УДК 517.977

© 1996 г. Д. А. НОВИКОВ, канд. техн. наук
(Институт проблем управления РАН, Москва)

ДИНАМИКА ПОВЕДЕНИЯ СИСТЕМ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ[1]

Рассматривается система с большим числом взаимосвязанных целенаправленных элементов. Приводится оценка скорости сходимости к положению равновесия.

Значительное число работ, исследующих модели коллективного поведения [1 – 4 и др.], посвящено выявлению условий существования равновесия, его единственности и сходимости к нему траекторий системы. В настоящем исследовании основное внимание уделяется оцениванию скорости сходимости. В частности, приводится приближенная оценка сверху "удаленности" системы от положения равновесия.

Понятно, что, приняв ту или иную гипотезу о поведении элементов и их взаимодействии, можно рассчитать траектории каждого из них. С ростом размерности системы целесообразность использования такого метода становится проблематичной и возникает желание описать поведение системы в целом (может быть несколько усредненно и не совсем точно), не вдаваясь в подробное описание каждого из элементов. Интуитивно такое агрегированное описание в ряде случаев будет оказываться с ростом размерности системы все более точным. Перейдем к формальному описанию модели.

Рассмотрим систему, состоящую из n взаимосвязанных элементов, функционирующих в дискретном времени. Состояние системы в момент времени $k - s^k = \left(s_1^k, s_2^k, \ldots, s_n^k\right) \in \mathbb{R}^n$ определяется состояниями элементов $s_i^k \in [s_i^-, s_i^+]$, $k = 1, 2, \ldots$, где $-\infty < s_i^- < s_i^+ < +\infty$, $i = \overline{1,n}$. Предположим, что поведение системы удовлетворяет гипотезе индикаторного поведения [2] – в каждый момент времени каждый из элементов изменяет свое состояние в направлении текущего положения цели, т.е. описывается итерационной процедурой:

$$s_i^{k+1} = s_i^k + \gamma_i^k [w_i(s^k) - s_i^k], \quad 0 \leqslant \gamma_i^k \leqslant 1, \quad i = \overline{1,n}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где $w_i(s^k)$ – текущее положение цели i-го элемента, зависящее от состояний остальных элементов, а параметры $\gamma^k = \left(\gamma_1^k, \gamma_2^k, \ldots, \gamma_n^k\right)$, выбираемые элементами, определяют величины шагов и имеют произвольные распределения в единичном кубе.

Предположим, что точка равновесия системы $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $c_i \in [s_i^-, s_i^+]$ $i = \overline{1,n}$ существует, единственна и траектории (1) сходятся к этой точке (соответствующие условия приведены, например, в [1 – 4]).

Дальнейшие рассуждения фактически обосновывают достаточно очевидный факт – процедуры вида (1) имеют примерно экспоненциальную скорость сходимости.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00327).

В качестве меры текущей "удаленности" системы от положения равновесия выберем рассогласование

$$(2)\qquad \Delta_n^k = \|c - s^k\| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|c_i - s_i^k|,$$

т.е. расстояние между точками s^k и c в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Воспользовавшись (1), получим:

$$(3)\qquad \Delta_n^{k+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\left(c_i - s_i^k\right)\left(1-\gamma_i^k\right) + \gamma_i^k\left(c_i - w_i(s^k)\right)\right|.$$

Очевидно, $\Delta_n^{k+1} \leqslant \widetilde{\Delta}_n^{k+1}$, где

$$(4)\qquad \widetilde{\Delta}_n^{k+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\left(c_i - s_i^k\right)\right|\left(1-\gamma_i^k\right) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^k|c_i - w_i(s^k)|.$$

При достаточно больших n оценка рассогласования $\widetilde{\Delta}_n^{k+1}$ должна слабо отличаться от "среднего значения"

$$(5)\qquad \overline{\Delta}_n^{k+1} = \left(1-\overline{\gamma}_n^k\right)\Delta_n^k + \overline{\gamma}_n^k\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|c_i - w_i(s^k)|,$$

где $\overline{\gamma}_n^k = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma_i^k$. Приведем корректную формулировку и обоснование этого утверждения. Определим, что понимается под близостью $\overline{\Delta}_n^{k+1}$ и $\widetilde{\Delta}_n^{k+1}$. В соответствии с [5, 6] последовательность функций $\widetilde{\Delta}_n^{k+1}(\gamma^k)$ стабилизируется на единичных кубах $K_n = [0,1]^n$, если существует такая числовая последовательность $\overline{\Delta}_n^{k+1}$, что

$$(6)\qquad \Pr\left\{\left|\widetilde{\Delta}_n^{k+1}(\gamma^k) - \overline{\Delta}_n^{k+1}\right| > \varepsilon\right\} \to 0, \quad n \to \infty$$

для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$.

