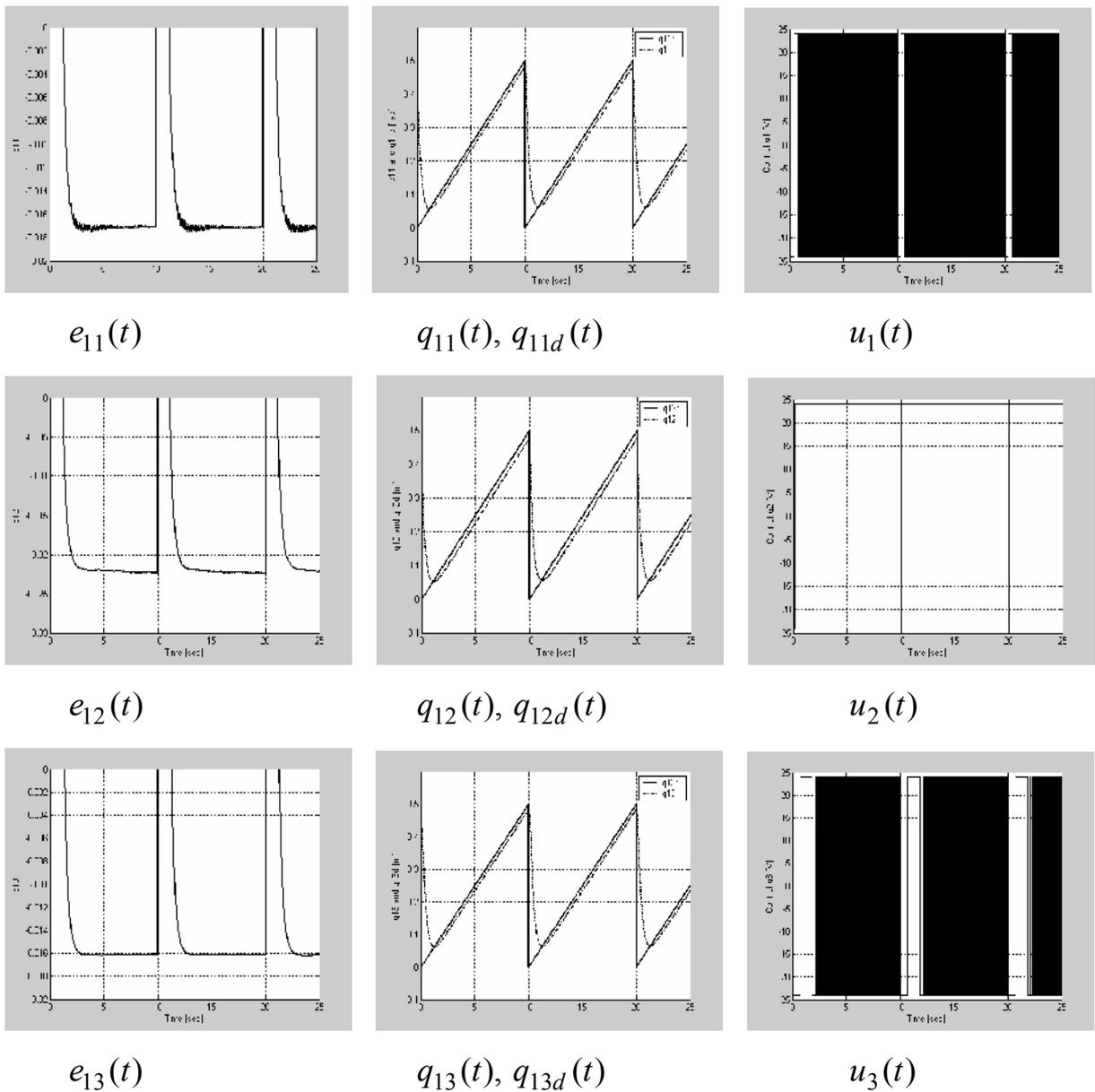
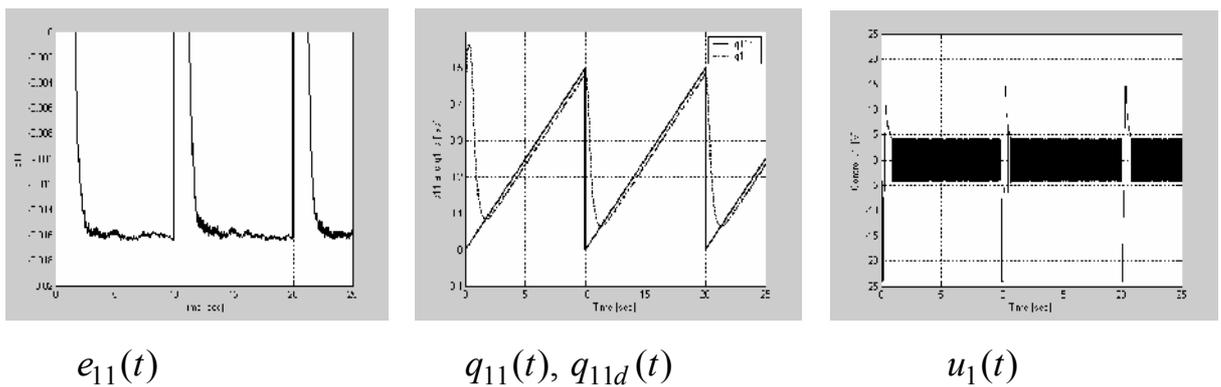


Рис. 3.11. Результаты моделирования процедуры 2.2

*Процедура 2.3:* система (3.4.2), закон управления (3.2.16), наблюдатель состояния с разрывной коррекцией (3.3.1) с параметрами (3.5.6). На рис. 3.12 показаны графики  $e_{1i}(t)$ ,  $q_{1i}(t)$ ,  $q_{1id}(t)$ ,  $u_i(t)$  ( $i = \overline{1,3}$ ).



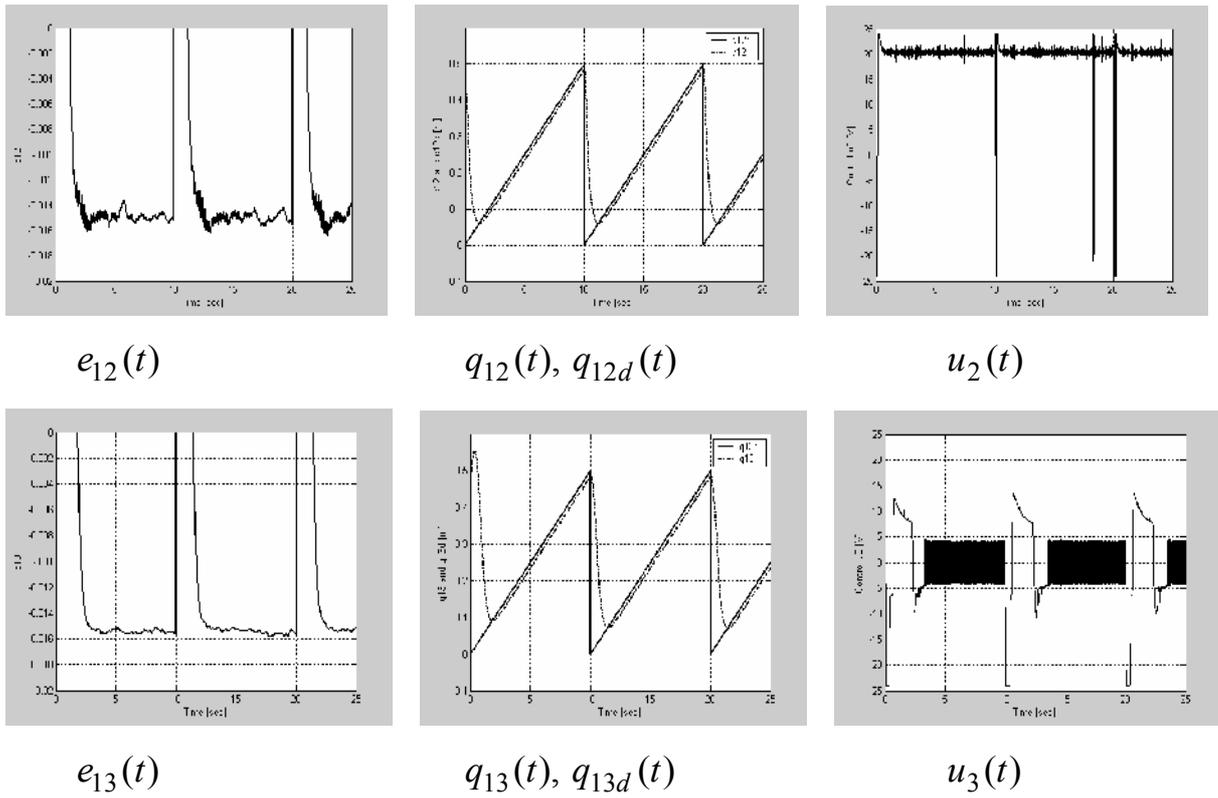
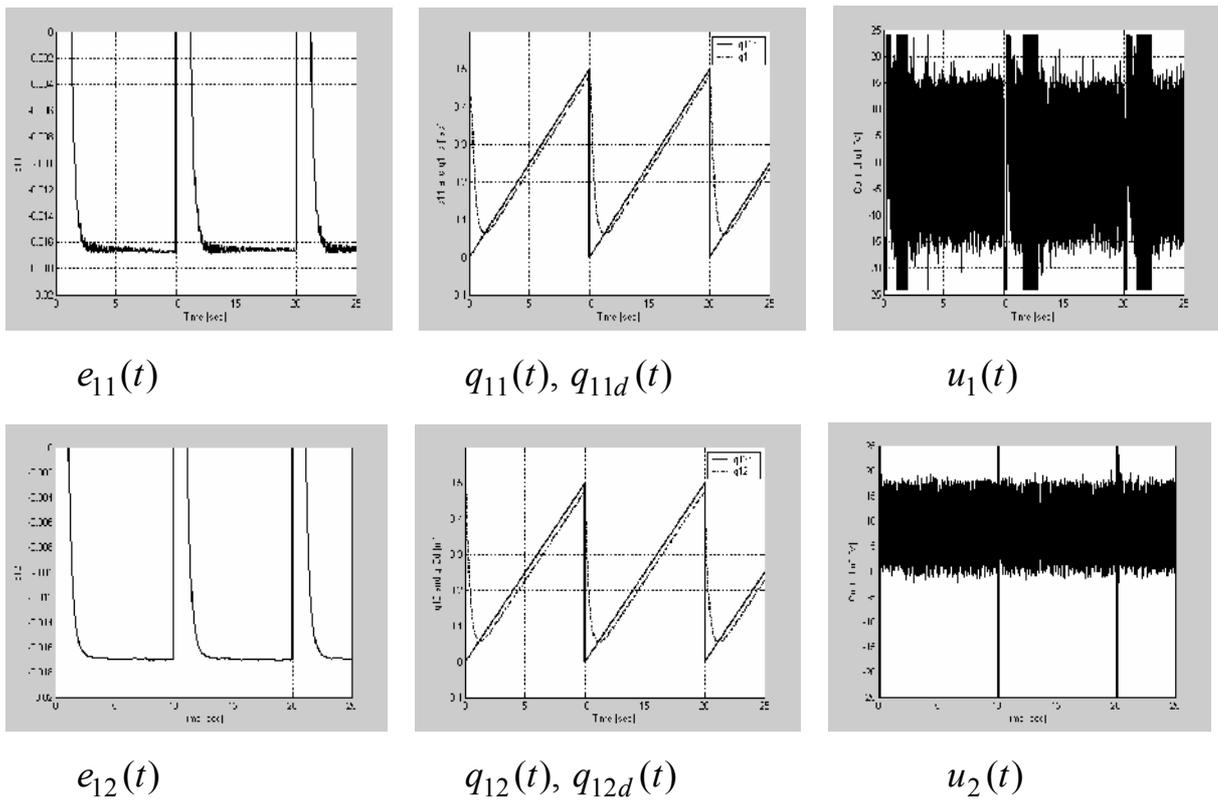
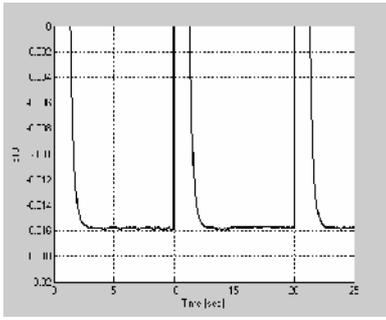


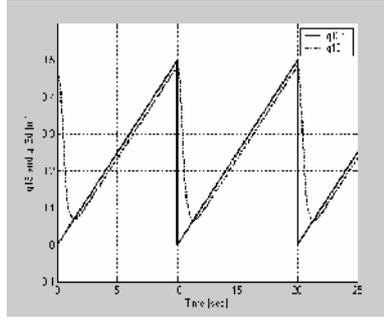
Рис. 3.12. Результаты моделирования процедуры 2.3

*Процедура 2.4:* система (3.4.2), закон управления (3.2.23), наблюдатель состояния (3.3.7), (3.3.15) с параметрами (3.5.7). На рис. 3.13 показаны графики  $e_{li}(t)$ ,  $q_{li}(t)$ ,  $q_{lid}(t)$ ,  $u_i(t)$  ( $i = \overline{1,3}$ ).

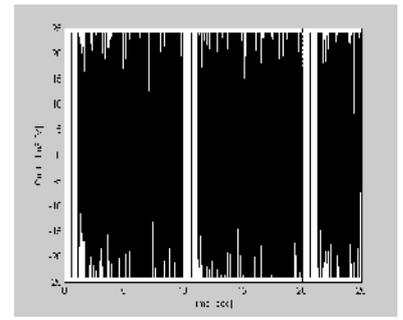




$e_{13}(t)$



$q_{13}(t), q_{13d}(t)$



$u_3(t)$

Рис. 3.13. Результаты моделирования процедуры 2.4

Как видим, результаты моделирования подтверждают результаты сравнительного анализа разработанных алгоритмов синтеза обратной связи, проведенного в разделе 3.4.

## ГЛАВА 4

### ПРЯМОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЕМ РАБОЧЕГО ОРГАНА МАНИПУЛЯТОРА

В данной главе рассматривается проблема отслеживания заданной траектории рабочим органом (схватом) манипулятора. Методы планирования и управления манипуляторами в пространстве обобщенных координат, разработанные в главах 2, 3, не всегда находят непосредственное применение в данной задаче. Это обусловлено тем, что известные методы управления в пространстве координат рабочего органа почти всегда требуют решения в реальном времени обратных задач кинематики и динамики, которые в редких случаях имеют аналитическое однозначное решение [19, 53]. В данной главе предложен принципиально другой подход к решению данной проблемы, основанный на декомпозиции выходного отображения механической системы и не требующий решения обратных задач в реальном времени [3, 4, 30, 54, 69].

В разделе 4.1 формализуется постановка задачи. В разделе 4.2 разработана процедура приведения модели механической системы (2.1.1) к блочно-канонической форме управляемости относительно выходных переменных (БКФУВ [3, 29, 30, 33, 34]), описывающих пространственную ориентацию рабочего органа. Полученное выходное отображение позволяет использовать блочный принцип и декомпозировать задачу синтеза управляющих моментов на независимо решаемые элементарные подзадачи размерности  $m$  – числа степеней свободы рабочего органа. В разделе 4.3 разработаны методы прямого управления выходными переменными в условиях определенности входных каналов управления. Проблемы информационного обеспечения решаются с помощью наблюдателя состояния на скользящих режимах. Полученная блочная форма управляемости механической системы относительно выхода одновременно является и блочно-наблюдаемой [3, 4, 29], т.е. задачи управления и наблюдения решаются относительно одних и тех же преобразованных координат, минуя обратные преобразования. В разделе 4.4 предложен новый

для механических систем стабилизирующий вид обратной связи, являющийся допредельной реализацией разрывных управлений. Для выбора коэффициентов обратной связи разработан иерархический принцип, позволяющий в асимптотике реализовать автономное управление при неполной информации о входных каналах управления. Разработаны принципы построения наблюдателя с непрерывными корректирующими воздействиями. В разделе 4.5 проведен сравнительный анализ разработанных процедур синтеза обратной связи. В разделе 4.6 разработанные алгоритмы применены для прямого управления положением конечной точки двухзвенного плоскостного манипулятора. Приведены результаты моделирования.

#### 4.1. Модель объекта управления. Постановка задачи

Вновь рассматривается динамическая модель жесткого манипулятора с  $n$  степенями свободы в виде (2.1.1). Многозвенная конструкция манипулятора заканчивается сменным рабочим органом (схватом). Вектор пространственной ориентации схвата описывается нелинейными гладкими функциями положений звеньев  $y_1 = h(q_1)$ ,  $y_1 \in R^m$ . Предполагается, что предварительно решен комплекс технологических задач, в том числе определены ограничения на положения звеньев (1.3) и их скорости (1.8), обусловленные конструкцией механизма или соображениями безопасности, которые определяют рабочую зону схвата:  $Q_1 \rightarrow Y_1$ , где  $q_1 \in Q_1 \subset R^n$ ,  $Q_1$  – область допустимых значений положений звеньев;  $y_1 \in Y_1 \subset R^m$ ,  $Y_1$  – рабочая зона.

Ставится задача отслеживания программного движения  $y_{1d}(t) \in R^m$ , заданного в терминах рабочего пространства  $y_{1d} \in Y_1$ . Предполагается, что вектор-функция  $y_{1d}(t)$  и ее производные ограничены в рассматриваемой области. Задача слежения сводится к задаче стабилизации ошибки слежения

$$e_1(t) = y_1(t) - y_{1d}(t), \quad e_1 = \text{col}(e_{1i}, \dots, e_{1m}) \quad (4.1.1)$$

и решается либо в асимптотике

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_{1i}(t) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4.1.2)$$

либо с заданной точностью

$$|e_{1i}| \leq \delta_{1i} = \text{const}, \quad i = \overline{1, m} \quad (4.1.3)$$

на основе представления модели (2.1.1) в БКФУВ относительно  $y_1$ .

## 4.2. Выходное отображение механической системы

В зависимости от типа манипуляционного механизма возможны следующие случаи [19, 38]:

- 1) при  $n < m$  существуют положения схвата, не обеспечиваемые никаким выбором  $q_1$ ;
- 2) при  $n = m$  существует конечное число различных конфигураций манипулятора, обеспечивающих заданное положение схвата;
- 3) при  $n > m$  (манипулятор с избыточным числом звеньев) может существовать бесконечное число конфигураций, обеспечивающих заданное положение схвата.

Манипулятор с избыточным числом звеньев обладает свойством маневренности, позволяющим преодолевать внешние препятствия или проводить работы во внутренних объемах. Отметим, что в данной работе решается в некотором смысле «узкая» задача: ограничения на координаты и их скорости заданы в общем виде, в нижеследующих построениях отсутствует аналитическое описание «запретных» областей конфигурационного пространства и проблема их обхода в явном виде не рассматривается.

Будем полагать, что  $m \leq n$ ,  $n - m$  – число степеней подвижности механизма, которое остается после наложения внешних связей на движение схвата. Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что отображение  $Q_1 \rightarrow Y_1$  однозначно, но не взаимнооднозначно, так как конкретной ориентации схвата могут соответствовать различные конфигурации манипулятора.

Как известно  $\text{rank} J$ , где  $J(q_1)_{m \times n} = \{\partial h / \partial q_1\}$  (1.5), может быть разным в различных точках пространства  $Q_1$ . В дальнейших построениях будем полагать, что  $\text{rank} J = m \quad \forall q_1 \in \overline{Q}_1 \subset Q_1$ , за исключением конечного числа особых

точек  $q_1^*$ . В случае избыточной размерности объекта управления  $m < n$  предполагается, что базисному минору матрицы  $J(q_1)$  (т.е. выходным переменным  $y_1$ ) при  $q_1 \in \overline{Q}_1$  можно поставить в соответствие одну и ту же группу базисных координат  $q_1^1 \in R^m$  ( $q_1 = \text{col}(q_1^1, q_1^2)$ , где  $q_1^2 \in R^{n-m}$  – свободные координаты), выбранную из предметных соображений. В противном случае следует соответствующим образом разделить заданную траекторию на участки, которым будет соответствовать различная структура замкнутой системы управления, обусловленная тем или иным расщеплением вектора  $q_1$ .

Суть процедуры отображения модели (2.1.1) в БКФУВ заключается в двукратном дифференцировании выходных переменных:

$$\dot{y}_1 = J(q_1)q_2 = y_2, \quad (4.2.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 &= J'(q_1, q_2)q_2 + J(q_1)\dot{q}_2 = \\ &= J'(q_1, q_2)q_2 + J(q_1)H^{-1}[v - Cq_2 - G + \eta] = A(q_1, q_2) + B(q_1)v + B(q_1)\eta, \end{aligned}$$

где  $A = J'(q_1, q_2)q_2 - J(q_1)H^{-1}(q_1)[C(q_1, q_2)q_2 + G(q_1)]$ ,  $J_{m \times n} = (J_{ij})$ ,  $J'_{m \times n} = (J'_{ij})$ ,  $J'_{ij} = (\partial J_{ij} / \partial q_1)q_2$ . Как известно, при умножении прямоугольной матрицы на невырожденную матрицу соответствующей размерности ранг результирующей матрицы будет равен рангу прямоугольной матрицы [11]. В системе (4.2.1), где  $B = J(q_1)H^{-1}(q_1)$  и  $\text{rank}H^{-1}(q_1) = n$ , этот факт с учетом сделанных предположений означает, что  $\text{rank}B = \text{rank}J = m \quad \forall q_1 \in \overline{Q}_1$ .

Поставленная задача (4.1.2) или (4.1.3) решается в терминах системы (4.2.1) на основе блочного подхода. Сопутствующая задача, которая здесь не рассматривается, заключается в управлении несвязанными координатами  $q_1^2 \in R^{n-m}$  в пространстве обобщенных координат (2.1.1) стандартными методами (см. например, главы 2, 3, [27, 40, 49–51, 53, 60, 61, 66, 70, 71, 73–78]).

### 4.3. Базовые алгоритмы управления в условиях определенности входных каналов управления

#### 4.3.1. Общий закон управления

Для решения поставленной задачи (4.1.2) или (4.1.3) в данном разделе разработаны методы синтеза обратной связи в системе (4.2.1), реализующие алгоритмы различной сложности, что обусловлено возможностью и целесообразностью установки тех или иных измерительных устройств.

Система (4.2.1) состоит из двух элементарных блоков в том смысле, что в каждом блоке размерность вектора состояния совпадает с размерностью вектора виртуального управления, что позволяет разделить задачу синтеза на независимо решаемые элементарные подзадачи размерности  $m$ .

