

СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ УПРАВЛЕНИЯ СЛОЖНЫМИ СИСТЕМАМ

ОДАЕНДА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ
ПРОБЛЕМ
УПРАВЛЕНИЯ

**СИНТЕЗ
МЕХАНИЗМОВ
УПРАВЛЕНИЯ
СЛОЖНЫМИ
СИСТЕМАМИ**

**СБОРНИК
СТАТЕЙ**

МОСКВА 1980

УДК 330.И15

СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ УПРАВЛЕНИЯ СЛОЖНЫМИ СИСТЕМАМИ.
Сборник статей. М.: Институт проблем управления, 1980.

В сборнике исследуются проблемы и пути совершенствования управления, стимулирования и согласования в организационных системах. Рассматриваются возможности практического применения результатов теории активных систем в материальном производстве, в АСУП и АСУ ТП. Продолжено обсуждение проблем управления активными системами, которое проводилось в опубликованных ранее сборниках "Активные системы" (1973 и 1974), "Согласованное управление" (1975), "Механизмы стимулирования в системе исследование-производство" (1978).

Synthesis of control mechanisms for complex systems.
Collection of papers. Institute of Control Sciences, Moscow, 1980.

The papers discuss problems and ways of advancing the control, incentives and coordination in management systems. Practical ways of applying the active systems theory to manufacturing and process control are considered. The control problems for active systems discussed earlier in Collections of papers "Active Systems" (1973 and 1974), "Coordinated Control" (1975) and "Incentives mechanisms in a "research-manufacturing" system" (1978) are given further consideration.

Ответственный редактор академик В.А.Трапезников

Утверждено к печати Редакционным советом Института

© ИПУ 1980

Содержание

А.Г. Ивановский, С.К.Мураев. Механизмы корректировки планов в производственной системе.....	5
В.П.Авдеев, В.Н.Бурков, А.К.Еналеев, В.В.Кондратьев, И.П.Мышляев. Организационное управление с использованием нормативной модели.	15
С.П.Андреев, С.М.Кулаков, Д.Н.Марченко. Формирование нормативной информации в активных системах.....	24
М.И.Рубинштейн, А.М.Черкашин. Формирование обобщенной оценки объектов, комплексно оцениваемых наборами показателей.....	36
А.Г.Ивановский, О.А.Гетьман. Механизм назначения оптовых цен на новую продукцию и корректировка встречных планов..	47
А.К.Еналеев. Согласованное управление активной системой при наличии линейных штрафов за отклонение реализации от плана	55
А.В.Щепкин. Функционирование динамических активных систем при агрегировании информации.....	66
Н.Н.Сандак. Некоторые свойства систем с соревнующимися элементами.....	77
В.Н.Бурков, В.В.Кондратьев, А.А.Прокопенко, М.Д.Спектор. Некоторые вопросы анализа функционирования производственных систем.	83

МЕХАНИЗМЫ КОРРЕКТИРОВКИ ПЛАНОВ В ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СИСТЕМЕ

В практике управления к производственным системам предъявляется ряд требований, обусловленных необходимость их планирования и пропорционального развития, стабильного и сбалансированного функционирования. Эти требования связаны с ограничениями как общего, так и частного характера, например, ресурсными, транспортными, финансовыми и другими. В связи с этим в системе, как правило, необходимо достичнуть только определенного уровня взаимосвязанных показателей плана. Например, выпуск одними производственными организациями продукции в количествах, не предусмотренных планом, нарушает сбалансированность разработанных планов других производственных организаций. В таких случаях планирующему органу необходимо решать задачу корректировки планов производственных организаций и обеспечения на этой основе сбалансированности текущего плана всей производственной системы. При корректировке планов могут возникнуть ситуации, анализа которых необходим с целью разработки эффективных механизмов управления.

I. Постановка задачи

Рассмотрим двухуровневую иерархически организованную производственную систему, состоящую из планирующего органа (ПО) и множества $I = \{i | i=1,2,\dots,n\}$ хозяйственных организаций (ХО), производящих взаимозаменяемую продукцию. Предположим, что в системе сложилась ситуация, когда

$\sum_{i \in I} x_i^0 < P$, где x_i^0 - директивно установленный ПО план i -й ХО; P - потребность в продукции, выпускаемой всеми ХО. На практике в таких случаях в результате применения ПО различных стиля, нарушающих механизмы (материального поощрения, соревнования и других) ХО становятся замкнутыми и выдвигают планы выпуска продукции, превышающие по величине установленные директивно (см., например, [1]). Обозначим x'_i оценку плана, выдвинутого i -й ХО. В дальнейшем будем предполагать, что $x'_i \in [x_i^0, R_i]$, где R_i -

предельное значение оценки плана, которую может представить в ПО каждая ХО, руководствуясь, например, допустимым значением надежности выполнения плана. С учетом информации о дополнительных возможностях ХО $\mathcal{X}' = \{x'_i | 0 < x'_i \leq x_i'\}$ ПО устанавливает (утверждает) новый план системы $\bar{\mathcal{X}} = \{\bar{x}_i | x_i^o \leq \bar{x}_i \leq x_i'\}$.

Примем, что утвержденному плану каждой ХО соответствует целевая функция $\Psi_i(\bar{x}_i)$; это может быть прибыль, фонд экономического стимулирования, фонд материального поощрения и т.д. Пусть \hat{x}_i план i -й ХО, максимизирующий ее целевую функцию $x_i^o < \hat{x}_i < R_i$. Естественно полагать, что каждая ХО стремится сообщить такую оценку x_i' , которая обеспечивает значение $\bar{x}_i = \hat{x}_i$. В ряде случаев возможны ситуации, когда $P < \sum_{i \in I} \hat{x}_i$ (т.е. $\bar{x}_i < \hat{x}_i$). В этом случае ПО необходимо использовать некоторую процедуру назначения планов, обеспечивающую выполнение условия баланса $\sum_{i \in I} \bar{x}_i = P$. Процедуры назначения планов, реализующие условие баланса, назовем механизмами корректировки. В этом случае задачей ХО будет определение таких оценок планов производства, которые максимизируют выбранную целевую функцию ХО в условиях возможной корректировки выдвинутых планов. Задача ПО заключается в синтезе такого механизма корректировки, который реализовал бы условия баланса и некоторые специальные требования по надежности, достоверности и т. п. выдвигаемых планов.

Рассмотрим механизмы симметричной и несимметричной корректировки [2], которые обеспечивают выполнение указанных условий. В первом случае планы всех ХО пропорционально снижаются до необходимого уровня по правилу: $\bar{x}_i = x_i^o + k \Delta x_i'$, $0 < k < 1$, $\Delta x_i' = x_i' - x_i^o$. Во втором случае ХО упорядочиваются по признаку убывания оценок и утверждение планов ведется в таком же порядке по правилу: $\bar{x}_i = x_i^o + k_i \Delta x_i'$, $0 \leq k_i \leq 1$.

2. Механизм симметричной корректировки

При использовании механизма симметричной корректировки (МСК) планы ХО могут определяться следующим образом:

$$\bar{x}_i = x_i^o + (x_i' - x_i^o) \left(\frac{P - \sum_{j \in I} x_j^o}{\sum_{j \in I} (x_j' - x_j^o)} \right). \quad (I)$$

Очевидно, если применять МСК, взаимодействие ХО будет носить игровой характер: получаемый ХО план (и следовательно, значение целевой функции) зависит не только от оценки \bar{x}_i' , но и от оценок всех остальных ХО, т.е. $\bar{x}_i = \bar{x}_i(x')$. Но, фиксируя механизм корректировки планов, по существу определяет игру с ненулевой суммой n лиц (ХО) с напротивоположными интересами. Интересы участников игры представлены в виде однотипных функций выигрыша $\Psi_i = \Psi_i(\bar{x}_i[x'])$, где оценки \bar{x}_i' являются стратегиями ХО, а совокупность оценок $\bar{x}' = \{\bar{x}_i'\}$ определяет ситуацию игры. Под решением соответствующей игры будем понимать ситуацию, когда i -й ХО выгодно придерживаться стратегии \bar{x}_i'' , если остальные ХО придерживаются стратегии $\{x_j''\}, j \neq i, (j \in I)$, т.е. равновесия по Нешу. Обозначим: $v_i = x_i' - x_i^o$, $u_i = \bar{x}_i - x_i^o$, $\mathcal{D} = P - \sum_{i \in I} x_i^o$, $r_i = R_i - x_i^o$, $\hat{u}_i = \hat{x}_i - x_i^o$. С учетом введенных обозначений функцию выигрыша ХО можно представить так: $\Psi_i = \Psi_i(u_i[v])$, здесь $V = \{v_i\}$. Будем полагать, что функция выигрыша ХО непрерывно дифференцируема, строго выпукла вверх, причем $\Psi_i(0) = 0$. Выражение (I) в этом случае примет вид

$$u_i = v_i \mathcal{D} / \sum_{j \in I} v_j. \quad (2)$$

Очевидно, что при $\mathcal{D} < \sum_{i \in I} \hat{u}_i$ и использовании МСК выигрыши ХО могут быть увеличены лишь за счет выбора стратегий $v_i \in [\hat{u}_i, r_i]$. Для некоторого набора оценок $\{v_i\}$ выражение для оптимальной оценки \hat{v}_i будет иметь вид:

$$\hat{v}_i = \hat{u}_i \cdot \sum_{j \in I} v_j / \mathcal{D}. \quad (3)$$

В ряде случаев оценка \hat{v}_i может превышать значение r_i . Обозначим через I_1 множество ХО, для которых $\hat{v}_i > r_i$, а через I_2 — множество ХО, для которых $\hat{v}_i < r_i$. Нетрудно показать, что множество I_1 составляет ХО, для которых выполняется условие:

$$(r_i / \hat{u}_i) \leq (\sum_{j \in I} v_j / \mathcal{D}).$$

Обратное соотношение устанавливает признак принадлежности X_0 к множеству I_2 .

В общем случае справедливо следующее утверждение.

