УДК 519:301

МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ВОЗБУЖДЕНИЕМ СЕТИ

Д.А. Новиков
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: novikov@ipu.ru

Ключевые слова: социальная сеть, возбуждение сети, пороговое поведение, централизованное управление, децентрализованное управление, распределенный контроль, управление толпой

Аннотация: Рассматриваются модели централизованного, децентрализованного и распределенного управления возбуждением сети взаимодействующих целенаправленных агентов. В качестве примеров анализируются модели порогового поведения и модели управления толпой.

1. Введение

Содержательная постановка задачи. Пусть имеется множество взаимосвязанных (в смысле влияния друг на друга при принятии решений) агентов. Изменение состояний некоторых агентов в начальный момент времени приводит к тому, что под влиянием этих изменений меняются и состояния других агентов. Природа и характер подобной динамики могут быть различными, в зависимости о содержательной интерпретации сети – это и модели распространения возбуждения в биологической сети (например, сети нейронов [30]), модели отказов (в более общем случае – структурной динамики) в информационно-управляющих и сложных технических системах [8, 13], модели диффузии инноваций, модели информационной безопасности, модели просачивания/заражения, модели консенсуса и др. – см. обзор в [5].

Задача управления (целенаправленного «возбуждения» сети) заключается в поиске такого множества агентов, на которых оказывается определенное первоначальное воздействие, при котором сеть оказывается в требуемом состоянии. В такую абстрактную постановку вписываются задачи информационного управления в социальных сетях [5, 17], управления коллективным пороговым поведением [2, 20, 21], обеспечения информационной безопасности [5] и др. Для определенности изложение будем вести в терминах социальных сетей.

Сеть. Пусть $N = \{1, 2, ..., n\}$ – конечное множество *агентов*, входящих в *социальную сеть*, описываемую ориентированным графом $\Gamma = (N , E)$, где $E \subseteq N \times N$ – множество дуг. Пусть каждый агент может находиться в одном из двух состояний – «0» или «1» (например, бездействовать или действовать, не быть или быть в возбужденном состоянии). Обозначим через $y_i \in \{0; 1\}$ состояние i-го агента, $i \in N$, через $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ – вектор их состояний. Условно переход от бездействия к действию будем называть «возбуждением» соответствующего агента.

Поведение агентов. Предположим, что первоначально все агенты бездействуют, а динамика сети описывается отображением Φ: $2^N \to 2^N$, где $\Phi(S) \subseteq N$ – множество агентов, находящихся в состоянии «1» после окончания переходного процесса, вызванного *«возбуждением» сети* – изменением в начальный момент времени (отметим, что в настоящей работе считается, что управленческие воздействия оказываются однократно) состояний (с бездействия на действие) агентов из множества (*коалиции*) $S \subseteq N$.

Относительно отображения $\Phi(\cdot)$ предположим, что оно обладает следующими свойствами:

А.1 («рефлексивность»). $\forall\ S \subseteq N$ выполнено $S \subseteq \Phi(S)$;

А.2 («монотонность»). $\forall\ S,\ U \subseteq N$: $S \subseteq U$ выполнено $\Phi(S) \subseteq \Phi(U)$.

А.3. («выпуклость»). $\forall\ S,\ U \subseteq N$: $S \cap U = \varnothing$ выполнено $\Phi(S) \cup \Phi(U) \subseteq \Phi(S \cup U)$.

По заданному отображению $\Phi(\cdot)$ можно определить функцию $\hat{G} = \{0;\ 1\}^n \to \{0;\ 1\}^n$, которая вектору y начальных состояний агентов ставит в соответствие вектор их конечных состояний:

$$\hat{G}_i(y) = \begin{cases} 1, \text{ если } i \in \Phi(\{j \in N \mid y_j = 1\}) \\ \quad\quad\quad 0, \text{ иначе} \end{cases}.$$

Также можно определить состояния агентов, которые «опосредованно возбуждаются»:

$$G_i(y) = \begin{cases} 1, \text{ если } \hat{G}_i(y) = 1 \text{ и } y_i = 0 \\ \quad\quad 0, \text{ иначе} \end{cases},\ i \in N.$$

Структура изложения материала настоящей работы следующая: сначала (раздел 2) формулируется задача централизованного управления возбуждением сети и приводится ее пример для случая порогового поведения агентов. Затем (раздел 3) дается постановка задачи децентрализованного управления, при котором агенты самостоятельно принимают решения о своем «возбуждении», и исследуется вопрос о реализуемости (с теоретико-игровой точки зрения) эффективных или заданных состояний сети. В качестве примера рассматривается задача управления толпой. В четвертом разделе приводится описание модели информационного противоборства субъектов, заинтересованных в тех или иных состояниях сети и имеющих возможность оказывать на нее управляющие воздействия. Заключение содержит обсуждение перспективных направлений исследований моделей управления возбуждением сети.

2. Задача централизованного управления

Пусть заданы функции множеств C: $2^N \to \Re^1$ и H: $2^N \to \Re^1$, интерпретируемые как затраты $C(S)$ на начальное изменение состояния агентов из коалиции S и соответственно как выигрыш $H(W)$ от результирующего «возбуждения» коалиции W, где $S,\ W \in 2^N$. То, какие субъекты несут эти затраты, определяется ниже в зависимости от конкретной постановки задачи.