Для того чтобы судить о стабилизации, оценим разность значений функции $\widetilde{\Delta}_n^k(\cdot)$ в точках $\gamma^k \in K_n$ и $\delta^k = \left(\delta_1^k, \delta_2^k, \ldots, \delta_n^k\right) \in K_n$:

$$\left|\widetilde{\Delta}_n^k(\gamma^k) - \widetilde{\Delta}_n^k(\delta^k)\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\right|\left(c_i - s_i^k\right)\left|\left(\delta_i^k - \gamma_i^k\right) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\right| c_i - w_i(s^k)\left|\left(\gamma_i^k - \delta_i^k\right)\right|.$$

Обозначив $\alpha = \max\limits_i\left(s_i^+ - s_i^-\right)$, получим

$$\left|\Delta_n^k(\gamma^k) - \Delta_n^k(\delta^k)\right| \leqslant \frac{2\alpha}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\delta_i^k - \gamma_i^k\right|,$$

т.е. $\Delta_n^k(\cdot)$ является липшицевой функцией с постоянной Липшица порядка $1/n$.

В силу теоремы 2 [6] для любых распределений γ^k на K_n дисперсия $D\left\{\Delta_n^k\right\} \to 0$, $n \to \infty$, следовательно, по неравенству Чебышева выполняется (6). Стабилизация последовательности $\widetilde{\Delta}_n^k$ позволяет сформулировать следующий результат.

Теорема 1. С ростом числа элементов системы оценка (4) рассогласования (2) сходится по вероятности к (5), т.е. имеет место:

$$\Pr\left\{\Delta_n^{k+1} > \left(1-\overline{\gamma}_n^k\right)\Delta_n^k + \overline{\gamma}_n^k \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|c_i - w_i(s^k)|\right\} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{7}$$

Следствие 1. Если система монотонно движется к положению равновесия (если $s_i^k \geqslant c_i$, то $s_i^k \geqslant w_i(s^k) \geqslant c_i$ и соответственно если $s_i^k \leqslant c_i$, то $s_i^k \leqslant w_i(s^k) \leqslant \leqslant c_i$, $i=\overline{1,n}$, $k=1,2,\ldots$), то (3) сходится по вероятности к (5).

Следствие 2. Если элементы системы не взаимодействуют или существует $\delta > 0 : |c_i - w_i(s^k)| \approx o(n^{-\delta})$, $i=\overline{1,n}$, $k=1,2,\ldots$, то (3) сходится по вероятности к $\left(1-\overline{\gamma}_n^k\right)\Delta_n^k$.

Рассмотрим в качестве примера систему, для которой справедливо следствие 1. Пусть решается задача распределения ресурса R в системе, состоящей из управляющего органа – центра и n элементов [7]. Элементы имеют целевые функции:

$$f_i = x_i - \frac{1}{2r_i}x_i^2, \quad i=\overline{1,n}, \tag{8}$$

где x_i – получаемое i-м элементом количество ресурса, а $\{r_i\}$ – некоторые константы, известные элементам, но неизвестные центру. Каждый элемент сообщает центру заявку s_i на требуемое количество ресурса. Если центр использует принцип прямых приоритетов [7], то

$$x_i(s) = \frac{s_i}{s_i + s_{-i}}R, \quad i=\overline{1,n}, \tag{9}$$

где $s_{-i} = \sum\limits_{j\neq i} s_j$ (подразумевается, что $\sum\limits_{i=1}^{n} s_i > R$). Из (8) и (9) получим выражение для текущего положения цели:

$$w_i\left(s^k\right) = \frac{r_i}{R-r_i}s_{-i}^k.$$

Предположим, что на величины заявок наложено ограничение $d \leqslant s_i \leqslant D$, $i=\overline{1,n}$. Легко проверить, что если $R < n\min\limits_i r_i$, то, стартовав, например, из точки $s^0 = r$, система будет двигаться к положению равновесия $\{c_i = D,\ i=\overline{1,n}\}$ таким образом, что все элементы будут монотонно увеличивать свои заявки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малишевский А. В.* Модели совместного функционирования многих целенаправленных элементов. I, II // АиТ. 1972. № 11. С. 92–110; № 12. С. 108–128.
2. *Опойцев В. И.* Динамика коллективного поведения. Гомогенные системы // АиТ. 1974. № 4. С. 157–168.
3. *Опойцев В. И.* Динамика коллективного поведения. Системы с ограниченным межэлементным взаимодействием // АиТ. 1974. № 6. С. 133–144.
4. *Опойцев В. И.* Динамика коллективного поведения. Гетерогенные системы // АиТ. 1975. № 1. С. 124–138.
5. *Опойцев В. И.* Задачи и проблемы асимптотического агрегирования // АиТ. 1991. № 8. С. 133–144.
6. *Опойцев В. И.* Нелинейный закон больших чисел // АиТ. 1994. № 4. С. 65–75.
7. *Бурков В. Н., Данев Б., Еналеев А. К. и др.* Большие системы: моделирование организационных механизмов. М.: Наука, 1989.

Поступила в редакцию 20.02.95