Утверждение I. Если $I_1 \neq \emptyset$ и $I_2 \neq \emptyset$, то при использовании МСК равновесным стратегиям X_0 соответствуют оценки:

$$a) v_i^* = r_i^*, \text{ для всех } i \in I_1;$$

$$b) v_i^* = \hat{u}_i \cdot \frac{\sum_{j \in I_1} r_j^*}{\mathcal{D} - \sum_{j \in I_2} \hat{u}_j}, \text{ для всех } i \in I_2.$$

Доказательство первой части утверждения следует из того факта, что функция выигрыша X_0 монотонно возрастает при $r_i^* < \hat{u}_i$ и монотонно убывает при $r_i^* > \hat{u}_i$, а назначаемый план есть монотонно-возрастающая функция v_i^* . Действительно, стремление X_0 получить оптимальные планы, побуждает их занижать свои оценки. Максимальная оценка, которую могут предложить X_0 , ограничивается значением r_i^* . Эта оценка и будет равновесной для i -й X_0 , $i \in I_1$. Для доказательства второй части утверждения предположим, что все X_0 сообщают свои равновесные оценки. Выражение (3) для X_0 $i \in I_2$ в этом случае примет вид

$$\hat{v}_i^* = \hat{u}_i \left(\sum_{j \in I_1} r_j^* + \sum_{j \in I_2} \hat{v}_j^* \right) / \mathcal{D}. \quad (4)$$

После несложных преобразований имеем:

$$\sum_{j \in I_2} \hat{v}_j^* = \sum_{j \in I_1} r_j^* \sum_{j \in I_2} \hat{u}_j / (\mathcal{D} - \sum_{j \in I_2} \hat{u}_j).$$

Подстановка последнего выражения в (4) завершает доказательство.

Из выражения (2) следует, что планы в ситуации равновесия имеют вид

$$u_i^* = r_i^* (\mathcal{D} - \sum_{j \in I_2} \hat{u}_j) / \sum_{j \in I_1} r_j^*, \quad \text{для всех } i \in I_1,$$

$$u_i^* = \hat{u}_i, \quad \text{для всех } i \in I_2.$$

Рассмотрим два частных случая задания множеств I_1 и I_2 .

I. Пусть $I_2 = \emptyset$, тогда $I = I_1$. Равновесными оценками всех X_0 будут $v_i^* = r_i^*$. При $r_i^* = r^*$ для всех $i \in I$ соответствующие планы будут равны: $u_i^* = \mathcal{D}/n$.

2. Пусть $I_1 = \emptyset$, тогда $I = I_2$. Равновесные оценки и соответствующие им планы всех X_0 будут равны: $\hat{v}_i^* = \hat{U}_i^* = \hat{U}_i$.

Остановимся на содержательной интерпретации рассмотренных обоих случаев. Случай, когда $I = I_1$, означает, что потребность ПО значительно мала по сравнению с предлагаемым выпуском продукции, т.е. $\mathcal{D} \ll \sum_{i \in I} \hat{U}_i$. Случай, когда $I = I_2$, наоборот, означает, что потребность ПО очень велика, т.е. $\sum_{i \in I} \hat{U}_i \ll \mathcal{D}$, игры(корректировки)нет и все выдвинутые планы утверждаются. Случай, когда $I_1 \neq \emptyset$ и $I_2 \neq \emptyset$, означает, что в системе присутствуют X_0 с разными возможностями, причем, выполняется соотношение такое, что, если $\hat{v}_i^* = v^*$ для всех $i \in I$, то:

$$\min_{i \in I} \{\hat{U}_i\} < \mathcal{D} < \max_{i \in I} \{\hat{U}_i\}.$$

Заметим, что в последнем случае, если над элементами $\{\hat{U}_i\}$ установлено отношение строгого упорядочения, то равновесные стратегии X_0 совпадают с результатами, полученными в [3] при исследовании эффективности законов жесткой централизации.

3. Механизм несимметричной корректировки

Функционирование механизма несимметричной корректировки (МНК) можно описать следующим образом. Пусть совокупность выдвинутых оценок планов $\{\hat{v}_i^*\}$ упорядочена так, что:

$$\hat{v}_1 > \hat{v}_2 > \dots > \hat{v}_{n-1} > \hat{v}_n > 0, \quad (5)$$

причем, $\hat{v}_i < \mathcal{D}$. В этом случае планы игроков, назначаемые по правилу $U_i - k_i \hat{v}_i$, определяются так: $U_1 = \hat{v}_1$, здесь $k_1 = 1$ и определяется остаточная потребность после первого шага $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D} - U_1$. Далее, если $\hat{v}_2 < \mathcal{D}_1$, то $k_2 = 1$, здесь также $U_2 = \hat{v}_2$ и определяется остаточная потребность второго шага: $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_1 - U_2$. Если же $\mathcal{D}_1 < \hat{v}_2$, то $0 < k_2 < 1$ и $U_2 = k_2 \hat{v}_2 = \mathcal{D}_2$, а $k_3 = k_4 = \dots = k_n = 0$. В результате применения такой многомаговой процедуры МНК формирует три группы X_0 : первая - планы которым утверждают-

ся на уровне выдвинутых оценок; вторая - планы которым утверждаются ниже их оценок, но выше директивных; третья - планы которым утверждаются на уровне директивных.

Состояние планов $\{u_i\}$ после применения процедуры МНК по отношению к выдвинутым оценкам $\{v_i^*\}$ будем различать с помощью понятия "ядро". Далее будем говорить, что первая группа ХО находится в ядре T , вторая - в ядре M и третья - в ядре L , т.е.

$$\begin{aligned} T &= \{i \mid 0 < u_i = v_i^*\}, \\ M &= \{i \mid 0 < u_i < v_i^*\}, \\ L &= \{i \mid 0 \leq v_i^*, u_i = 0\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что в общем случае в зависимости от соотношения величин \mathfrak{D} и $\sum_{i=1}^n v_i^*$ возможны различные ситуации распределения ХО по ядрам. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Если над элементами множества $\{v_i^*\}$ установлено отношение строгого упорядочения и существует соотношение такое, что $\mathfrak{D} < \sum_{i=1}^n v_i^*$, то существует три двухъядерных ситуации и одна трёхъядерная.

Действительно, пусть упорядоченность $\{v_i^*\}$ имеет вид (5). Обозначим через: $\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{D}$ - первоначальную потребность, т.е. $\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{D}$; \mathfrak{D}_i - остаточную потребность после i -го шага назначения плана. Тогда, если $\mathfrak{D}_0 < v_1^*$, то $u_1 = \mathfrak{D}_0$, здесь $0 < k_1 < 1$, а $k_2 = k_3 = \dots = k_n = 0$. Следовательно, существуют LM ядра. Если $0 < \mathfrak{D}_{n-1} < v_n^*$, то $u_n = \mathfrak{D}_{n-1}$, здесь $0 < k_n < 1$, а $k_1 = k_2 = \dots = k_{n-1} = 1$ и существуют MT ядра. Пусть $\mathfrak{D}_{i-1} = v_i^*$, где $1 < i < n$. В этом случае $u_i = \mathfrak{D}_{i-1}$, здесь $k_1 = k_2 = \dots = k_{i-1} = 1$, а $k_{i+1} = k_{i+2} = \dots = k_n = 0$. Тогда существует LT ядра. Если же $\mathfrak{D}_{i-1} < v_i^*$, где $1 < i < n$, то $u_i = \mathfrak{D}_{i-1}$ и $0 < k_i < 1$, а $k_1 = k_2 = \dots = k_{i-1} = 1$ и $k_{i+1} = k_{i+2} = \dots = k_n = 0$; в этом случае существуют LMT ядра.

Заметим, что число элементов в ядрах LT , LM и MT колеблется от 1 до $n-1$, а в ядрах LMT - от 1 до $n-2$.

Ранее предполагалось строгое упорядочение выдвинутых оценок планов и, как следствие этого, в ядре M могло находиться не более одной ХО. Если некоторое подмножество

I' ХО выдвинули равные оценки такие, что выполняется условие $\mathcal{D}' < \sum_{i \in I'} v_i$, где \mathcal{D}' - потребность последнего игрока назначения планов, и нет условий на приоритеты распределения плановых заданий, то подмножества I' и M совпадают. В этом случае планы XO $i \in I'$ могут определяться по правилу $u_i = k v_i$, где $0 < k < 1$. Это означает, что результаты анализа МСК распространяются с точностью до обозначений на XO , находящихся в ядре M .

В дальнейшем без ограничения общности будем полагать, что над элементами множества $\{v_i\}$ установлено отношение строгого упорядочения. В противном случае, ПО всегда может добиться этого, установив дополнительные условия приоритета на элементы множества I' , например, отдавая предпочтение в первую очередь XO , которые ранее выдвигали более напряженные планы, директивные планы которых выше и т.д. В дальнейшем будем считать также, что оптимальные планы $\{\hat{u}_i\}$ XO отличаются друг от друга.

Очевидно, что при действиях МНК взаимодействие XO также будет носить игровой характер. Рассмотрим стратегии, гарантирующие игрокам нахождение в выигрышных ядрах. Заметим, что по определению (6) выигрышными являются лишь ядра M и T . Применение каждым игроком принципа гарантированного результата доставляет каждому игроку выигрыши

$$\varphi_i^r(v_i^r) = \max_{v_i^r} \min_{v_{j \neq i}} \varphi_i(u_i[v]).$$

Рассмотрим случай существования LMT ядер. Возможности игроков будем называть однородными, если упорядоченность их оптимальных планов соответствует упорядоченности их предельных возможностей, т.е. $\{r_i\}$. Обозначим: $\tilde{r} = \max_{i \in L} \{r_i\}$; δ^0 - малое положительное число. Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 3. Если возможности игроков однородны и существуют условия такие, что $\hat{u}_{i \in M} < \tilde{r} < \min_{i \in T} \{u_i\}$, то выбор игроками стратегий $v_{i \in M}^r = \tilde{r} + \delta^0$ и $v_{i \in T}^r = r_{i \in M} + \delta^0$ гарантирует нахождение в M и T ядрах соответственно.

Доказательство непосредственно следует из определения гарантированного выигрыша. Отметим только следующее. Для

игроков $i \in M$ планы, соответствующие гарантированный стратегии равны $U_i^r = \mathcal{D}^k$, где $\mathcal{D}^k = \mathcal{D}_0 - \sum_{i \in T} U_i$. Для игроков $i \in L$ гарантированными стратегиями являются любые стратегии вида $V_i^r = \lambda r_i$, где $0 \leq \lambda \leq 1$, при этом они "гарантируют" себе "выигрыши" $\Phi_i^r(V_i^r) = 0$.

Рассмотрим некоторые случаи выбора стратегий (назовем их рациональными) в условиях МНК, когда дополнительный анализ игры позволяет уточнить стратегии.

