Автоматика и телемеханика, № 8, 1997

Моделирование поведения и интеллекта

УДК 519.714.3

© 1997 г. **Д.А. НОВИКОВ, канд. техн. наук**
(Институт проблем управления РАН, Москва)

СТИМУЛИРОВАНИЕ В ВЕРОЯТНОСТНЫХ АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ: РОЛЬ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В работе исследуется задача синтеза оптимальной функции стимулирования в активной системе (АС) с вероятностной неопределенностью. Доказывается, что эффективность стимулирования в вероятностной АС не превосходит эффективности стимулирования в соответствующей детерминированной АС. Вводится критерий сравнения вероятностных АС по величине неопределенности, исследуется согласованность этого критерия с энтропийной оценкой неопределенности результатов деятельности активного элемента (АЭ). Доказывается, что с ростом неопределенности уменьшается как эффективность управления, так и надежность контракта.

1. Введение

Задаче исследования механизмов управления вероятностными активными системами [1] посвящено значительное число работ: обзор основных моделей и результатов теории активных систем и теории контрактов по синтезу оптимальных механизмов стимулирования в вероятностных АС приведен в [2]; некоторые результаты анализа оптимального решения – в работах [3–7]. В то же время, исследованию влияния неопределенности на эффективность стимулирования уделялось неоправданно малое внимание [см., например, 4, 8, 9]. В настоящей работе при достаточно общих предположениях получены ответы на вопросы о соотношении эффективностей управления: вероятностной АС и соответствующей детерминированной АС, двумя вероятностными АС с различными величинами неопределенности (критерии сравнения неопределенностей вводятся ниже).

Последующее изложение имеет следующую структуру. Во втором разделе проводится анализ вероятностной задачи стимулирования в активной системе, в которой целевая функция АЭ имеет вид "стимулирование минус затраты" и значения функции стимулирования ограничены. Сравнение эффективности оптимального решения вероятностной задачи с решением соответствующей детерминированной задачи позволяет исследовать роль неопределенности – ее влияние на эффективность механизма стимулирования. В разделе 3 вводится критерий сравнения вероятностных активных систем по величине неопределенности и изучается влияние величины неопределенности на эффективность стимулирования. Раздел 4 содержит описание взаимосвязи между величиной неопределенности и надежностью контракта.

2. Анализ вероятностной задачи стимулирования

Прежде чем перейти к анализу вероятностных АС, рассмотрим задачу стимулирования в детерминированной одноэлементной статической активной системе [1]. Интересы центра и активного элемента выражены целевыми функциями $\Phi(y)$ и

$$(1) \qquad f(y,\sigma(\cdot)) = \sigma(y) - C(y),$$

соответственно, где $y \in A$ – действие АЭ (выбор действия из допустимого множества A – стратегия АЭ), $\sigma(y)$ – функция стимулирования (выбор функции стимулирования $\sigma(\cdot)$ из класса допустимых функций стимулирования M – стратегия центра), $C(y)$ – функция затрат активного элемента. Относительно целевых функций и допустимых множеств введем следующие предположения:

A1. $A = [0, A^+] \subseteq \mathbb{R}^1_+$, $A^+ < +\infty$,

A2. M – класс неотрицательных, кусочно-непрерывно дифференцируемых, равномерно ограниченных сверху строго положительной константой C функций, имеющих не более конечного числа скачков,

A3. $C(\cdot)$ – действительнозначная, определенная на $\mathbb{R}^1_+$ строго монотонно возрастающая дифференцируемая строго выпуклая функция, такая, что $C(0) = 0$, $C'(0) = 0$.