В силу (4.2.1) относительно ошибки слежения (4.1.1) имеем

$$\dot{e}_1 = y_2 - y_{2d}, \quad y_{2d} = \dot{y}_{1d}. \quad (4.3.1)$$

В системе (4.3.1) вектор  $y_2$  полагается виртуальным управлением вида  $y_2^* = -K_1 e_1 + y_{2d}$ , где  $K_1 = \text{diag}\{k_{1i}\}$ ,  $k_{1i} > 0, i = \overline{1, m}$  – коэффициенты обратной связи, определяющие собственные движения переменных  $e_1$ . Невязка между реальным  $y_2$  и выбранным  $y_2^*$  виртуальным управлением имеет вид

$$e_2 = y_2 + K_1 e_1 - y_{2d}. \quad (4.3.2)$$

С учетом (4.3.2) уравнение (4.3.1) принимает вид

$$\dot{e}_1 = -K_1 e_1 + e_2. \quad (4.3.3)$$

Обеспечение асимптотической сходимости переменной (4.3.2)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_2(t) = 0 \quad (4.3.4)$$

приведет к решению задачи (4.1.2); обеспечение заданной точности

$$\|e_2\| \leq \delta_2 = \text{const} \quad (4.3.5)$$

приведет к решению задачи (4.1.3).

В силу систем (4.2.1), (4.3.3) запишем дифференциальное уравнение относительно невязки (4.3.2) в виде

$$\dot{e}_2 = A(q_1, q_2) + B(q_1)v + B(q_1)\eta + K_1(-K_1 e_1 + e_2) - y_{3d}, \quad (4.3.6)$$

где  $y_{3d} = \dot{y}_{1d}$ . С учетом конструктивных соображений расщепим векторы так  $q_1 = \text{col}(q_1^1, q_1^2)$ ,  $v = \text{col}(v_1, v_2)$ ,  $v_1 = \text{col}(v_{11}, \dots, v_{1m})$ ,  $Bv = B_1(q_1)v_1 + B_2(q_1)v_2$ , чтобы  $\det B_1 \neq 0 \quad \forall q_1 \in \overline{Q_1}$ , и представим систему (4.3.6) в виде

$$\dot{e}_2 = \varphi(\cdot) + B_1(q_1)v_1, \quad (4.3.7)$$

где  $\varphi(\cdot) = A(q_1, q_2) + B_2(q_1)v_2 + B(q_1)\eta + K_1(-K_1e_1 + e_2) - y_{3d}$ .

В случае, когда в системе (4.3.7) ставится задача автономного управления выходными координатами  $e_{11}, \dots, e_{1m}$ , т.е. когда они должны реагировать только на собственные управляющие воздействия  $u_{11}, \dots, u_{1m}$ , требуется полностью компенсировать внутренние взаимосвязи или значительно ослабить их. В простейшем случае, когда параметры матрицы  $B_1(q_1)$  известны, общий закон автономного управления, реализующий динамическую декомпозицию в системе (4.3.3), (4.3.7), имеет вид

$$B_1(q_1)v_1 = g(e_2) - \varphi(\cdot), \quad (4.3.8)$$

где  $g(e_2) = \text{col}(g_1(e_{21}), \dots, g_m(e_{2m}))$  – стабилизирующая обратная связь,  $\varphi(\cdot)$  – вектор-функция, роль которой состоит в компенсации имеющихся неопределенностей.

Моменты  $v$  играют в системе управления электромеханическим объектом двойную роль, поскольку одновременно являются задающими воздействиями для системы управления ИУ, что накладывает ряд ограничений на их выбор (1.11). Требуется, чтобы составляющие закона управления (4.3.8) были непрерывно дифференцируемы  $l$  раз по всем своим аргументам, где  $l$  – относительная степень динамической модели ИУ, составленной относительно моментов, приведенных к валу ИУ, а также были ограничены вместе со своими производными в рассматриваемой области, в частности,

$$|v_{1i}| \leq U_{1i}, \quad U_1 = \min\{U_{1i}\}, \quad |\dot{v}_{1i}| \leq \dot{U}_{1i}, \dots, \quad |v_{1i}^{(l)}| \leq U_{1i}^{(l)}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (4.3.9)$$

Введем обозначение невязки между выбранными и истинными управляющими моментами

$$e_3 = B_1(q_1)v_1 - g(e_2) + \varphi(\cdot), \quad e_3 \in R^m. \quad (4.3.10)$$

Существенно, что при данном подходе реализуется возможность выбора различных комплектных ИУ, в которых независимо решается задача слежения за заданными значениями управляющих моментов (стабилизация невязки (4.3.10)) либо в асимптотике (за конечное время)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_3(t) = 0 \quad (e_3(t) = 0, t > t^*), \quad (4.3.11)$$

либо с заданной точностью

$$\|e_3\| \leq \delta_3 = \text{const}. \quad (4.3.12)$$

Ниже разработаны различные реализации законов управления (4.3.8) в системе (4.3.7).

### 4.3.2. Линейная стабилизирующая обратная связь

В системе (4.3.7) сформируем комбинированное управление вида

$$B_1(q_1)v_1 = -K_2 e_2 - \varphi(\cdot), \quad (4.3.13)$$

где  $K_2 = \text{diag}\{k_{2i}\}$ ,  $k_{2i} > 0, i = \overline{1, m}$ . Замкнутая система (4.3.7), (4.3.13) с учетом (4.3.10) примет вид

$$\dot{e}_2 = -K_2 e_2 + e_3. \quad (4.3.14)$$

Обеспечение соотношения (4.3.11) в системе управления ИУ приведет к выполнению (4.3.4) и автономной сходимости выходных координат к заданным траекториям с заданными темпами (4.1.2):

$$e_3 \rightarrow 0 \quad (e_3 = 0) \Rightarrow e_2 \rightarrow 0 \Rightarrow e_1 \rightarrow 0 \Rightarrow y_1 \rightarrow y_{1d}. \quad (4.3.15)$$

Не смотря на привлекательность результата, закон управления (4.3.13) сложен в реализации, поскольку потребуется в реальном времени с высокой точностью и быстродействием оценивать матрицу  $B_1^{-1}(q_1)$  и компенсирующую составляющую  $\varphi(\cdot)$ , что включает параметры оператора объекта управления (2.1.1), (4.3.6), значения производных задающих воздействий и внешних возмущений. К внешним воздействиям  $\eta(t)$  в данном случае предъявляется требование гладкости, в частности, может потребоваться составление динамической модели внешних возмущений и решение задачи динамической компенсации возмущений [43, 55].

Для реализации закона (4.3.13) требуется: измерение  $q_1, q_2$ ; параметрическая определенность оператора объекта управления (2.1.1), (4.3.6); построение адекватной модели возмущений; вычисление  $y_{2d}(t), y_{3d}(t)$ .

Требования к объему априорной информации об объекте управления и среде его функционирования, а также к количеству вычислений, выполняемых в реальном времени, можно существенно сократить, если ввести в контур обратной связи наблюдатель состояния на скользящих режимах [3, 4, 29, 54], для построения которого достаточно измерения положений звеньев  $q_1$ . Данный наблюдатель (как и в параграфе 2.3.1) строится для на основе полученной БКФУВ (4.3.3), (4.3.7) и позволяет за теоретически конечное время получить оценки преобразованных переменных, линейных комбинаций составляющих оператора объекта управления (минуя их непосредственное вычисление) и имеющих неопределенностей при условии их ограниченности, а именно:

$$|\varphi_i| \leq F_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4.3.16)$$

где  $\varphi(\cdot) = \text{col}(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ ,  $F_i$  – известные константы,  $\overline{F} = \max\{F_i\}$ .

Для системы (4.3.3), (4.3.7) наблюдатель состояния имеет вид

$$\dot{z}_1 = -K_1 z_1 + z_2 + v_1, \quad \dot{z}_2 = B_1(q_1)u_1 + v_2, \quad (4.3.17)$$

где  $z_1, z_2 \in R^m$  – вектор состояния,  $v_1, v_2$  – корректирующие воздействия наблюдателя, которые выбираются в классе разрывных функций так, чтобы решить задачу стабилизации системы, записанной относительно невязок  $\varepsilon_1 = (h(q_1) - y_{1d}) - z_1 = e_1 - z_1$ ,  $\varepsilon_2 = e_2 - z_2$ , которая в силу (4.3.3), (4.3.7), (4.3.17) имеет вид

$$\dot{\varepsilon}_1 = -K_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - v_1, \quad \dot{\varepsilon}_2 = \varphi(\cdot) - v_2. \quad (4.3.18)$$

В первом уравнении системы (4.3.17) разрывное корректирующее воздействие  $v_1 = M_1 \text{sign} \varepsilon_1$ , где здесь и далее  $M_1 = \text{diag}\{m_{1i}\}$ ,  $\text{sign} \varepsilon_1 = \text{col}(\text{sign} \varepsilon_{11}, \dots, \text{sign} \varepsilon_{1m})$ , приведет к возникновению за конечное время  $t_1 > 0$  скользящего режима на многообразии  $S_1 = \{\varepsilon_1 = 0\} \Rightarrow z_1 = e_1$  при выполнении

условий  $\varepsilon_{1i}\dot{\varepsilon}_{1i} < 0 \Rightarrow m_{1i} > |\varepsilon_{2i}|$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Согласно методу эквивалентного управления [57] при  $t > t_1$  из уравнений статики  $\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2 - v_{1\text{eq}} = 0$  имеем оценки переменных состояния второго уравнения (4.3.18)  $v_{1\text{eq}} = \varepsilon_2$ , значения которых получим с выходов  $m$  фильтров типа (2.3.12).

Полученные значения используются для формирования разрывных корректирующих воздействий во втором уравнении (4.3.17). При  $v_2 = M_2 \text{sign} \varepsilon_2$ , где  $\varepsilon_{2i}\dot{\varepsilon}_{2i} < 0 \Rightarrow m_{2i} > F_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , за теоретически конечное время  $t_2 > t_1$  возникнет скользящий режим на многообразии  $S_2 = \{\varepsilon_2 = 0 \cap S_1\} \Rightarrow z_2 = e_2$ . Из уравнения статики  $\dot{\varepsilon}_2 = \varphi(\cdot) - v_{2\text{eq}} = 0$  имеем оценки неопределенностей второго уравнения (4.3.18)  $v_{2\text{eq}} = \varphi(\cdot)$ , значения которых также получим с выходов  $m$  фильтров типа (2.3.12).

Полученные значения используются для формирования комбинированного управления (4.3.13). Таким образом, закон управления при наличии наблюдателя состояния (4.3.17) и  $2m$  фильтров (2.3.12) будет иметь вид  $B_1(q_1)v_1 = -K_2 z_2 - \tau_2$ . Данное выражение является сигнальным задающим воздействием для отработки ИУ. Существенно, что для его определения непосредственных вычислений производить не требуется.

Порядок устройства наблюдения можно сократить в два раза, если не использовать в законе управления компенсирующую составляющую, т.е.

$$B_1(q_1)v_1 = -k_2 e_2, \quad (4.3.19)$$

где для простоты изложения  $k_2 = \text{const} > 0$ .

Для информационного обеспечения (4.3.19) достаточно измерения угловых положений звеньев  $q_1$  и построения редуцированного наблюдателя на скользящих режимах вида

$$\dot{z}_1 = -K_1 z_1 + v_1. \quad (4.3.20)$$

В силу (4.3.3), (4.3.20) имеем уравнение относительно невязки  $\dot{\varepsilon}_1 = -K_1 \varepsilon_1 + e_2 - v_1$ , где при  $v_1 = M_1 \text{sign} \varepsilon_1$ ,  $m_{1i} > |e_{2i}|$ ,  $i = \overline{1, m}$  за конечное время  $t_1 > 0$  возникнет скользящий режим на многообразии  $S_1 = \{\varepsilon_1 = 0\} \Rightarrow z_1 = e_1$ . Из

уравнения статики  $\dot{\varepsilon}_1 = e_2 - v_{1eq} = 0$  имеем оценки переменных состояния системы (4.3.7)  $v_{1eq} = e_2$ , значения которых получим с выходов  $m$  фильтров типа (2.3.12). Тогда закон управления (4.3.19) будет реализован в виде

$$B_1(q_1)v_1 = -k_2\tau_1, \quad (4.3.19,a)$$

что в отличие от закона (4.3.13) не требует параметрической определенности оператора объекта управления; построения модели возмущений и вычисления  $y_{2d}(t)$ ,  $y_{3d}(t)$ , требуется только выполнение (4.3.16). Существенно, что в данном случае класс допустимых возмущений  $\eta(t)$  может быть расширен за счет негладких функций времени. Роль коэффициента  $k_2$  в замкнутой системе (4.3.7), (4.3.19) будет заключаться в подавлении имеющихся неопределенностей, что приведет к выполнению (4.3.5) и решению задачи слежения с заданной точностью (4.1.3).

С целью более тонкой настройки, для неопределенностей правой части системы (4.3.7) введем мажорирующую функцию вида

$$\|\varphi\| \leq L_0 + L_1\|e_1\| + L_2\|e_2\|, \quad (4.3.21)$$

где  $L_0, L_1, L_2$  – известные положительные константы. Положим в системе (4.3.3) диагональные коэффициенты матрицы  $K_1$  одинаковыми и равными  $k_1 = \text{const} > 0$ . Полагая в системе (4.3.7) не только  $\eta, y_{3d}, v_2$ , но и  $q_1, q_2$  внешними воздействиями, конкретизируем выражение (4.3.20):

$$L_1 = k_1^2, \quad L_2 = k_1, \quad \|A(q_1, q_2) + B_2(q_1)v_2 + B(q_1)\eta - y_{3d}\| \leq L_0. \quad (4.3.22)$$

Такое «грубое» представление позволяет избежать решения обратной задачи и не выражать  $q_1, q_2$  через новые переменные  $e_1, e_2$ . Заметим, что рассмотрении математической модели конкретного манипулятора возможно отличное от (4.3.22) другое распределение значений  $L_0, L_1, L_2$ .

Покажем, что существуют такие значения  $k_1, k_2$ , при которых в замкнутой системе (4.3.3), (4.3.7), (4.3.19) с учетом (4.3.21) задача слежения решается с заданной точностью (4.1.3), (4.3.5).

Введем квадратичную форму в виде суммы квадратичных форм

$$V = V_1 + V_2, \quad V_1 = \sum_{i=1}^m V_{1i}, \quad V_{1i} = \frac{1}{2}(e_{1i})^2, \quad V_2 = \sum_{i=1}^m V_{2i}, \quad V_{2i} = \frac{1}{2}(e_{2i})^2, \quad (4.3.23)$$

где  $V_{1i} > 0$  при  $e_{1i} \neq 0$ ,  $V_{2i} > 0$  при  $e_{2i} \neq 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

Для производной первого слагаемого  $V_1 = \frac{1}{2}e_1^T e_1$  квадратичной формы (4.3.23) в силу (4.3.3) справедлива оценка  $\dot{V}_1 = e_1^T \dot{e}_1 = e_1^T (e_2 - k_1 e_1) \leq \|e_1\|(\|e_2\| - k_1 \|e_1\|)$ . Неравенство  $\dot{V}_1 < 0$  обеспечивается вне окрестности  $\|e_1\| \leq \|e_2\|/k_1 \leq \delta_1$  при выполнении условия  $k_1 > \|e_2\|/\delta_1$ , из которого при фиксированном значении  $k_1 = k_1^*$  определяется точность (4.3.5), которую требуется обеспечить в системе (4.3.7), (4.3.19) при стабилизации переменной  $e_2$ :

$$\|e_2\| < k_1^* \delta_1 = \delta_2 = \text{const}. \quad (4.3.24)$$

При выборе коэффициентов обратной связи следует учитывать, что с ростом  $k_1^*$  естественным образом увеличиваются точность отработки задания (4.1.3) (в предельном случае  $k_1^* \rightarrow +\infty \Rightarrow \delta_1 \rightarrow 0$  [41]) и темпы переходного процесса. В то же время наличие ограничений на управляющие моменты (4.3.9) подразумевает, что существует верхняя граница  $k_1^* \leq k_{1\max}$  и соответствующая ей минимально возможная ошибка слежения  $\delta_1 \geq \delta_{1\min}$ .

Для производной второго слагаемого  $V_2 = \frac{1}{2}e_2^T e_2$  квадратичной формы (4.3.23) в силу (4.3.7), (4.3.10), (4.3.19), (4.3.21), (4.3.24) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= e_2^T \dot{e}_2 = e_2^T (\varphi(\cdot) + e_3 - k_2 e_2) \leq \|e_2\| (L_0 + L_1 \|e_1\| + L_2 \|e_2\| + \|e_3\| - k_2 \|e_2\|) \leq \\ &\leq \|e_2\| (L_0 + L_1 \|e_2\|/k_1^* + L_2 \|e_2\| + \|e_3\| - k_2 \|e_2\|). \end{aligned}$$

Неравенство  $\dot{V}_2 < 0$  обеспечивается вне окрестности  $\|e_2\| \leq (L_0 + \|e_3\|)/(k_2 - L_1/k_1^* - L_2) \leq \delta_2$  при выполнении условий

$$\bar{k}_2 > L_0/(k_1^* \delta_1) + L_1/k_1^* + L_2, \quad \tilde{k}_2 > \|e_3\|/(k_1^* \delta_1), \quad k_2 = \bar{k}_2 + \tilde{k}_2. \quad (4.3.25)$$

С учетом (4.3.22) первое из данных неравенств примет вид  $\bar{k}_2 > L_0/(k_1^* \delta_1) + 2k_1^*$ , что является нижней оценкой для выбора  $\bar{k}_2 = \bar{k}_2^*$ . Из

второго неравенства при фиксированном значении  $\tilde{k}_2 = \tilde{k}_2^*$  определяется точность (4.3.12), которую требуется обеспечить при стабилизации переменной  $e_3$  на этапе синтеза управления в ИУ (в частности, при выполнении (4.3.11)  $\tilde{k}_2^* = 0$ ). Поведение переменных замкнутой следящей системы (4.3.3), (4.3.7), (4.3.19) описывается следующей логической цепочкой:

$$\|e_3\| \leq \delta_3 (e_3 \rightarrow 0) \Rightarrow \|e_2\| \leq \delta_2 \Rightarrow \|e_1\| \leq \delta_1. \quad (4.3.26)$$

Заметим, что наличие ограничений на управляющие моменты может привести к слишком большой ошибке слежения, т.е. допустимых коэффициентов обратной связи  $k_1^* \leq k_{1\max}$ ,  $k_2^* \leq k_{2\max}$  может оказаться недостаточным для попадания в заданную окрестность (4.1.3). На практике наличие ограничений приведет к реализации (4.3.19) в виде линейной зоны с насыщением  $B_1(q_1)v_1 = -\text{sat}(k_{2\max}e_2)$  [73, 74]. Возникает естественное желание учесть имеющиеся ограничения на стадии синтеза. Такой цели отвечают, например, системы с разрывными управлениями.

### 4.3.3. Разрывная стабилизирующая обратная связь

С учетом (4.3.16) в системе (4.3.7) разрывное управление

$$B_1(q_1)v_1 = -M\text{sign}e_2, \quad (4.3.27)$$

при выполнении достаточных условий  $e_2\dot{e}_2 < 0 \Rightarrow F_i < m_i \leq m_{i\max}$ ,  $m_{i\max}(U_{li})$ ,  $i = \overline{1, m}$  приведет к возникновению за конечное время скользящего режима на многообразии  $S = \{e_2 = 0\}$ , что, в свою очередь, приведет к асимптотической сходимости в системе (4.3.3) и к заданным траекториям (4.1.2):  $e_2 = 0 \Rightarrow e_1 \rightarrow 0 \Rightarrow y_1 \rightarrow y_{1d}$ . Значение амплитуды разрывного управления можно понизить, если сформировать комбинированное управление

$$B_1(q_1)v_1 = -M\text{sign}e_2 - \varphi, \quad (4.3.28)$$

что приводит к аналогичному результату при  $0 < m_i \leq m_{i\max} - F_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

Информационная поддержка законов управления (4.3.27), (4.3.28) осуществляется с помощью наблюдателей состояния на скользящих режимах

соответствующей размерности: (4.3.20) ( $m$ ) или (4.3.17) ( $2m$ ) и фильтров типа (2.3.12) требуемого порядка.

Системы с разрывными управлениями, функционирующие в скользящем режиме, обладают целым рядом преимуществ [57]. К ним относятся: декомпозиция общего движения системы на разнотемповые составляющие, упрощение процедуры синтеза за счет понижения размерности и выбора значений амплитуд  $m_i$  на основе неравенств, инвариантность движений в скользящем режиме к внешним и параметрическим возмущениям.

Алгоритм (4.3.27), хотя и не реализуем в рассматриваемой задаче в силу физических ограничений, налагаемых на обобщенные моменты ИУ, важен с теоретической точки зрения как предельный случай. Известные допредельные реализации разрывного управления (и сохранение указанных преимуществ разрывного управления в допредельной ситуации) в виде sat-функций или унитарного управления [73, 74, 77] неудобны в реализации из-за наличия особых недифференцируемых точек. Следующий закон управления является допредельной реализацией разрывного управления в виде нелинейной непрерывно дифференцируемой ограниченной функции.

#### 4.3.4. Нелинейная стабилизирующая обратная связь

Для системы (4.3.7) сформируем закон управления в виде

$$B_1(q_1)v_1 = -M \operatorname{arctg}(k_2 e_2) - \varphi(\cdot), \quad M, k_2 = \operatorname{const} > 0, \quad (4.3.29)$$

где  $\operatorname{arctg}(k_2 e_2) = \operatorname{col}(\operatorname{arctg}(k_2 e_{21}), \dots, \operatorname{arctg}(k_2 e_{2m}))$ .

Обоснуем использование функции арктангенса в качестве стабилизирующей обратной связи. Во-первых, данная функция является ограниченной

$$|\operatorname{arctg}(k_2 e_{2i})| < \frac{\pi}{2}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4.3.30)$$

что позволяет учесть имеющиеся ограничения на ресурсы управления (4.3.9) уже на стадии синтеза, а именно  $M \leq \frac{2}{\pi} U_1$ ,  $k_2 \leq k_{2\max}$ , где наличие верхней границы  $k_{2\max}$  обусловлено наличием ограничений на производные задающих воздействий в системе управления исполнительными устройствами:

$$\frac{d}{dt}(\text{Marctg}(k_2 e_{2i})) = Mk_2 \dot{e}_{2i} / [1 + (k_2 e_{2i})^2], \quad Mk_2 |\dot{e}_{2i}| / [1 + (k_2 e_{2i})^2] \leq \dot{U}_{1i} \text{ и т.д.}$$

Во-вторых, в малой окрестности нуля функция арктангенса эквивалентна линейной функции (см. рис. 4.1), а именно

$$\text{arctg}(k_2 e_{2i}) \underset{e_{2i} \rightarrow 0}{\sim} k_2 e_{2i}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (4.3.31)$$

И, в-третьих, данная функция является допредельной гладкой реализацией разрывного управления (см. рис. 4.2) в следующем смысле:

$$\text{arctg}(k_2 e_{2i}) \underset{k_2 \rightarrow \infty}{\rightarrow} \frac{\pi}{2} \text{sign} e_{2i}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (4.3.32)$$

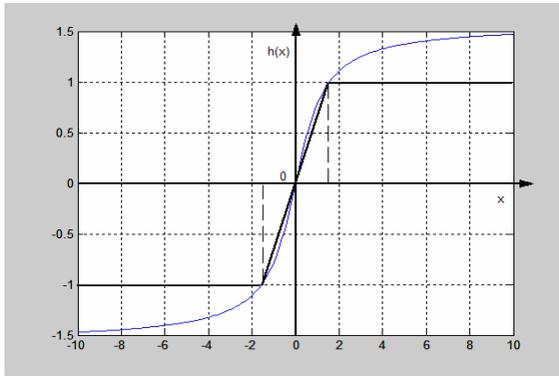


Рис. 4.1.