Утверждение 4. Если возможности игроков однородны и существуют такие условия, что $\hat{U}_{i \in M} < \max_{i \in L} \{r_i\} < \min_{i \in T} \{\hat{U}_i\}$, то рациональными стратегиями игроков будут:

$$V_i^r = \hat{U}_i, \text{ для } i \in T,$$

$$V_i^r = \max_{i \in L} \{r_i\} + \delta^r, \text{ для } i \in M.$$

Действительно, пусть первоначально все игроки выдвинули оценки $\hat{U}_i = \hat{U}_i$ и распределились по ядрам LMT . Из условия утверждения вытекает, что среди игроков $i \in L$ есть игроки, которые могут увеличить свой выигрыш переходом в ядро M , для этого им достаточно сообщить оценку $\hat{U}_i > \hat{U}_{i \in M}$. Очевидно, что в этих условиях для сохранения своего положения игроку $i \in M$ необходимо выдвинуть гарантированную оценку, определяемую величиной $V_i^r = \max_{i \in T} \{r_i\} + \delta^r$. При этом выигрыш игрока $i \in M$ определяется величиной

\mathcal{D}^k , где $\mathcal{D}^k = \mathcal{D}_0 - \sum_{i \in T} \hat{U}_i$. Если $\min_{i \in T} \{\hat{U}_i\} < r_{i \in M}$ и $\mathcal{D}^k < U_i^r$, где U_i^r есть решение уравнения $\Phi_i(U_i) = \Phi_i(r_i)$, $U_i^r < \hat{U}_i$, то игрок $i \in M$ переходом в ядро T может увеличить свой выигрыш. Для этого ему необходимо выдвинуть оценку, превышающую значение $\min_{i \in T} \{\hat{U}_i\}$, например, на величину δ_i (δ_i - малая положительная величина, обеспечивающая соответствующий переход). Игрок, оказавшийся в ядре M , получит план (а, следовательно, и выигрыш) меньший, чем ранее в ядре T . Поэтому с его стороны может последовать ответ в виде оценки $V_i^r = \hat{U}_i + \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 > \delta_1$, которая возвращает его в ядро T . Этот процесс ограничивается оценкой $V_i^r = r_i^*$, которую может выдвинуть игрок $i \in M$, причем его финал ему не выгоден, т.к. санкция игроков $i \in T'$, где $T' = \{i | \hat{U}_{i \in T} < r_{i \in M}\}$, в виде стратегий $V_i^r = r_{i \in M} + \delta^r$

может значительно уменьшить его выигрыш. Финальная ситуация не выгодна и игрокам $i \in T'$, т.к. $\partial \varphi_i / \partial u_i < 0$, если $\hat{u}_i < u_i$. В связи с этим рациональной стратегией игроков $i \in M$ является возврат к своей гарантированной стратегии.

Переход игрока $i \in M$ в ядро T может быть не выгоден ему и без санкций со стороны игроков $i \in T'$, если $u_i^* < \mathcal{D}^*$, где u_i^* есть решение уравнения $\varphi_i(u_i) = \varphi_i(\tilde{u})$ и $u_i^* < \hat{u}_i$. Здесь $\tilde{u} = \min_{i \in T} \{\hat{u}_i\}$.

В этих условиях стратегия $U_i^* - \hat{u}_i$ игроков $i \in T$ является не только рациональной, но и оптимальной.

Следствие. Рациональные стратегии игроков не изменяются, если существуют условия такие, что $r_{i \in M} < \tilde{u}$.

В рассмотренном выше случае LMT ядра существуют не только когда $\mathcal{D}^* < \hat{u}_{i \in M}$, но и при $\mathcal{D}^* < \hat{u}_{i \in M} + \Delta$, где $\Delta = \max_{i \in L} \{r_i\} - \hat{u}_{i \in M}$. Отметим, что если $\hat{u}_{i \in M} < \mathcal{D}^*$, то между игроками $i \in M$ и $i \in L$ возможна игра с обменом информации, при котором игроки, участвующие в такой "коалиции", увеличивают свой выигрыш. Игрокам $i \in L$ становится выгодно, когда игрок $i \in M$ выдвигает оценку $r_i < \mathcal{D}^*$ и переходит в ядро T , а остаточную потребность в виде $\mathcal{D}^* - \mathcal{D}^* - r_i$ "передает" игрокам $i \in L$. Игроки, получившие остаток \mathcal{D}^* , естественно при этом должны выдвинуть оценки меньшие, чем оценка, которую выдвинет игрок, находившийся в ядре M , например, на величину Δ^* , которая обеспечивает межядерный переход. Очевидно, что в таком случае игроку $i \in M$ выгодно снизить свою оценку лишь до величины \hat{u}_i . В ядре L выделим подмножество L' игроков, которые могут вступить в игру с обменом информации. Очевидно, что элементы подмножества L' такие, что $L' = \{i | \hat{u}_{i \in M} - \Delta^* < r_i\}$, переходят в ядро M , а игроки $L' - L/L'$ будут находиться в ядре L . Таким образом, справедливо утверждение.

Утверждение 5. Если существуют условия такие, что $\hat{u}_{i \in M} < \max_{i \in L} \{r_i\} < \min_{i \in T} \{\hat{u}_i\}$ и $\hat{u}_{i \in M} < \mathcal{D}^*$, то игроки $i \in M$ и $i \in L'$ могут увеличить свои выигрыши в игре с обменом информации.

Следствие 1. Если ядро L' содержит более одного элемента и $L' = L$, то LMT ядра сохраняется.

Следствие 2. Если ядро L' содержит более одного элемента и $L \neq L'$, то LMT ядра вырождается в MT ядро.

*
* *

1. Из анализа рассмотренных механизмов корректировок следует, что при упорядоченности возможностей ХО и рациональном поведении участников игровых ситуаций механизмы симметричной корректировки полнее обеспечивает ПО информацией о возможностях ХО.

2. При тех же условиях механизм несимметричной корректировки обеспечивает ПО более надежной информацией и сообщаемые оценки близки к оптимальным планам ХО или совпадают с ними.

3. Механизм симметричной корректировки можно рассматривать как частный случай механизма несимметричной корректировки. В случае, если все ХО расположены в ядре M , то механизм несимметричной корректировки вырождается в механизм симметричной корректировки.

Л и т е р а т у р а

1. Ивановский А.Г., Мурзаев С.К., Гетьман О.А. Анализ современных механизмов стимулирования. Сб. Механизмы стимулирования в системе исследование - производство.-М.: Институт проблем управления, 1978.

2. Ивановский А.Г., Мурзаев С.К. Деловая игра "Стимулирование производства". Материалы IV семинара социалистических стран по проблемам имитационных игр. Часть I. Варшава, Ин-т организации управления и повышения квалификации руководящих кадров, 1977.

3. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем.-М.: "Наука", 1977.

В.П.Авдеев, В.Н.Бурков, А.К.Еналеев, В.В.Кондратьев,
Л.П.Мышляев

ОРГАНИЗАЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НОРМАТИВНОЙ МОДЕЛИ

Функциональная деятельность человека (коллектива людей) в организациях всегда регламентируется некоторыми принципами, инструкциями, правилами, научными и эмпирическими методами. Все они могут рассматриваться как функциональные частичные модели (ЧМ) желаемой (с точки зрения всей организации) деятельности человека, т.е. как своего рода нормативные (эталонные) модели.

В реальных ситуациях, когда нормативные модели не позволяют достаточно полно и верно определить наиболее эффективные действия человека, возникает задача стимулирования человека с тем, чтобы он стремился улучшить "рекомендуемые" ему нормативной моделью действия.

В данной статье предлагается способ построения показателей эффективности деятельности человека с использованием нормативной модели и приводятся функции материального стимулирования, зависящие от этих показателей.

Одним из наиболее распространенных способов оценки эффективности выбора человеком управляющих воздействий является использование показателя, который определяется как некоторая "норма" отклонений технико-экономических показателей (ТЭП) производственного процесса от соответствующих им "жестких" нормативов. Однако из-за существенной нестационарности реальных управляемых производственных процессов такой показатель эффективности деятельности человека, управляющего процессом, не позволяет достаточно полно учесть "личный" вклад человека в результат производственного процесса. Поэтому необходимо разработать "гибкие" нормативы, которые "отслеживали" бы нестационарные изменения внешних условий, и, тем самым, позволили бы построить адекватные показатели эффективности работы человека.

Прежде, чем перейти к построению таких показателей, опишем функционирование системы, включающей в свой состав

человека, нормативную модель и объект управления (производственный или технологический процесс).

Объект управления описывается в каждый момент t набором контролируемых параметров $Z_t = \{U_t, W_t, S_t, Y_t\}$, где

U_t - фактические управляющие воздействия, W_t - внешние воздействия, S_t - параметры состояния объекта, Y_t - значения выходов объекта, а нормативная модель - параметрами $X_t^* = \{U_t^*, I_t^*\}$, где U_t^* - нормативные управление, I_t^* - нормативные информирующие решения. Деятельность человека определяется набором параметров $X_t^* = \{U_t^*, I_t^*\}$, где U_t^* - управляющие воздействия, а I_t^* - информирующие решения. Значение технико-экономического показателя Q_t , с помощью которого описывается эффективность работы всей системы (для простоты положим, что имеется всего один ТЭП), есть некоторая заданная функция $Q_t = f(Z_t)$ от параметров Z_t .

Рассмотрим разность $\delta_t = Q_t^* - Q_t$ между значениями Q_t^* и Q_t ТЭП в случаях, если бы были реализованы соответственно управляющие воздействия U_t^* и U_t при одних и тех же возмущениях W_t . Величина и знак этой разности характеризуют на сколько управляющие решения U_t^* , выбранные человеком, "лучше" ("хуже") управляющих решений U_t нормативной модели. Заметим, что величину Q_t^* можно интерпретировать как "гибкий" норматив, поскольку её значение зависит от внешних возмущений W_t так же, как и значение Q_t .

Используя в качестве показателя эффективности деятельности человека разность δ_t , можно строить различные функции стимулирования, например,

$$R = R_0 + \alpha R_1, \quad (1)$$

либо

$$R = R_0 + \begin{cases} \alpha R_1, & \text{если } R_1 > C_{max}, \\ 0, & \text{если } C_{min} < R_1 < C_{max}, \\ -\beta R_1, & \text{если } R_1 < C_{min}, \end{cases} \quad (2)$$

где $R_t = \int_0^t \delta_t dt$, а $R_o, \alpha, \beta, C_{min}, C_{max}$ -настроочные коэффициенты, выбираемые эмпирически в зависимости от чувствительности человека к стимулирующим решениям, размеры фонда стимулирования и других факторов, А и В - моменты времени, в пределах которых рассчитывается значение стимула.