Целевую функцию субъекта, осуществляющего управление (назовем его *центром*), представим в виде разности между выигрышем и затратами. Тогда *задача централизованного управления* будет заключаться в выборе центром такого множества первоначально возбуждаемых агентов, которое максимизировало бы его целевую функцию $v(S)$:

(1) $$v(S) = H(\Phi(S)) - C(S) \to \max_{S \subseteq N},$$

то есть, в данном случае затраты несет центр и выигрыш получает он же.

Решение $S^* \subseteq N$ дискретной задачи (1) в общем случае (без введения дополнительных предположений о свойствах функций $C(\cdot)$ и $H(\cdot)$, а также отображения $\Phi(\cdot)$) требует перебора всех 2^n возможных коалиций. Отдельный интерес представляет разработка эффективных методов решения этой задачи (примерами удачных постановок задач оптимизации состава системы, в которых удается использовать достаточно простые алгоритмы, являются [27, 31, 36 и др.]). Состояние S^* социальной сети, максимизирующее целевую функцию (1), назовем *эффективным*.

Частным является случай аддитивных по агентам функций затрат и выигрыша:

$$u(S) = \sum_{i \in \Phi(S)} H_i - \sum_{j \in S} c_j \,, \tag{2}$$

где $(c_i, H_i)_{i \in N}$ – заданные неотрицательные константы. Пока для простоты будем рассматривать именно аддитивный случай (2).

В задаче централизованного управления агенты (узлы сети) в определенном смысле пассивны – агенты из множества S «возбуждаются» центром, затем это возбуждение распространяется в соответствии с оператором $\Phi(\cdot)$.

Отметим, что возможны и другие постановки задачи управления, например, максимизация выигрыша при ограниченности затрат (при аддитивных по агентам функциях затрат и выигрыша соответствующая задача будет задачей о ранце) или минимизация затрат на обеспечение заданной величины выигрыша и т.д.

Для больших сетей (сетей, содержащих большое число агентов) дискретные задачи типа (1) обладают высокой вычислительной сложностью, поэтому в этих случаях целесообразно рассмотрение сетей как случайных графов с заданными вероятностными характеристиками [14, 18, 19], и постановка задачи управления в терминах ожидаемых значений (например, экстремизации математического ожидания числа возбужденных агентов) – см. [2, 3].

Пример: пороговое поведение. Агенты в сети *влияют* друг на друга – наличие дуги (i, j) от вершины i к вершине j соответствует влиянию i-го агента на j-го (будем считать, что петли отсутствуют). Обозначим через $N^{\text{in}}(i) = \{j \in N \mid \exists\ (j; i) \in E\}$ множество «*соседей*» – агентов, влияющих на i-го агента («предшественников»), через $N^{\text{out}}(i) = \{j \in N \mid \exists\ (i; j) \in E\}$ – множество агентов («последователей»), на которые влияет i-ый агент, $n^{\text{out}}(i) = |N^{\text{out}}(i)\}$, $n^{\text{in}}(i) = |N^{\text{in}}(i)|$.

Процесс коллективного принятия агентами решений можно описывать различными моделями (см. обзоры в [2, 5, 9, 12], модели консенсуса [1, 17] типа модели Де Грота [29]). Рассмотрим в качестве примера частный случай порогового поведения агентов [2, 20]:

$$y_i^t = \begin{cases} 1, \dfrac{1}{n-1} \sum\limits_{j \in N^{in}(i)} y_j^{t-1} \ge \theta_i \\ \quad y_i^{t-1}, \text{иначе} \end{cases}, \tag{3}$$

где y_i^t – состояние i-го агента в момент времени t, $\theta_i \in [0; 1]$ – порог этого агента, $t = 1, 2, \ldots$; при заданных начальных условиях: $y_i^0 = y_i$, $i \in N$. В модели (3) считается, что, будучи один раз возбужденным (в результате управленческого воздействия или под воздействием уже возбужденных соседей), агент не может вернуться к «бездействию». Очевидно, что для любого графа Γ в рамках динамики, описываемой выражением (3): число действующих агентов со временем не убывает, переходный процесс заканчивается не более чем за n шагов, соответствие между начальным и конечным состояниями удовлетворяет предположениям А1-А.3.

Представляет интерес частный случай *порогового поведения при единичных порогах* ($\theta_i = 1$, $i \in N$), то есть когда для возбуждения агента достаточно, чтобы возбудился хотя бы один из его предшественников. Соответствующее отображение $\Phi(\cdot)$ будет «*линейно*»: $\forall\ S, U \subseteq N$: $S \cap U = \varnothing$ выполнено $\Phi(S) \cup \Phi(U) = \Phi(S \cup U)$, то есть его можно представить в виде $\Phi_0(S) = \bigcup_{i \in S} \Phi_0(\{i\})$. А функция (2) при этом субаддитивна, т.е. $\forall\ S, U \subseteq N$: $S \cap U = \varnothing$ выполнено $u(S \cup U) \le u(S) + u(U)$.