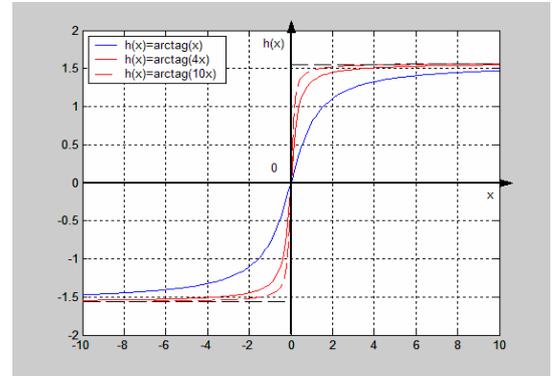


Рис. 4.2.

В замкнутой системе (4.3.7), (4.3.29), (4.3.10)  $\dot{e}_2 = -\text{Marctg}(k_2 e_2) + e_3$  при выполнении условий (4.3.10),  $0 < m_i \leq m_{i\max} - F_i$  обеспечивается асимптотическая сходимость (4.3.4) в силу  $e_{2i} \dot{e}_{2i} < 0$  при  $e_{2i} \neq 0$  и (4.3.31). Информационное обеспечение закона управления (4.3.29): измерение  $q_1$  и наблюдатель состояния размерности  $2m$  (4.3.17) и  $2m$  фильтров типа (2.3.12).

Покажем, что управление без компенсирующей составляющей вида

$$B_1(q_1)v_1 = -\text{Marctg}(k_2 e_2) \quad (4.3.33)$$

обеспечит соотношения (4.3.26). Точность, которую требуется обеспечить в замкнутой системе (4.3.7), (4.3.33)

$$\dot{e}_2 = \varphi(\cdot) + e_3 - \text{Marctg}(k_2 e_2), \quad (4.3.34)$$

определяется выражением (4.3.24). Зафиксируем значение коэффициента  $k_2$  из следующих соображений:

$$\pi/2 - \operatorname{arctg}(k_2\delta_2) < \zeta \Rightarrow k_2^* = k_2 > \operatorname{ctg}\zeta / \delta_2 = \operatorname{ctg}\zeta / (k_1^*\delta_1), \quad (4.3.35)$$

где  $\zeta$  – малая положительная величина.

Для производной второго слагаемого  $V_2 = \frac{1}{2}e_2^T e_2$  квадратичной формы (4.3.23) с учетом (4.3.16), (4.3.33)–(4.3.35) вне окрестности  $\|e_2\| \leq \delta_2$  имеем:

$$\dot{V}_2 = e_2^T \dot{e}_2 = e_2^T (\varphi(\cdot) + e_3 - M \operatorname{arctg}(k_2^* e_2)) \leq \|e_2\| (\bar{F} + \|e_3\| - M(\pi/2 - \zeta)) < 0$$

при  $\bar{M} > 2\bar{F}/(\pi - 2\zeta)$ ,  $\tilde{M} > 2\|e_3\|/(\pi - 2\zeta)$ ,  $M = \bar{M} + \tilde{M} \leq M_{\max}(U_1)$ . Данные неравенства являются оценками для выбора коэффициентов усиления в законе управления (4.3.33). Информационное обеспечение алгоритма (4.3.33): измерение  $q_1$  и редуцированный наблюдатель состояния на скользящих режимах размерности  $m$  (4.3.20) и  $m$  фильтров типа (2.3.12).

Во всех рассмотренных законах управления (4.3.13), (4.3.19), (4.3.27), (4.3.28), (4.3.29), (4.3.33) мы предполагали, что вид функциональной зависимости  $B_1(q_1)$  и обобщенные координаты  $q_1$  известны, что позволило (в предположении  $\det B_1(q_1) \neq 0 \quad \forall q_1 \in \bar{Q}_1$ ) диагонализировать замкнутую систему и компенсировать перекрестные связи. В тоже время понятно, что на практике потребуется в реальном времени вычислять матрицу  $B_1(q_1)$  и обратную к ней. Предпримем попытки избежать данных вычислений.

#### 4.4. Базовые алгоритмы управления в условиях неопределенности входных каналов управления

Разработанные в данном разделе алгоритмы синтеза обратной связи функционируют в условиях неопределенности, в том числе входных каналов управления. Для реализации этих законов достаточно исследовать в режиме off-line диапазоны изменения элементов матрицы  $B_1(q_1) = (b_{ij}) \quad (i, j = \overline{1, m})$ . Для элементов, у которых в рассматриваемой области  $\forall q_1 \in \bar{Q}_1$  знак неоднократно меняется с плюса на минус и наоборот, требуется указать только верхнюю границу  $\bar{b}_{ij} = \operatorname{const} > 0$ :

$$|b_{ij}(q_1)| \leq \bar{b}_{ij}, \text{ sign} b_{ij}(q_1) = \text{var}. \quad (4.4.1)$$

Дополнительно нижняя граница  $\bar{b}_{ij} = \text{const} > 0$  указывается только для тех элементов, у которых знак не меняется:

$$\bar{b}_{ij} \leq |b_{ij}| \leq \bar{b}_{ij}, \text{ sign} b_{ij}(q_1) = \text{const} \quad \forall q_1 \in \bar{Q}_1. \quad (4.4.2)$$

Для более тонкой настройки регулятора представим систему (4.3.7) в виде

$$\dot{e}_2 = -K_1^2 e_1 + K_1 e_2 + \varphi(\cdot) + B_1(q_1) \nu_1, \quad (4.4.3)$$

где компоненты вектор-функции  $\varphi(\cdot) = A(q_1, q_2) + B_2(q_1) \nu_2 + B(q_1) \eta - y_{3d}$ ,  $\varphi(\cdot) \in R^m$ , трактуются как внешние неконтролируемые ограниченные возмущения (4.3.16), не подлежащие компенсации, в частности, класс допустимых возмущений  $\eta(t)$  может быть расширен за счет негладких функций времени.

Особенность разработанных в данном разделе алгоритмов управления (в отличие от (4.3.8)) состоит в отсутствии в законе управления матрицы  $B_1(q_1)$  (или обратной к ней) и компенсирующей составляющей, т.е. имеющиеся неопределенности  $\varphi(\cdot)$  системы (4.4.3) подлежат «подавлению». Такой подход, с одной стороны, может потребовать значительных ресурсов управления  $\nu_1$ , а с другой – позволит свести к минимуму объем априорной информации об объекте управления и среде его функционирования, а также количество вычислений, выполняемых в реальном времени. Понятно, что «платой» за упрощение информационного обеспечения и закона управления будет решение задачи стабилизации в системе (4.4.3) с заданной точностью (4.3.5) и, следовательно, обеспечение сходимости выходных переменных в заданную окрестность программных траекторий (4.3.26).

#### 4.4.1. Случай матрицы с преобладающей диагональю

Вначале рассмотрим частный случай, когда  $B_1(q_1)$  является матрицей с преобладающей диагональю в рассматриваемой области, т.е.

$$\bar{b}_{ii}(q_1) > \sum_{j=1, j \neq i}^m \bar{b}_{ij}(q_1), b_{ii} \neq 0 \quad (i = \overline{1, m}) \quad \forall q_1 \in \bar{Q}_1. \quad (4.4.4)$$

*Замечание 4.1.* В общем случае неравенства типа (4.4.4) могут выполняться для любого (не обязательно диагонального) элемента строки, достаточно, чтобы преобладающие элементы всех строк принадлежали различным столбцам матрицы.

С учетом (4.4.4) для системы (4.4.3) введем следующий нелинейный закон управления без компенсирующей составляющей:

$$v_1 = -MS(b_{ii})\text{arctg}(K_2 e_2), \quad (4.4.5)$$

где  $M = \text{const} > 0$ ,  $\text{arctg}(K_2 e_2) = \text{col}(\text{arctg}(k_{21}e_{21}), \dots, \text{arctg}(k_{2m}e_{2m}))$ ,  $k_{2i} > 0$ ,  $S(b_{ii}) = \text{diag}\{\text{sign} b_{ii}\}$ . Как видим, дополнительно потребуется информация о знаках ненулевых преобладающих (здесь диагональных) элементов матрицы  $B_1(q_1)$ , определение которых существенно проще, чем вычисление значений.

Использование в законе управления (4.4.5) нелинейной ограниченной функции арктангенса позволяет учесть имеющиеся ограничения на ресурсы управления (4.3.9) уже на стадии синтеза:

$$M \leq \frac{2}{\pi} U_1, \quad Mk_{2i} |\dot{e}_{2i}| / [1 + (k_{2i}e_{2i})^2] \leq \dot{U}_{1i} \Rightarrow k_{2i} \leq \bar{k}_{2i}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (4.4.6)$$

*Замечание 4.2.* Наличие в законе управления (4.4.5) матрицы знаков диагональных элементов  $S(b_{ii})$  не является поводом считать данное управление разрывным в общепринятом смысле, так как предполагается, что  $\text{sign} b_{ii}(q_1) = \text{const}$  ( $i = \overline{1, m}$ )  $\forall q_1 \in \overline{Q}_1$ . Исследования показали (см. раздел 4.6), что в конкретных приложениях знаки преобладающих (здесь – диагональных) элементов  $b_{ii}(q_1)$  могут быть фиксированными во всей рассматриваемой области изменения переменных  $\forall q_1 \in Q_1$ . Если  $b_{ii} > 0 \quad \forall q_1 \in Q_1$ , то управляющая координата формируется в виде  $v_{1i} = -M\text{arctg}(k_{2i}e_{2i})$ ; если  $b_{ii} < 0 \quad \forall q_1 \in Q_1$ , то  $v_{1i} = M\text{arctg}(k_{2i}e_{2i})$ . В противном случае можно указать аналитически области знакопостоянства преобладающих элементов, границы которых обусловлены особыми точками  $q_1^*$ , и разделить программную траекторию на соответствующие локальные участки.

Введем обозначение невязки между истинными и выбранными управляющими моментами

$$e_3 = v_1 + MS(b_{ii})\text{arctg}(K_2 e_2), \quad e_3 \in R^m. \quad (4.4.7)$$

Как уже было указано, при данном подходе реализуется декомпозиция верхнего уровня и возможность выбора различных комплектных ИУ, в системе управления которыми независимо решается задача слежения за заданными значениями управляющих моментов (4.4.5), которая сводится к задаче стабилизации невязок (4.4.7) либо в асимптотике (4.3.11), либо с заданной точностью (4.3.12).

Замкнутая система (4.4.3), (4.4.5) с учетом (4.4.7) примет вид

$$\dot{e}_2 = -K_1^2 e_1 + K_1 e_2 + \varphi(\cdot) + B_1(q_1) e_3 - B_1(q_1) MS(b_{ii}) \text{arctg}(K_2 e_2). \quad (4.4.8)$$

С помощью второго метода Ляпунова покажем, что существуют такие положительные значения коэффициентов обратной связи  $M$ ,  $k_{1i}$ ,  $k_{2i}$  ( $i = \overline{1, m}$ ), при которых в замкнутой системе (4.3.3), (4.4.3)–(4.4.5) соотношения (4.3.26) выполняются покомпонентно, т.е.

$$|e_{3i}| \leq \delta_{3i} (e_{3i} \rightarrow 0) \Rightarrow |e_{2i}| \leq \delta_{2i} \Rightarrow |e_{1i}| \leq \delta_{1i}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (4.4.9)$$

При покомпонентном анализе производных первого слагаемого квадратичной формы (4.3.23) при фиксированных значениях  $k_{1i} = k_{1i}^*$  неравенство (4.3.24) принимает вид

$$|e_{2i}| \leq k_{1i}^* \delta_{1i} = \delta_{2i} = \text{const}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (4.4.10)$$

Зафиксируем значения коэффициентов  $k_{2i}$  на основе неравенств типа (4.3.35), которые справедливы вне окрестности (4.4.10):

$$\pi/2 - \text{arctg}(k_{2i} \delta_{2i}) < \zeta_i \Rightarrow k_{2i} > \text{ctg} \zeta_i / (k_{1i}^* \delta_{1i}), \quad k_{2i} = k_{2i}^* \leq \bar{k}_{2i}, \quad (4.4.11)$$

где  $\zeta_i$  – малые положительные параметры,  $\zeta_i = \pi/2 - \text{arctg}(k_{2i} \delta_{2i}) > 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

На рис. 4.3 уравнение касательной имеет вид  $y_{кас} = k_{2i} e_{2i}$ , уравнение секущей  $y_{сек} = ((\pi - 2\zeta_i)/2\delta_{2i}) e_{2i}$  получено из уравнения прямой, проходящей через две точки  $(-\delta_{2i}; -\frac{\pi}{2} + \zeta_i)$ ,  $(\delta_{2i}; \frac{\pi}{2} - \zeta_i)$ .

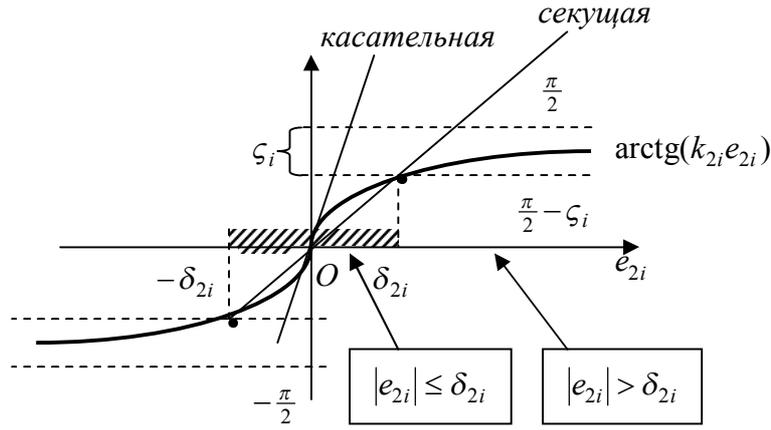


Рис. 4.3.

С учетом (4.4.11) для  $i$ -й компоненты вектора управляющих моментов (4.4.5) справедливы следующие оценки:

$$\bar{v}_{1i} < |v_{1i}| < \bar{\bar{v}}_{1i}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4.4.12)$$

где  $\bar{v}_{1i} = M(\frac{\pi}{2} - \zeta_i)$ ,  $\bar{\bar{v}}_{1i} = M\frac{\pi}{2}$  вне окрестности (4.4.10);

$\bar{v} = [(\pi - 2\zeta_i)/2\delta_{2i}]|e_{2i}|$ ,  $\bar{\bar{v}}_{1i} = Mk_{2i}|e_{2i}|$  в окрестности (4.4.10).

Для производных компонент второго слагаемого  $V_2 = V_{21} + \dots + V_{2m}$  квадратичной формы (4.3.23), составленных в силу (4.4.8), вне окрестности (4.4.10) с учетом (4.4.1), (4.4.2), (4.4.12) справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2i} &= e_{2i}\dot{e}_{2i} = e_{2i}[-k_{1i}^2e_{1i} + k_{1i}e_{2i} + \varphi_i + b_i e_3 - \\ &- \sum_{j=1, j \neq i}^m b_{ij} M \text{sign} b_{jj} \arctg(k_{2j}e_{2j}) - b_{ii} M \text{sign} b_{ii} \arctg(k_{2i}e_{2i})] \leq \\ &\leq |e_{2i}| [k_{1i}^{*2}|e_{1i}| + k_{1i}^*|e_{2i}| + F_i + \sum_{j=1}^m \bar{\bar{b}}_{ij}|e_{3i}| + \sum_{j=1, j \neq i}^m \bar{\bar{b}}_{ij}\bar{\bar{v}}_j - \bar{b}_{ii}\bar{v}_i] \leq \\ &\leq |e_{2i}| [k_{1i}^{*2}\delta_{1i} + k_{1i}^{2*}\delta_{1i} + F_i + \bar{\bar{b}}_{ii}\|e_3\| - M(\bar{b}_{ii}(\frac{\pi}{2} - \zeta_i) - \sum_{j=1, j \neq i}^m \bar{\bar{b}}_{ij}\frac{\pi}{2})], \quad i = \overline{1, m}, \end{aligned}$$

где  $b_{i(1 \times m)} = (b_{i1} \ b_{i2} \ \dots \ b_{im})$  –  $i$ -я ( $i = \overline{1, m}$ ) строка матрицы  $B_1$ ,  $\|e_3\| = \sum_{i=1}^m |e_{3i}|$ .

Вне окрестности  $|e_{2i}| \leq \delta_{2i}$  неравенство  $\dot{V}_{2i} < 0$  выполняется, если

$$\frac{2(2k_{1i}^{*2}\delta_{1i} + F_i + \bar{b}_{ii}\|e_3\|)}{\pi(\bar{b}_{ii}(1 - \frac{2\zeta_i}{\pi}) - \sum_{j=1, j \neq i}^m \bar{b}_{ij})} = M_i < M, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4.4.13)$$

следовательно, при  $M > \max\{M_i\}$  все координаты  $e_{2i}$  сходятся в заданные окрестности (4.4.10), логическая цепочка (4.4.9) обеспечена. Как видим, дополнительным фактором для выбора параметров  $\zeta_i$  является условие положительности знаменателей неравенств (4.4.13), т.е.  $\zeta_i < \frac{\pi}{2}(\bar{b}_{ii} - \sum_{j=1, j \neq i}^m \bar{b}_{ij}) / \bar{b}_{ii}$ .

Если выбранное на основе нижней оценки значение  $M = M^*$  одновременно удовлетворяет (4.4.6), то поставленная задача считается выполненной. В противном случае  $\max\{M_i\} > \frac{2}{\pi}U_1$  следует повторить процедуру настройки (4.4.10)–(4.4.13) при новых значениях  $k_{1i}^{**} < k_{1i}^*$ . Данная процедура имеет смысл, если поставленная задача слежения имеет принципиальное решение с учетом верхних ограничений на ресурсы управления (4.4.6) и изначально  $\bar{k}_{1i} < k_{1i}^*$ , где  $\bar{k}_{1i}$  ( $i = \overline{1, m}$ ) – заданные значения.

Условия разрешимости задачи с учетом имеющихся ограничений следуют из предельного анализа неравенств (4.4.13). Введем обозначения

$$\bar{k}_1^2 \bar{\delta}_1 = \max\{\bar{k}_{1i}^2 \delta_{1i}\}, \quad \bar{b}_i = \max\{\bar{b}_{ii}\}, \quad \bar{B} = \min\{\bar{b}_{ii} - \sum_{j=1, j \neq i}^m \bar{b}_{ij}\}, \quad i = \overline{1, m};$$

$$M = \frac{2}{\pi}(M_1 + M_2 + M_3), \quad \text{где } M_1 > 2\bar{k}_1^2 \bar{\delta}_1 / \bar{B}, \quad M_2 > \bar{F} / \bar{B}, \quad M_3 > \bar{b}_i \|e_3\| / \bar{B}.$$

Первое из данных неравенств является нижней оценкой для выбора  $M_1 = M_1^*$ , обеспечивающего сходимость выходных переменных с заданными темпами в заданную окрестность программных траекторий (4.1.3) при имеющихся неопределенностях, для подавления которых из второго неравенства определяем  $M_2 = M_2^*$ . Если ограничения на темпы сходимости отсутствуют, то в предельной ситуации можно полагать значение  $M_1$  близким к нулю. Из третьего неравенства при фиксированном значении  $M_3 = M_3^*$  определяется точность  $\|e_3\| \leq M_3^* \bar{B} / \bar{b}_i = \delta_3$ , которую требуется обеспечить на этапе

синтеза ИУ ( $M_3^* = 0$ , если в системе управления ИУ обеспечивается (4.3.11)).

Таким образом, предельные условия разрешимости задачи слежения с учетом имеющихся ограничений (4.4.6) имеют вид  $(2\bar{k}_1^2\bar{\delta}_1 + \bar{F})/\bar{B} < U_1$  – при наличии ограничений на темпы сходимости;  $\bar{F}/\bar{B} < U_1$  – при их отсутствии.

*Замечание 4.3.* Если указанные условия не выполняются, то требуется:

- 1) либо увеличить ресурсы управления (если это возможно);
- 2) либо при многовариантности допустимых расщеплений вектора  $q_1 = \text{col}(q_1^1, q_1^2)$  подобрать подходящее расщепление вектора  $v = \text{col}(v_1, v_2)$ ;
- 3) либо более детально изучить составляющие оператора объекта управления (4.4.3) на предмет собственной устойчивости, а также природу внешних возмущений вплоть до построения модели возмущений с целью понизить верхнюю оценку неопределенностей, подлежащих подавлению.

#### 4.4.2. Общий случай

Для общего случая матрицы  $B_1(q_1)$ , когда предположение (4.4.4) не выполняется, используем идеологию метода иерархии управлений, разработанного для систем с разрывными управлениями [57] и продемонстрированного в разделе 2.2 ((2.2.32)–(2.2.36)). Для рассматриваемой допредельной реализации (4.3.29) разрывных управлений ниже разработана пошаговая процедура выбора коэффициентов обратной связи  $M = \text{diag}\{m_i\}$ ,  $m_i = \text{const} > 0$ ,  $k_{2i} > 0$ ,  $i = \overline{1, m}$  на основе неравенств, которая позволяет искусственно получить в системе (4.4.3) матрицу с преобладающей диагональю (в общем случае, с преобладающими элементами из разных столбцов) перед управлением, для  $i$ -ой компоненты которого вне окрестности (4.4.10) справедливы оценки (4.4.12), где  $\bar{v}_{1i} = m_i(\frac{\pi}{2} - \zeta_i)$ ,  $\bar{v}_{2i} = m_i \frac{\pi}{2}$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

Для простоты изложения установим иерархию компонент вектора  $e_2$ , которая совпадает с их порядковыми номерами:  $|e_{21}| \leq \delta_{21}, \dots, |e_{2m}| \leq \delta_{2m}$ . Данная последовательность означает, что неравенство  $|e_{2i}| \leq \delta_{2i}$  будет обеспечено

лишь после того, как выполняются соотношения  $|e_{21}| \leq \delta_{21}, \dots, |e_{2,i-1}| \leq \delta_{2,i-1}$ .