Эффективность механизма стимулирования определяется как гарантированное (по множеству решений игры) значение целевой функции центра [1]. В рамках введенных предположений максимальное множество согласованных планов (реализуемых действий) равно

$$S = [0, x_{\max}],$$

где $x_{\max} = \max\{x \in A \mid C(x) \leqslant C\}$ [1]. При этом оптимальными (реализующими любое действие $x \in S$ [2]) являются, в частности, следующие системы стимулирования [1, 3, 4]:

– С-типа (скачкообразная):

$$(2) \qquad \chi^c(y) = \begin{cases} C, & y \geqslant x \\ 0, & y < x \end{cases};$$

– слабо компенсаторная:

$$(3) \qquad \tilde{\chi}^k(y) = \begin{cases} C(y), & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases};$$

– К-типа (компенсаторная):

$$(4) \qquad \tilde{\chi}^k(y) = \begin{cases} C(y), & y \leqslant x \\ 0, & y > x \end{cases}.$$

При использовании любой из этих функций штрафов эффективность механизма стимулирования равна

$$(5) \qquad K = \max_{x \in S} \Phi(x).$$

Минимальные затраты на стимулирование (затраты центра на реализацию произвольного действия $x \in A$) для детерминированной задачи (FB-случай (от "first-best" [2])) равны

$$(6) \qquad C_{\mathrm{FB}}(x) = C(x), \quad x \in S,$$

для $x \notin S$ положим $C_{\mathrm{FB}}(x) = +\infty$. Очевидно, что если C достаточно велико ($x_{\max} \geqslant A^+$), то реализуемо любое допустимое действие. Если центр не использует стимулирования, то АЭ выбирает действие, минимизирующее затраты (Least-Cost Action (LCA) [7]), которое в рассматриваемой модели соответствует $y \equiv 0$. В дальнейшем мы будем предполагать:

А4. $\Phi(\cdot)$ – монотонно возрастающая функция.

Если наложено дополнительное ограничение $f(x) \geqslant \overline{U}$ (Reservation Wage Constraint (RWC) [2]), то правая граница множества согласованных планов определяется

$$x_{\max} = \max\{x \in A \,|\, C(x) \leqslant C - \overline{U}\}.$$

Понятно, что если выполнено А4, то в равновесии ограничение RWC существенно.

Перейдем теперь к рассмотрению вероятностной задачи стимулирования. Предположим, следуя моделям, описанным в [4, 7], что результат деятельности АЭ $z \in A_0$ – случайная величина, определяемая действием АЭ и состоянием природы. Центру и активному элементу на момент выбора стратегий известно распределение вероятностей $p(z, y)$, $z \in A_0$, $y \in A$. Введем дальнейшие предположения:

А5. $A_0 = A$.

А6. $\forall y \in A$ плотность распределения вероятности $p(z, y)$ – унимодальная дважды кусочно-непрерывно дифференцируемая функция, $E\ z = y$, где E – оператор математического ожидания; соответствующая ей интегральная функция распределения $F(z, y)$ удовлетворяет

$$\forall y \in A \quad F(0, y) = 0, \quad F(A^+, y) = 1$$

и не возрастает по y.

Иногда мы будем использовать “усиленную версию” этого предположения:

А6′. Пусть выполнено А6 и $\exists \widehat{p}(\cdot)$: $\forall z \in A_0$, $y \in A$,

$$p(z, y) = \widehat{p}(z - y).$$

Отметим, что предположения А1–А6 практически совпадают с предположениями, вводимыми в работах [3–5].

Порядок функционирования АС следующий: центр сообщает АЭ функцию стимулирования (определяющую выплаты элементу в зависимости от результатов его деятельности), затем АЭ выбирает действие, реализуется состояние природы, определяющее результат деятельности АЭ. Так как на момент выбора стратегий ни центр, ни АЭ не знают реализации состояния природы, то будем считать, что они стремятся максимизировать свои ожидаемые полезности:

– целевая функция центра, как и в детерминированной модели зависит только от действия АЭ;

– ожидаемая полезность АЭ имеет вид

$$f(y, \sigma(\cdot)) = \int_{A_0} \sigma(z) p(z, y) dz - C(y). \tag{7}$$

Множество решений игры при фиксированной функции стимулирования:

$$P(\sigma) = \{y^* \in A \,|\, f(y^*) \geqslant f(y)\, \forall y \in A\}.$$

Условие $y^* \in P(\sigma)$ получило название условия согласованности стимулирования (Incentive Compartibility Constraint (ICC) [2, 7]).