Таким образом, задача построения функций стимулирования (1), (2) сводится к оценке показателя эффективности деятельности человека δ_t .

Сначала укажем способ вычисления величины δ_t для случая $X_t^u = U_t^u$, $X_t^n = U_t^n$, а затем охарактеризуем специфику вычисления δ_t в случае $X_t^u = \{U_t^u, I_t^u\}$, $X_t^n = \{U_t^n, I_t^n\}$.

Чтобы определить δ_t , необходимо по имеющимся данным об управлении U_t^u и U_t^n и реализации Z_t оценить величины Q_t^u и Q_t^n , т.е. построить оператор $\Phi[\cdot]$ такой, что $Q_t^u = \Phi(U_t^u, Z_t)$ и $Q_t^n = \Phi(U_t^n, Z_t)$.

Способ оценки величин Q_t^u и Q_t^n заключается в сравнительном анализе эффективности управлений U_t^u и U_t^n с эффективностью Q_t фактически реализованного управления U_t . Для этого достаточно знать только приращения управляемых решений $\Delta U_t^u = U_t^u - U_t$, $\Delta U_t^n = U_t^n - U_t$ и соответствующие им приращения ΔS_t^u , ΔS_t^n , ΔY_t^u , ΔY_t^n состояний S_t и выходов Y_t , которые определяются с помощью натурально-математического моделирования [1-3], (предполагается, что все эти приращения достаточно малы). По приращениям ΔU_t^u , ΔS_t^u , ΔY_t^u и ΔU_t^n , ΔS_t^n , ΔY_t^n рассчитываются соответственно приращения ТЭП

$$\begin{aligned}\Delta Q_t^u &= Q_t^u - Q_t, \\ \Delta Q_t^n &= Q_t^n - Q_t,\end{aligned}\tag{3}$$

где Q_t - фактическое значение ТЭП. Если ΔQ_t^u и ΔQ_t^n

определенны, то, используя выражения (3), легко вычислить величины Q_t^u , Q_t^h и $\delta_t = Q_t^u - Q_t^h$. Сразу же отметим, что ниже будет рассмотрен только способ построения оценки Q_t^h , поскольку оценка величины Q_t^u производится по аналогичным выражениям, в которых лишь U_t^u заменено на U_t^h . В том случае, когда управления человека U_t^u реализуются практически точно, т.е. можно принять, что $U_t^u = U_t$, то $Q_t^u = Q_t$ и, следовательно, достаточно вычислить только Q_t^h .

Разложим в ряд Тейлора функцию $f(Z_t)$, выражающую зависимость Q_t от параметров Z_t в окрестности фактических значений параметров U_t , S_t , y_t . Ограничивааясь линейными членами разложения, получим следующую оценку нормативного значения ТЭП

$$Q_t^h \approx Q_t + a_t^1(U_t^h - U_t) + a_t^2(S_t^h - S_t) + a_t^3(y_t^h - y_t), \quad (4)$$

где a_t^1 , a_t^2 , a_t^3 - коэффициенты разложения ТЭП. Для определения приращений $\Delta S_t^h = S_t^h - S_t$ и $\Delta y_t^h = y_t^h - y_t$ в (4) используется, как отмечалось выше, метод натурально-математического моделирования [I-3].

В качестве примера расчета приращений выходов Δy_t^h (приращения ΔS_t^h рассчитываются аналогично) приведем способ вычисления Δy_t^h для случая, когда известна динамическая модель объекта управления

$$\Delta y_t^h = \sum_{i=1}^m \frac{k_i}{T_i} \int_0^{T_i} \exp\left(-\frac{\theta}{T_i}\right) \cdot [U_i(t-\theta-\tau_i) - U_i^h(t-\theta-\tau_i)] d\theta,$$

где k_i - передаточный коэффициент от приращений i -го управления к выходу, m - число управлений, T_i - постоянная времени инерции, τ_i - время запаздывания.

Рассмотрим теперь некоторые особенности построения функции стимулирования, когда человек, кроме управлений U_t^u , выбирает информирующие решения I_t^u .

Вырабатывая решения I_t^u , человек выступает как источник исходной для расчета управлений U_t^u информации о входах, состояниях и выходах объекта управления. Выполнение этой функции человеком позволяет по-новому взглянуть на его роль в АСУ [4,5].

Во многих практически важных ситуациях человек может формировать информирующие решения I_t^u , достоверные оценки которых $I_{t+\tau}$ поступают со значительным запаздыванием τ .

Такое положение дел характерно, например, при определении качества готовой продукции металлургических переделов. Человек может дать оценку качества продукции по её внешнему виду, а данные объективного контроля этой продукции с учетом времени отбора, транспортировки, подготовки и анализа ее проб поступают с большим запаздыванием. В этом случае оценки качества информирующих решений ΔI_t^u человека и ΔI_t^n нормативной модели можно строить в виде

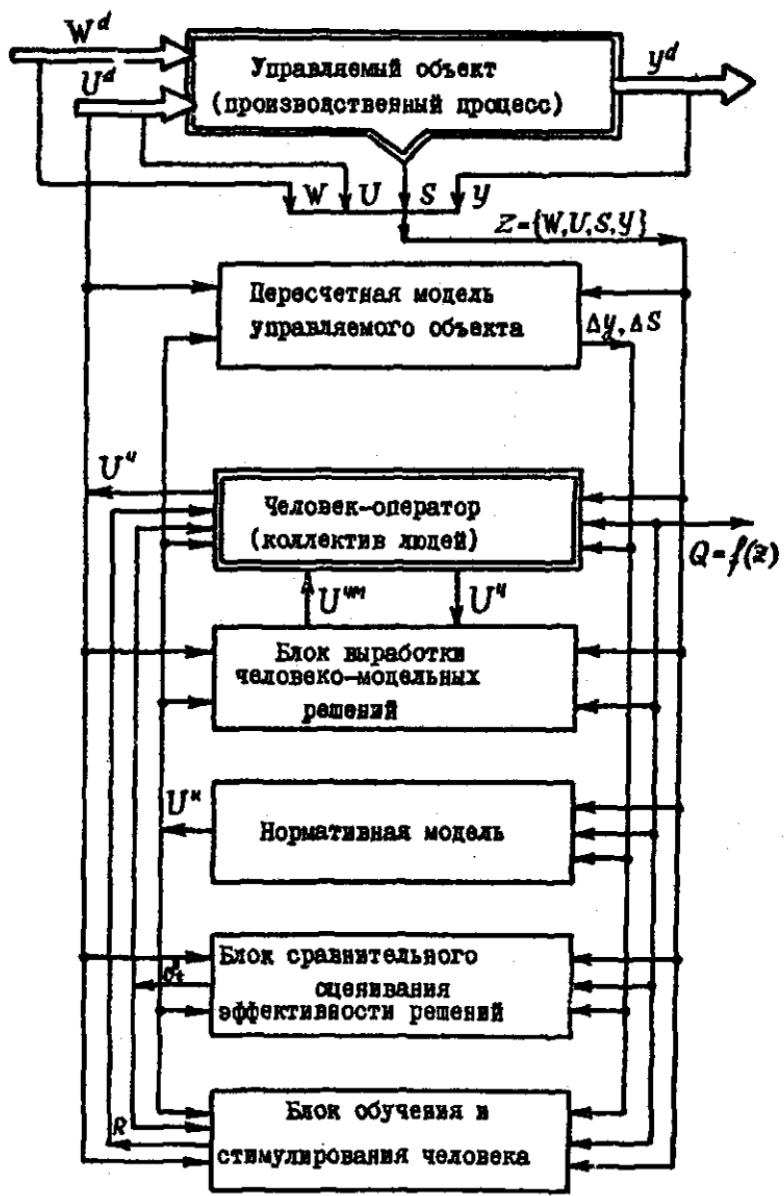
$$\Delta I_t^u = |I_t^u - I_{t+\tau}|,$$

$$\Delta I_t^n = |I_t^n - I_{t+\tau}|.$$

Стимулирующие воздействия R за качество информирующих решений отыскиваются в зависимости от ΔI_t^u и ΔI_t^n по аналогичным (1), (2) выражениям, где вместо Q_t^u и Q_t^n необходимо подставить соответственно ΔI_t^u и ΔI_t^n .

В более общей форме рассмотренные способы оценки деятельности и стимулирования человека предполагают выработку человеко-машинных решений $X_t^{um} = \{U_t^{um}, I_t^{um}\}$, которые сопоставляются с нормативными решениями $X_t^n = \{U_t^n, I_t^n\}$. Возможное улучшение X_t^{um} по сравнению с X_t^n ставится в заслугу человеку-оператору, выбирающему X_t^{um} , и в связи с этим производится его стимулирование. Кроме того, персонал, который обслуживает выработку нормативных решений X_t^n , стимулируется так, чтобы нормативные решения приближались или даже превосходили по эффективности фактические решения.

Блок-схема организационного управления с использованием нормативной модели для выработки человеко-машинных управляющих решений U^{um} представлена на рисунке.



Отметим, что между рассматриваемым методом управления и с использованием нормативной модели в организационных системах и методом автоматического управления с использованием эталонной модели [6] существует определенное сходство. Вместе с тем эти методы имеют значительное различие, связанное с тем, что организационные системы обладают свойством активности [5]. Активность организационной системы проявляется, например, в том, что человек, входящий в ее состав, может воздействовать на нормативные управляющие решения, целенаправленно формируя исходную для расчета управляющих решений U_t информацию I_t . В системах автоматического управления с использованием эталонной модели, такого воздействия на управляющие воздействия нет.

Практическое внедрение организационного управления с использованием нормативной модели требует, во-первых, реализации нормативной модели с применением средств вычислительной техники и, во-вторых, специального обучения человека на тренажерах в учебных заведениях и непосредственно в производственных системах.

Одним из наиболее конструктивных путей внедрения рассмотренного способа организационного управления с нормативной моделью в производственные процессы является соответствующее построение АСУ ТП и АСУП.

