Автоматика и телемеханика, № 9, 1997

УДК 519.6

© 1997 г. **Д.А. НОВИКОВ, канд. техн. наук**
(Институт проблем управления РАН, Москва)

ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕХАНИЗМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ В АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ С НЕЧЕТКОЙ ВНЕШНЕЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

Рассматривается задача стимулирования в активной системе, функционирующей в условиях нечеткой неопределенности относительно состояния природы, влияющего на результаты деятельности активного элемента. Доказывается теорема об оптимальности систем стимулирования С-типа [1].

Рассмотрим активную систему (АС), состоящую из управляющего органа – центра и одного управляемого объекта – активного элемента (АЭ) [1]. Стратегией элемента является выбор действия $y \in A$. Выбираемое АЭ действие совместно с реализацией состояния природы $\theta \in \Omega$ (внешнего по отношению к АС параметра) приводит к некоторому результату деятельности $z \in A_0$, $z = z(y, \theta)$, т.е. имеет место внешняя неопределенность [2]. Целевая функция центра $\Phi(y)$ зависит от действий, выбираемых АЭ. Целевая функция АЭ

$$f(z) = h(z) - \chi(z) \qquad (1)$$

представляет собой разность между доходом $h(z)$ и штрафами $\chi(z) \in M$, назначаемыми центром. Действие АЭ известно только ему самому и не наблюдается центром, в то время как результат деятельности наблюдается центром.

Предположим, что на момент выбора стратегий участниками АС значение состояния природы им неизвестно, т.е. их целевые функции оказываются зависящими от неопределенного параметра θ. Для определения рационального выбора необходимо задать процедуру устранения неопределенности. Используемая процедура устранения неопределенности, естественно, зависит от имеющейся у участников АС информации о состоянии природы. Так, если известно только множество его возможных значений Ω, то игроки могут рассчитывать, например, на максимальный гарантированный результат [1, 2]. Если игрокам известно распределение вероятностей $p(\theta)$, то рациональным целесообразно считать выбор, максимизирующий ожидаемую полезность (как это делается в теории контрактов [2]), и т.д. В рассматриваемой в настоящей работе модели считается, что и центр, и активный элемент имеют одинаковую нечеткую информацию о состоянии природы, т.е. предполагается, что им известна нечеткая функция $\underset{\sim}{P} : A_0 \times A \to [0, 1]$. Если $y \in A$ – некоторое фиксированное действие, то определенная на A_0 функция $\underset{\sim}{P}(z, y)$ есть функция принадлежности результата деятельности [3].

Так как результат деятельности зависит и от действия АЭ, и от состояния природы, то для определения рационального выбора АЭ на множестве A, необходимо, с учетом имеющейся у АЭ информации о состоянии природы, определить, какое нечеткое отношение предпочтения (НОП) индуцируется на множестве возможных действий целевой функцией АЭ (1). Для этого, используя подход, предложенный в [4], найдем НОП $\underset{\sim}{R}_A$ на множестве возможных действий:

$$\mu_{\underset{\sim}{R}_A}(y_1, y_2) = \sup_{z, x \in A_0} \min \left[\underset{\sim}{P}(x, y_1), \underset{\sim}{P}(z, y_2), \mu_{R}(x, z) \right], \qquad (2)$$

где $\mu_{R}(x, z)$ – функция принадлежности отношения предпочтения (четкого), индуцированного на множестве A_0 целевой функцией АЭ.

Имея заданное на множестве возможных действий НОП $\mu_{\underset{\sim}{R}_A}$, определим, как это делалось в работе [4], степень недоминируемости действия $x \in A$ следующим образом:

$$(3)\qquad \mu^{\text{нд}}_{\underset{\sim}{R}_A}(x) = 1 - \sup_{y\in A}\Bigg[\sup_{\substack{z,t\in A_0\\ f(z)\geqslant f(t)}} \min\{\underset{\sim}{P}(z,y),\, \underset{\sim}{P}(t,x)\} - $$
$$- \sup_{\substack{z,t\in A_0\\ f(t)\geqslant f(z)}} \min\{\underset{\sim}{P}(t,x),\, \underset{\sim}{P}(z,y)\}\Bigg].$$

Рациональным будем считать выбор АЭ действий, для которых функция (3) принимает возможно большие значения, т.е. действия из множества максимально недоминируемых действий

$$A^{\text{нд}}(\chi) = \left\{ x \in A \mid \mu^{\text{нд}}_{\underset{\sim}{R}_A}(x) = \sup_{y\in A}\mu^{\text{нд}}_{\underset{\sim}{R}_A}(y)\right\}.$$