Обозначим $\widetilde{S}$ – множество всех действий, которые центр может реализовать, используя системы стимулирования из класса M; $C_{\mathrm{SB}}(x)$ (от “second best [2]”) – затраты на реализацию действия $x \in \widetilde{S}$, равные

$$C_{\mathrm{SB}}(x) = \int_{A_0} \sigma(z) p(z, x) dz. \tag{8}$$

Справедлива следующая лемма (ср. с леммой 1 работы [8]):

Лемма 1. Если выполнены А1–А6, *то* $\forall\sigma \in M$, $\forall x \in P(\sigma)$

$$C_{\text{SB}}(x) \geqslant C_{\text{FB}}(x).$$

Более того, если, вдобавок, функция стимулирования не равна тождественно нулю и имеет место

$$(9) \qquad \forall y \in A, \quad z \in A_0 \quad p(z, y) > 0,$$

то $C_{\text{SB}}(x) > C_{\text{FB}}(x)$.

Доказательства всех утверждений вынесены в приложение.

Лемма 1 фактически утверждает, что если выполнено условие (9), то затраты центра на реализацию любого действия в вероятностной модели строго больше, чем в детерминированной.

Структура множества реализуемых действий для исследуемой вероятностной активной системы устанавливается следующей теоремой.

Теорема 1. Пусть выполнены А1–А6. *Тогда* $\exists \widetilde{x}_{\max} \in A$, $\widetilde{x}_{\max} > 0$:

$$\widetilde{S} = [0, \widetilde{x}_{\max}].$$

Следующая теорема устанавливает соотношение между максимальными множествами реализуемых действий в вероятностной и соответствующей ей детерминированной активных системах.

Теорема 2. Пусть выполнено А1–А6. *Тогда* $\widetilde{S} \subseteq S$. *Если, вдобавок, имеет место* (9), *то* $\widetilde{S}$ *– собственное подмножество* S.

Теорема 2 позволяет сделать вывод, что при наличии вероятностной неопределенности эффективность стимулирования не выше, чем в соответствующей детерминированной АС. Результаты леммы 1 и теорем 1 и 2 справедливы и для моделей вероятностных АС, рассматриваемых в работах [3–5].

Итак, в настоящем разделе мы исследовали соотношение между эффективностями стимулирования в вероятностных и детерминированных АС. Следующий раздел посвящен изучению влияния величины вероятностной неопределенности на эффективность механизмов стимулирования в АС.

3. Неопределенность и эффективность стимулирования

Основной характеристикой неопределенности в рассматриваемых моделях является семейство вероятностных распределений $F(z, y)$, $y \in A$. Будем рассматривать энтропию

$$(10) \qquad H(y) = -\int_{A_0} p(z, y) \ln p(z, y) dz, \quad y \in A$$

как меру неопределенности результата деятельности АЭ при выборе им действия $y \in A$. Справедлива следующая

Лемма 2. Если выполнено А6′, *то неопределенность результатов деятельности АЭ одинакова для любого допустимого действия.*

Результат леммы 2 доказывается рассмотрением неопределенностей при выборе двух произвольных действий и подстановкой в (10), в соответствии с А6′, $p(z, y) = \widehat{p}(z - y)$. В общем случае, неопределенности результатов деятельности могут быть различны и зависеть от выбираемых АЭ действий (см., например, модель простого АЭ [3]).

Рассмотрим две вероятностные АС, удовлетворяющие А1–А6, и различающиеся только интегральными функциями распределения $F_1(z, y)$ и $F_2(z, y)$. Доопределим интегральные функции распределения, непрерывно продолжив их с $A_0 \times A$ на $\mathbb{R}^1 \times A$, следующим образом: $\forall y \in A$, если $z \leqslant 0$, то $F(z, y) \equiv 0$, если $z \geqslant A^+$, то $F(z, y) = 1$. Будем говорить, что первая АС характеризуется большей неопределенностью (в дальнейшем используется обозначение $F_1 \blacktriangleright F_2$), если выполнено следующее условие на интегральные функции распределения: $\forall y \in A$, $\forall \Delta \geqslant 0$

$$\text{(11)} \qquad \operatorname{Prob}\{z \in U_\Delta(y)\}_1 \leqslant \operatorname{Prob}\{z \in U_\Delta(y)\}_2,$$

или, что то же самое: $\forall y \in A$, $\forall \Delta \geqslant 0$

$$\text{(12)} \qquad F_1(y + \Delta, y) - F_1(y - \Delta, y) \leqslant F_2(y + \Delta, y) - F_2(y - \Delta, y).$$

Содержательно, если для любой Δ-окрестности действия АЭ результат его деятельности оказывается в этой окрестности в первой АС с большей вероятностью, чем во второй АС, то считается, что первая АС характеризуется меньшей неопределенностью.