Суть нижеследующей процедуры заключается в последовательных невырожденных преобразованиях, позволяющих в пределе рассматривать уравнения статики и получить верхнее треугольное представление матрицы  $B_1(q_1)$ .

*Шаг 1.* В первом уравнении (4.4.3) выберем управляющую координату  $v_{11} = -m_1 \text{sign} b_{11} \arctg(k_{21} e_{21})$ , где  $b_{11}(q_1) \neq 0 \Rightarrow \text{sign} b_{11}(q_1) = \text{const} \quad \forall q_1 \in \bar{Q}_1$ .

*Замечание 4.4.* В качестве управляющей не обязательно выбирается именно та координата вектора  $v_1$ , номер которой совпадает с номером управляемой координаты вектора  $e_2$ . В общем случае, это может быть любая,  $j$ -я координата вектора управления, если условие  $\text{sign} b_{1j}(q_1) = \text{const} \quad \forall q_1 \in \bar{Q}_1$  выполняется. В силу сделанных предположений  $\det B(q_1) \neq 0 \quad \forall q_1 \in \bar{Q}_1$  такая координата обязательно существует.

Первое слагаемое  $V_1$  квадратичной формы (4.3.23) исследуется указанным выше образом покомпонентно, результатом являются соотношения (4.4.10). В данной процедуре последовательно рассматриваются компоненты второго слагаемого  $V_2$  квадратичной формы (4.3.23).

*Процедура получения верхнего треугольно вида матрицы  $B(q_1)$*

*Шаг 1.* Для производной  $\dot{V}_{21} = \frac{1}{2}(e_{21})^2$  вне окрестности  $|e_{21}| \leq \delta_{21}$  справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{21} = e_{21} \dot{e}_{21} = e_{21} (-k_{11}^2 e_{11} + k_{11} e_{21} + b_1 e_3 + \varphi_1 + \sum_{j=2}^m b_{1j} v_{1j} - \\ - b_{11} m_1 \text{sign} b_{11} \arctg(k_{21} e_{21})) \leq |e_{21}| (2k_{11}^{*2} \delta_{11} + \bar{b}_1 \|e_3\| + F_1 + \sum_{j=2}^m \bar{b}_{1j} \bar{v}_{1j} - \bar{b}_{11} m_1 (\frac{\pi}{2} - \varsigma_1)), \end{aligned}$$

где  $\bar{b}_1 = \max\{b_{1j}\}$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Неравенство  $\dot{V}_{21} < 0$  справедливо, если

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 = -K_1^2 e_1 + K_1 e_2 + \varphi(\cdot) + B_1(q_1) v_1, \\ (2k_{11}^{*2} \delta_{11} + \bar{b}_1 \|e_3\| + F_1 + \sum_{j=2}^m \bar{b}_{1j} \bar{v}_{1j}) / (\bar{b}_{11} (\frac{\pi}{2} - \varsigma_1)) < m_1 \leq \frac{2}{\pi} U_{11}. \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

Для регуляризации задачи введем новое управление  $\tilde{v}_{11}$  и рассмотрим допредельную реализацию метода эквивалентного управления [57]. В асимптотике при  $k_{21} \rightarrow +\infty$  выполняются соотношения (4.3.32) [41],  $\dot{e}_{21} \rightarrow 0$  и  $\tilde{v}_{11} \rightarrow v_{11\text{eq}}$ . Из уравнения статики  $\dot{e}_{21} = -k_{11}^2 e_{11} + k_{11} e_{21} + b_1 e_3 + \varphi_1 + \sum_{j=2}^m b_{1j} v_{1j} + b_{11} \tilde{v}_{11} = 0$ , которое выполняется с точностью до бесконечно малой  $\alpha_1(1/k_{21})$ , найдем  $\tilde{v}_{11} = -(-k_{11}^2 e_{11} + k_{11} e_{21} + b_1 e_3 + \varphi_1 + \sum_{j=2}^m b_{1j} v_{1j})/b_{11}$  и подставим его в остальные  $(2, 3, \dots, m)$  уравнения системы (4.4.3) вместо  $v_{11}$ :

$$\dot{e}_{2i} = -k_{1i}^2 e_{1i} + k_{1i} e_{2i} - \beta_i^1 (-k_{11}^2 e_{11} + k_{11} e_{21}) + b_i^1 e_3 + \varphi_i^1 + \sum_{j=2}^m b_{ij}^1 v_{1j}, \quad (4.4.15)$$

где  $i = \overline{2, m}$ ,  $\beta_i^1 = b_{i1}/b_{11}$ ,  $b_{i(1 \times m)}^1 = b_i - \beta_i^1 b_1 = (0, b_{i2}^1, b_{i3}^1, \dots, b_{im}^1)$ ,  $\varphi_i^1 = \varphi_i - \beta_i^1 \varphi_1$ ,  $b_{ij}^1 = b_{ij} - \beta_i^1 b_{1j}$ .

*Шаг 2.* Во втором уравнении системы (4.4.15) выберем управляющую координату  $v_{12} = -m_2 \text{sign} b_{22}^1 \arctg(k_{22} e_{22})$  по признаку  $b_{22}^1(q_1) \neq 0 \Rightarrow \text{sign} b_{22}^1(q_1) = \text{const}$  (см. замечание 4.4). Для производной  $V_{22} = \frac{1}{2}(e_{22})^2$  вне окрестности  $|e_{22}| \leq \delta_{22}$  справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{22} &= e_{22} \dot{e}_{22} = e_{22} (-k_{22}^2 e_{12} + k_{22} e_{22} - \beta_2^1 (-k_{11}^2 e_{11} + k_{11} e_{21}) + b_2^1 e_3 + \\ &+ \varphi_2^1 + \sum_{j=3}^m b_{2j}^1 v_{1j} - b_{22}^1 m_2 \text{sign} b_{22}^1 \arctg(k_{21} e_{21})) \leq \\ &\leq |e_{22}| (2(k_{22}^{*2} \delta_{12} + \bar{\beta}_2^1 k_{11}^{*2} \delta_{11}) + \bar{b}_2^1 \|e_3^1\| + F_2^1 + \sum_{j=3}^m \bar{b}_{2j}^1 \bar{v}_{1j} - \bar{b}_{22}^1 m_2 (\frac{\pi}{2} - \zeta_2)), \end{aligned}$$

где  $\beta_2^1 = b_{21}/b_{11}$ ,  $|\beta_2^1| \leq \bar{\beta}_2^1$ ,  $\bar{b}_2^1 = \max\{|b_{2j} - \beta_2^1 b_{1j}|\}$ ,  $j = \overline{2, m}$ ,  $\|e_3^1\| = \sum_{i=2}^m |e_{3i}|$ ,  $|\varphi_2^1| = |\varphi_2 - \beta_2^1 \varphi_1| \leq F_2^1$ ,  $|b_{2j}^1| = |b_{2j} - \beta_2^1 b_{1j}| \leq \bar{b}_{2j}^1$ ,  $j = \overline{3, m}$ ,  $0 < \bar{b}_{22}^1 \leq |b_{22}^1| = |b_{22} - \beta_2^1 b_{12}|$ . Неравенство  $\dot{V}_{22} < 0$  справедливо вне окрестности  $|e_{22}| \leq \delta_{22}$  при выполнении условия

$$(2(k_{22}^{*2}\delta_{12} + \bar{\beta}_2^1 k_{11}^{*2}\delta_{11}) + \bar{b}_2^1 \|e_3^1\| + F_2^1 + \sum_{j=3}^m \bar{b}_{2j}^1 \bar{v}_{1j}) / (\bar{b}_{22}^1 (\frac{\pi}{2} - \zeta_2)) < \quad (4.4.16)$$

$$< m_2 \leq \frac{2}{\pi} U_{12}.$$

*Замечание 4.5.* Можно упростить процедуру оценивания составляющих данного выражения, оперируя только границами диапазонов изменения параметров (4.3.16), (4.4.1), (4.4.2) например:  $\bar{\beta}_2^1 = \bar{b}_{21}^1 / \bar{b}_{11}^1$ ,  $F_2^1 = F_2 + \bar{\beta}_2^1 F_1$ ,  $\bar{b}_{2j}^1 = \bar{b}_{2j} + \bar{\beta}_2^1 \bar{b}_{1j}$ ,  $\bar{b}_2^1 = \max\{\bar{b}_{2j}^1\}$ ,  $\bar{b}_{22}^1 = \bar{b}_{22} - \bar{\beta}_2^1 \bar{b}_{12} > 0$ . Понятно, что «платой» за упрощение вычислений будут заведомо завышенные по сравнению с (4.4.16) нижние оценки для настройки коэффициентов обратной связи.

Для регуляризации задачи введем новое управление  $\tilde{v}_{22}$ . В асимптотике при  $k_{22} \rightarrow +\infty$  выполняются соотношения (4.3.32),  $\dot{e}_{22} \rightarrow 0$  и  $\tilde{v}_{22} \rightarrow v_{22\text{eq}}$ .

Из уравнения статики  $\dot{e}_{22} = -k_{22}^2 e_{12} + k_{22} e_{22} - \beta_2^1 (-k_{11}^2 e_{11} + k_{11} e_{21}) + b_2^1 e_3 + \varphi_2^1 + \sum_{j=3}^m b_{2j}^1 v_{1j} + b_{22}^1 \tilde{v}_{22} = 0$ , которое выполняется с точностью до бесконечно малой  $\alpha_1(1/k_{22})$ , найдем  $\tilde{v}_{22} = -(-k_{12}^2 e_{12} + k_{12} e_{22} - \beta_2^1 (-k_{11}^2 e_{11} + k_{11} e_{21}) + b_2^1 e_3 + \varphi_2^1 + \sum_{j=3}^m b_{2j}^1 v_{1j}) / b_{22}^1$  и подставим его в остальные (3,4,...,m) уравнения

(4.4.15) вместо  $v_{22}$ , получим

$$\dot{e}_{2i} = -k_{1i}^2 e_{1i} + k_{1i} e_{2i} + \beta_{i2} + b_i^2 e_3 + \varphi_i^2 + \sum_{j=3}^m b_{ij}^2 v_{1j}, i = \overline{3, m}, \quad (4.4.17)$$

где  $\beta_{i2} = \beta_{i1} - \beta_i^2 (\varepsilon_2 + \beta_{21})$ ,  $\beta_{i1} = -\beta_i^1 \varepsilon_1$ ,  $\beta_{21} = -\beta_2^1 \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_j = -k_{1j}^2 e_{1j} + k_{1j} e_{2j}$ ,  $|\varepsilon_j| \leq 2k_{1j}^{*2} \delta_{1j}$ ,  $\beta_i^2 = b_{i2}^1 / b_{22}^1$ ,  $b_{i(1 \times m)}^2 = b_i^1 - \beta_i^2 b_2^1 = (0, 0, b_{i3}^2, b_{i4}^2, \dots, b_{im}^2)$ ,  $\varphi_i^2 = \varphi_i^1 - \beta_i^2 \varphi_2^1$ ,  $b_{ij}^2 = b_{ij}^1 - \beta_i^2 b_{2j}^1$ .

*Шаг 3.* В третьем уравнении (4.4.17) выбираем управляющую координату  $v_{13} = -m_3 \text{sign} b_{33}^2 \arctg(k_{23} e_{23})$  по признаку  $b_{33}^2(q_1) \neq 0 \Rightarrow \text{sign} b_{33}^2(q_1) = \text{const}$  и указанным образом осуществляем регуляризацию задачи, и т.д.

*Шаг  $\mu$ .* В результате последовательной подстановки в уравнения

(4.4.17) полученных указанным образом выражений  $\tilde{v}_{13}, \dots, \tilde{v}_{1, \mu-1}$  вместо  $v_{13}, \dots, v_{1, \mu-1}$ , последние  $(m - \mu + 1)$  уравнений системы (4.4.17) примут вид

$$\dot{e}_{2i} = -k_{1i}^2 e_{1i} + k_{1i} e_{2i} + \beta_{i, \mu-1} + b_i^{\mu-1} e_3 + \varphi_i^{\mu-1} + \sum_{j=\mu}^m b_{ij}^{\mu-1} v_{1j}, \quad i = \overline{\mu, m}, \quad (4.4.18)$$

где

$$\beta_{i, \mu-1} = \beta_{i, \mu-2} - \beta_i^{\mu-1} (\varepsilon_{\mu-1} + \beta_{\mu-1, \mu-2}), \quad (4.4.19)$$

$$\beta_i^{\mu-1} = b_{i, \mu-1}^{\mu-2} / b_{\mu-1, \mu-1}^{\mu-2}, \quad b_{i(1 \times m)}^{\mu-1} = b_i^{\mu-2} - \beta_i^{\mu-1} b_{\mu-1}^{\mu-2} = (0, \dots, 0, b_{i\mu}^2, b_{i, \mu+1}^2, \dots, b_{im}^2),$$

$$\varphi_i^{\mu-1} = \varphi_i^{\mu-2} - \beta_i^{\mu-1} \varphi_{\mu-1}^{\mu-2}, \quad b_{ij}^{\mu-1} = b_{ij}^{\mu-2} - \beta_i^{\mu-1} b_{\mu-1, j}^{\mu-2}.$$

Выберем в  $\mu$ -м уравнении системы (4.4.18) управляющую координату  $v_{1\mu} = -m_\mu \text{sign} b_{\mu\mu}^{\mu-1} \text{arctg}(k_{2\mu} e_{2\mu})$  по признаку  $b_{\mu\mu}^{\mu-1}(q_1) \neq 0 \Rightarrow \text{sign} b_{\mu\mu}^{\mu-1}(q_1) = \text{const}$  (см. замечание 4.4). Для производной  $V_{2\mu} = \frac{1}{2}(e_{2\mu})^2$  вне окрестности  $|e_{2\mu}| \leq \delta_{2\mu}$  справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2\mu} &= e_{2\mu} (-k_{1\mu}^2 e_{1\mu} + k_{1\mu} e_{2\mu} + \beta_{\mu, \mu-1} + b_\mu^{\mu-1} e_3 + \varphi_\mu^{\mu-1} + \sum_{j=\mu+1}^m b_{\mu j}^{\mu-1} v_{1j} - \\ &- b_{\mu\mu}^{\mu-1} m_\mu \text{sign} b_{\mu\mu}^{\mu-1} \text{arctg}(k_{2\mu} e_{2\mu})) \leq |e_{2\mu}| (2k_{1\mu}^{*2} \delta_{1\mu} + |\beta_{\mu, \mu-1}| + \\ &+ \bar{b}_\mu^{\mu-1} \|e_3^{\mu-1}\| + F_\mu^{\mu-1} + \sum_{j=\mu+1}^m \bar{b}_{\mu j}^{\mu-1} \bar{v}_{1j} - \bar{b}_{\mu\mu}^{\mu-1} m_\mu (\frac{\pi}{2} - \zeta_\mu)), \end{aligned}$$

где  $\beta_\mu^{\mu-1} = b_{\mu, \mu-1}^{\mu-2} / b_{\mu-1, \mu-1}^{\mu-2}$ ,  $b_{\mu(1 \times m)}^{\mu-1} = b_\mu^{\mu-2} - \beta_\mu^{\mu-1} b_{\mu-1}^{\mu-2}$ ,  $\|e_3^{\mu-1}\| = \sum_{i=\mu}^m |e_{3i}|$ ,

$$\bar{b}_\mu^{\mu-1} = \max \{ |b_{\mu j}^{\mu-2} - \beta_\mu^{\mu-1} b_{\mu-1, j}^{\mu-2}| \}, \quad |b_{\mu j}^{\mu-1}| = |b_{\mu j}^{\mu-2} - \beta_\mu^{\mu-1} b_{\mu-1, j}^{\mu-2}| \leq \bar{b}_{\mu j}^{\mu-1}, \quad j = \overline{\mu, m},$$

$$|\varphi_\mu^{\mu-1}| = |\varphi_\mu^{\mu-2} - \beta_\mu^{\mu-1} \varphi_{\mu-1}^{\mu-2}| \leq F_\mu^{\mu-1}, \quad 0 < \bar{b}_{\mu\mu}^{\mu-1} \leq |b_{\mu\mu}^{\mu-1}| = |b_{\mu\mu}^{\mu-2} - \beta_\mu^{\mu-1} b_{\mu-1, \mu}^{\mu-2}|, \quad |\beta_{\mu, \mu-1}| \leq$$

$$\leq 2 \sum_{j=1}^{\mu-1} k_{1j}^{*2} \delta_{1j} |\beta_{\mu j}^{\mu-1}| \quad (\text{см. замечание 4.5}). \text{ Коэффициенты } \beta_{\mu j}^{\mu-1} \text{ определяются из}$$

рекуррентных соотношений (4.4.19), в частности

$$\beta_{\mu 1}^{\mu-1} = -\beta_\mu^1 + \beta_\mu^2 \beta_2^1 - \beta_\mu^3 (-\beta_3^1 + \beta_\mu^2 \beta_2^1) + \dots;$$

$$\beta_{\mu 2}^{\mu-1} = -\beta_{\mu}^2 + \beta_{\mu}^3 \beta_3^2 - \beta_{\mu}^4 (-\beta_4^2 + \beta_{\mu}^2 \beta_4^3) + \dots; \dots;$$

$$\beta_{\mu, \mu-2}^{\mu-1} = -\beta_{\mu}^{\mu-2} + \beta_{\mu}^{\mu-1} \beta_{\mu-1}^{\mu-2}; \quad \beta_{\mu, \mu-1}^{\mu-1} = -\beta_{\mu}^{\mu-1}.$$

Неравенство  $\dot{V}_{2\mu} < 0$  справедливо вне окрестности  $|e_{2\mu}| \leq \delta_{2\mu}$ , если

$$(2k_{1\mu}^{*2} \delta_{1\mu} + 2 \sum_{j=1}^{\mu-1} k_{1j}^{*2} \delta_{1j} |\beta_{\mu j}^{\mu-1}| + \bar{b}_{\mu}^{\mu-1} \|e_3^{\mu-1}\| + F_{\mu}^{\mu-1} + \sum_{j=\mu+1}^m \bar{b}_{\mu j}^{\mu-1} \bar{v}_{1j}) / (\bar{b}_{\mu\mu}^{\mu-1} (\frac{\pi}{2} - \zeta_{\mu})) < m_{\mu} \leq \frac{2}{\pi} U_{1\mu}. \quad (4.4.20)$$

При  $k_{2\mu} \rightarrow +\infty$  выполняются соотношения (4.3.32) [29],  $\dot{e}_{2\mu} \rightarrow 0$  и  $\tilde{v}_{1\mu} \rightarrow v_{1\mu eq}$ . Из уравнения статики

$$\dot{e}_{2\mu} = -k_{1\mu}^2 e_{1\mu} + k_{1\mu} e_{2\mu} + \beta_{\mu, \mu-1} + b_{\mu}^{\mu-1} e_3 + \varphi_{\mu}^{\mu-1} + \sum_{j=\mu+1}^m b_{\mu j}^{\mu-1} v_{1j} + b_{\mu\mu}^{\mu-1} \tilde{v}_{1\mu} = 0,$$

которое выполняется с точностью до бесконечно малой  $\alpha_{\mu}(1/k_{2\mu})$ , найдем

$$\tilde{v}_{1\mu} = -(-k_{1\mu}^2 e_{1\mu} + k_{1\mu} e_{2\mu} + \beta_{\mu, \mu-1} + b_{\mu}^{\mu-1} e_3 + \varphi_{\mu}^{\mu-1} + \sum_{j=\mu+1}^m b_{\mu j}^{\mu-1} v_{1j}) / b_{\mu\mu}^{\mu-1} \text{ и подста-}$$

вим его в остальные  $(\mu+1, \mu+2, \dots, m)$  уравнения системы (4.4.18) вместо  $v_{1\mu}$ :

$$\dot{e}_{2i} = -k_{1i}^2 e_{1i} + k_{1i} e_{2i} + \beta_{i\mu} + b_i^{\mu} e_3 + \varphi_i^{\mu} + \sum_{j=\mu+1}^m b_{ij}^{\mu} v_{1j}, \quad i = \overline{\mu+1, m}, \quad (4.4.21)$$

где  $\beta_{i\mu} = \beta_{i, \mu-1} - \beta_i^{\mu} (\varepsilon_{\mu} + \beta_{\mu, \mu-1})$ ,  $\beta_i^{\mu} = b_{i\mu}^{\mu-1} / b_{\mu\mu}^{\mu-1}$ ,  $b_{ij}^{\mu} = b_{ij}^{\mu-1} - \beta_i^{\mu} b_{\mu j}^{\mu-1}$ ,  $b_{i(1 \times m)}^{\mu} = b_i^{\mu-1} - \beta_i^{\mu} b_{\mu}^{\mu-1} = (0, \dots, 0, b_{i, \mu+1}^2, b_{i, \mu+2}^2, \dots, b_{im}^2)$ ,  $\varphi_i^{\mu} = \varphi_i^{\mu-1} - \beta_i^{\mu} \varphi_{\mu}^{\mu-1}$ .

*Шаг  $(\mu+1)$ .* В  $(\mu+1)$ -м уравнении (4.4.21) выбираем управляющую координату  $v_{1, \mu+1} = -m_{\mu+1} \text{sign} b_{\mu+1, \mu+1}^{\mu} \text{arctg}(k_{2, \mu+1} e_{2, \mu+1})$  по признаку  $b_{\mu+1, \mu+1}^{\mu}(q_1) \neq 0 \Rightarrow \text{sign} b_{\mu+1, \mu+1}^{\mu}(q_1) = \text{const}$  (см. замечание 4.4), указанным образом осуществляем регуляризацию задачи, и т.д.

*Шаг  $m$ .* В результате указанных построений получим последнее уравнение (4.4.21) в виде

$$\dot{e}_{2m} = -k_{1m}^2 e_{1m} + k_{1m} e_{2m} + \beta_{m, m-1} + b_{mm}^{m-1} e_{3m} + \varphi_m^{m-1} + b_{mm}^{m-1} v_{1m}, \quad (4.4.22)$$

где  $\beta_{m,m-1} = \beta_{m,m-2} - \beta_m^{m-1}(\varepsilon_{m-1} + \beta_{m-1,m-2})$ ,  $\beta_m^{m-1} = b_{m,m-1}^{m-2} / b_{m-1,m-1}^{m-2}$ ,  
 $\varphi_m^{m-1} = \varphi_m^{m-2} - \beta_m^{m-1}\varphi_{m-1}^{m-2}$ ,  $b_{mm}^{m-1}(q_1) = b_{mm}^{m-2} - \beta_m^{m-1}b_{m-1,m}^{m-2} \neq 0 \Rightarrow \text{sign}b_{mm}^{m-1}(q_1) =$   
 $= \text{const}$ ,  $v_{1m} = -m_m \text{sign}b_{mm}^{m-1} \text{arctg}(k_{2m}e_{2m})$ .