Теперь имеется все необходимое для того, чтобы сформулировать задачу стимулирования. Так как множество недоминируемых действий зависит от функции штрафов, то множество решений игры обозначим $P(\chi) = A^{\text{нд}}(\chi)$. Если выполнена гипотеза благожелательности (ГБ) [1], то эффективностью $K(\chi)$ механизма стимулирования χ является максимальное на множестве решений игры значение целевой функции центра [1]:

$$(4)\qquad K(\chi) = \max_{x\in P(\chi)} \Phi(x),$$

если ГБ не выполнена, то используется гарантированный результат:

$$K(\chi) = \min_{x\in P(\chi)} \Phi(x).$$

Задача синтеза оптимальной функции стимулирования заключается в поиске допустимой системы стимулирования, имеющей максимальную эффективность.

Введем следующие предположения:

А1. $A = A_0$ – отрезок в $\mathbb{R}^1$;

А2. $M = \{\chi(\cdot) \mid 0 \leqslant \chi(z) \leqslant C,\ \forall z \in A_0\}$;

А3. $h(\cdot)$ – квазиоднопиковая функция [1];

А4. Нечеткие множества $\underset{\sim}{P}(z,y)$ 1-нормальны, т.е. $\forall y \in A\ \sup_{z\in A_0}\underset{\sim}{P}(z,y) = 1$ и $\forall z \in A_0\ \exists y \in A$: $\underset{\sim}{P}(z,y) = 1$, а функция $\underset{\sim}{P}$ полунепрерывна сверху.

Использование выражения (3) (для определения степени недоминируемости действия и рационального выбора АЭ при решении задачи синтеза оптимальной функции стимулирования) представляется достаточно громоздким и трудоемким. Результат следующей леммы существенно облегчает анализ.

Лемма 1. Если (z_0, y_0) – решение следующей задачи четкого математического программирования

$$(5)\qquad \begin{cases} f(z) \to \max, \\ \underset{\sim}{P}(z,y) = 1, \\ y \in A, \quad z \in A_0, \end{cases}$$

то $\mu^{\text{нд}}_{\underset{\sim}{R}_A}(y_0) = 1$, т.е. y_0 – четко недоминируемое действие.

Лемма 1 является обобщением теоремы 4.3.1 работы [4] и ее доказательство не приводится. В силу предположений А1–А4 множество четко недоминируемых действий непусто.

Так как в соответствии с введенными выше предположениями функция дохода АЭ квазиоднопиковая, а функция штрафов ограничена, то множество P точек максимума целевой функции АЭ при $\chi \in M$ ограничено и представляет собой отрезок $[z^-, z^+] \subseteq A_0$ [1], где

$$z^- = \min\left\{z \in A_0 \mid h(z) \geqslant h(p^\pm) - C\right\},$$
$$z^+ = \max\left\{z \in A_0 \mid h(z) \geqslant h(p^\pm) - C\right\},$$

где $p^\pm \in [p^-, p^+]$ произвольная точка пика (плато) функции $h(z)$.

Более того, известно, что множество $[z^-, z^+]$ достижимо при использовании только систем стимулирования С-типа [1]:

$$\chi_c(x, z) = \begin{cases} C, & z < (>)\, x \\ 0, & z \geqslant (\leqslant)\, x \end{cases}. \qquad (6)$$

При использовании функции штрафов (6) максимум целевой функции АЭ (1) достигается в точке $x \in [z^-, z^+]$. Фиксируем $\widetilde{x} \in [z^-, z^+]$ и обозначим

$$Q(\widetilde{x}) = \left\{y \in A \mid \underset{\sim}{P}(\widetilde{x}, y) = 1\right\}. \qquad (7)$$

Лемма 2. Если выполнена ГБ, то для любого $\widetilde{x} \in P$ и для любого $y \in Q(\widetilde{x})$ найдется система стимулирования $\chi \in M$ (а именно, $\chi_c(\widetilde{x}, z)$), такая, что действие y будет принадлежать множеству четко недоминируемых действий.

Доказательство. При использовании системы стимулирования $\chi_c(\widetilde{x}, z)$, $\widetilde{x} \in \operatorname{Arg}\max\limits_{z \in A_0} f(z)$. В силу предположений А1–А4 множество Q непусто, а пара $(\widetilde{x}, y)$, где $y \in Q(\widetilde{x})$, является решением задачи (5). Тогда, по лемме 1, y – четко недоминируемое действие. Лемма 2 доказана.