Для симметричных распределений, удовлетворяющих А6$'$, (12) эквивалентно

$$\text{(13)} \qquad \forall \Delta \geqslant 0 \quad \widehat{F}_1(\Delta) \geqslant \widehat{F}_2(\Delta).$$

Для несимметричных распределений достаточным для $F_2 \blacktriangleright F_1$ является одновременное выполнение двух следующих условий: $\forall y \in A$

$$\text{(14)} \qquad \forall z \geqslant y \quad F_1(z, y) \geqslant F_2(z, y),$$

$$\text{(15)} \qquad \forall z \leqslant y \quad F_1(z, y) \leqslant F_2(z, y).$$

Очевидно, что если первая активная система является детерминированной, а вторая – вероятностной, то $\forall F_2$ $F_2 \blacktriangleright F_1$.

Исследуем, насколько критерий сравнения неопределенностей (11) согласован с энтропийным определением неопределенности результатов деятельности АЭ (10). Достаточность согласованности устанавливается следующей леммой.

Лемма 3. Пусть выполнены (14)–(15). *Тогда* $\forall y \in A$ $H_1(y) \leqslant H_2(y)$.

Пусть $\widetilde{S}_1$ и $\widetilde{S}_2$ – два максимальных множества реализуемых действий, соответствующие двум вероятностным АС, различающимся, единственно, функциями распределения F_1 и F_2. Исследуем, какую роль играет величина вероятностной неопределенности для эффективности механизма стимулирования в вероятностной АС. Справедлива следующая

Теорема 3. Если $\sigma(\cdot)$ – неубывающая функция и $F_2 \blacktriangleright F_1$, то $\widetilde{S}_2 \subseteq \widetilde{S}_1$.

Таким образом, мы показали, что в АС с вероятностной неопределенностью, чем больше неопределенность, тем меньше эффективность стимулирования.

4. Вероятностная неопределенность и надежность контрактов

В работе [5] было введено понятие надежности контракта, как характеристики, отражающей неопределенность результатов деятельности. Напомним, что при использовании системы стимулирования $\sigma \in M$, реализующей действие $y^* \in A$, и критическом значении результата деятельности $v \in A_0$, под надежностью контракта понимается вероятность того, что значение результата деятельности АЭ окажется не меньшим, чем критическое значение, т.е. надежность определяется следующим образом:

$$\text{(16)} \qquad q(v, y) = 1 - F(v, y).$$

Исследуем, как величина неопределенности влияет на надежность контракта. Пусть имеются две вероятностные АС, отличающиеся функциями распределения, причем $F_2 \blacktriangleright F_1$. Интуитивно понятно, что чем "больше" неопределенность, тем меньше надежность контракта (16). На самом деле это почти так.

Обозначим y_1^* и y_2^* – максимальные действия, реализуемые в первой и второй АС, соответственно. Справедлива следующая

Теорема 4. Если выполнено А1–А6 *и* $F_2 \blacktriangleright F_1$, *то*

а) $\forall v \leqslant y_1^* \;\; q(v, y_1^*) \geqslant q(v, y_2^*)$;