Пусть граф Γ ацикличен, а затраты на первоначальное возбуждение любого агента одни и те же и равны c (удельные затраты). Найдем для каждого агента $i \in N$ множество M_i всех его «*косвенных последователей*», то есть таких агентов (включая его самого), к которым в рассматриваемом графе есть путь от данного агента. Вычислим $h_i = \sum_{j \in M_i} H_j$ – выигрыш от возбуждения i-го агента. В силу ацикличности графа и одинаковости затрат, имеет смысл возбуждать только агентов, не имеющих предшественников (обозначим множество таких агентов через $M \subseteq N$). Тогда задача (1) примет вид:

$$\sum_{j \in \bigcup_{i \in S} M_i} H_j - c\,|S| \to \max_{S \subseteq N}.$$

Несмотря на введение множества упрощающих предположений (пороговое поведение, единичность порогов, равенство затрат, ацикличность графа влияния), получающаяся задача централизованного управления все равно не допускает аналитического решения и требует перебора всех подмножеств множества M. Для ее решения можно использовать различные эвристики – например, считать «оптимальным» возбуждение тех агентов, для которых выигрыш превышает затраты: $S^* = \{i \in M \mid h_i \ge c\}$; или упорядочить агентов из множества M в порядке убывания величин h_i и включать их в искомое множество, начиная с первого до тех пор, пока прирост соответствующего «выигрыша» превышает удельные затраты.

Итак, задачи централизованного управления возбуждением сети редко допускают простые решения. Рассмотрим возможные постановки и методы решения *задач децентрализованного управления* – когда агенты принимают решения о «возбуждении» самостоятельно.

3. Задачи децентрализованного управления

Пусть задан *механизм* (процедура принятия управленческих решений [31]) $\sigma = \{\sigma_i(G(y)) \ge 0\}_{i \in N}$ распределения выигрышей между агентами, причем дополнительные (в соответствии с механизмом σ) выигрыши могут получать только те агенты, которые в начальный момент времени действовали (распределению подлежит «выигрыш» от опосредованного возбуждения других агентов).

Предположим, что агенты активны, то есть в начальный момент времени при известном им механизме σ они однократно одновременно и независимо принимают решение о своем состоянии – будут они действовать или бездействовать. Дальнейшая динамика состояний агентов описывается по-прежнему оператором $\Phi(\cdot)$.

Целевую функцию i-го агента $f_i(y)$ будем считать равной разности между его выигрышем и затратами:

(4) $$f_i(y) = \sigma_i(G(y)) + (H_i - c_i)\, y_i,\ i \in N.$$

Здесь, если агент принимает решение возбудиться, то он несет затраты на свое возбуждение и получает выигрыш H_i, плюс то, что он получает от центра в соответствии с механизмом. «*Самовозбуждением*» будем называть выгодность для агента возбудиться независимо от используемого механизма. Из (4) следует, что, если для i-го агента выполнено $H_i > c_i$, то он самовозбуждается. Для исключения «самовозбуждения» активных агентов в дальнейшем, если не оговорено особо, будем считать, что выполнено условие $c_i > H_i$, $i \in N$.

Возможны различные механизмы распределения выигрыша между агентами. Типовыми примерами являются следующие *сбалансированные* (то есть, такие, в которых сумма выигрышей агентов равна выигрышу центра от «опосредованного возбуждения») механизмы – *механизм равного распределения*:

$$\sigma_i(G(y)) = \frac{\sum_{j \in N} H_j G_j(y)}{\sum_{j \in N} y_j} y_i, \; i \in N, \tag{5}$$

механизм распределения пропорционально затратам:

$$\sigma_i(G(y)) = \frac{\sum_{j \in N} H_j G_j(y)}{\sum_{k \in N} c_k y_k} c_i y_i, \; i \in N \tag{6}$$

и *механизм распределения пропорционально предельному вкладу*:

$$\sigma_i(G(y)) = \frac{[\sum_{j \in N} H_j G_j(y) - \sum_{j \in N} H_j G_j(y_{-i}, 0)]}{\sum_{k \in N} y_k [\sum_{j \in N} H_j G_j(y) - \sum_{j \in N} H_j G_j(y_{-k}, 0)]} \sum_{j \in N} H_j G_j(y) y_i, \; i \in N. \tag{7}$$

В соответствии с выражениями (4)-(7), центр перераспределяет между теми агентами, кто сам первоначально возбудился, выигрыш от опосредованного возбуждения ими других агентов. При этом на опосредованное возбуждение никто не несет затрат.

Равновесные и эффективные состояния сети. Вектор y^* по определению является *равновесием Нэша* [6, 32] игры агентов, если

$$\sigma_i(G(y^*)) + (H_i - c_i)\, y^*_i \geq \sigma_i(G(y^*_{-i}, 1 - y^*_i)) + (H_i - c_i)\,(1 - y^*_i), \; i \in N, \tag{8}$$

где $y_{-i} = (y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)$ – обстановка игры для i-го агента.