Для производной  $V_{2m} = \frac{1}{2}(e_{2m})^2$ , составленной в силу (4.4.22), вне окрестности  $|e_{2m}| \leq \delta_{2m}$  справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2m} &= e_{2m}(-k_{1m}^2 e_{1m} + k_{1m} e_{2m} + \beta_{m,m-1} + b_{mm}^{m-1} e_{3m} + \varphi_m^{m-1} - \\ &- b_{mm}^{m-1} m_m \text{sign}b_{mm}^{m-1} \text{arctg}(k_{2m}e_{2m})) \leq |e_{2m}|(2k_{1m}^{*2} \delta_{1m} + 2 \sum_{j=1}^{m-1} k_{1j}^{*2} \delta_{1j} |\beta_{mj}^{m-1}| + \\ &+ \bar{b}_{mm}^{m-1} |e_{3m}| + F_m^{m-1} - \bar{b}_{mm}^{m-1} m_m (\frac{\pi}{2} - \zeta_m)). \end{aligned}$$

Неравенство  $\dot{V}_{2m} < 0$  справедливо вне окрестности  $|e_{2m}| \leq \delta_{2m}$ , если

$$\begin{aligned} (2k_{1m}^{*2} \delta_{1m} + 2 \sum_{j=1}^{m-1} k_{1j}^{*2} \delta_{1j} |\beta_{mj}^{m-1}| + \bar{b}_{mm}^{m-1} |e_{3m}| + F_m^{m-1}) / (\bar{b}_{mm}^{m-1} (\frac{\pi}{2} - \zeta_m)) < \\ < m_m \leq \frac{2}{\pi} U_{1m}. \end{aligned} \quad (4.4.23)$$

После получения нижних оценок для всех коэффициентов  $m_i$  последовательно выполняются обратные подстановки, а именно, выбранное из указанного диапазона (4.4.23) значение  $m_m^*$  подставляем в оценки предыдущих коэффициентов (4.4.20), потом из  $(m-1)$ -го неравенства определяем фиксированное значение  $m_{m-1}^*$  и т.д.:

$$\begin{aligned} (2k_{1\mu}^{*2} \delta_{1\mu} + 2 \sum_{j=1}^{\mu-1} k_{1j}^{*2} \delta_{1j} |\beta_{\mu j}^{\mu-1}| + \bar{b}_{\mu}^{\mu-1} \|e_3^{\mu-1}\| + F_{\mu}^{\mu-1} + \\ + \sum_{j=\mu+1}^m \bar{b}_{\mu j}^{\mu-1} m_j^* \frac{\pi}{2}) / (\bar{b}_{\mu\mu}^{\mu-1} (\frac{\pi}{2} - \zeta_{\mu})) < m_{\mu}^* \leq \frac{2}{\pi} U_{1\mu}, \mu = \overline{m-1, 1}. \end{aligned} \quad (4.4.24)$$

Если  $\forall m_i^* \leq \frac{2}{\pi} U_{1i}$ ,  $i = \overline{m, 1}$ , то поставленная задача выполнена.

Разработанную процедуру выбора коэффициентов обратной связи правомерно считать иерархической в асимптотике при  $k_{21} \gg k_{22} \gg \dots \gg$

$\gg k_{2m} \rightarrow +\infty$ . На практике будет реализована допредельная иерархия из-за наличия ограничений на коэффициенты  $k_{2i}$  (4.4.6), т.е.

$$k_{21} > k_{22} > \dots > k_{2m} < \infty, \quad 0 < k_{2i} \leq \bar{k}_{2i}. \quad (4.4.25)$$

Для учета и формализации имеющихся ограничений на производные управляющих воздействий можно использовать рекуррентные соотношения типа (4.4.19) следующим образом. Для выражений

$$\beta_{\mu, \mu-1} = \beta_{\mu, \mu-2} + \beta_{\mu}^{\mu-1} (\alpha_{\mu-1} - \beta_{\mu-1, \mu-2}), \quad \mu = \overline{2, m},$$

где  $\alpha_i = 1/k_{2i}^*$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $\beta_{i1} = \beta_i^1 \alpha_1$ ,  $\beta_{21} = \beta_2^1 \alpha_1$ , укажем верхние оценки

$$|\beta_{\mu, \mu-1}| \leq \sum_{j=1}^{\mu-1} \alpha_j |\beta_{\mu j}^{\mu-1}|, \quad \text{которые добавим в левую часть неравенств (4.4.23),}$$

(4.4.24), получим

$$(2k_{1\mu}^{*2} \delta_{1\mu} + 2 \sum_{j=1}^{\mu-1} k_{1j}^{*2} \delta_{1j} |\beta_{\mu j}^{\mu-1}| + \bar{b}_{\mu}^{\mu-1} \|e_3^{\mu-1}\| + F_{\mu}^{\mu-1} + \sum_{j=1}^{\mu-1} \alpha_j |\beta_{\mu j}^{\mu-1}| + \quad (4.4.26)$$

$$+ \sum_{j=\mu+1}^m \bar{b}_{\mu j}^{\mu-1} m_j^* \frac{\pi}{2}) / (\bar{b}_{\mu\mu}^{\mu-1} (\frac{\pi}{2} - \zeta_{\mu})) < m_{\mu}^* \leq \frac{2}{\pi} U_{1\mu}, \quad \mu = \overline{m-1, 1}.$$

Разработанный закон управления представим в общем виде

$$v_1 = -MS(b_{ii}^{i-1}(q_1)) \arctg(K_2 e_2), \quad (4.4.27)$$

где  $M = \text{diag}\{m_i\}$ ,  $m_i, k_{2i} = \text{const} > 0$ ,  $i = \overline{1, m}$  (4.4.25)–(4.4.26),

$$S(b_{ii}^{i-1}) = \text{diag}\{\text{sign} b_{ii}^{i-1}(q_1)\}, \quad \arctg(K_2 e_2) = \text{col}(\arctg(k_{21} e_{21}), \dots, \arctg(k_{2m} e_{2m})).$$

Заметим, что в конкретном приложении потребуется дополнительно исследовать имеющиеся ограничения (4.4.6) на предмет возможной априорной иерархии. Если соотношения (4.4.25) не реализуемы в силу специфических ограничений на производные управляющих воздействий, но при этом будет выявлена иерархия, отличная от принятой в данных построениях (4.4.25), то тогда в результате комплексного исследования матрицы  $B_1(q_1)$  может быть получен другой порядок выбора управляющих координат вектора  $v_1$ , порядковые номера которых могут и не совпадать с нумерацией управляемых координат вектора  $e_2$ . Существенно, что анализ разрешимости и ука-

занные построения проводятся на этапе исследования задач, что позволяет сократить объем вычислений, выполняемых в реальном времени.

#### 4.4.3. Информационное обеспечение базовых алгоритмов управления

Как было отмечено, для синтеза обратной связи по базовым законам (4.4.5), (4.4.27) требуется минимум информации о векторе состояния, операторе объекта управления и среде его функционирования, так как основной объем вычислений проводится на подготовительном этапе в терминах ограничений на фазовые координаты и имеющиеся неопределенности.

Для информационного обеспечения базовых законов управления (4.4.5), (4.4.27) достаточно *непосредственных измерений выходных переменных*  $y_1 \in R^m$ , которые подаются на вход редуцированного (размерности  $m$ ) наблюдателя состояния с разрывными корректирующими воздействиями (4.3.20), функционирующими в скользящем режиме, который дополняется  $m$  фильтрами типа (2.3.12). Данный наблюдатель позволит за теоретически конечное время получить оценки преобразованных переменных  $v_{1eq} = e_2 \approx \tau_1$ , тогда законы управления (4.4.5), (4.4.27) реализуются соответственно в виде

$$v_1 = -MS(b_{ii})\text{arctg}(K_2\tau_1), \quad (4.4.28)$$

$$v_1 = -MS(b_{ii}^{i-1})\text{arctg}(K_2\tau_1). \quad (4.4.29)$$

Покажем, что наблюдатель состояния с непрерывной коррекцией (аналогичный разработанному в разделе 2.3.2) при минимуме информации о параметрах системы (4.3.3), (4.4.3) позволит получить оценки преобразованных переменных  $e_1, e_2$  с заданной точностью.

Используя невырожденную замену переменных (2.3.22) и обратную к ней (2.3.23), в силу систем (4.3.3), (4.4.3) получим дифференциальные уравнения относительно новых координат  $s_1, s_2 \in R^m$  в виде

$$\dot{s}_1 = (L_2 - K_1)s_1 + s_2, \quad \dot{s}_2 = P_2s_1 + (K_1 - L_2)s_2 + \varphi(\cdot) + B_1(q_1)v_1, \quad (4.4.30)$$

где  $P_2 = L_2K_1 - L_2^2 - K_1^2 + K_1L_2$ .

Для системы (4.4.30) строится наблюдатель состояния с аналогичной

структурой, на который не подаются управляющие воздействия  $v$ , а именно

$$\dot{z}_1 = (L_2 - K_1)z_1 + z_2 + v_1, \quad \dot{z}_2 = P_2 z_1 + (K_1 - L_2)z_2 + v_2, \quad (4.4.31)$$

где  $z_{1,2} \in R^m$  – переменные состояния,  $v_{1,2} \in R^m$  – корректирующие воздействия наблюдателя, которые выбираются в классе непрерывных функций

$$v_1 = L_1 \varepsilon_1, \quad v_2 = P_2 \varepsilon_1. \quad (4.4.32)$$

С учетом (4.4.30)–(4.4.32) имеем систему относительно невязок  $\varepsilon_i = s_i - z_i$ :

$$\dot{\varepsilon}_1 = (L_2 - L_1 - K_1)\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \dot{\varepsilon}_2 = (K_1 - L_2)\varepsilon_2 + \varphi(\cdot) + B_1(q_1)v_1, \quad (4.4.33)$$

где  $K_1, L_1, L_2$  – диагональные матрицы с положительными постоянными коэффициентами размерности  $m \times m$ .

В предположении, что неизвестные составляющие последнего уравнения системы (4.4.33) ограничены, а именно

$$\left| \varphi_i + \sum_{j=1}^m b_{ij} v_{1j} \right| \leq F_i + \sum_{j=1}^m \bar{b}_{ij} U_{1j} = \Phi_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4.4.34)$$

получим иерархическую схему выбора конечных коэффициентов коррекции  $l_{1i}, l_{2i}$  ( $i = \overline{1, m}$ ), при которых в системе (4.4.33) задача стабилизации решается с заданной точностью:

$$|\varepsilon_{ji}| \leq \Delta_{ji}, \quad j = 1, 2, \quad i = \overline{1, m}. \quad (4.4.35)$$

С этой целью исследуем покомпонентно квадратичную форму вида

$$V = V_1 + V_2, \quad V_j = \sum_{i=1}^m V_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \varepsilon_{ji}^2, \quad j = 1, 2. \quad (4.4.36)$$

Для производных слагаемых (4.4.36) справедливы следующие оценки:

$$\dot{V}_{1i} = \varepsilon_{1i} \dot{\varepsilon}_{1i} = \varepsilon_{1i} ((l_{2i} - l_{1i} - k_{1i})\varepsilon_{1i} + \varepsilon_{2i}) \leq |\varepsilon_{1i}| (|(l_{2i} - l_{1i} - k_{1i})\varepsilon_{1i}| + |\varepsilon_{2i}|), \quad (4.4.37)$$

$$\dot{V}_{2i} = \varepsilon_{2i} \dot{\varepsilon}_{2i} = \varepsilon_{2i} ((k_{1i} - l_{2i})\varepsilon_{2i} + \varphi_i + \sum_{j=1}^m b_{ij} v_{1j}) \leq |\varepsilon_{2i}| (|(k_{1i} - l_{2i})\varepsilon_{2i}| + \Phi_i), \quad i = \overline{1, m}.$$

В системе (4.4.37) неравенства  $\dot{V}_{ji} < 0$  справедливы вне областей

$$|\varepsilon_{1i}| \leq \frac{|\varepsilon_{2i}|}{l_{1i} + k_{1i} - l_{2i}} < \Delta_{1i}, \quad |\varepsilon_{2i}| \leq \frac{\Phi_i}{l_{2i} - k_{1i}} < \Delta_{2i}, \quad i = \overline{1, n},$$

откуда следует, что задаче стабилизации системы (4.4.33) с заданной точно-

стью (4.4.35) удовлетворяют следующие, иерархические схемы выбора коэффициентов коррекции:

$$l_{2i} > \frac{\Phi_i}{\Delta_{2i}} + k_{1i}, \quad l_{1i} > \frac{\Phi_i}{(l_{2i} - k_{1i})\Delta_{1i}} + l_{2i} - k_{1i} > 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (4.4.38)$$

С учетом  $e_2 = s_2 + L_2 s_1$ , (4.4.35) законы управления (4.4.5), (4.4.27) будут реализованы соответственно в виде

$$v_1 = -MS(b_{ii}) \operatorname{arctg}(K_2 \tilde{e}_2), \quad (4.4.39)$$

$$v_1 = -MS(b_{ii}^{i-1}) \operatorname{arctg}(K_2 \tilde{e}_2). \quad (4.4.40)$$

Если на регулятор непосредственно подаются измеряемые сигналы  $e_1 = y_1 - y_{1d}$ , то

$$\tilde{e}_{2i} = e_{2i} \pm \Delta_{2i}, \quad i = \overline{1, m}; \quad (4.4.41)$$

если на регулятор подаются оценки  $z_1$  измерений  $e_1 = y_1 - y_{1d}$ , то

$$\tilde{e}_{2i} = e_{2i} \pm \Delta_{2i} \pm l_2 \Delta_{1i}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (4.4.42)$$

#### 4.5. Сравнительный анализ разработанных процедур синтеза

В данной главе на основе выходного отображения механической системы (4.2.1), (4.3.3), (4.3.6) разработаны различные типы процедур синтеза обратной связи в задаче слежения за заданными траекториями рабочего органа (схвата) (4.1.1), не требующие решения обратных задач кинематики и динамики в реальном времени. При данном подходе реализуется возможность выбора различных комплектных ИУ, в системе управления которыми независимо решается задача слежения за сформированными в механической подсистеме значениями управляющих моментов. Решение последней задачи рассматривалось в главах 2, 3 и здесь не приводится в силу аналогичности.

Существенно, что во всех процедурах наблюдатели состояния строятся на основе преобразованной системы, т.е. задачи наблюдения и собственно управления решаются относительно одних и тех же координат.

В данном разделе дана сравнительная характеристика разработанных процедур синтеза. Критериями сравнения являются: аналитическая слож-

ность, требования к объему априорной информации (или информационного обеспечения), точность отслеживания, реализуемость с учетом имеющихся ограничений.

В разделе 4.3 в предположении, что для измерения доступны угловые положения звеньев манипулятора  $q_1$  и параметры матрицы  $B_1(q_1)$  известны, предложены варианты выбора стабилизирующей обратной связи  $g(e_2)$  (линейной, разрывной, гладкой нелинейной) в законе управления (4.3.8) с компенсирующей и без компенсирующей составляющей.

В нижеследующих, простых в реализации процедурах 1.1–1.3 в законе управления компенсирующая составляющая отсутствует. Для информационной поддержки используется наблюдатель состояния на скользящих режимах (4.3.20) размерности  $m$  с  $m$  фильтрами типа (2.3.12). Класс допустимых возмущений и функциональных неопределенностей оператора объекта управления (4.3.6) расширен за счет негладких функций.

*Процедура 1.1:* линейный закон управления (4.3.19) с наблюдателем (4.3.20). Данная процедура обеспечивает подавление перекрестных связей и заданную точность слежения (4.3.26). Требует больших ресурсов управления, учет верхних ограничений на управляющие моменты (4.3.9) затруднителен на стадии синтеза.

*Процедура 1.2:* разрывное управление (4.3.27) с наблюдателем (4.3.20). Обеспечивает автономную экспоненциальную сходимость к заданным траекториям (4.3.15), требует больших ресурсов управления, возможны автоколебания в установившемся режиме, учет верхних ограничений на ресурсы управления не вызывает трудностей. Имеет ограниченное применение и реализуема в случаях, когда динамикой ИУ можно пренебречь.

*Процедура 1.3:* нелинейное гладкое управление (4.3.33) с наблюдателем (4.3.20). Данная процедура обеспечивает подавление перекрестных связей и заданную точность слежения (4.3.26). Учет верхних ограничений на управляющие моменты (4.3.9) не вызывает трудностей при синтезе.

В нижеследующих, более сложных в реализации процедурах 1.4–1.6

закон управления имеет компенсирующую составляющую. Для информационной поддержки используется наблюдатель состояния на скользящих режимах (4.3.17) размерности  $2m$  с  $2m$  фильтрами типа (2.3.12). Данные процедуры обеспечивают автономную экспоненциальную сходимость к заданным траекториям (4.3.15) с экономным потреблением ресурсов управления. В процедурах 2.1, 2.3 к параметрам оператора объекта управления (4.3.6) и внешним возмущениям  $\eta(t)$  предъявляется требование гладкости.

*Процедура 2.1:* комбинированное управление с линейной стабилизирующей обратной связью (4.3.13) и наблюдателем (4.3.17).

*Процедура 2.2:* комбинированное управление с разрывной стабилизирующей обратной связью (4.3.28) и наблюдателем (4.3.17). От процедуры 1.2 отличается более экономным потреблением ресурсов управления, высоким качеством установившихся режимов. Предполагает возможность аппаратурной реализации комбинированного управления в ИУ.

*Процедура 2.3:* комбинированное управление с нелинейной стабилизирующей обратной связью (4.3.29) и наблюдателем (4.3.17).

В табл. 4.1 дана сводная характеристика перечисленных процедур.

Принципиальное отличие процедур, разработанных в разделе 4.4, заключается в том, что для синтеза управляющих моментов достаточно непосредственных измерений координат схвата  $y_1(t)$ , не требуется вычислений в реальном времени матрицы  $B_1(q_1)$  и обратной к ней – достаточно определить диапазоны изменения ее компонент (4.4.1)–(4.4.2) в режиме off-line. «Платой» за сокращение количества измерений является решение задачи слежения с заданной точностью (4.3.26), так как формирование комбинированного управления не представляется возможным.

Таблица 4.1.

	Номер процедуры					
	1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	2.3
Сходимость к заданным траекториям	$\ e_1\  \leq \delta_1,$ $\ e_2\  \leq \delta_2$	$e_1 \rightarrow 0,$ $e_2 = 0$	$\ e_1\  \leq \delta_1,$ $\ e_2\  \leq \delta_2$	$e_1 \rightarrow 0,$ $e_2 \rightarrow 0$	$e_1 \rightarrow 0,$ $e_2 = 0$	$e_1 \rightarrow 0,$ $e_2 \rightarrow 0$
Требование гладкости $\varphi(\cdot)$	нет			да	нет	да
Размерность устройства наблюдения	$2m$			$4m$		
Проблемы с учетом верхних ограничений на ресурсы управления	есть	нет				
Потребление ресурсов управления	избыточное			экономное		
Требование к высокому быстродействию ИУ	нет	есть	нет	нет	есть	нет
Требование к аппаратурной реализации комбинированного управления в ИУ	нет				есть	нет

Учет верхних ограничений на управляющие моменты (4.3.9) на стадии синтеза не вызывает трудностей синтеза. Требования к гладкости оператора объекта управления и внешних возмущений не предъявляется. Также не предъявляется специальных требований к ИУ. В частном случае, когда  $B(q_1)$  имеет преобладающую диагональ (4.4.4), настройка регулятора (4.4.5) проста (4.4.10), (4.4.13), но требует большего объема подготовительных вычислений.

Для общего случая механических систем на основе выходного, более детализированного отображения механической системы (4.3.3), (4.4.3), разработан закон управления (4.4.27), основанный на допредельной реализации метода иерархии управлений. Информационное обеспечение осуществляется с помощью наблюдателей состояния с разрывной и непрерывной коррекцией.

*Процедура 3.1:* закон управления (4.4.27), наблюдатель состояния с разрывной коррекцией (4.3.20) размерности  $m$  с  $m$  фильтрами типа (2.3.12),

который позволяет за теоретически конечное время получить оценки преобразованных переменных  $e_2$ , используемых для синтеза обратной связи.

*Процедура 3.2:* закон управления (4.4.27), наблюдатель состояния с непрерывной коррекцией (4.4.31) размерности  $2m$ , который решает задачу оценивания преобразованных переменных  $e_2$  с заданной точностью (4.4.41), (4.4.42). Рекомендуется при наличии шумов в каналах измерения.

#### 4.6. Результаты моделирования

С целью экспериментальной проверки работоспособности синтезированных алгоритмов было проведено моделирование на ПК в среде MATLAB–SIMULINK для двухзвенного плоскостного манипулятора (см. рис. 1.4), динамическая модель которого описывается неизбыточной системой с двумя степенями свободы:  $q_1 = \text{col}(q_{11}, q_{12})$ ,  $y_1 = \text{col}(y_{11}, y_{12})$ ,  $n = m = 2$ . Составляющие оператора механической системы (2.1.1) имеют вид (1.17) и следующие параметры [50]:

$$I_1 = 0,4, I_2 = 0,25 \text{ [кг} \cdot \text{м}^2], m_1 = 4, m_2 = 3 \text{ [кг]}, \quad (4.6.1)$$

$$l_1 = 0,5, l_2 = 0,5 \text{ [м]}, l_{c1} = 0,3, l_{c2} = 0,25 \text{ [м]}.$$

Положение схвата определяется точкой с двумя координатами декартовой системы  $P(y_{11}, y_{12})$ , которые однозначно выражаются через угловые положения звеньев (1.18). Конкретному положению схвата в данном случае могут соответствовать две конфигурации  $(q_{11}, q_{12})$ ,  $(\tilde{q}_{11}, \tilde{q}_{12})$  (см. рис. 4.4). Для установления взаимнооднозначного соответствия между координатами схвата и угловыми положениями звеньев  $y_1 \leftrightarrow q_1$  и решения обратной задачи о положении требуется наличие информации о знаке  $q_{12}$ .