б) если, кроме того, выполнено А6, *то*

$$\forall v \in A_0 \quad q(v, y_1^*) \geqslant q(v, y_2^*).$$

"Почти" монотонная связь надежности контракта и величины неопределенности содержательно объясняется следующим образом. Теорема 4 оказывается верна только для критических значений результата деятельности АЭ, не меньших, чем максимальное из реализуемых (в одной и второй АС) действий. Такое нарушение "монотонности" кажется парадоксальным. На самом деле никакого парадокса тут нет. Определение величины неопределенности (11), несмотря на то, что оно согласовано с энтропийными оценками (лемма 3), не учитывает, насколько "хороша" или "плоха" неопределенность. Поясним вышесказанное на следующем примере. Пусть первая активная система является полностью детерминированной, а вторая – вероятностной, у которой плотность распределения отлична от нуля на всем множестве возможных результатов деятельности АЭ. Со всех точек зрения (с точки зрения здравого смысла, с точки зрения энтропийного определения (10) и с точки зрения критерия (11)), первая активная система обладает меньшей неопределенностью, чем вторая. Однако, если $v > y_1^*$ $(v < A^+)$, то надежность $q_1(v, y_1^*)$ тождественно равна нулю. В то же время, во второй активной системе существует отличная от нуля вероятность того, что результат деятельности превзойдет критическое значение (даже при "плохом" действии с отличной от нуля вероятностью реализуется благоприятное состояние природы, приводящее к "хорошему" результату).

5. Заключение

Таким образом, в настоящей работе исследовано влияние вероятностной неопределенности на эффективность стимулирования в активных системах. Полученные результаты вполне соответствуют интуитивному представлению о том, что эффективность управления системами с неопределенностью не превосходит эффективности управления соответствующими детерминированными системами (теорема 2), причем чем больше неопределенность, тем ниже эффективность (теорема 3) и ниже надежность контракта (теорема 4).

Следует отметить, что были рассмотрены простейшие – одноэлементные статические вероятностные АС. Обобщение полученных результатов на случай многоэлементных, динамических и многоуровневых АС с неопределенностью является, по-видимому, задачей будущих исследований.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Фиксируем произвольное $\sigma \in M$ и произвольное $x \in P(\sigma)$. Так как x – реализуемое действие, то

$$\int_{A_0} \sigma(z)p(z,x)dz - C(x) \geqslant \int_{A_0} \sigma(z)p(z,y)dz - C(y) \quad \forall y \in A.$$

Неравенство имеет место для произвольного допустимого действия АЭ. Подставляя LCA, получим

$$C_{\mathrm{SB}}(x) = \int\limits_{A_0} \sigma(z)p(z,x)dz \geqslant \int\limits_{A_0} \sigma(z)p(z,0)dz + C(x) =$$

$$= \int\limits_{A_0} \sigma(z)p(z,0)dz + C_{\mathrm{FB}}(x).$$

Первое слагаемое неотрицательно (как интеграл от произведения двух неотрицательных функций). Более того, если выполнено (9), то первое слагаемое строго положительно. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Разобьем доказательство на несколько этапов.

Этап 1. Покажем, что существует $\widetilde{x} > 0$, такой, что $\widetilde{x} \in \widetilde{S}$. Очевидно, $\{0\} \in \widetilde{S}$, так как выбирая систему стимулирования тождественно равную нулю, центр побуждает АЭ выбрать LCA. Поэтому покажем, что множество $\widetilde{S}$ содержит хотя бы еще одну точку, отличную от LCA. Для этого достаточно найти систему стимулирования $\widetilde{\sigma} \in M$, такую, что $P(\widetilde{\sigma}) \ni \widetilde{x} > 0$. Выберем $\widetilde{\sigma}$ в виде

$$\widetilde{\sigma}(z) = \begin{cases} 0, & z < \overline{x} \\ C, & z \geqslant \overline{x} \end{cases},$$

где $\overline{x}$ – некоторая точка из множества A_0. Действие $\widetilde{x}$ реализуется системой стимулирования $\widetilde{\sigma}$, если $\forall y \in A$ выполнено

$$\int\limits_{A_0} \widetilde{\sigma}(z)p(z,\widetilde{x})dz - C(\widetilde{x}) \geqslant \int\limits_{A_0} \widetilde{\sigma}(z)p(z,y)dz - C(y).$$

Покажем, что существует пара $\widetilde{x}, \overline{x} \in A_0$, такая, что приведенная выше система неравенств имеет место. Интегрируя по частям, получим:

$$\int\limits_{A_0} \frac{d\widetilde{\sigma}(z)}{dz}[F(z,y) - F(z,\widetilde{x})] \geqslant C(\widetilde{x}) - C(y) \quad \forall y \in A.$$

После несложных преобразований

$$CF(\overline{x}, y) + C(y) \geqslant CF(\overline{x}, \widetilde{x}) + C(\widetilde{x}) \quad \forall y \in A.$$

При фиксированном $\overline{x} \in A$, выберем

$$\widetilde{x}(\overline{x}) = \arg\min_{y \in A}[CF(\overline{x}, y) + C(y)].$$

В силу A1–A6 существует $\overline{x} \in A_0$, такой, что $\widetilde{x}(\overline{x}) > 0$ и приведенная выше система неравенств имеет место.