Организационный механизм с использованием нормативной модели способствует более рациональному применению средств вычислительной техники, повышению эффективности производства и качества продукции. Тем самым в какой-то мере реализуется концепция, выдвинутая в [4]. Соответствующие представления имеют, на наш взгляд, очевидные преимущества перед структурами типа "Советчик оператора" с чисто административной привязкой человека к УВМ. С позиций предлагаемого организационного механизма "Человек с нормативной моделью" можно и нужно усовершенствовать руководящие материалы по созданию, внедрению и эксплуатации АСУ ТП, АСУП и интегрированных систем.

Накопленный опыт использования рассмотренного подхода в учебном и исследовательском процессе Сибирского металлургического института, а также в работающих АСУ Западно-Сибирского металлургического завода позволяет считать

его плодотворным и рекомендовать к дальнейшему обобщению и практическому применению.

В заключение приведем пример построения показателя эффективности работы человека-оператора при управлении кислородно-конверторным процессом производства стали.

В качестве ТДП Q_t , оценивающего эффективность производственного процесса, примем удельную себестоимость конверторной стали.

Удельная себестоимость конверторной стали, полученной в t -й плавке, включает удельные расходы Q_t' на сырье и ресурсы, используемые в качестве управлений, а также условнопостоянные расходы Q_t^2 (заработка плата обслуживающему персоналу, амортизационные отчисления и т.п.):

$$Q_t = Q_t' + Q_t^2,$$

$$Q_t' = \frac{1}{y_t} \sum_{j=1}^m U_j U_j(t), \quad Q_t^2 = \frac{1}{y_t} C_1 \tau_t,$$

где y_t - среднее количество стали, полученное за t -ю плавку, U_j - плановая цена материала, используемого в качестве управления j -го вида, m - число управлений,

$U_j(t)$ - фактическое управление, C_1 - плановые условнопостоянные расходы на единицу времени, τ_t - время проведения t -й плавки.

Приращение ΔQ_t показателя удельной себестоимости при изменении управлений на величины $\Delta U_j(t)$ ($j=1, 2, \dots, m$) оценивается как

$$\begin{aligned} \Delta Q_t &= \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial Q_t'}{\partial U_j(t)} + \frac{\partial Q_t^2}{\partial U_j(t)} \right) \Delta U_j(t) = \\ &= \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{U_1}{y_t} \Delta U_j(t) + C_1 \Delta \tau_t - \frac{1}{y_t^2} (U_j + C_1 \tau) \frac{\partial y_t}{\partial U_j(t)} \Delta U_j(t) \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда выражение расчета показателя эффективности управления δ_t имеет вид

$$\begin{aligned} \delta_t &= \frac{1}{y_t} \left\{ \sum_{j=1}^m U_j [U_j(t) - U_j''(t)] + C_1 \Delta \tau(t) \right\} = \\ &= \frac{C_1}{y_t^2} \sum_{j=1}^m \delta_j [U_j(t) - U_j''(t)], \end{aligned}$$

где $U_j''(t)$ - нормативные управление, $\Delta\tau(t)$ - приращение длительности фактической плавки относительно расчетной, C_2 - сумма плановых затрат на материалы и условно-постоянных расходов на плавку, b_j - коэффициенты, характеризующие приращение массы стали.

Л и т е р а т у р а

1. Авдеев В.П., Мыслиев Л.П., Соловьев В.И. О восстановительно-прогнозирующем регулировании технологических процессов. - Изв. ВУЗов. Черная металлургия, 1978, № 10.
2. Авдеев В.П. О производственно-исследовательских системах управления на базе натурно-модельных блоков. - Изв. ВУЗов. Черная металлургия, 1979, № 2.
3. Данильянц Л.Г., Ершов А.А., Авдеев В.П. и др. Исследование эффективности алгоритмов сглаживания экспериментальных данных. - Изв. ВУЗов. Черная металлургия, 1978, № 6.
4. Трапезников В.А. Человек в системе управления. - Автоматика и телемеханика, 1972, № 2.
5. Бурков В.Н. Математические основы теории активных систем - М.: Наука, 1977.
6. Петров Б.Н., Рутковский В.Ю., Крутова И.Н., Земляков С.Д. Принципы построения самонастраивающихся систем управления. - М.: Машиностроение, 1972.

С. П. Андреев, С. М. Кулаков, Ю. Н. Марченко

ФОРМИРОВАНИЕ НОРМАТИВНОЙ ИНФОРМАЦИИ В АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ

Анализ процедур получения нормативных характеристик показал, что они не учитывают факторы, связанные с участием людей в производственном процессе. В настоящей работе с позиций теории активных систем рассматривается модель формирования нормативной информации в системе внутриводского оперативного планирования. При построении модели активной системы и механизма ее функционирования использовалось описание процедур планирования в системе стимулирования, применяемых на металлургических предприятиях. Рассматривается процедура нормированного распределения плана и система стимулирования, при которой размер материального поощрения за выполнение плана не зависит от размера планового задания.

Назначение задачий в составление расписаний работы участков (цехов) завода проводится на основе нормативных характеристик их функционирования [1, 2]. Обычно используется такие характеристики как производительность, продолжительность ремонтных и переналадочных пауз, расходные коэффициенты, доля продумки, не соответствующая заказам и т. п. Производственному отделу завода, который занимается оперативным планированием на предприятии, местные нормативы участков (цехов) полностью неизвестны. Причиной тому может служить сложность производства, широкая номенклатура изделий, изменение условий функционирования производства. Кратко опишем некоторые методы получения планирующим органом информации о характеристиках производственного процесса цехов (формирование).

В практике используют четыре основных метода формирования: аналитический, отчетно-статистический, расчетный и опытный (экспертный). Для первых трех необходимо наличие этапа формирования данных о работе производственного участка и этапа обработки данных о целью получения нормативных

характеристик или формул для их расчета. Аналитический метод использует сведения о технологическом процессе на данном участке, которые получаются в результате хронометража работы участка. В случае отчетно-статистического метода данные изыскиваются из отчетной документации, которую ведет персонал производственного участка. Расчетный метод использует исходные нормативы, которые устанавливаются одним из остальных трех методов, т.е. является вторичным по отношению к ним. Отличающийся высокой оперативностью экспертный метод является наименее строгим, так как оценки нормативов, устанавливаемые специалистом-нормировщиком, могут сильно отличаться от действительных.

Резюмируя сказанное, отметим, что составление планового задания на некоторый плановый период основывается на использовании нормативов, построенных на основе анализа производственной деятельности цехов за прошлые периоды, т.е. адаптивно [3]. Переходим к формальному описанию рассматриваемой модели.

Завод представим двухуровневой активной системой, состоящей из центра (производственный отдел и дирекция) и n активных элементов (производственные участки). Допустим, что выбран некоторый набор переменных

$$Y_i = \{y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ip}\}, \quad i \in I = \{1, 2, \dots, n\},$$

которые характеризуют производственную деятельность элементов. Ими зачастую являются некоторые нормативные характеристики и объем выпускаемой продукции. Из части переменных можно образовать вектор состояний y_i :

$$y_i = \{y_{i1} = q_{i1}, y_{i2} = q_{i2}, \dots, y_{ip} = q_{ip}\}, \quad p < p, \quad i \in I.$$

При функционировании системы элементы выбирают на этапе реализации значение вектора состояний из множества возможных состояний: $y_i \in Y_i$. Тогда другая часть переменных $\sigma_i = \{\sigma_{i1} = q_{i(p+1)}, \dots, \sigma_{im} = q_{ip}\}$ будет определять известный центру параметрический вид

$Y_i(\sigma_i)$, $i \in I$. Центру неизвестно значение z_i вектора-параметра σ_i , при котором выполнено: $Y_i(z_i) = Y_i$, $i \in I$, а известны лишь множества Ω_i : $z_i \in \Omega_i$, $i \in I$. Опишем рассматриваемые составляющие механизма функционирования.

Будем полагать, что каждый период функционирования системы, состоящей из трёх этапов (формирование центром данных о моделях элементов, назначение управления $\mathcal{F}=\{x_i\}$ и этап выбора элементами своих состояний y), соответствует одному месяцу. Заметим, что в рассматриваемом случае цена единицы продукции назначается министерством и на протяжении длительного времени, как правило, остаётся постоянной. Поэтому, управление ценой не учитываем, то есть $\mathcal{F}=\{x_i\}$.

Процедура назначения плановых заданий участкам завода осуществляется в два этапа. На первом формируются нормативные характеристики участков, на основе которых определяются их производственные возможности (т.е. восстанавливаются модели ограничений элементов). Это этап формирования данных. На втором этапе на основе восстановленных производственных возможностей участков происходит собственно планирование заданий. Это этап назначения центром управления в активной системе. При отчётоно-статистическом методе одни нормативы устанавливаются на основе оценки значений соответствующих параметров персоналом участка (встречный способ формирования данных), а другие путём организации наблюдений за работой участка (адаптивный способ). Таким образом, такой метод соответствует комбинированному способу формирования данных с оператором вида

$$a_{ij}^k = \mathcal{E}_y(a_{ij}^{k-1}, S_i^k, y_i^{k-1}), \quad j=m_i+1, \dots, m; \quad i \in I. \quad (I)$$

Здесь $S_i^k = \{S_{i1}^k, S_{i2}^k, \dots, S_{im}^k\}$, k — номер периода функционирования. По этим оценкам $\mathcal{G}_i^k = \{S_i^k, a_i^k\}$, $i \in I$ центром строятся оценочные множества возможных состояний элементов: $Y_i^k = Y_i(\mathcal{G}_i^k)$, $i \in I$.

Интересы центра и элементов определяются материальными, моральными и прочими факторами. За целевые функции мы примем заработную плату, определяемую планом и результатом его выполнения: $f_i(x_i, y_i)$, $i \in I$ для элементов в $\Phi(x, y)$ для центра.

Возможности выбора элементами своих состояний y_i^k в встречных оценках S_i^k могут быть ограничены назначением центром ограничений $B_i^k = B_i(x_i^k)$ и $\Omega_i^k = \Omega_i(S_i^{k-1})$:

$y_i^k \in B_i(x_i^k) \cap Y_i(z_i)$. $s_i^k \in \Omega_i(s_i^{k-1}) \cap \Omega_i$. $i \in I$, что соответствует введению в целевые функции элементов сильных штрафов за нарушение этих условий. На практике под сильными штрафами подразумеваются жесткие административные меры (например, выговора, смещение с должности, увольнения и т.п.).