Обозначим $S = \bigcup\limits_{\chi \in M} P(\chi)$ – множество достижимости [1]. На основании леммы 2 получаем следующий результат.

Лемма 3. Если выполнена ГБ, то $S = \bigcup\limits_{x \in P} Q(x)$; если ГБ не выполнена, а целевая функция центра монотонно возрастает, то

$$S = \bigcup_{x \in P} \min\{y \in A \mid y \in Q(x)\}.$$

Справедливость утверждения леммы 3 следует из того, что любое четко недоминируемое действие принадлежит одному из множеств (7).

Так как $[z^-, z^+]$ – максимальное множество достижимости, то леммы 1–3 обосновывают справедливость следующего результата.

Теорема 1. Решение задачи синтеза оптимальной функции стимулирования в активной системе с нечеткой внешней неопределенностью совпадает с решением следующей задачи:

$$\Phi(x) \to \max_{x \in S}.$$

Следствие. Для любой системы стимулирования $\chi \in M$ существует система стимулирования С-типа не меньшей эффективности, т.е. при поиске оптимального механизма стимулирования в рассматриваемой нечеткой AC достаточно ограничиться классом скачкообразных систем стимулирования.

Легко видеть, что в предельном случае – при отсутствии неопределенности (когда $z \equiv y$, т.е. $\underset{\sim}{P}(z,y) = 1$ при $z = y$ и $\underset{\sim}{P}(z,y) = 0$ при $z \neq y$) – $\underset{\sim}{Q}(x) \equiv x$, $\underset{\sim}{P}(\mathcal{X})$ тождественно равно x при $\mathcal{X} = \mathcal{X}_c(x,z)$ и $x \in P$, а множество достижимости совпадает с отрезком $[z^-, z^+]$. Задача стимулирования при этом переходит в задачу оптимального согласованного планирования [1]: $\Phi(x) \to \max\limits_{x \in P}$.

Сравним эффективности K и K_0 оптимальных решений задач стимулирования в рассматриваемой нечеткой АС и соответствующей детерминированной АС.

Теорема 2. *Если выполнена ГБ, то $K \geqslant K_0$; если ГБ не выполнена, то $K \leqslant K_0$.*

Справедливость утверждения теоремы 2 следует из того, что для некоторых $x \in P$ в нечеткой АС могут существовать действия АЭ $y \in A$, $y \neq x$, такие, что $\underset{\sim}{P}(x,y) = 1$ (см. леммы 1, 3 и (7)).

Следствие. *Если $\forall y \in A$ $\arg\max\limits_{z \in A_0} \underset{\sim}{P}(z,y) = y$ и $\forall z \neq y$, $\underset{\sim}{P}(z,y) < 1$, то $K = K_0$.*

В заключение настоящей работы исследуем влияние неопределенности на эффективность механизма стимулирования. Рассмотрим две нечеткие активные системы, в которых центр и активный элемент обладают нечеткой информацией $\underset{\sim}{P}_1(z,y)$ – в первой АС и $\underset{\sim}{P}_2(z,y)$ – во второй АС, $y \in A$, $z \in A_0$. Будем считать, что в первой АС участники обладают большей информацией (соответственно, неопределенность меньше), если $\forall y \in A$, $z \in A_0$ выполнено $\underset{\sim}{P}_1(z,y) \leqslant \underset{\sim}{P}_2(z,y)$ [3]. Обозначим K_1 и K_2 – эффективности механизмов стимулирования в первой и второй АС, соответственно.

Теорема 3. *Если выполнена ГБ, то $K_1 \leqslant K_2$; если ГБ не выполнена, то $K_1 \geqslant K_2$.*

Справедливость утверждения теоремы 3 следует из того, что для любого $y \in A$ множества 1-уровня нечеткой функции $\underset{\sim}{P}_2(z,y)$ включают множества 1-уровня нечеткой функции $\underset{\sim}{P}_1(z,y)$.

Результаты теорем 2 и 3 вполне соответствуют интуитивному представлению о том, что гарантированная эффективность управления в условиях неопределенности не превышает эффективности управления при полной информированности, причем, чем "больше" неопределенность, тем ниже эффективность управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурков В.Н., Новиков Д.А.* Введение в теорию активных систем. М.: ИПУ РАН, 1996.
2. *Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А.* Механизмы стимулирования в вероятностных моделях социально-экономических систем // АиТ. 1993. № 11. С. 3–30.
3. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь, 1982.
4. *Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука, 1981.

Поступила в редакцию 29.10.96