Этап 2. Покажем, что если $\widetilde{x} > 0$ – некоторое реализуемое действие, то любое меньшее неотрицательное действие также может быть реализовано. Пусть $\widetilde{\sigma} \in M$, $P(\widetilde{\sigma}) \ni \widetilde{x} > 0$. Надо показать, что $\forall \alpha \in (0,1)\ \exists \sigma \in M$: $\alpha\widetilde{x} \in P(\sigma)$.

Предположим противное, т.е. пусть $\exists \overline{\alpha} \in (0,1)$: $\forall \sigma \in M$: $\overline{\alpha}\,\widetilde{x} \notin P(\sigma)$. Иначе говоря, существует $y(\sigma) \in A$:

$$f(y(\sigma), \sigma) > f(\overline{\alpha}\,\widetilde{x}, \sigma).$$

Вычитая последнее условие из условия реализуемости действия $\widetilde{x}$ системой стимулирования $\widetilde{\sigma}$, получим:

$$\int_{A_0} \widetilde{\sigma}(z)p(z,\widetilde{x})dz - \int_{A_0} \sigma(z)p(z,\overline{\alpha}\,\widetilde{x})dz \geqslant C(\widetilde{x}) - C(\overline{\alpha}\,\widetilde{x}).$$

В силу А3 и так как $\overline{\alpha} \in (0,1)$ правая часть неравенства строго положительна. Итак, при фиксированных $\overline{\alpha} \in (0,1)$ и $\widetilde{x} \in \widetilde{S}$, $\forall \sigma \in M$ имеет место

$$\int_{A_0} \widetilde{\sigma}(z)p(z,\widetilde{x})dz > \int_{A_0} \sigma(z)p(z,\overline{\alpha}\,\widetilde{x})dz.$$

Левая часть неравенства не превышает C – противоречие.

Этап 3. Очевидно, $\exists \widetilde{x} > 0$, такой, что $\forall \delta > 0$ не существует $\sigma \in M$: $(\widetilde{x} + \delta) \in$ $\in P(\sigma)$.

Фактически, мы показали, что множество $\widetilde{S}$ замкнуто и ограничено, т.е. является компактом. Объединяя результаты предыдущих этапов доказательства, получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Выше было показано, что и $\widetilde{S}$, и S – отрезки в $\mathbb{R}^1_+$, причем левые границы этих отрезков совпадают и равны нулю. Исследуем, как соотносятся их правые границы. Включение $\widetilde{S} \subseteq S$ следует из леммы 1. Если выполнено (9), то, положив в доказательстве леммы 1, $x = \widetilde{x}_{\max}$, получим

$$C_{\mathrm{SB}}(\widetilde{x}_{\max}) > C_{\mathrm{FB}}(\widetilde{x}_{\max}) = C,$$

то есть $\int\limits_{A_0} \sigma(z)p(z,\widetilde{x}_{\max})dz > C$, что противоречит А2. Теорема доказана.

Доказательство леммы 3. Из условия А6 (унимодальности распределения) следует выпуклость $F_i(z,y)$ при $z \leqslant y$ и вогнутость $F_i(z,y)$ при $z \geqslant y$, $i = 1,2$. В силу условий леммы для носителей функции распределения справедливо следующее условие:

$$\mathrm{Supp}\, p_1 \subseteq \mathrm{Supp}\, p_2.$$

Из (10) следует, что минимум энтропии среди всех распределений F_2, удовлетворяющих (14)–(15), достигается на F_1. Следовательно $\forall y \in A$ $H_1(y) \leqslant H_2(y)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Затраты на стимулирование при выборе АЭ действия $x \in A$ и использовании центром системы стимулирования $\sigma \in M$ равны: $C_{\mathrm{SB}_i}(x,\sigma) = \int\limits_{A_0} \sigma(z)p(z,x)dz$, $i = 1,2$.