Построенная по правилу (1) оценка $\alpha^k = \{\alpha_i^k\}$ через план входит в целевые функции элементов в отдельном периоде: $f_i(x_i^k, y_i^k) = f_i(x_i(s^k, \beta(\alpha^{k-1}, s^k, y^{k-1})), y_i^k)$,

где обозначено $\beta(\alpha^{k-1}, s^k, y^{k-1}) = \{\beta_i(\alpha_i^{k-1}, s_i^k, y_i^{k-1})\}$.

Следовательно, от выбора элементами стратегий s^{k-1} и y^{k-1} в периоде функционирования с номером ($k-1$) зависит значение их целевых функций в последующие периоды. Учет элементами последствий принимаемых решений можно отразить по-разному [3]. Предположим, что элементы стремятся оптимизировать свой суммарный выигрыш за ряд периодов. Тогда критерий эффективности i -го активного элемента в k -м периоде примем в виде

$$W_i^k = f_i(x_i(s^k, \beta(s^k), y_i^k) + \sum_{q=k+1}^{k+N_i} f_i(x_i(s^q, \beta(\alpha^{q-1}, s^q, y^{q-1})), y_i^q),$$

$$s_i^q \in \Omega_i(s_i^{q-1}) \cap \Omega_i, \quad (2)$$

$$y_i^q \in B_i(s^q, \beta(\alpha^{q-1}, s^q, y^{q-1})) \cap Y_i(z_i).$$

Нахождение элементом стратегий s_i^k в y_i^k происходит в условиях незнания стратегий $\alpha^k(i)$, $y^k(i)$ и s^q, y^q , $q = k+1, k+2, \dots, k+N_i$. Применяя к своему критерию эффективности (2) правило Π_i устранения этой неопределенности, элемент переходит к критерию W_i^k :

$$W_i^k \xrightarrow{\Pi_i} \tilde{W}_i^k \quad \text{с известными стратегиями}$$

$\alpha_i(s)$ первого хода и $\beta_i(y)$ второго хода [3,4].

Аналогично [4] можно определить множество равновесных решений игры элементов. Множество ситуаций $R_{(s,y)}(z, N)$ будет множеством равновесных решений игры элементов некоторого уровня после установления центром механизма функцио-

нирования с комбинированным способом формирования данных, если для $\forall (\hat{s}, \hat{y}) \in R_{(s,y)}(\tau, N)$ выполнены:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_i^E(x_i(\hat{s}_i, \alpha_i(s), \beta_i(\hat{s}_i, \alpha_i(s), \hat{y})), \beta_i(y)) &= \\ = \max_{\hat{s}_i \in Q_i \cap Q_i(\hat{s}_i)} \tilde{\Psi}_i^E(x_i(\hat{s}_i, \alpha_i(s), \beta_i(\hat{s}_i, \alpha_i(s), \hat{y})), \beta_i(y)), \beta_i(y) &, \\ \tilde{f}_i^E(x_i(\hat{s}, \beta_i(\hat{s}, \hat{y})), \alpha_i(s), \beta_i(y), \hat{y}_i, N_i) &= \\ = \max_{y_i \in D_i(\hat{s}, \beta_i(\hat{s}, \hat{y})) \cap Y_i(z_i)} \tilde{f}_i^E(x_i(\hat{s}, \beta_i(\hat{s}, \hat{y})), \alpha_i(s), \beta_i(y), y_i, N_i) &. \end{aligned} \quad (3)$$

Зная принципы Π_i , $i \in I$ рационального выбора стратегий центр может построить множество $R_{(s,y)}(\tau, N)$ и решать задачу анализа механизма функционирования Σ на этом множестве:

$$K(\Sigma) = \min_N \min_{\tau} \min_{(\hat{s}, \hat{y}) \in R_{(s,y)}(\tau, N)} \Phi(x(\hat{s}, \hat{y}), \hat{y}). \quad (4)$$

Незнание центром степени дальновидности $N - \{N_i\}$ элементов может ухудшить значение критерия эффективности центра и сильно усложнить построение оценки (4). Во избежание этого в [3] предлагалось синтезировать прогрессивные механизмы функционирования, не приводящие к зависимости множества равновесных решений от степени дальновидности элементов, при этом равновесное решение достигается за один период.

Будем предполагать, что состояние i -го элемента центр описывает с помощью показателя объема выпускаемой элементом продукции y_i (скаляр): $y_i \in Y_i(z_i)$, где $Y_i(z_i)$ - множество возможных выпусков, z_i - неизвестные центру параметры, для которых формируются нормативы $B_i = \{S_i, A_i\}$.

Из вышестоящих плановых органов в центр поступает директивное плановое задание x_o^k по выпуску продукции всей системой, назначаемое по правилу "от достигнутого"

$$x_o^k = \max(x_o^{k-1}, \sum_{i=1}^n y_i^{k-1}).$$

Центр распределяет это задание между элементами по закону

$$x_i^k = \frac{x_o^k \max_{y_j \in Y_j(S_j^k, a_j^k)} y_j}{\sum_{j=1}^n \max_{y_j \in Y_j(S_j^k, a_j^k)} y_j} = x_o^k \cdot f_i^k. \quad (5)$$

В этой процедуре коэффициент f_i^k , показывающий какую долю продукции от x_o^k должен выпустить i -й элемент, устанавливается нормированием по максимально возможному выпуску элементов. Такой закон планирования определяет необходимость равномерной загрузки производственных мощностей. Естественно считать, что отклонение от равномерной загрузки элементов приводит к потерям в системе. Введем функцию потерь

$$\varphi(s, a, r) = \begin{cases} 0 & \text{если } (s, a) = r, \\ g(s, a, r) > 0 & \text{если } (s, a) \neq r. \end{cases}$$

Примем также, что производственный отдел и дирекция материально заинтересованы в выполнении заводом директивных планов. С учетом сказанного целевую функцию центра представим в виде

$$\Phi(y^k) = d_o + \beta d_o I \left[\sum_{i=1}^n y_i^k - x_o^k \right] - \varphi(s, a, r).$$

Здесь $I[z] = 1$, если $z > 0$ и $I[z] = 0$, если $z \leq 0$. Составляющая $\beta d_o I \left[\sum_i y_i^k - x_o^k \right]$ представляет собой премию за выполнение плана; d_o - постоянная составляющая (оклад); β - коэффициент ($0 < \beta < 1$). И еще одно обстоятельство говорит в пользу такого представления целевой функции центра: на практике дирекция несет ответственность за выход завода на некоторую заданную проектную мощность $\bar{x} > x_o^k$.

Что касается активных элементов, то их целевые функции представим в виде

$$f_i(x_i^k, y_i^k) = d_i + \alpha d_i I [y_i^k - x_i^k]. \quad (6)$$

Здесь d_i - постоянная составляющая фонда заработной платы

производственного участка, а величина $\alpha d_i \cdot 1[y_i^k - x_i^k]$ — премия за выполнение плана, где α — коэффициент ($0 < \alpha < 1$). Из (6) следует, что при любом реализуемом плане x_i^k для разных состояний $y_i^k > x_i^k$, значения целевой функции совпадают, то есть для элемента выбор состояния может быть неоднозначен. Разумно ввести гипотезу: из множества рациональных стратегий, на котором выигрыш элемента имеет одно и то же значение, элемент выбирает максимальное состояние. Правдоподобность этой гипотезы поведения элемента следует из того, что увеличение объема выпуска продукции сопровождается возрастанием интенсивности трудозатрат, что в явном виде не учитывается в (6).

Проведем анализ функционирования системы с использованием центром отчетно-статистического метода нормирования при составлении плановых заданий элементам.

При отчетно-статистическом методе нормирования множество Y_i возможных выпусков имеет вид

$$Y_i(\tau_u, \tau_{iu}) = \left\{ y_i \mid 0 \leq y_i \leq \tau_{iu} \left(T - \frac{1}{\tau_{iu}} \right) \right\}, \quad (7)$$

где τ_{iu} — максимальная производительность элемента; τ_{iu} — величина, обратная минимальному времени ремонта и переделки за плановый период T ; $(T - \frac{1}{\tau_{iu}})$ — "частое" время работы элемента.

Оценка S_{iu}^k параметра τ_{iu} получается встречным способом, а оценка a_{iu}^k параметра τ_{iu} — аддитивным:

$$a_{iu}^k = \max \left(a_{iu}^{k-1}, \frac{S_{iu}^k}{S_{iu}^k T - y_i^{k-1}} \right). \quad (8)$$

На выбор оценок $S_{iu}^k = \{S_{iu}^k\}$ центр устанавливает дополнительные ограничения $\Omega_{iu}^k = \{S_{iu}^k \mid S_{iu}^k > y_i^{k-1}/T\}$, т.е. $S_{iu}^k \in \Omega_{iu} \cap \Omega_{iu}^k, i \in I$. По оценкам $\mathcal{G}_i^k = \{S_{iu}^k, a_{iu}^k\}$ строятся оценочные множества

$$Y_i(\mathcal{G}_i^k) = \left\{ y_i^k \mid 0 \leq y_i^k \leq S_{iu}^k \left(T - \frac{1}{a_{iu}^k} \right) \right\}.$$

Критерий эффективности дальновидного элемента ($N_i > 0$) в первом периоде определим аналогично (2). Учитывая конкретный вид целевой функции элемента (6), оператора комбинированного способа формирования данных (8), закона управления (5) и параметрического вида множества возможных состояний (7), после проведения несложных преобразований имеем:

$$W'_i = (N_i + 1)d_i + \alpha d_i \cdot 1 [y_i^t - x_i^t] + \\ + \alpha d_i \sum_{q=2}^{N_i+1} 1 \left[y_i^q - \max(x_o^q, \sum_{j=1}^n y_j^q) \cdot \frac{\max\{S_u^k\}_{k \in Q(q)} \frac{\max\{y_i^k\}}{\min\{S_u^k\}_{k \in Q(q)}}}{\sum_{j=1}^n \max\{S_u^k\}_{k \in Q(q)} \frac{\max\{y_j^k\}}{\min\{S_u^k\}_{k \in Q(q)}}} \right], \quad (9)$$

$$S_u^q \in \{S_u\} | S_u \geq \frac{y_i^q}{T}\}, \quad y_i^q \in \{y_i^q | 0 \leq y_i^q \leq r_{ii}(T - \frac{q}{r_{ii}})\}, \quad Q(p) = \{1, 2, \dots, p\}.$$

Определим множество равновесных решений. При любом правиле устранения i -м элементом неопределенности в (9), связанной с незнанием стратегий других элементов, множество абсолютно оптимальных состояний i -го элемента есть $y_i^t > x_i^t$. Однако из выражения (9) видно, что перенаполнение плана x_i^t и рост встречных оценок S_u^q , $q = 1, 2, \dots, 1 + N_i$ может привести к увеличению планового задания в последующих периодах. Тогда, учитывая принятую гипотезу поведения активных элементов при выборе своей стратегии из множества рациональных стратегий, заключаем, что, строго выполнив план и сообщив заниженную оценку в первом периоде, i -й элемент будет заинтересован в дальнейшем придерживаться этих стратегий. Итак, множество равновесных решений есть

$$R_{(s,y)}(z, N) = \prod_{i \in I} \left\{ \hat{S}_{ii}, \hat{y}_i \mid \hat{S}_{ii} = \max(\min_{S_u \in Q_{ii}} S_{ii}, \frac{x_i^t}{T}), \hat{y}_i = x_i^t \right\}.$$

Следовательно, элементы будут заинтересованы занижать оценку производительности и выпускать продукцию в объеме много меньшем максимально допустимого. Другими словами, значительные производственные возможности останутся скрытыми. Определяемая из (4) оценка критерия эффективности

механизма функционирования с принятой целевой функцией центра будет искажей.