В равновесии Нэша действующим агентам невыгодно изменять свое состояние на бездействие (при условии, что остальные не меняют своих состояний), а бездействующим агентам невыгодно изменять свое состояние на действие. То есть, для действующих агентов (то есть таких агентов $i \in N$, что $y_i^* = 1$) выполнено

$$\sigma_i(G(y^*)) + H_i \geq c_i, \tag{9}$$

а для бездействующих агентов (то есть таких агентов $i \in N$, что $y_i^* = 0$) выполнено

$$\sigma_i(G(y_{-i}^*, 1)) + H_i \leq c_i. \tag{10}$$

Запишем и проанализируем условия (9)-(10) для механизма (5). В механизме равного распределения для действующих в равновесии агентов

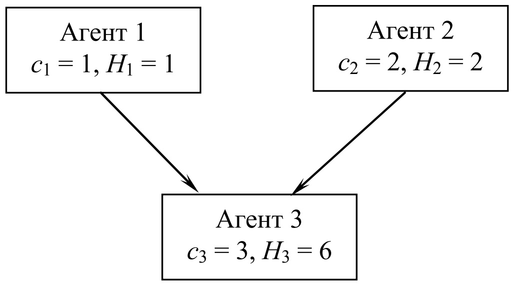
$$\frac{\sum_{j \in N} H_j G_j(y^*)}{\sum_{j \in N} y_j^*} + H_i \geq c_i, \tag{11}$$

а для бездействующих в равновесии агентов

$$c_i \geq \frac{\sum_{j \in N} H_j G_j(y_{-i}^*, 1)}{\sum_{j \in N} y_j^* + 1} + H_i. \tag{12}$$

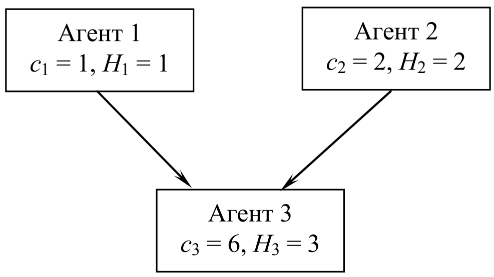
Возникает вопрос, как соотносятся множество решений задачи централизованного управления и множество равновесий Нэша, то есть в каких случаях можно децентрализованно *реализовать* эффективное (по критерию (1) или (2)) состояние сети. Верна ли, например, гипотеза, что одно из эффективных состояний является равновесным, или что среди равновесий существует хотя бы одно эффективное? Рассмотрим два простых примера, иллюстрирующих, что связь между множествами эффективных состояний и равновесий Нэша нетривиальна, а обе гипотезы в общем случае неверны.

Пример 1. Пусть имеются три агента с единичными порогами (см. (3)), затраты и выигрыши которых (отметим, что условие $c_i > H_i$, $i \in N$, в данном случае не выполняется) приведены на следующем рисунке:



Эффективными в данном примере являются три вектора состояний агентов: (0; 1; 0), (1; 0; 0) и (1; 1; 0). Равновесиями Нэша, независимо от механизма распределения выигрышей, являются четыре остальных вектора состояний, отличных от (0; 0; 0). Таким образом, в настоящем примере ни одно из четырех равновесий Нэша не эффективно, и ни одно из эффективных состояний не является равновесным. •

Пример 2. Пусть в условиях предыдущего примера изменились только затраты и выигрыш третьего агента:



Эффективными в данном примере являются те же три вектора состояний агентов: (0; 1; 0), (1; 0; 0) и (1; 1; 0). Равновесие Нэша – вектор (1; 1; 0) - единственно и эффективно. •

Таким образом, вопрос выбора механизмов распределения выигрышей, осуществляющих децентрализованную реализацию эффективных состояний сети, в общем случае остается открытым.

Механизмы (5)-(7) сбалансированы – в их рамках центр распределяет между первоначально действующими агентами весь (!) выигрыш от «опосредованного возбуждения сети». Такого рода механизмы можно условно считать механизмами *мотивационного управления* (см. [36]) – центр побуждает агентов к выбору тех или иных состояний как равновесий их игры. Альтернативой является более жесткое *институциональное управление* [36], заключающееся в установлении центром ограничений и норм деятельности агентов. Рассмотрим соответствующую модель применительно к задаче возбуждения сети.

Институциональное управление. Пусть целевые функции агентов имеют вид

(13) $$f_i(y) = s_i(y) + (H_i - c_i)\, y_i,$$

где $s_i(y) \ge 0$ – выплачиваемое центром i-му агенту вознаграждение, зависящее в общем случае от вектора состояний (действий) всех агентов, $i \in N$. Совокупность зависимостей вознаграждений агентов $s(y) = \{s_i(y)\}_{i \in N}$ от вектора действий агентов, следуя [31, 36], назовем вектор-*функцией стимулирования* агентов со стороны центра. Эта зависимость есть ни что иное, как частный случай введенного выше механизма распределения выигрыша между агентами.