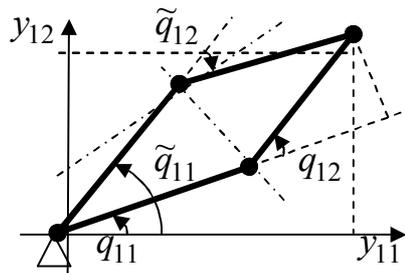


Рис. 4.4. Иллюстрация неоднозначного решения обратной задачи

Матрица Якоби  $J_{2 \times 2}$  (1.6) для преобразования  $h$  (1.26) имеет вид

$$J(q_1) = \begin{pmatrix} -l_1 \sin q_1 - l_2 \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{pmatrix},$$

где  $\det J = l_1 l_2 \sin q_{12} \neq 0 \quad \forall q_{12} \in \overline{Q}_1$ , т.е. замена скоростей  $q_2 \leftrightarrow y_2$  (1.5) диффеоморфна за исключением особых точек

$$q_{12}^* = \pm k\pi, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4.6.2)$$

что соответствует вытянутой/сложенной руке манипулятора (см. рис. 4.5).

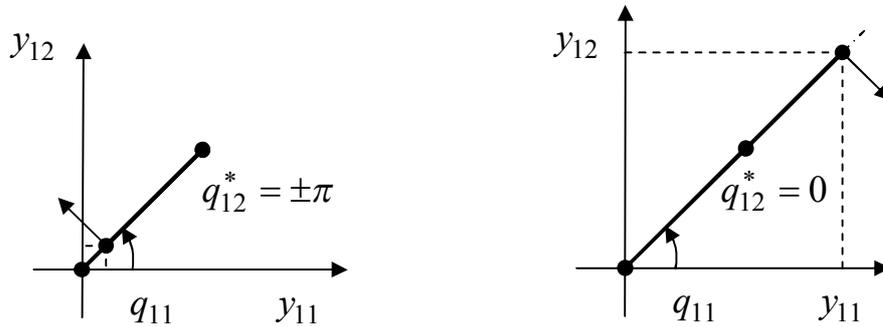


Рис. 4.5. Особые конфигурации двухзвенового манипулятора

Выходное отображение системы (1.17)–(1.18) в БКФУВ (4.2.1) имеет вид

$$\dot{y}_1 = J(q_1)q_2 = y_2, \quad \dot{y}_2 = f(\cdot) + B(\cdot)\eta + B(\cdot)v, \quad (4.6.3)$$

где  $y_1 = \text{col}(y_{11}, y_{12})$ ,  $y_2 = \text{col}(y_{21}, y_{22})$ ,  $\eta = \text{col}(\eta_1, \eta_2)$   $u = \text{col}(u_1, u_2)$ ,  
 $f = \text{col}(f_1, f_2)$ ,  $B_{2 \times 2}$ ,

$$f_1 = -[y_{22}q_{21} + (y_{22} - l_1 \cos q_{11}q_{21})q_{22}] + \frac{1}{\Delta}[y_{12}H_{22}G_1^* - y_{12}H_{12}G_2^* - (y_{12} - l_1 \sin q_{11})H_{21}G_1^* + (y_{12} - l_1 \sin q_{11})H_{11}G_2^*],$$

$$f_2 = [y_{21}q_{21} + (y_{21} + l_1 \sin q_{11}q_{21})q_{22}] - \frac{1}{\Delta}[y_{11}H_{22}G_1^* + y_{11}H_{12}G_2^* + (y_{11} - l_1 \cos q_{11})H_{21}G_1^* - (y_{11} - l_1 \cos q_{11})H_{11}G_2^*],$$

$$G_1^* = (C_{11}q_{21} + C_{12}q_{22}) + G_1(q_1), \quad G_2^* = (C_{21}q_{21} + C_{22}q_{22}) + G_2(q_1),$$

$$0 < \Delta = H_{11}H_{22} - H_{12}^2 =$$

$$= m_2 l_{c2}^2 (m_1 l_{c1}^2 + I_1 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c1}^2 - I_2 - m_2 l_{c2}^2) - (m_2 l_1 l_{c2} \cos q_{12} + I_2)^2,$$

$$b_{11} = \frac{1}{\Delta}[(y_{12} - l_1 \sin q_{11})H_{21} - y_{12}H_{22}], \quad b_{12} = \frac{1}{\Delta}[y_{12}H_{12} - (y_{12} - l_1 \sin q_{11})H_{11}],$$

$$b_{21} = \frac{1}{\Delta}[y_{11}H_{22} - (y_{11} - l_1 \cos q_{11})H_{21}], \quad b_{22} = \frac{1}{\Delta}[(y_{11} - l_1 \cos q_{11})H_{11} - y_{11}H_{12}].$$

Выполним невырожденные замены переменных (4.4.1), (4.3.2) и представим систему (4.6.3) в виде (4.3.3), (4.4.3), а именно

$$\dot{e}_1 = -K_1 e_1 + e_2, \quad \dot{e}_2 = -K_1^2 e_1 + K_1 e_2 + \varphi(\cdot) + B(\cdot)v, \quad (4.6.4)$$

где  $\varphi(\cdot) = f(\cdot) + B(\cdot)\eta - y_{3d}$ ,  $\varphi = \text{col}(\varphi_1, \varphi_2)$ .

Для составляющих оператора объекта управления (4.6.4) справедливы следующие ограничения:

$$|y_{1i}| \leq l_1 + l_2, \quad |q_{2i}| \leq \bar{q}_{2i}, \quad |y_{2i}| \leq \bar{y}_{2i}, \quad |y_{jid}| \leq \bar{y}_{jid} \quad (j = \overline{1,3}, i = 1,2), \quad (4.6.5)$$

$$|\eta_i| \leq N_i, \quad |v_i| \leq U_i, \quad |f_i| \leq \bar{f}_i, \quad i = \overline{1,2},$$

$$\bar{H}_{11} = m_1 l_{c1}^2 + I_1 + m_2 (l_1^2 + l_{c1}^2 + 2l_1 l_{c2}) + I_2,$$

$$\bar{H}_{22} = m_2 l_{c2}^2 + I_2, \quad \bar{H}_{12} = m_2 l_1 l_{c2} + m_2 l_{c2}^2 + I_2,$$

$$0 < \bar{\Delta} \leq \Delta \leq \bar{\bar{\Delta}},$$

$$\bar{\Delta} = m_2 l_{c2}^2 (m_1 l_{c1}^2 + I_1 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c1}^2 - I_2 - m_2 l_{c2}^2) - 2m_2 l_1 l_{c2} I_2 - I_2^2,$$

$$\bar{\bar{\Delta}} = m_2 l_{c2}^2 (m_1 l_{c1}^2 + I_1 + m_2 l_{c1}^2 - I_2 - m_2 l_{c2}^2) + 2m_2 l_1 l_{c2} I_2 - I_2^2,$$

$$|G_1^*| \leq \bar{G}_1^* = m_2 l_{c2} (2l_1 \bar{q}_{22} \bar{q}_{21} + l_1 \bar{q}_{22}^2 + g) + m_1 l_{c1}^2 g + m_2 g l_1,$$

$$|G_2^*| \leq \bar{G}_2^* = m_2 l_{c2} (l_1 \bar{q}_{12}^2 + g),$$

$$\bar{f}_1 = \bar{y}_{22} q_{21} + (\bar{y}_{22} + l_1 \bar{q}_{21}) \bar{q}_{22} + \frac{1}{\Delta} [(l_1 + l_2)(\bar{H}_{22} \bar{G}_1^* + \bar{H}_{12} \bar{G}_2^* + \bar{H}_{11} \bar{G}_2^* + \bar{H}_{21} \bar{G}_1^*) + l_1 (\bar{H}_{11} \bar{G}_2^* + \bar{H}_{21} \bar{G}_1^*)],$$

$$\bar{f}_2 = \bar{y}_{21} \bar{q}_{21} + (\bar{y}_{21} + l_1 \bar{q}_{21}) \bar{q}_{22} + \frac{1}{\Delta} [(l_1 + l_2)(\bar{H}_{22} \bar{G}_1^* + \bar{H}_{12} \bar{G}_2^* + \bar{H}_{21} \bar{G}_1^2 + \bar{H}_{11} \bar{G}_2^*) + l_1 (\bar{H}_{21} \bar{G}_1^* + \bar{H}_{11} \bar{G}_2^*)],$$

$$|\varphi_i| \leq \bar{F}_i, \quad i = 1,2,$$

$$|b_{i1}| \leq \bar{b}_{i1} = \frac{1}{\Delta} [(l_1 + l_2) m_2 l_1 l_{c2} + l_1 \bar{H}_{21}],$$

$$|b_{i2}| \leq \bar{b}_{i2} = \frac{1}{\Delta} [(l_1 + l_2)(m_2 (l_1^2 + l_{c1}^2 + l_1 l_{c2} - l_{c2}^2) + m_1 l_{c1}^2 + I_1) + l_1 \bar{H}_{11}].$$

Как видим,  $\bar{b}_{i2} > \bar{b}_{i1}$ ,  $i = 1,2$ , т.е. соотношения (4.4.4) не выполняются и в данном случае матрица  $B$  не имеет преобладающей диагонали. С учетом (4.6.1), (4.6.5) имеем

$$|\varphi_1| \leq \bar{F}_1 = 10,466, \quad |\varphi_2| \leq \bar{F}_2 = 15,501, \quad (4.6.6)$$

$$-0,083 \leq b_{11} \leq 0,103, \quad -1,195 \leq b_{12} \leq -1,027,$$

$$0,374 \leq b_{21} \leq 0,439, \quad -0,364 \leq b_{22} \leq -0,112.$$

Внешние негладкие ограниченные ( $|\eta_i| \leq 0,2, i = 1,2$ ) возмущения, действующие на механическую систему, приняты в виде (см. рис. 4.6)

$$\eta_1(t) = \eta_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t = 2T, T = 0,1, 2, 3, \dots \\ -0,2 + 0,2t & \text{при } 2T < t < 2(T+1). \end{cases} \quad (4.6.7)$$

В системе (4.6.4)  $\det B = \frac{l_1}{\Delta}(y_{12} \cos q_{11} - y_{11} \sin q_{11}) \neq 0$  за исключением особых точек (4.6.2). Действительно,  $\det B = 0$  при  $\operatorname{tg} q_{11} = y_{12} / y_{11}$ , откуда с учетом (1.26) имеем (4.6.2). Таким образом, допустимая область изменения выходных координат  $Y_1$  имеет вид открытого кольца

$$Y_1 = \{(y_{11}, y_{12}) : ((l_1 - l_2)^2 < y_{11}^2 + y_{12}^2 < (l_1 + l_2)^2)\}. \quad (4.6.8)$$

Ставится задача отслеживания траектории  $y_{1d}(t) = \operatorname{col}(y_{11d}, y_{12d})$ , заданной в терминах рабочего пространства схвата. Для моделирования выбраны следующие траектории:

1) перевод схвата из точки в точку по прямой (см. рис 4.7)

$$y_{11d}(t) = 0,25 + 0,04t, \quad y_{12d}(t) = 0,2 + 0,04t, \quad (4.6.9)$$

т.е. из точки  $A0(0,2; 0,19)$ , где находится схват, требуется произвольно попасть в точку  $A1(0,25; 0,2)$ , а потом по прямой – в точку  $A2(0,45; 0,4)$ ;

2) движение по окружности (см. рис. 4.8)

$$y_{11d}(t) = 0,5303 + 0,17 \sin t, \quad y_{12d}(t) = 0,7003 + 0,17 \cos t, \quad (4.6.10)$$

т.е. из точки  $A0(0,6; 0,6)$ , где находится схват, требуется произвольно попасть в точку  $A1(0,5303; 0,7003)$ , потом по окружности – в точку  $A2(0,36; 0,57)$ .

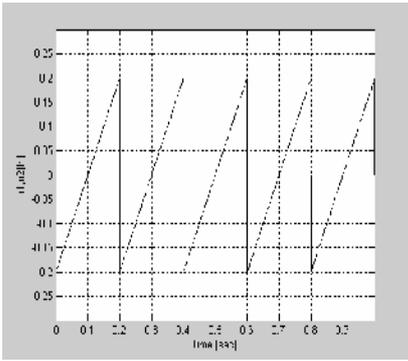


Рис. 4.6.  $\eta(t)$

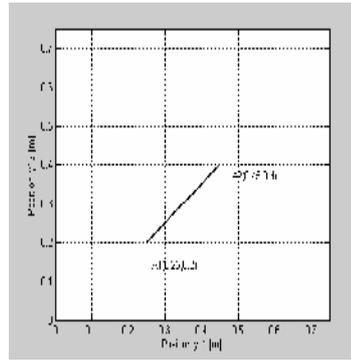


Рис. 4.7.  $y_{1d}$

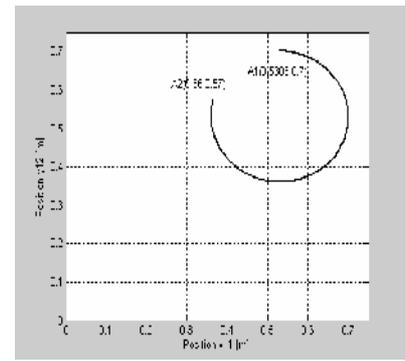


Рис. 4.8.  $y_{1d}$

При заданных значениях матрицы  $K_1$ , а именно  $k_{11} = k_{12} = k_1^* = 12$ , ставится задача обеспечения заданной точности слежения (4.5.9)

$$|e_{1i}| \leq \delta_1 = 0,001 \text{ [м]}, \quad i = 1, 2, \quad (4.6.11)$$

что определяет точность (4.3.5), которую требуется обеспечить при стабилизации переменных  $e_2$  (4.3.24):

$$|e_{2i}| < k_1^* \delta_1 = \delta_2 = 0,012, \quad i = 1, 2, \quad (4.6.12)$$

*Процедура 1.1:* линейный закон управления (4.3.19) с наблюдателем (4.3.20). С учетом (4.6.11)–(4.6.12) оценки мажорант (4.3.22) имеют вид

$$L_{01} = 10,466, \quad L_{02} = 15,501, \quad L_{1(2 \times 2)} = \text{diag}\{144\}, \quad L_{2(2 \times 2)} = \text{diag}\{12\}. \quad (4.6.13)$$

С учетом (4.6.13) принимаем коэффициенты обратной связи  $k_{21}, k_{22}$  (4.3.25):

$$k_{21}^* = 900 > 10,466 / (12 \cdot 0,001) + 144 / 12 + 12 = 896,15,$$

$$k_{22}^* = 1320 > 15,501 / (12 \cdot 0,001) + 144 / 12 + 12 = 1315,7.$$

На рис. 4.9 в качестве эталона для сравнения показано поведение переменных  $e_{11}(t)$ ,  $e_{12}(t)$  и движение схвата при отработке задания (4.6.10) в условиях полных измерений, т.е.  $y_2(t)$ ,  $y_{2d}(t)$  также известны, задача наблюдения не ставится. Значения  $e_2(t)$  вычисляются по формуле (4.3.2).

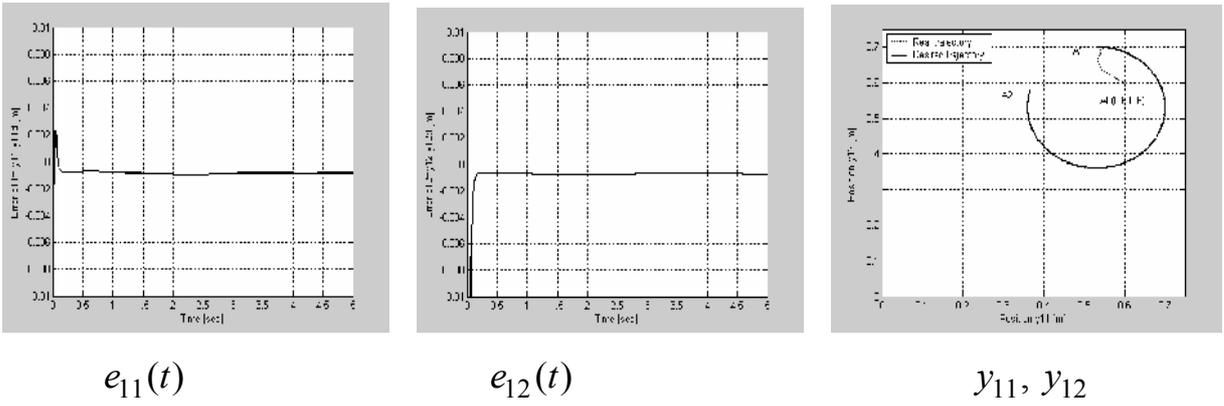


Рис. 4.9. Результаты эталонного моделирования (4.3.19), (4.6.10)

На рис. 4.10 для процедуры 1.1 показано поведение переменных  $e_{11}(t)$ ,  $e_{12}(t)$  и движение схвата при отработке задания (4.6.9), на рис. 4.11 – (4.6.10). Параметры наблюдателя на скользящих режимах (4.3.20), (2.3.12):

$$m_{11} = m_{12} = 40, \tau_1 = 0,001 [\text{сек}]. \quad (4.6.13)$$

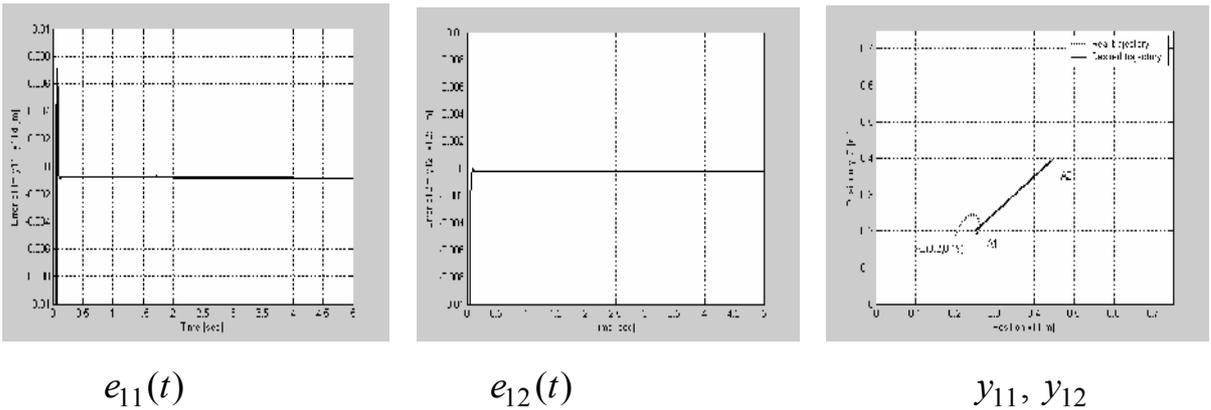


Рис. 4.10. Результаты моделирования процедуры 1.1 с заданием (4.6.9)

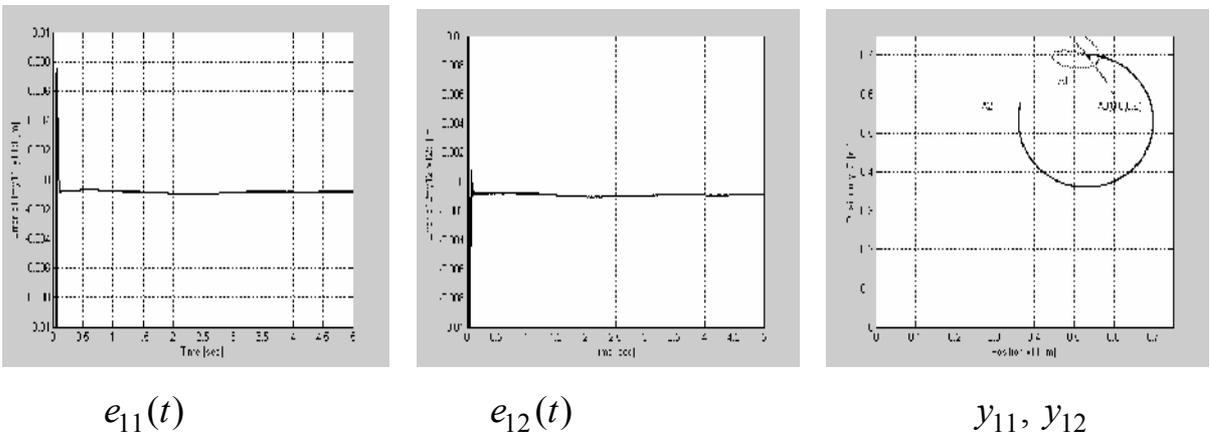


Рис. 4.11. Результаты моделирования процедуры 1.1 с заданием (4.6.10).

Процедура 1.2: разрывные управления (4.3.27) с амплитудами  $m_1^* = 70$ ,  $m_2^* = 250$  и наблюдателем (4.3.20) с параметрами (4.6.13).

На рис. 4.12 показаны результаты эталонного моделирования закона (4.3.27) в условиях полных измерений при обработке задания (4.6.10); на рис. 4.13 – результаты процедуры 1.2 при обработке задания (4.6.9), на рис. 4.14 – (4.6.10). Как видим, в данном алгоритме обеспечивается экспоненциальная сходимость к заданным траекториям.