Ситуация будет иной, если рассматриваемый механизм функционирования изменить так, чтобы он стал прогрессивным. Дадим определение прогрессивного механизма функционирования и применительно к нашей модели оценим его критерий эффективности. Пусть для множеств $Y_i(\tau_i)$, $i \in I$ выполнено следующее условие:

$$\forall \tau_i^1, \tau_i^2 \in \Omega_i, \tau_i^1 < \tau_i^2 : Y_i(\tau_i^1) \subset Y_i(\tau_i^2). \quad (10)$$

Запись $\tau_i^1 < \tau_i^2$ понимается в смысле: $\tau_i^1 \neq \tau_i^2$, $\forall j : \tau_j^1 < \tau_j^2$.

Механизм функционирования будем называть прогрессивным, если для цепевых функций элементов выполнены:

$$\forall i : \forall \sigma_i^1, \sigma_i^2 \in \Omega_i, \sigma_i^1 < \sigma_i^2, \forall \tau_i \in \Omega_i, \forall \sigma(i), \forall y_i \in Y_i(\tau_i) :$$

$$f_i(x_i(\sigma(i), \sigma_i^2), y_i) > f_i(x_i(\sigma(i), \sigma_i^1), y_i), \quad (II)$$

$$\forall x_i, \forall y_i^1 < y_i^2 \in Y_i(\tau_i) :$$

$$f_i(x_i, y_i^2) > f_i(x_i, y_i^1).$$

Здесь $\sigma(i) = \{\sigma_1^i, \dots, \sigma_{i-1}^i, \sigma_{i+1}^i, \dots, \sigma_n^i\}$.

Для рассматриваемого выше механизма функционирования введем в цепевые функции элементов слагаемые вида

$\Delta \sigma_i^k = d_i(\mu_i^1 S_{ik}^k + \mu_i^2 A_{ik}^k)$, $0 < \mu_i^1, \mu_i^2 < 1$. Для множеств $Y_i(\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \in I$ условия (10) выполнены. Такой механизм функционирования удовлетворяет теперь условию прогрессивность (II). Нетрудно показать, что теперь каждый элемент в первом же периоде функционирования оптимизирует критерий эффективности (9), при любых стратегиях других элементов выберет $S_{ik} = \tau_{ik}$, $\hat{y}_i = \max_{y_i \in Y_i(\tau_i, \tau_{i+1})} y_i$. При этом функционирование системы будет уже абсолютно оптимальным.

Используя аналитический метод нормирования центр в каждом периоде функционирования располагает достоверной информацией о фактической производительности элементов в предыдущем периоде. Поэтому по сравнению с отчетно-статистическим методом нормирования в данном случае вектор состоя-

ний состоит из двух компонент $y_i^k = (y_{ii}^k, y_{ie}^k)$, выбор элементом которого трактуется как выпуск продукции в объеме y_{ii}^k с производительностью y_{ie}^k . Множество возможных состояний i -го элемента можно представить в виде.

$$Y_i(\tau_i) = Y_{iz} \times \left\{ y_i \mid 0 \leq y_i \leq (\max y_{iz})(T - \frac{1}{\tau_i}) \right\}, \quad i \in I,$$

$y_{iz} \in Y_{iz}$

где Y_{iz} интервал, из которого элемент выбирает скаляр y_{iz}^k . Параметр $\tau_i = \frac{1}{T_{min}}$ является величиной, обратной минимально возможному времени ремонта и переналадки за плановый период продолжительностью T , тогда $(T - \frac{1}{\tau_i})$ определяет максимальное возможное время работы i -го элемента. Зная выбранный элементом вектор состояний центр строит оценку параметра τ_i , то есть использует аддитивный способ формирования данных с оператором

$$\alpha_i^k = \max(a_i^{k-1}, \frac{y_{iz}^{k-1}}{y_{iz}^{k-1} \cdot T - y_{iz}^{k-1}}).$$

Целью центром планируются обе компоненты вектора состояний каждого элемента, но целевые функции элементов зависят только от планового значения x_{ii}^k первой компоненты, причем, определяются выражением (6) после замены y_{iz}^k и x_{ii}^k соответственно на y_{ii}^k и x_{ii}^k . На выбор состояния y_{ii}^k центр устанавливает ограничения $B_i(y_{ii}^k) = \{y_{ii} \mid y_{ii} \geq y_{ii}^{k-1}\}$.

Проведя аналогичные предыдущему случаю рассуждения, находим равновесное решение

$$\hat{y}_{ii} = x_{ii}^k, \quad \hat{y}_{ie} = \frac{x_{ie}^k}{T - 1 / \max_{a_i \in \Omega_i} \alpha_i},$$

которое достигается за один период функционирования. При таких равновесных стратегиях элементов критерий эффективности механизма функционирования может иметь малое значение и функционирование системы будет неоптимальным.

З а к л о ч е н и е

В настоящей работе сделана попытка анализа реального производства с позиций теории активных систем. И хотя построенная модель несколько упрощена и не претендует на полную адекватность действительности, она качественно правильно отражает основные моменты хозяйственного механизма.

Показано, что предшествующий составлению плановых заданий производственным участкам процесс построения нормативных характеристик соответствует этапу формирования центром данных о моделях активных элементов. Незнание центром вектор-параметров γ_i , $i \in I$ в параметрических представлениях множеств возможных состояний элементов $Y_i(\gamma_i)$, $i \in I$ отражает факт отсутствия у производственного отдела завода информации о значениях нормативов технологического процесса производства. Использование отчетно-статистического и аналитического методов нормирования порождает классы механизмов функционирования активных систем с комбинированным и адаптивным способами формирования данных соответственно. При анализе таких механизмов функционирования критерий эффективности (4) определяется на множестве равновесных решений (3). Рассмотрев систему стимулирования за выполнение плана, при которой материальное поощрение не зависит от размера планового задания, и закон назначения планов по драмату "от достигнутого" установлено, что в этом случае производственные участки будут заинтересованы работать с малой производительностью и выпускать продукцию в объеме много меньшем максимально возможного.

Отметим, что нами учитывалась в основном лишь материальная заинтересованность людей, занятых в производстве. Такие факторы как моральные, психологические, случайные остались вне рамок обсуждения. Далее на предприятиях виду честионарности производственных процессов и непрерывного развития нормативы могут меняться. При планировании важно учесть характеристики производственной ситуации, сложившейся к началу очередного планового периода. Следовательно, параметры моделей элементов и множества возможных состояний могут изменяться от периода к периоду. Исследование таких динамических моделей представляет собой самостоятельную проблему.

Л и т е р а т у р а

1. Кулаков С.М., Зимин В.В., Курильщикова Г.И. Формирование нормативных характеристик производственных элементов активной системы. В кн. : Труды IV Всесоюзного совещания "Статистические методы теории управления". М., "Наука", 1978
2. Кулаков С.М., Зимин В.В., Курильщикова Г.И. Формирование нормативной информации в системе оперативного планирования. Известия вузов. Серия "Черная металлургия", 1978, №2.
3. Бурков В.Н. Математические основы теории активных систем. М., "Наука", 1977
4. Андреев С.П., Кондратьев В.В. Анализ механизмов функционирования в активных системах со связанными периодами функционирования. Труды МФТИ. Сер. Радиотехника и электроника. М., 1978.

ФОРМИРОВАНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ОЦЕНКИ ОБЪЕКТОВ, КОМПЛЕКСНО ОЦЕНИВАЕМЫХ НАБОРАМИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

I. Постановка задачи

При управлении сложными объектами, характеризующимися определенными наборами показателей, возникает задача формирования обобщенной их оценки. В работе предлагается новый подход к formalизации и решению этой задачи, использующий метод автоматической классификации (см., например, [1]), допустимый в большинстве практических ситуаций.

Для формальной постановки задачи введем ряд обозначений:
 i - индекс отдельных объектов, число которых равно N ;
 j - индекс отдельных показателей, число которых равно M ;
 K_i - вектор размерности M , с компонентами K_{ij} , представляющими собой значение j -го показателя для i -го объекта; K_i - обобщенная оценка i -го объекта.

Кроме того сделаем два предположения. Во-первых, будем считать, что обобщенные оценки K_i принадлежат некоторой бальной шкале $J_L = \{1, 2, \dots, L\}$, включающей L градаций. Во-вторых, будем считать, что на множестве исходных показателей задана функция свертки $f(x_1, x_2, \dots, x_M) = f(x)$ (в дальнейшем эта функция f предполагается неубывающей по каждому из M её аргументов).

Теперь рассматриваемая задача может быть сформулирована следующим образом: по заданным векторам K_i ($i=1, N$) и по заданной функции свертки f сформировать обобщенные оценки K_i ($i=1, N$), принадлежащие бальной шкале J_L .