Фиксируем некоторое множество агентов V. Рассмотрим следующую задачу «институционального управления» – найти минимальную (в смысле суммарных затрат центра на стимулирование) вектор-функцию стимулирования, которая реализует «возбуждение» в точности заданного множества V агентов как равновесие Нэша $y^*(s(\cdot))$ их игры. Формально эту задачу можно записать следующим образом:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\sum\limits_{i \in N} s_i(y^*) \to \min\limits_{s(\cdot)} \\
y_i^*(s(\cdot)) = 1,\, i \in V, \\
y_j^*(s(\cdot)) = 0,\, j \notin V.
\end{array}
\right.
\qquad (14)
$$

Непростая на первый взгляд задача (14) решается достаточно просто с использованием *теоремы о декомпозиции игры агентов* [36]. Рассмотрим следующую вектор-функцию стимулирования:

$$
s_i^*(y) = \begin{cases} c_i - H_i + \varepsilon_i, \text{ если } i \in V \text{ и } y_i = 1 \\ 0, \text{ иначе} \end{cases},
\qquad (15)
$$

где ε_i – сколь угодно малая строго положительная константа (если выбрать эти константы равными нулю, то агенты будут безразличны между действием и бездействием, и все основные приводимые ниже выводы останутся в силе в рамках гипотезы благожелательности [6, 36]), $i \in V$.

Легко убедиться, что при использовании центром механизма (15) выбор единичных действий агентами из множества V (и только ими!) является единственным *равновесием в доминантных стратегиях* [6] игры агентов с целевыми функциями (13).

Также легко проверить, что механизм (15) является ε_V-оптимальным решением задачи (14), где $\varepsilon_V = \sum\limits_{i \in V} \varepsilon_i$.

Следует сделать терминологическое замечание: хотя формально задача (14) является задачей стимулирования (мотивационного управления), ее решение (15) можно интерпретировать, скорее, как институциональное управление – агентам установлены достаточно строгие нормы деятельности: при любом отклонении от предписанных центром действий они жестко наказываются (их стимулирование равно нулю).

Целевую функцию центра $F(\cdot)$ будем считать равной разности между выигрышем от возбуждения множества $\Phi(V)$ агентов и суммарными затратами на стимулирование (15), реализующего возбуждение агентов из множества V (см. также выражение (2)), то есть

$$
F(V) = \sum_{i \in \Phi(V)} H_i - \sum_{j \in V} s_j(y^*) = \sum_{i \in \Phi(V)} H_i + \sum_{j \in V} H_j - \sum_{i \in V} c_i - \varepsilon_V.
\qquad (16)
$$

Сравнивая выражения (16) и (2), получаем, что при достаточно малых значениях ε_V (а этот параметр, как отмечалось выше, может быть выбран сколь угодно малым) выполнено $F(V) \geq u(V)$. Казалось бы, задача децентрализации решена! На самом деле, решена только отчасти, так как в механизмах типа (5)-(7) центр не указывает агентам в явном виде, каких действий он от них ожидает, предоставляя возможность «самостоятельно» разыграть игру (основная идея децентрализации управления (см. заключение) как раз и состоит в том, чтобы сконструировать такую процедуру автономного взаимодействия агентов, которая приводила бы к выбору ими эффективного, в смысле централизованного критерия, вектора действий). В «механизме» (15) присутствует явное указание центра, выбора каких действий от кого из агентов он ожидает. Кроме того, задачу централизованного управления типа (1) центр все равно вынужден решать, то есть, зная каков его оптимальный (в смысле минимальности затрат на стимулирование возбуждаемых агентов) выигрыш (16), он должен определить, какую коалицию ему следует первоначально возбуждать:

(17) $$F(V) \to \max_{V \subseteq N} .$$

Таким образом, плюсом децентрализованных механизмов является то, что в них агенты могут обладать неполной информацией (от каждого из них не требуется вычисления равновесия Нэша (8) или решения задач дискретной оптимизации типа (1) или (17)). Минусом является сложность (даже невозможность в общем случае) решения задачи поиска эффективного децентрализованного механизма.

Плюсом централизованного механизма является то, что в нем все «когнитивные» (информационные и вычислительные) затраты несет центр; но затраты эти могут оказаться очень высокими.

В качестве примера рассмотрим задачу управления толпой.

Пример: «возбуждение» толпы. В работе [21] рассмотрена модель управления толпой, члены которой (агенты) принимают решения о своем действии или бездействии в зависимости от числа уже́ действующих агентов. При этом для центра существенно (является критерием эффективности) число (или доля) действующих агентов. В терминах модели, рассматриваемой в настоящей работе, задачу управления можно сформулировать как выбор множества первоначально возбуждаемых агентов, при котором число опосредованно возбужденных будет максимально (или минимально, равно заданному и т.д.), а затраты на управление не превысят существующего бюджетного ограничения C_0, то есть:

(18) $$\begin{cases} |\Phi(S)| \to \max\limits_{S \subseteq N}, \\ C(S) \le C_0. \end{cases}$$

Пусть поведение агентов описывается выражением (3), а граф связей между агентами является полным. Перенумеруем агентов в порядке возрастания значений их порогов: $\theta_1 \le \ldots \le \theta_n$. Обозначим через $P(x) = \frac{1}{n} \left| \{ i \in N : \theta_i < x \} \right|$ функцию распределения порогов агентов, через $\{x_t\}_{t \ge 0}$ – последовательность долей действующих агентов (в дискретном времени, где t обозначает номер момента времени (шага)).