Фиксируем произвольное $\sigma \in M$ и произвольное $x \in A$. Оценим разность:

$$C_{\mathrm{SB}_1}(x,\sigma) - C_{\mathrm{SB}_2}(x,\sigma) = \int_{A_0} \sigma(z)p_1(z,x)dz - \int_{A_0} \sigma(z)p_2(z,x)dz.$$

Интегрируя по частям, получим,

$$C_{\mathrm{SB}_1}(x,\sigma) - C_{\mathrm{SB}_2}(x,\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(z)}{dz}[F_2(z,x) - F_1(z,x)]dz =$$

$$= \int_0^{+\infty} -\left(\frac{d\sigma(x-t)}{d(x-t)}\right)[F_2(x-t,x) - F_1(x-t,x)]dt +$$

$$+ \int_0^{+\infty} \left(\frac{d\sigma(x+t)}{d(x+t)}\right)[F_2(x+t,x) - F_1(x+t,x)]dt =$$

$$= - \int_0^{+\infty} (\sigma')[F_1(x+t,x) - F_1(x-t,x) - F_2(x+t,x) + F_2(x-t,x)]dt.$$

В силу А2, условий теоремы и (12) значение интеграла неотрицательно. Значит $\forall \sigma \in M$, $\forall x \in A$

$$C_{\mathrm{SB}_1}(x,\sigma) \leqslant C_{\mathrm{SB}_2}(x,\sigma),$$

то есть $\forall \widetilde{x} \in \widetilde{S}_2$, $\exists \widetilde{\sigma}_1 \in M$: $\widetilde{x} \in P(\widetilde{\sigma}_1)$, следовательно $\widetilde{x} \in \widetilde{S}_1$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. Второе утверждение теоремы тривиально следует из предположения А6′ и (12) (см., также (13)). Докажем первое утверждение.

Из теоремы 3 следует, что $y_1^* \geqslant y_2^*$. Оценим разность

$$q_1(v, y_1^*) - q_2(v, y_2^*).$$

Для этого рассмотрим следующие случаи.

Пусть $v \leqslant y_2^*$. Тогда из (14), (15) следует, что

$$F_2(v, y_2^*) \geqslant F_1(v, y_2^*),$$

а из А6 следует, что

$$F_1(v, y_2^*) \geqslant F_1(v, y_1^*).$$

Пусть $v \in [y_2^*, y_1^*]$. Тогда из А6 следует, что

$$F_2(v, y_2^*) \geqslant F_2(v, y_1^*),$$

а из (14), (15) следует, что

$$F_2(v, y_1^*) \geqslant F_1(v, y_1^*).$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурков В.Н., Новиков Д.А.* Введение в теорию активных систем. М.: ИПУ РАН, 1996.
2. *Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А.* Механизмы стимулирования в вероятностных моделях социально-экономических систем // АиТ. 1993. № 11. С. 3–30.
3. *Бурков В.Н., Новиков Д.А.* Оптимальные механизмы стимулирования в активных системах с вероятностной неопределенностью. II // АиТ. 1995. № 10. С. 121–126.
4. *Еналеев А.К., Новиков Д.А.* Оптимальные механизмы стимулирования в активных системах с вероятностной неопределенностью. I // АиТ. 1995. № 9. С. 117–126.
5. *Новиков Д.А.* Оптимальные механизмы стимулирования в активных системах с вероятностной неопределенностью. III // АиТ. 1995. № 12. С. 118–123.

6. *Новиков Д.А.* Механизмы стимулирования в динамических и многоэлементных социально-экономических системах // АиТ. 1997. № 6. С. 3–26.
7. *Новиков Д.А.* Механизмы гибкого планирования в активных системах с неопределенностью // АиТ. 1997. № 5. С. 118–125.
8. *Grossman S., Hart O.D.* An analysis of the principal-agent problem // Econometrica. 1983. V. 51. № 1. P. 7–45.
9. *Kim S.K.* Efficiency of an information system in an agency model // Econometrica. 1995. V. 63. № 1. P. 89–102.

Поступила в редакцию 18.07.96