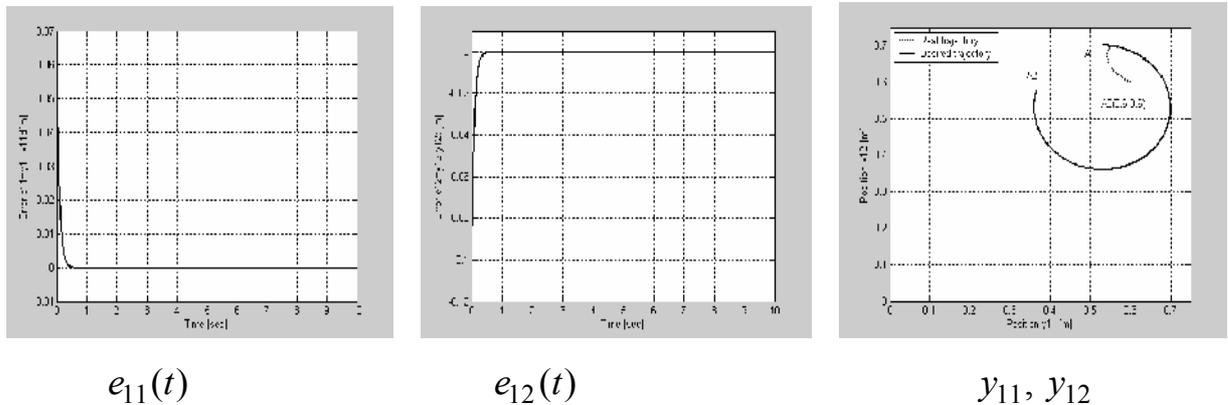


Рис. 4.12. Результаты эталонного моделирования (4.3.27), (4.6.10)

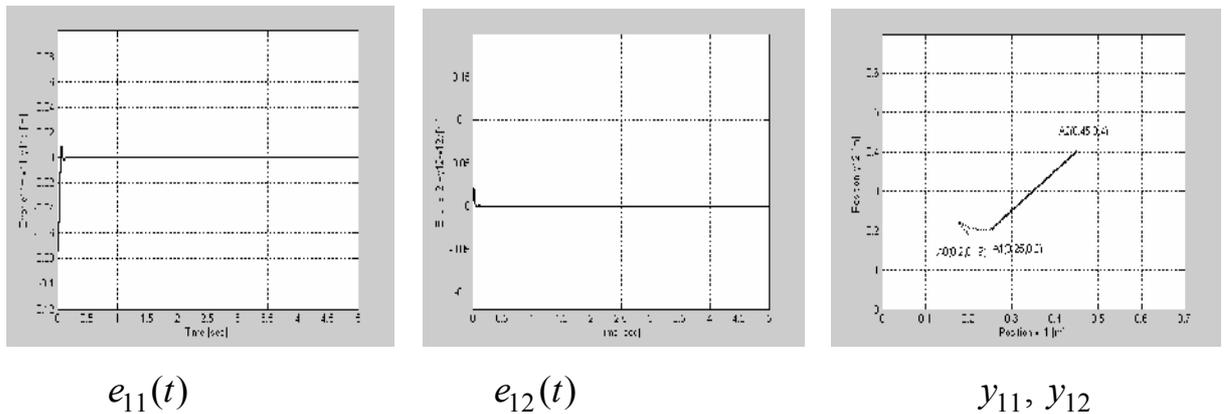


Рис. 4.13. Результаты моделирования процедуры 1.2 с заданием (4.6.9)

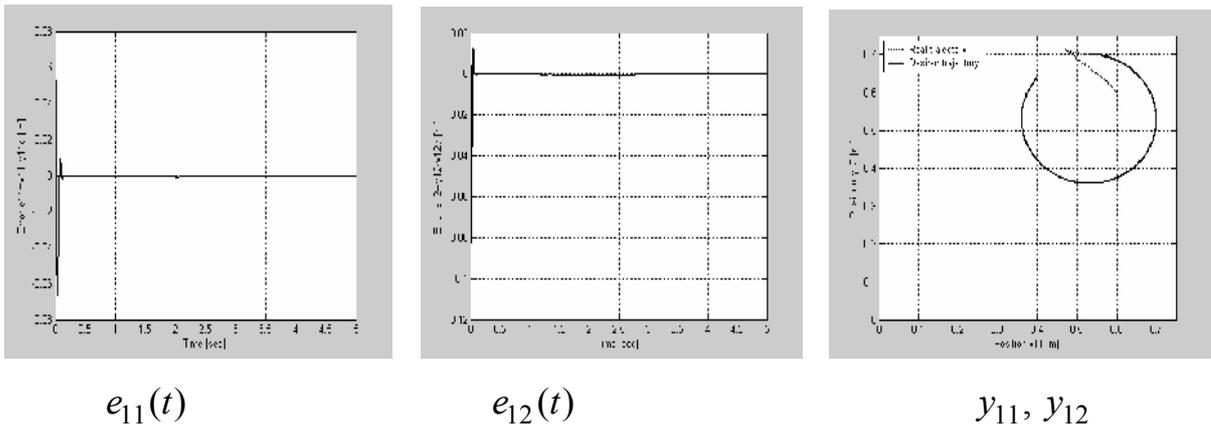


Рис. 4.14. Результаты моделирования процедуры 1.2 с заданием (4.6.10)

*Процедура 1.3:* нелинейное гладкое управление (4.3.33) с коэффициентами  $m_1^* = 70$ ,  $m_2^* = 250$  и наблюдателем (4.3.20) с параметрами (4.6.13). На рис. 4.15 показаны результаты эталонного моделирования закона (4.3.33) в условиях полных измерений при обработке задания (4.6.10); на рис. 4.16 – результаты процедуры 1.3 при обработке задания (4.6.9), на рис. 4.17 – (4.6.10).

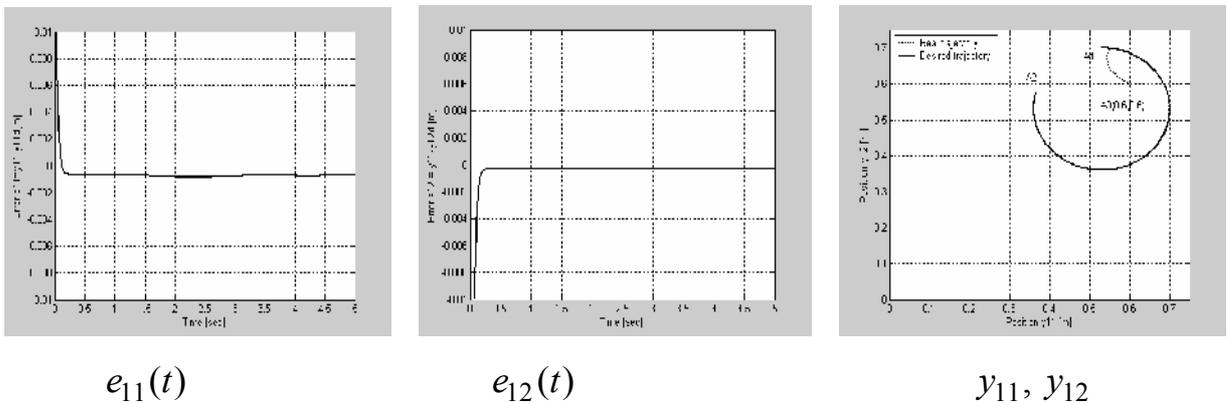


Рис. 4.15. Результаты эталонного моделирования (4.3.33), (4.6.10)

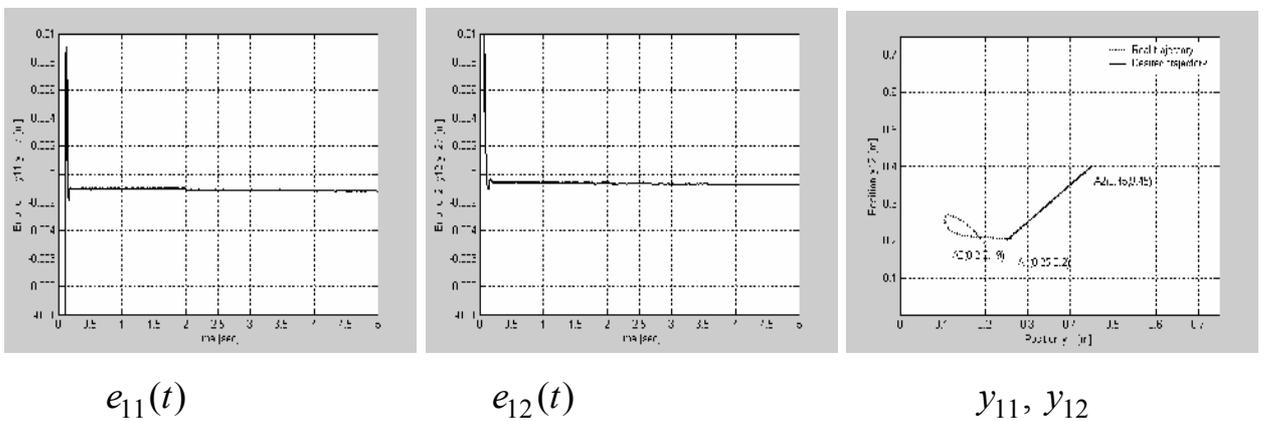
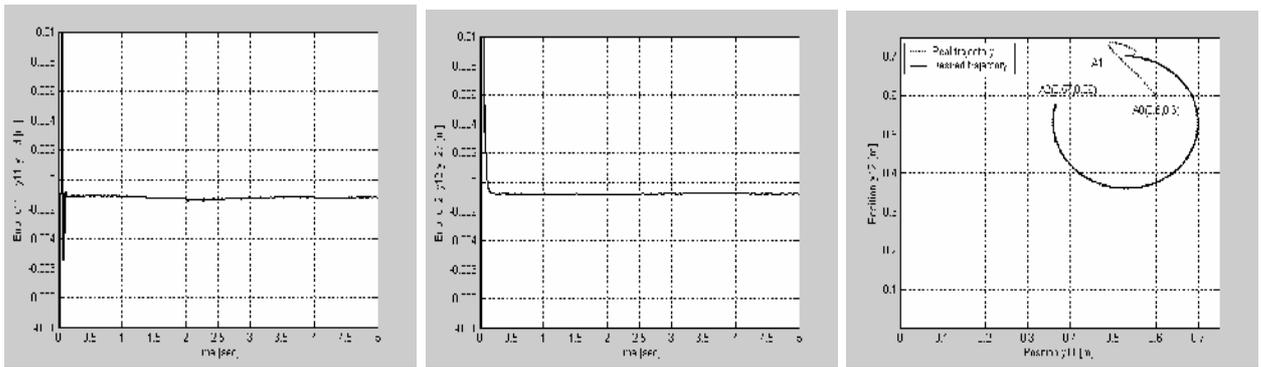


Рис. 4.16. Результаты моделирования процедуры 1.3 с заданием (4.6.9)



$e_{11}(t)$

$e_{12}(t)$

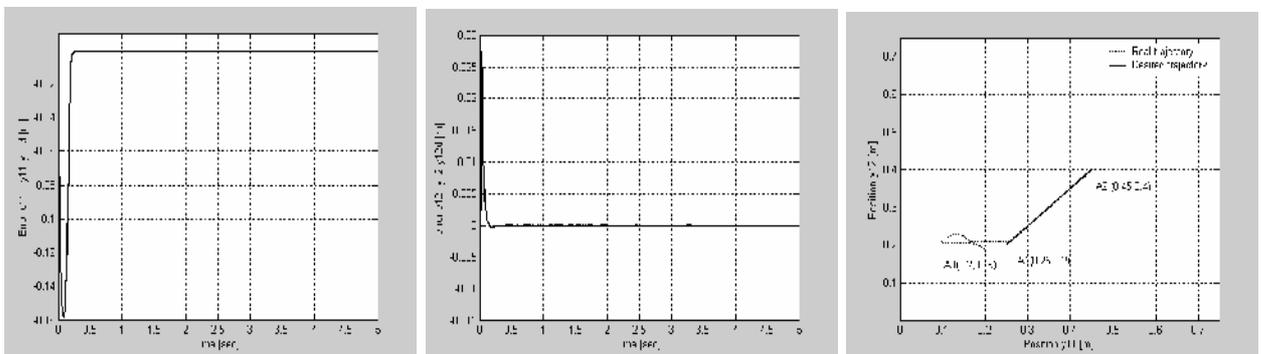
$y_{11}, y_{12}$

Рис. 4.17. Результаты моделирования процедуры 1.3 с заданием (4.6.10)

*Процедура 2.1:* комбинированное управление с линейной стабилизирующей обратной связью (4.3.13) и полным наблюдателем на скользящих режимах (4.3.17), (2.3.12) с параметрами

$$m_{11} = m_{12} = 40, m_{21} = m_{22} = 140, \tau_1 = \tau_2 = 0,001 [\text{сек}]. \quad (4.6.14)$$

На рис. 4.18 показаны результаты моделирования процедуры 2.1 при отработке задания (4.6.9), на рис. 4.19 – (4.6.10).



$e_{11}(t)$

$e_{12}(t)$

$y_{11}, y_{12}$

Рис. 4.18. Результаты моделирования процедуры 2.1 с заданием (4.6.9)

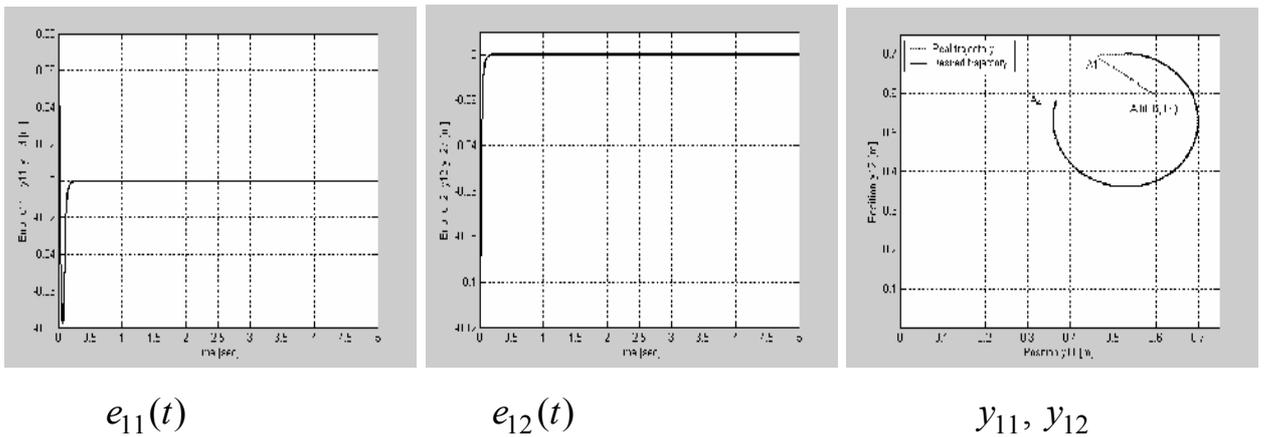


Рис. 4.19. Результаты моделирования процедуры 2.1 с заданием (4.6.10)

*Процедура 2.2:* комбинированное управление с разрывной стабилизирующей обратной связью (4.3.28) и наблюдателем (4.3.17) с параметрами (4.6.14). На рис. 4.20 показаны результаты моделирования процедуры 2.2 при отработке задания (4.6.9), на рис. 4.21 – (4.6.10).

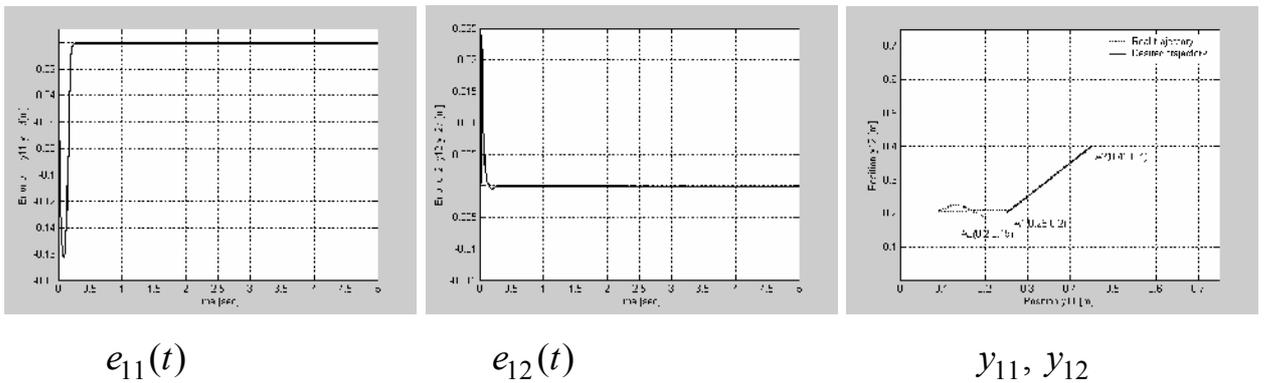


Рис. 4.20. Результаты моделирования процедуры 2.2 с заданием (4.6.9)

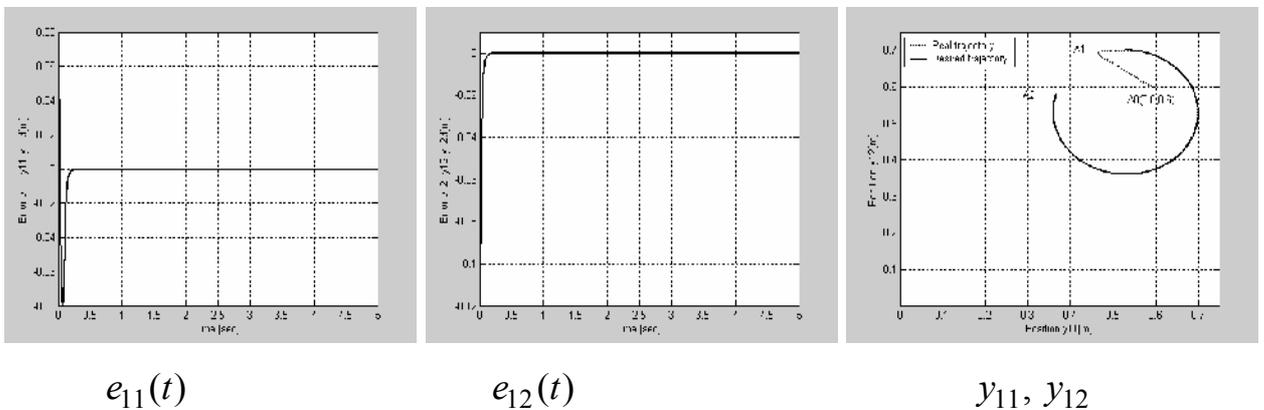


Рис. 4.21. Результаты моделирования процедуры 2.2 с заданием (4.6.10)

Процедура 2.3: комбинированное управление с нелинейной стабилизирующей обратной связью (4.3.29) и наблюдателем (4.3.17) с параметрами (4.6.14). На рис. 4.22 показаны результаты моделирования процедуры 2.3 при обработке задания (4.6.9), на рис. 4.23 – (4.6.10).

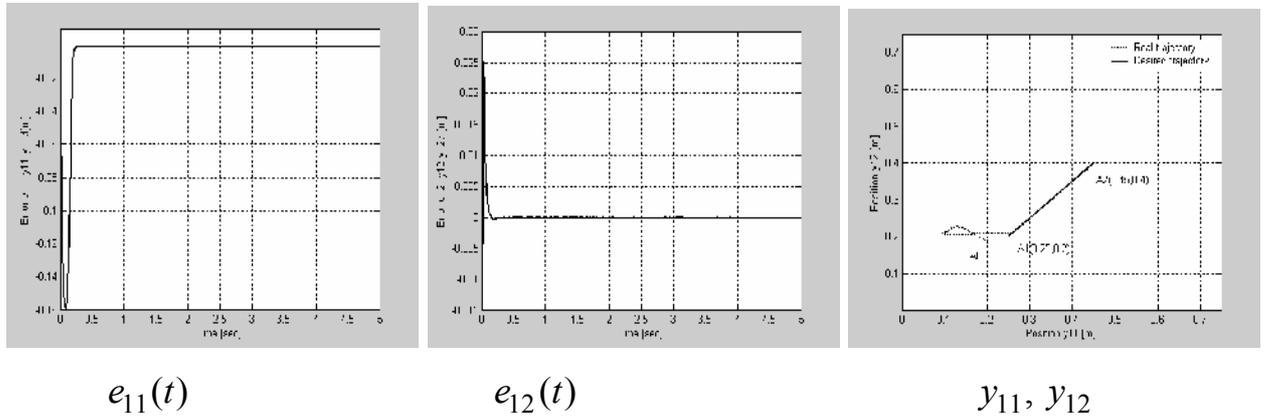


Рис. 4.22. Результаты моделирования процедуры 2.3 с заданием (4.6.9)

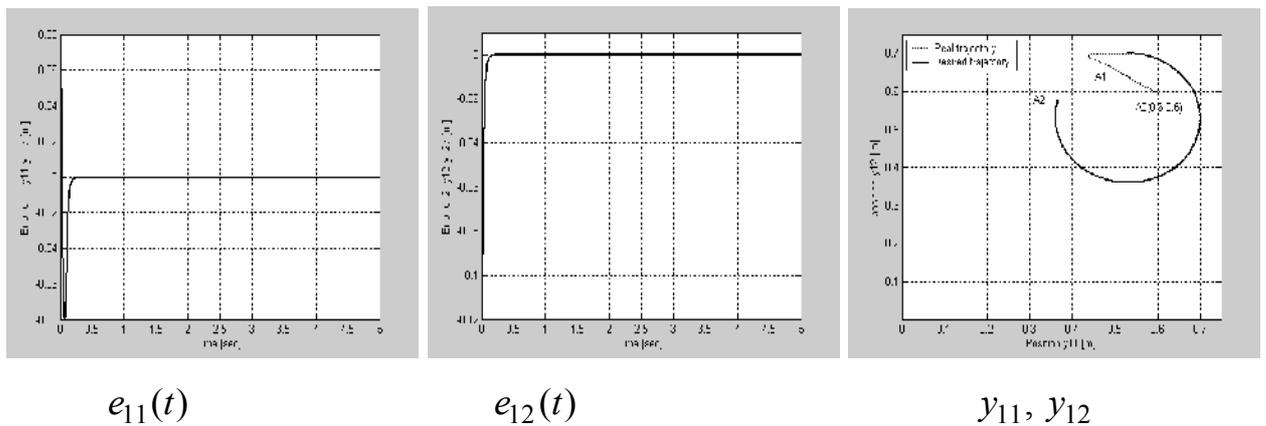


Рис. 4.23. Результаты моделирования процедуры 2.3 с заданием (4.6.10)

Теперь рассмотрим алгоритм (4.4.27), основанный на допредельной реализации метода иерархии управлений. Результаты исследования (4.6.6) определили иерархию  $|e_{21}(v_2)| \leq \delta_{21}$ ,  $|e_{22}(v_1)| \leq \delta_{22}$ , в которой порядковые номера управляемых и управляющих координат не совпадают в силу того, что условие постоянства знака (4.4.2) выполняется для элемента  $b_{12}$ . С учетом (4.6.12) и (4.4.11) приняты следующие параметры  $k_{21} = k_{22} = 4$ ,  $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,2$ . Процедура настройки коэффициентов обратной связи, разработанная в параграфе 4.4.2, состоит из двух шагов.

Шаг 1. Система:

$$\dot{e}_{21} = -k_{11}^2 e_{11} + k_{11} e_{21} + \varphi_1 + b_{11} v_1 + b_{12} v_2,$$

$$\dot{e}_{22} = -k_{12}^2 e_{12} + k_{12} e_{22} + \varphi_2 + b_{21} v_1 + b_{22} v_2;$$

выбор управления в первой системе:  $v_2 = -m_2 \text{sign} b_{12} \arctg(k_{21}^* e_{21})$ ,  $\bar{b}_{12} = 1,027$ ;

нижняя оценка для выбора коэффициента обратной связи:

$$(2k_1^{*2} \delta_1 + F_1 + \bar{b}_{11} \bar{v}_1) / (\bar{b}_{12} (\frac{\pi}{2} - \zeta_1)) < m_2;$$

эквивалентное управление:  $\tilde{v}_2 = (k_{11}^2 e_{11} - k_{11} e_{21} - \varphi_1 - b_{11} v_1) / b_{12}$ .