Предположим, что известна доля x_0 агентов, действующих на нулевом шаге. Доля агентов, пороги которых не превышают x_0, составляет $P(x_0)$, поэтому на первом шаге $x_1 = \max \{x_0; P(x_0)\}$. На следующем шаге будет действовать такая доля агентов x_2, что пороги агентов, входящих в нее, не превышают x_1, т.е. $x_2 = \max \{x_1; P(x_1)\}$. Рассуждая аналогичным образом, для последующих шагов можно записать следующее рекуррентное соотношение, описывающее динамику поведения множества агентов [20, 28]:

(19) $$x_{k+1} = \max \{x_k; P(x_k)\} .$$

Положения равновесия системы (19) определяются начальной точкой x_0 и точками пересечения графика функции $P(\cdot)$ с биссектрисой первого квадранта: $P(x) = x$. Устойчивыми могут быть точки равновесия, в которых график функции $P(\cdot)$ пересекает биссектрису, приближаясь к ней «сверху». Пример функции распределения порогов приведен на рис. 1 (см. нижний график; для наглядности рассмотрен непрерывный случай), устойчивыми являются точки x_2^* и x_4^*.

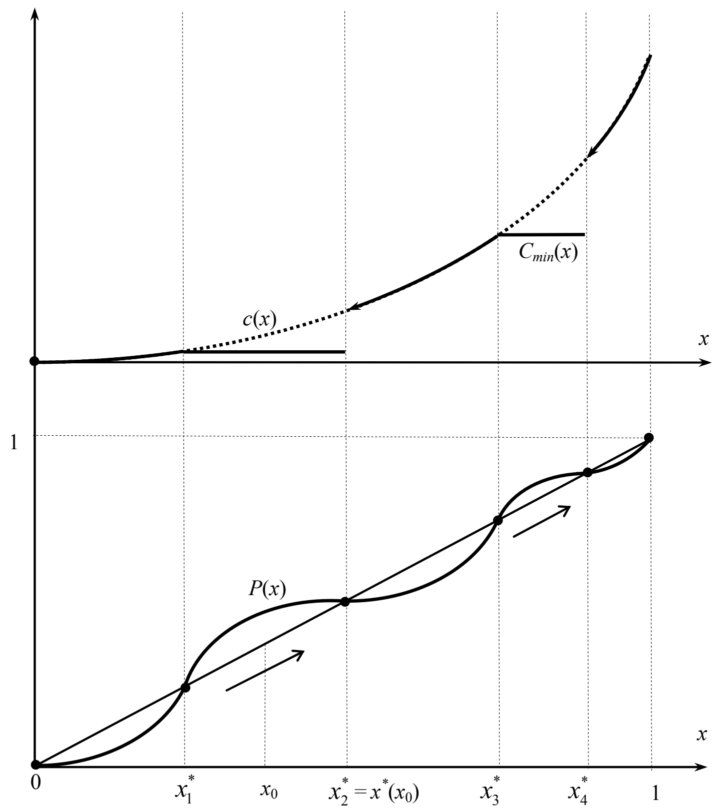


Рис. 1. Функция распределения порогов и функции затрат.

Обозначим через $\Psi(P(\cdot)) \subseteq [0;1]$ множество корней уравнения $P(x) = x$ (это множество не пусто, так как одним из корней всегда является единица) и определим $x^*(x_0) = \min \{y \in \Psi(P(\cdot)) \colon y > x_0\}$. Например, для точки x_0, изображенной на Рис. 1, выполнено $x^*(x_0) = x_2^*$. Из (19) и условий устойчивости равновесий следует, что

(20) $$\Phi(x_0) = \begin{cases} x_0, \text{если } P(x_0) \le x_0, \\ x^*(x_0), \text{если } P(x_0) > x_0. \end{cases}$$

Если $c(x_0)$ – затраты (неубывающая функция) на первоначальное возбуждение заданной доли $x_0 \in [0; 1]$ агентов (отметим, что в рамках рассматриваемой модели коллективного поведения подразумевается, что в первую очередь возбуждению подлежат агенты с меньшими порогами), то с учетом (20) задача (18) примет вид:

(21) $$\begin{cases} \Phi(x_0) \to \max\limits_{x_0 \in [0;1]}, \\ c(x_0) \le C_0. \end{cases}$$

Обозначим $x^+ = \max \{x \in [0;1] \colon c(x) \le C_0\}$. В силу неубывания функции (20), решение задачи (21) очевидно – следует реализовывать максимальное допустимое (с точки зрения ограничений на затраты) действие x^+. Если, при прочих равных, следует стремиться к минимизации затрат, то оптимальное решение x_0^* таково:

(22) $$x_0^* = \begin{cases} x^+, \text{если } P(x^+) \le x^+, \\ \max \{y \in \Psi(P(\cdot)) : y < x^+\}, \text{если } P(x^+) > x^+. \end{cases}$$

Можно решить и обратную (по отношению к (21)) задачу – найти минимальные затраты $C_{\min}(x)$ по реализации начального возбуждения, приводящего к итоговой доле возбужденных агентов в толпе, не меньшей заданного значения $x \in [0; 1]$. Пример решения этой задачи приведен на рис. 1.

Стохастические модели управления толпой рассматриваются в [3].

Отметим, что выше считалось, что целью управляющего органа является максимизация числа возбужденных агентов. В случае, когда целью является минимизация активности толпы, соответствующие задачи ставятся и решаются аналогично, так как результаты анализа устойчивых состояний и их зависимости от параметров модели (см. Рис. 1) позволяют конструктивно характеризовать зависимость результирующих состояний от начальных.

4. Информационное противоборство

Выше сеть рассматривалась как объект управления, осуществляемого одним субъектом – центром. В случае, когда существует несколько субъектов, заинтересованных в тех или иных состояниях сети и имеющих возможность оказывать на нее управляющие воздействия (так называемая *система с распределенным контролем* [36]), возникает взаимодействие между этими субъектами, которое в случае информационных воздействий, оказываемых ими на сеть, называется *информационным противоборством* (см. обзор [11]). Такие ситуации обычно описываются игрой в нормальной форме между центрами, причем выбираемые центрами стратегии определяют параметры игры между агентами [36]. Примерами служат модели информационного противоборства в социальных сетях [4] и на когнитивных картах [7, 35]. Возможны и более сложные ситуации, когда, управленческие воздействия «несимметричны» – например, в ситуации «нападение/защита» один центр воздействует на начальные состояния агентов, а другой (одновременно с первым или уже зная его выбор) изменяет структуру связей между ними или/и их пороги. Такие ситуации могут быть описаны в рамках моделей иерархических игр.

Приведем описание теоретико-игровой модели информационного противоборства при управлении возбуждением сети. Пусть имеются два центра, которые в начальный момент времени могут осуществлять управленческие воздействия на сеть – однократно, одновременно и независимо изменять начальные состояния агентов из множеств $S_1 \subseteq N$ и $S_2 \subseteq N$ соответственно. Предположим, что известна зависимость $\widehat{\Phi}(S_1, S_2)$ конечного состояния сети от этих управленческих воздействий. Целевые функции центров представим в виде разностей между их выигрышами и затратами:

$$v_i(S_1, S_2) = H_i(\widehat{\Phi}(S_1, S_2)) - C_i(S_i),\ i = 1, 2.$$

Получили игру в нормальной форме между двумя центрами. Если один из центров обладает правом первого хода, то получим игру Штакельберга (или игру типа Γ_1 [6, 26]), которая может интерпретироваться как ситуация «защита-нападение» или «информационное воздействие-противодействие». Примеры постановки и решения подобных задач для управления толпой приведены в [3].

5. Заключение

Таким образом, выше мы рассмотрели общую постановку задачи «возбуждения» сети, констатировали нетривиальность децентрализованной реализации эффективного равновесия и предложили эффективный механизм институционального управления.

Перспективным представляется, во-первых, исследование влияния свойств графа связей между агентами и принципов принятия ими решений на свойства оптимального решения той или иной задачи управления. В настоящей работе оба этих фактора (структура взаимодействия агентов и модели их кооперативного поведения) «спрятаны» в операторе $\Phi(\cdot)$. Выделение в явном виде и исследование, хотя бы частных случаев (ациклических графов, конкретных пороговых и других моделей принятия агентами решений), может дать нетривиальные содержательно интерпретируемые результаты.

Во-вторых, так как типовой триадой типов управления [36] является институциональное, мотивационное и информационное, и первые два из них так или иначе упомянуты выше, то анализ моделей информационного управления [34] в задачах возбуждения сети представляется чрезвычайно перспективным.

В-третьих, наличие сети агентов, принимающих стратегические решения, подсказывает возможность использования результатов исследования кооперативных игр на графах (в которых граф коммуникаций между агентами ограничивает возможности образования коалиций [16, 22, 33, 37] и взаимодействие между ними [23]). Однако, в задачах возбуждения сети граф коммуникаций относится, скорее, к возможности влияния одних агентов на других (определяет целевые функции агентов и, следовательно, характеристическую функцию кооперативной игры), нежели чем к возможности образования тех или иных коалиций.

В-четвертых, требуется дальнейшее исследование механизмов распределения выигрыша (типа механизмов (5)-(7)), в том числе – в рамках принятой в теории коллективного выбора (см., например, [10]) традиции – характеризация их классов, обладающих заданными свойствами (например, таким свойством, как реализация эффективных состояний).

И, наконец, в-пятых, перспективными представляются дальнейшие исследования децентрализации задачи «возбуждения» сети. Подходы алгоритмической теории игр [15, 38] и распределенной оптимизации [24, 25] подсказывают, что необходимо искать такие простые процедуры локального поведения агентов, которые приводили бы к состоянию, оптимальному в рамках исходной задачи (типа задач (1) и (17)), обладающей очень высокой исходной алгоритмической и/или вычислительной сложностью.

Список литературы

1 Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю. Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов // Автоматика и телемеханика. 2009. № 3. С. 136-151.

2 Бреер В.В., Новиков Д.А., Рогаткин А.Д. Микро- и макромодели социальных сетей // Проблемы управления. 2014 (в печати).