Шаг 2. Подстановка эквивалентного управления во второе уравнение:

$$\dot{e}_{22} = k_1^{*2} (e_{11} b_{22} / b_{12} - e_{12}) + k_1^* (e_{22} - e_{21} b_{22} / b_{12}) + (\varphi_2 - \varphi_1 b_{22} / b_{12}) + v_1 (b_{21} - b_{11} b_{22} / b_{12}),$$

$$b_{21}^1 = b_{21} - b_{11} b_{22} / b_{12}, \quad b = b_{22} / b_{12},$$

$$\bar{b}_{21}^1 = \bar{b}_{21} - \bar{b}_{11} \bar{b} = 0,375 - 0,354 \cdot 0,104 = 0,338, \quad \bar{b} = \bar{b}_{22} / \bar{b}_{12} = 0,364 / 1,027 = 0,354;$$

выбор управления во второй системе:  $v_1 = -m_1 \text{sign} b_{21}^1 \arctg(k_2^* e_{22})$ ;

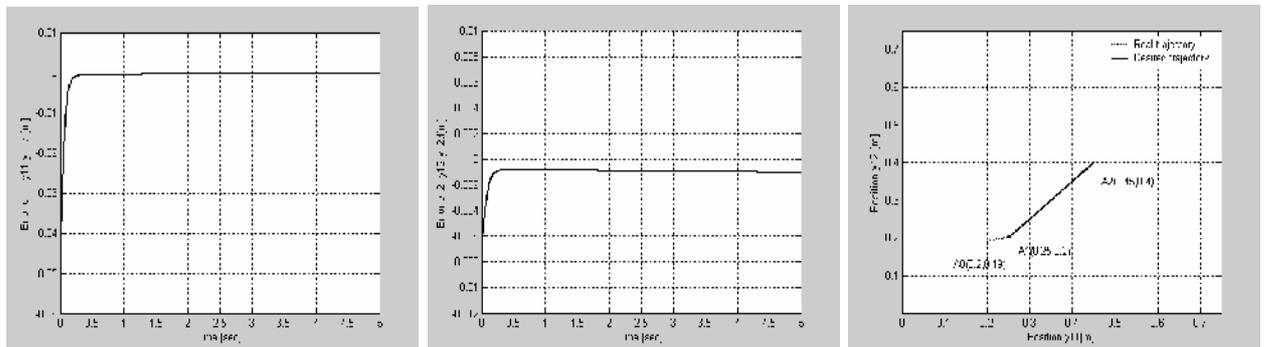
нижняя оценка для выбора коэффициента обратной связи:

$$(2k_1^{*2} \delta_1 (1 + \bar{b}) + |\varphi_2 - \varphi_1 b|) / \bar{b}_{21}^1 (\frac{\pi}{2} - \zeta_2) < m_1.$$

Результат:  $m_1 \geq 63,08$ ,  $m_2 \geq 146$ , с учетом которого принимаем

$$m_1^* = 70, \quad m_2^* = 200. \quad (4.6.15)$$

На рис. 4.24 показаны результаты эталонного моделирования закона управления (4.4.27) в условиях полных измерений при отработке задания (4.6.9), на рис. 4.25 – (4.6.10).

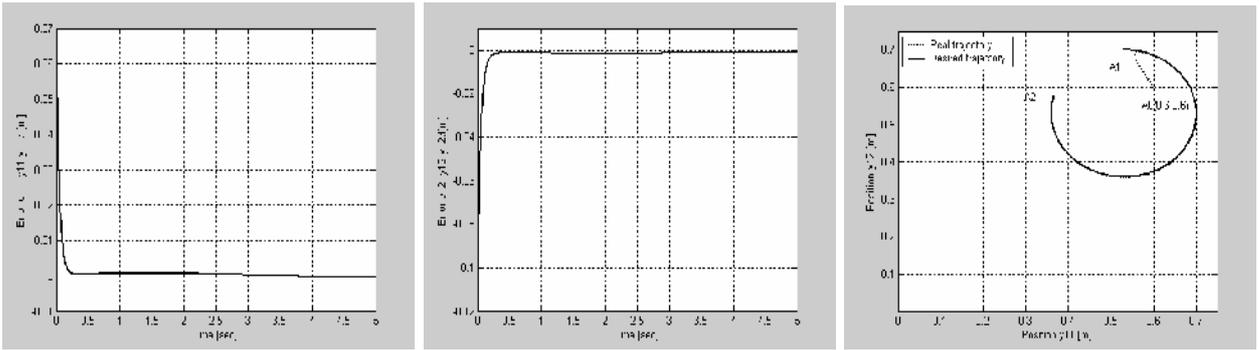


$e_{11}(t)$

$e_{12}(t)$

$u_{11}, u_{12}$

Рис. 4.24. Результаты эталонного моделирования (4.4.27), (4.6.9)



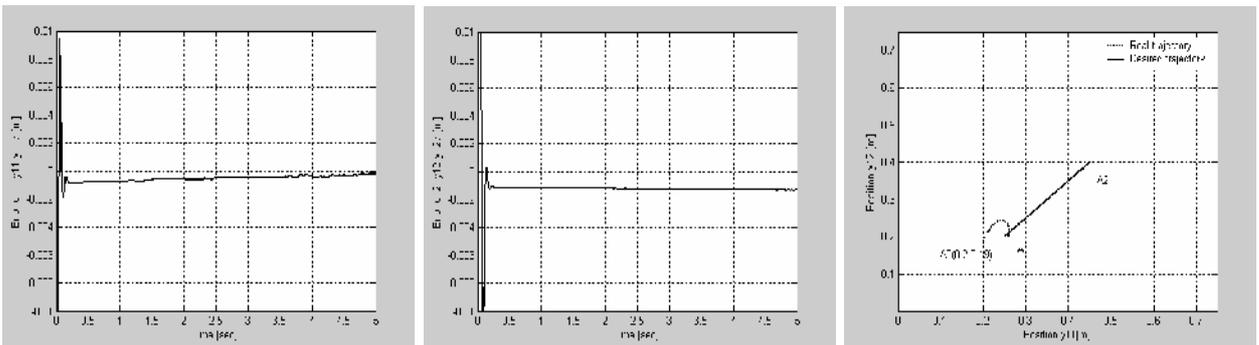
$e_{11}(t)$

$e_{12}(t)$

$y_{11}, y_{12}$

Рис. 4.25. Результаты эталонного моделирования (4.4.27), (4.6.10)

*Процедура 3.1:* закон управления (4.4.27) с коэффициентами (4.6.15), наблюдатель состояния с разрывной коррекцией (4.3.20) с параметрами (4.6.13). На рис. 4.26 показано поведение переменных  $e_{11}(t)$ ,  $e_{12}(t)$  и движение схвата при обработке задания (4.6.9), на рис. 4.27 – (4.6.10).

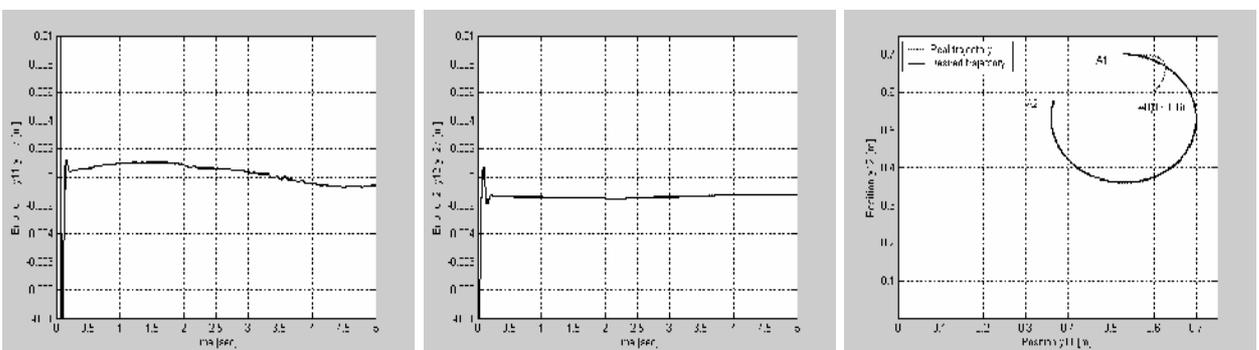


$e_{11}(t)$

$e_{12}(t)$

$y_{11}, y_{12}$

Рис. 4.26. Результаты моделирования процедуры 3.1 с заданием (4.6.9)



$e_{11}(t)$

$e_{12}(t)$

$y_{11}, y_{12}$

Рис. 4.27. Результаты моделирования процедуры 3.1 с заданием (4.6.10)

Процедура 3.2: закон управления (4.4.27), наблюдатель состояния с непрерывной коррекцией (4.4.31) с параметрами, полученными согласно иерархии (4.4.38), а именно  $l_{21} = l_{22} = 5012$ ,  $l_{11} = l_{12} = 21710$ . На рис. 4.28 показано поведение переменных  $e_{11}(t)$ ,  $e_{12}(t)$  и движение схвата при обработке задания (4.6.9), на рис. 4.29 – (4.6.10).

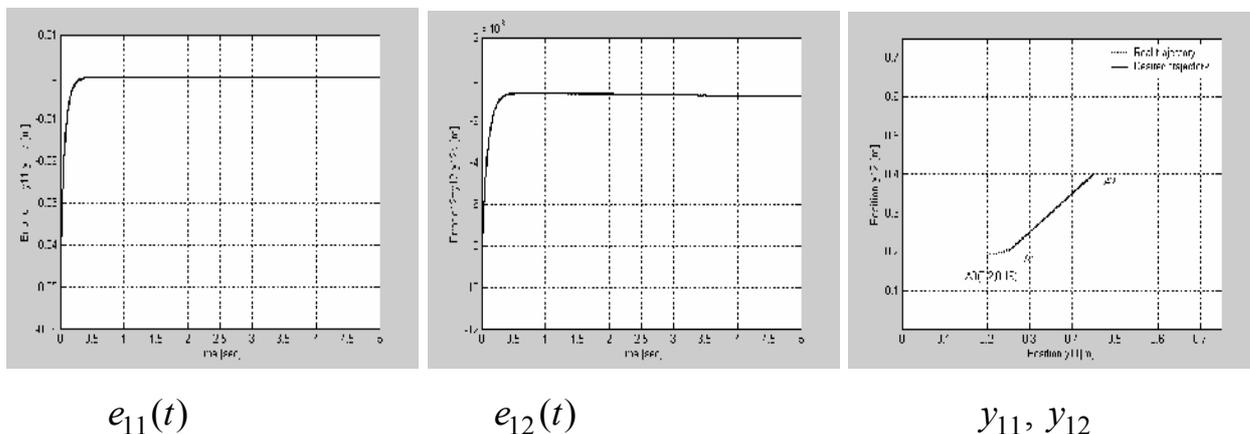


Рис. 4.28. Результаты моделирования процедуры 3.2 с заданием (4.6.9)

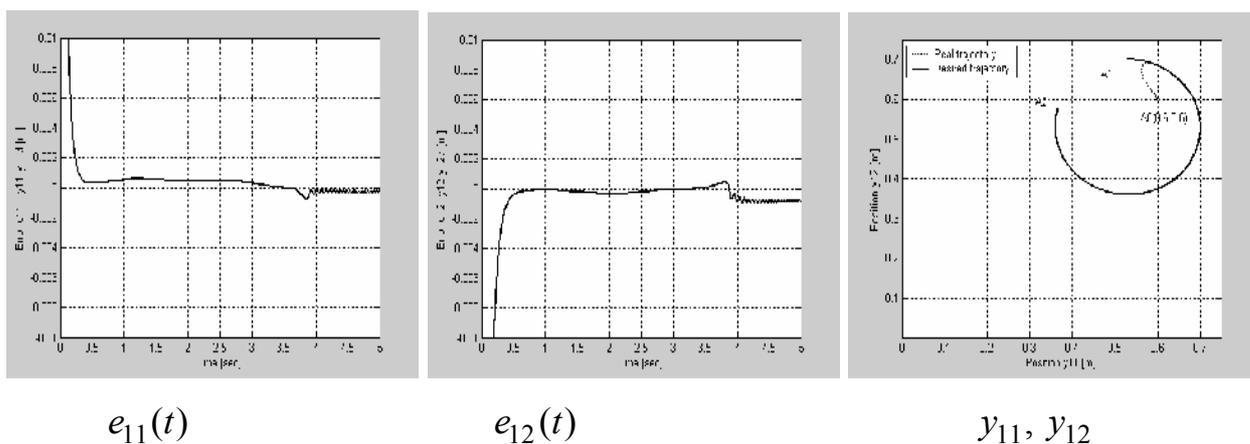


Рис. 4.29. Результаты моделирования процедуры 3.2 с заданием (4.6.10)

Как видим, результаты моделирования подтверждают результаты сравнительного анализа разработанных алгоритмов синтеза обратной связи, проведенного в разделе 4.5.

## Список литературы

1. *Айзерман М.А.* Классическая механика. М.: Наука, 1974.
2. *Андреев С.Н., Ворошилов М.С., Петров Б.Е.* Проектирование приводов манипуляторов. Л.: Машиностроение, 1975.
3. *Ахобадзе А.Г., Краснова С.А.* Решение задачи слежения в условиях неопределенности на основе совместной блочно-канонической формы управляемости и наблюдаемости // Управление большими системами. Выпуск 24. М.: ИПУ РАН, 2009. С.34–80.
4. *Ахобадзе А.Г., Краснова С.А.* Задача слежения в линейных многомерных системах при наличии внешних возмущений // Автоматика и телемеханика. 2009. №6. С. 21–47.
5. *Брайсон А., Хо Ю Ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.
6. *Воробьев Е.И., Попов С.А., Шевелева Г.И.* Механика промышленных роботов. В 3-х кн. М.: Высшая школа, 1988.
7. *Воротников С.А.* Информационные устройства робототехнических систем. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005.
8. *Вукобратович М., Стокич Д.* Управление манипуляционными роботами. Теория и приложения. Пер. с англ. М.: Наука, 1985.
9. *Вукобратович М., Стокич Д., Кирчанский Н.* Неадаптивное и адаптивное управление манипуляционными роботами. М.: Мир, 1989.
10. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Физматгиз, 1960.
11. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.
12. *Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г., Фурасов В.Д.* Построение систем программного движения. М.: Наука, 1971.
13. *Галиуллин А.С.* Методы решения обратных задач динамики. М.: Наука, 1986.
14. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.

15. *Грауэрт Г., Либ И., Фишер В.* Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Мир, 1971.
16. *Дик В.В., Краснова С.А., Ткачев С.Б.* Аналитическое резервирование систем летательного аппарата // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. М.: Научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. № 6, июнь 2013. С. 211–226.
17. *Дракунов С.В., Изосимов Д.Б., Лукьянов А.Г., Уткин В.А., Уткин В.И.* Принцип блочного управления // Автоматика и телемеханика. Ч. I. 1990. № 5. С. 3–13; Ч. II. 1990. № 6. С. 20–31.
18. *Емельянов С.В., Коровин С.К.* Новые типы обратной связи: Управление при неопределенности. М.: Наука. Физматлит, 1997.
19. *Зенкевич С.Л., Ющенко А.С.* Основы управления манипуляционными роботами. М.: Изд-во МГТУ имени Н.Э.Баумана, 2004.
20. *Игнатъев М.Б., Кулаков Ф.М., Покровский А.М.* Алгоритмы управления роботами манипуляторами. Л.: Машиностроение, 1977.
21. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.
22. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
23. *Коровин С.К., Фомичев В.В.* Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М. ФИЗМАТЛИТ, 2007.
24. *Кочетков С.А., Краснова С.А., Уткин В.А.* Метод регуляризации скользящих движений по обратной связи // Уфимский математический журнал. Том 1, №4. 2009. С. 67–77.
25. *Кочетков С.А., Уткин В.А.* Компенсация неустранимых неидеальностей исполнительных устройств // Автоматика и телемеханика. 2010. №5. С. 21–47.
26. *Кочетков С.А., Уткин В.А.* Метод декомпозиции в задачах управления мобильными роботами // Автоматика и телемеханика. 2011. № 10. С. 86–103.

27. *Краснова С.А.* Каскадный синтез системы управления манипулятором с учетом динамики электроприводов // Автоматика и телемеханика. 2001. №11. С. 51–72.
28. *Краснова С.А., Кузнецов С.И.* Оценивание на скользящих режимах неконтролируемых возмущений в нелинейных динамических системах // Автоматика и телемеханика. 2005. №10. С. 54–69.
29. *Краснова С.А., Уткин В.А.* Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. М.: Наука, 2006.
30. *Краснова С.А., Уткин В.А., Уткин А.В., Нгуен Тхань Тиен.* Прямой метод синтеза системы управления рабочим органом манипулятора при неполных измерениях // Проблемы управления. № 1. 2008. С 10–18.
31. *Краснова С.А., Уткин В.А., Уткин А.В.* Блочный синтез управления механическими системами в условиях неопределенности // Мехатроника, Автоматизация, Управление. 2009. №6. С. 41–54.
32. *Краснова С.А., Сиротина Т.Г., Уткин В.А.* Структурный подход к робастному управлению // Автоматика и телемеханика. 2011. № 8. С. 65–95.
33. *Краснова С.А.* Комплексный подход к проблеме наблюдения в системах слежения при действии внешних возмущений // Ученые записки РГСУ. 2011. № 9. Ч. 1. С. 25–31.
34. *Краснова С.А., Мысик Н.С.* Синтез инвариантной системы управления продольным движением летательного аппарата // Автоматика и телемеханика. 2011. № 10. С. 104–116.
35. *Краснова С.А., Мысик Н.С.* Каскадный синтез наблюдателя состояния с нелинейными корректирующими воздействиями // Автоматика и телемеханика. № 2. 2014. С. 106–128.
36. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
37. *Крутько П.Д.* Управление исполнительными системами роботов. М.: Наука, 1991.

38. *Кулешов В.С., Лакота Н.А.* Динамика систем управления манипуляторами. М.: Энергия, 1971.
39. *Лукьянов А.Г.* Блочный метод синтеза нелинейных систем на скользящих режимах // Автоматика и телемеханика. 1998. № 7. С. 14–34.
40. *Матюхин В.И.* Управление механическими системами. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
41. *Мееров М.В.* Системы многосвязного регулирования. М.: Наука, 1965.
42. *Медведев В.С., Лесков А.Г., Ющенко А.С.* Системы управления манипуляционных роботов. М.: Наука, 1978.
43. *Мирошник И.В., Никифоров В.А., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб., 2000.
44. *Нгуен Куанг Хынг, Уткин В.А.* Задачи управления двигателем постоянного тока // Автоматика и телемеханика. №5. 2006. С. 102–118.
45. *Никифоров В.О.* Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. СПб.: Наука, 2003.
46. *Петров Б.Н., Рутковский В.Ю., Земляков С.Д.* Адаптивное координатно-параметрическое управление нестационарными объектами. М.: Наука, 1980.
47. *Пол Р.* Моделирование, планирование траекторий и управление движением робота-манипулятора. Пер. с англ. М.: Наука, 1976.
48. *Попов Е.П., Верещагин А.Ф., Зенкевич С.Л.* Манипуляционные роботы: динамика и алгоритмы. М.: Наука, 1978.
49. *Пятницкий Е.С.* Избранные труды: в 3-х т. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
50. Синергетические процессы самоорганизации и управления / под ред. А.А. Колесникова. В 2-х частях. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2004.
51. Современная прикладная теория управления: новые классы регуляторов технических систем / Под ред. А.А. Колесникова. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000. Ч. III.
52. Теория систем с переменной структурой / Под ред. С.В. Емельянова. М.: Наука, 1970.

53. *Тимофеев А.В.* Управление роботами. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986.
54. *Уткин А.В.* Метод расширения пространства состояния в задаче синтеза автономного управления // Автоматика и телемеханика. 2007. № 6. С. 81-98.
55. *Уткин В.А., Уткин В.И.* Метод разделения в задачах инвариантности // Автоматика и телемеханика. 1983. № 12. С. 39–48.
56. *Уткин В.А.* Инвариантность и автономность в системах с разделяемыми движениями // Автоматика и телемеханика. 2001. № 11. С. 73–94.
57. *Уткин В.И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1987.
58. *Фомин В.И., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: наука, 1981.
59. *Халил Х.К.* Нелинейные системы. М.: НИЦ «РХД», 2009.
60. *Черноусько Ф. Л., Болотник Н.А., Градецкий В.Г.* Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. М.: Наука, 1989.
61. *Черноусько Ф.Л., Ананьенский И.М., Решмин С.А.* Методы управления нелинейными механическими системами. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
62. *Чиликин М.Г., Ключев В.И., Сандлер А.С.* Теория автоматизированного электропривода. М.: Энергия, 1979.
63. *Шабанович А.* Устройство автоматической установки амплитуды разрывов управляющих воздействий СПС // Новые направления в теории систем с переменной структурой (СПС). М.: ВНИИСИ. 1980. Вып. 4. С. 73–77.
64. *Юревич Е.И.* Основы робототехники. Л.: Машиностроение, 1985.
65. *Юркевич В.Д.* Синтез нелинейных нестационарных систем управления с разнотемповыми процессами. СПб.: Наука, 2000.
66. *Angeles J.* Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, methods and Algorithms. Third Edition. Springer, 2007.
67. *Drazenovic B.* The invariance condition in variable structure systems // Automatica. 1969. V. 5. No. 3. P. 287–295.

68. *Isidori A.* Nonlinear control systems. 3rd Ed. Berlin: Springer-Verlag. 1995.
69. *Krishnan H. and McClamroch N.H.* Tracking in nonlinear differential-algebraic control systems with applications to constrained robot systems // *Automatica*. 1994. Vol. 30. No. 12. PP. 1885–1897.
70. *Krstic M., Kanellakopoulos I. and Kokotovic P.* Nonlinear and Adaptive Control Design. New York: Wiley, 1995.
71. *Nicosia S., Tomei P.* A global output feedback controller for flexible joint robots // *Automatica*. 1995. Vol. 31. No. 10. P. 1465–1469.
72. *Nijmeijer H., van der Schaft A.J.* Nonlinear Dynamical Control Systems. Berlin: Springer. 1990.
73. *Slotine J.E. and Sastry S.S.* Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces with application to robot manipulators // *Int. J. Control*. 1983. Vol. 38. No. 2. P. 465 - 492.
74. *Slotine J.E. and Li W.* Applied Nonlinear Control. New Jersey: Prentice-Hall, 1991.
75. *Stepanenko Y. and Chun-Yi Su.* Variable structure control of robot manipulators with nonlinear sliding manifolds // *Int. J. Control*. 1993. V. 58. No. 2. P. 285–300.
76. *Yuan J., Stepanenko Y.* Composite adaptive control of flexible joint robots // *Automatica*. 1993. Vol. 29. No. 3. P. 609-619.
77. *Utkin V., Guldner J, Shi J.* Sliding mode control in electromechanical systems. London: Taylor & Francis, 1999.
78. *Xu J.X., Pan Y.J., and Lee N.H.* A gain scheduled sliding mode control scheme using filtering techniques with applications to multilink robotic manipulators // *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*. Special issue on Variable Structure Systems. Dec. 2000. V. 122. No. 4. P. 641–649.