3 Бреер В.В., Новиков Д.А., Рогаткин А.Д. Стохастические модели управления толпой // Управление большими системами. 2014.

4 Губанов Д.А., Калашников А.О., Новиков Д.А. Теоретико-игровые модели информационного противоборства в социальных сетях // Управление большими системами. 2010. № 31. С. 192-204.

5 Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. М.: Физматлит, 2010.

6 Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2002.

7 Куливец С.Г. Моделирование конфликтных ситуаций с несогласованными представлениями у агентов на основе игр на линейных когнитивных картах // Проблемы управления. 2010. № 4. С. 42-48.

8 Кульба В.В., Кононов Д.А., Косяченко С.А., Кочкаров А.А., Сомов Д.С. Использование сценарного и индикаторного подходов для управления живучестью, стойкостью и безопасностью сложных технических систем. М.: ИПУ РАН, 2011.

9 Малишевский А.В. Качественные модели в теории сложных систем. М.: Наука: Физматлит. 1998.

10 Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. М.: Мир, 1991.
11 Новиков Д.А. Игры и сети // Математическая теория игр и ее приложения. 2010. № 2. С. 107-124.
12 Опойцев В.И. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 1977.
13 Охтилев М.Ю., Соколов Б.В., Юсупов Р.М. Интеллектуальные технологии мониторинга и управления структурной динамикой сложных технических объектов. М.: Наука, 2006.
14 Райгородский А.М. Модели случайных графов и их применения // Труды МФТИ. 2010. Т. 2, № 4. С. 130-140.
15 Algorithmic Game Theory (ed. Nisan N., Roughgarden T., Tardos E., and Vazirani V.). N.Y.: Cambridge University Press, 2009.
16 Aumann R., Dreze J. Cooperative Games with Coalitional Structures // International Journal of Game Theory. 1974. Vol. 3. P. 217-237.
17 Barabanov I.N., Korgin N.A., Novikov D.A., Chkhartishvili A.G. Dynamic Models of Informational Control in Social Networks // Automation and Remote Control. 2011. Vol. 71. No. 11. P. 2417-2426.
18 Barabasi A. Scale-free Networks // Scientific American. 2003. No. 5. P. 50-59.
19 Bollobas B. Random Graphs. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
20 Breer V.V. A Game-theoretic Model of Non-anonymous Threshold Conformity Behavior // Automation and Remote Control. 2012. Vol. 73. No. 7. P. 1256-1264.
21 Breer V.V., Novikov D.A. Models of Mob Control // Automation and Remote Control. 2013. Vol. 74, No. 12. P. 2143-2154.
22 Brink R., Khmelnitskaya A., Van der Laan G. An Efficient and Fair Solution for Communication Graph Games // Economic Letters. 2012. Vol. 117. P. 786-789.
23 Brink R., Khmelnitskaya A., Van der Laan G. An Owen-Type Value for Games with Two-Level Communication Structures. Tinbergen Institute Discussion Paper TI 2011-089/1. 2011.
24 Boyd S., Parikh N., Chu E. Distributed Optimization and Statistical Learning via the Alternating Direction Method of Multipliers. New York: Now Publishers, 2011.
25 Boyd S., Vandenberghe L. Convex Optimization. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
26 Germeier Yu. Non-Antagonistic Games. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1986.
27 Gomez D., Gonzalez-Aranguena E., Manuel C. et al Centrality and Power in Social Networks: a Game Theoretic Approach // Mathematical Social Sciences. 2003. Vol. 46. P. 27-54.
28 Granovetter M. Threshold Models of Collective Behavior // AJS. 1978. Vol. 83, No. 6. P. 1420-1443.
29 De Groot M. Reaching a Consensus // Journal of American Statistical Association. 1974. № 69. P. 118-121.
30 Idiart M., Abbott L. Propagation of Excitation in Neural Network Models // Networks. 1993. Vol. 4. P. 285-294.
31 Mechanism Design and Management: Mathematical Methods for Smart Organizations / Ed. by Prof. D. Novikov. New York: Nova Science Publishers, 2013.
32 Myerson R. Game Theory: Analysis of Conflict. Cambridge, Massachusetts, London: Harvard University Press, 2001.
33 Myerson R. Graphs and Cooperation in Games // Mathematics of Operations Research. 1977. Vol. 2. P. 225-229.
34 Novikov D.A., Chkhartishvili A.G. Reflexion and Control: Mathematical Models. Leiden: CRC Press, 2014.
35 Novikov D.A. Cognitve Games: a Linear Impulse Model // Automation and Remote Control. 2010. Vol. 71, No. 10. P. 718-730.
36 Novikov D. Theory of Control in Organizations. New York: Nova Science Publishers, 2013.
37 Owen G. Values of Games with a priori Unions / Henn R, Moeschlin O (eds.) Essays in Mathematical Economics and Game Theory. Berlin: Springer, 1977. P. 76-88.
38 Shoham Y., Leyton-Brown K. Multiagent Systems: Algorithmic, Game-Theoretic, and Logical Foundations. New York: Cambridge University Press, 2008.