Основная идея предлагаемого метода решения поставленной задачи состоит в том, чтобы, используя значения исходных показателей K_{ij} , разбить множество всех объектов $J_N = \{1, 2, \dots, N\}$ на L групп (по числу градаций в шкале J_L) и присвоить всем объектам каждой группы соответствующий балл (этот балл и определяет значение обобщенной оценки). Данный метод определения обобщенной оценки будет достаточно адекватным, если в формируемые группы попадают объекты дос-

таточно близкие по значениям исходных параметров K_{ij} . Таким образом, реализация метода требует задания меры близости на множестве объектов \mathcal{I}_N , а также выработки критерия, характеризующего качество получаемого разбиения.

2. Задание меры близости на множестве оцениваемых объектов

Рассмотрим два способа задания меры близости.

Первый способ состоит в том, что предварительно формируются обобщенные оценки \tilde{K}_i для каждого объекта с использованием заданной функции свертки, т.е.

$$\tilde{K}_i = f(K_{i_1}, K_{i_2}, \dots, K_{i_N}). \quad (1)$$

После этого, мера близости $a_1(i_1, i_2)$ для любых двух объектов i_1 и i_2 определяется соотношением:

$$a_1(i_1, i_2) = |K_{i_1} - K_{i_2}|, \quad i_1, i_2 \in \mathcal{I}_N. \quad (2)$$

Второй способ состоит в том, что при определении меры близости учитываются все локальные приращения функции свертки, получаемые при переходе от значений показателей для одного из сравниваемых объектов к значениям тех же показателей для другого объекта. Точнее, в данном случае мера близости $a_2(i_1, i_2)$ для любых двух объектов i_1 и i_2 определяется соотношением:

$$a_2(i_1, i_2) = \sum_{j \in \mathcal{I}_N} \left\{ |f[\tilde{K}_{i_1}(K_{i_2j})] - f[\tilde{K}_{i_1}]| + \right. \\ \left. + |f[\tilde{K}_{i_2}(K_{i_1j})] - f[\tilde{K}_{i_2}]| \right\}, \quad (3)$$

где через $\tilde{K}_i(K_{ij})$ обозначен вектор, отличающийся от вектора \tilde{K}_i только j -й компонентой, которая в первом из векторов совпадает с величиной K_{ij} .

Оба способа задания меры близости на множестве оцениваемых объектов представляются вполне адекватными. При этом, использование в (1), (2) и в (3) функции f содержательно

(по смыслу функции свертки) является вполне оправданным. Будем в дальнейшем число $a_p(i_1, i_2)$, где $p = 1, 2$ и $i_1, i_2 \in J_N$, определяемое с помощью (1), (2) или (3), называть величиной связи между объектами i_1 и i_2 . Все величины связей будем сводить в матрицу A_p ($p = 1, 2$) размера $N \times N$. Будем называть объекты одинаковыми, если соответствующие им наборы исходных показателей совпадают. Отметим, что при обоих способах задания меры близости (см. (1), (2) и (3)) для одинаковых объектов величина связи равна нулю. Однако, при первом способе задания меры, это может иметь место и для неодинаковых объектов. Вообще, в силу (1), (2) и (3) следует считать объекты тем ближе друг другу, чем меньше для них величина связи.

3. Критерии оптимальности разбиения объектов на группы (классификации объектов)

Критерий оптимальности разбиения на группы множества объектов с заданной на нем мерой близости должен быть связан с некоторой агрегированной характеристикой близости объектов во всем разбиении. Представляется, что существуют лишь несколько разумных способов задания такой агрегированной характеристики. Прежде чем описать их введем ряд обозначений: $I = (I_1, I_2, \dots, I_L)$ – разбиение множества J_N на L подмножеств I_1, I_2, \dots, I_L (точнее, L -совокупность подмножеств I_ρ множества J_N , для которых $I_\rho \cap I_q = \emptyset$ при всех $\rho, q \in J_L$ и объединение которых дает J_N); $a_{1\rho}(J)$ (J является произвольным подмножеством J_N и $\rho = 1, 2$) – среднее значение величин связей для объектов, индексы которых составляют J , т.е.

$$a_{1\rho}(J) = \frac{1}{|J|(|J|-1)} \sum_{i_1, i_2 \in J} a_\rho(i_1, i_2); \quad (4)$$

$a_{2\rho}(J)$ (снова J является произвольным подмножеством J_N и $\rho = 1, 2$) – максимальная величина связей для объектов, индексы которых составляют J , т.е.

$$a_{2\rho}(J) = \max_{i_1, i_2 \in J} \{a_\rho(i_1, i_2)\}. \quad (5)$$

Рассмотрим теперь пять функций $F_j(A_p, I)$, где $j = 1, 5$ и $p = \sqrt{2}$, определяющих для заданных матрицей A_p величину связей и для выбранного разбиения I агрегированную величину связи (см. (4), (5)):

$$F_1(A_p, I) = \prod_{e \in \mathcal{I}_L} \left\{ |I_e| / (|I_e| - 1) \right\}^{-1} \sum_{i_1 \in \mathcal{I}_L} \sum_{i_2 \in \mathcal{I}_N} \alpha_p(i_1, i_2), \quad (6)$$

$$F_2(A_p, I) = \sum_{e \in \mathcal{I}_L} \alpha_{1p}(I_e), \quad (7)$$

$$F_3(A_p, I) = \max_{e \in \mathcal{I}_L} \{\alpha_{1p}(I_e)\}, \quad (8)$$

$$F_4(A_p, I) = \sum_{e \in \mathcal{I}_L} \alpha_{2p}(I_e), \quad (9)$$

$$F_5(A_p, I) = \max_{e \in \mathcal{I}_L} \{\alpha_{2p}(I_e)\}. \quad (10)$$

Из (6) – (10) легко вывести два важных свойства данных функций. Во-первых, они монотонны, по A_p' (точнее, для любых двух матриц A_p' , A_p'' из $A_p' \leq A_p''$ вытекает, что $F_j(A_p', I) \leq F_j(A_p'', I)$), где $j = 1, 5$. Во-вторых, все эти функции обращаются в 0 на разбиениях I , отдельные группы которых состоят только из одинаковых элементов. Эти свойства позволяют считать критериями оптимальности разбиений I минимальность для них одной из функций, определенных в (6)–(10).

Полученные таким образом критерии оптимальности разбиений являются различными, поскольку при одних и тех же матрицах A_p могут давать разные оптимальные разбиения I . Первые три критерия явным образом зависят от структуры разбиения, а именно, от величин $|I_e| / (l \in \mathcal{I}_L)$. Такая зависимость введена в функции (6), (7) и (8) для того, чтобы множество оптимальных решений не менялось при преобразованиях матрицы A_p вида: $A_p + dE$, где E – матрица соответствующего размера, состоящая из одних единиц, а d – произвольное число. Действительно, сожалательно было бы сложно объяснить почему при указанном преобразовании матрицы меняется множество оптимальных разбиений. В критериях, опре-

делаемых функциями из (9) и (10), прямой зависимости от структуры разбиения нет. Тем не менее легко проверить, что указанные выше преобразования A_p не меняют для них множества оптимальных разбиений. Заметим кстати, что требование инвариантности этого множества по отношению к указанному преобразованию матрицы A_p резко сужает множество возможных критерии. Основные из них представлены в (6)–(10).

Независимо от того, какие из критерии используются при решении задачи группировки, практика во многих случаях накладывает на структуру выделяемого разбиения определенные ограничения. Наиболее распространенный вид этих ограничений таков (через m_e здесь и далее обозначается количество элементов в подмножестве I_e):

$$1 \leq n_{\min} \leq m_e \leq n_{\max} \leq N-L, e \in \mathcal{I}_L. \quad (II)$$

К ограничениям (II) часто добавляется ограничение такого содержания: выделено множество пар элементов (i_1, i_2) , которые не могут включаться в одну и ту же группу. В дальнейшем рассмотрим это последнее ограничение отсутствует, однако его включение фактически не усложняет соответствующие задачи.

Таким образом, в связи с проблемой формирования обобщенной оценки можно сформулировать следующую задачу (задача I): минимизировать функцию $f_j(A_p, I)$, где $p = 1, 2$ и $j = 1, 5$, при ограничениях (II).

Решив данную задачу, мы еще не решим исходной задачи. Для полного решения последней необходимо поставить в соответствие группам оптимального разбиения I_e баллы шкалы \mathcal{Y}_L . Для этого необходимо определенным образом упорядочить группы оптимального для задачи I разбиения и в соответствии с полученным упорядочением присвоить группам баллы. При решении задачи упорядочения (будем называть ее задачей II) необходимо сформировать некоторый агрегированный обобщенный показатель $\tilde{K}(I_e)$, характеризующий уровень значений обобщенных показателей K_i (см. (I)), для объектов группы I_e . Простейшие способы формирования величин $\tilde{K}(I_e)$ определяются следующими соотношениями:

$$\tilde{K}_i(I_e) = \left(\sum_{i \in \mathcal{I}_e} K_i \right) / |I_e|, \quad (12)$$

$$\tilde{K}_e(I_e) = \max_{i \in \mathcal{I}_e} \{\tilde{K}_i\}, \quad \tilde{K}_3(I_e) = \min_{i \in I_e} \{\tilde{K}_i\};$$

$$\tilde{K}_4(I_e) = \max_{i \in I_e} [\tilde{K}_e(I_e) + \tilde{K}_3(I_e)].$$

С использованием введенных величин решение задачи II состоит в упорядочении групп разбиения Γ в соответствии с монотонным уменьшением величин $K_2(I_e)$ (уменьшение указано для определенности, важна лишь монотонность).

Таким образом исходная задача фактически свелась к задаче I (далее называется основной). В следующих разделах будут описаны алгоритмы решения этой задачи. Предварительно рассматривается модификация основной задачи, для которой описываются достаточно эффективные точные алгоритмы. Незначительная модификация этих алгоритмов позволяет использовать их для решения самой задачи I. Получаемое при этом решение в одних случаях совпадает с оптимальным, а в других является достаточно близким к нему. Последнее обуславливается тем, что задача I и её модификация являются формально и содержательно весьма близкими.

4. Алгоритмы решения модифицированной основной задачи

Рассматриваемая в данном разделе модификация задачи I связана с модификацией целевых функций, определенных в (6)-(10). Для задания модифицированных целевых функций введем величины $a_1(\mathcal{J})$ и $a_2(\mathcal{J})$, где \mathcal{J} – произвольное подмножество множества \mathcal{I}_e :

$$a_1(\mathcal{J}) = \sum_{i \in \mathcal{J}} \left[\left(\frac{1}{|\mathcal{J}|} \sum_{i_i \in \mathcal{J}} \tilde{K}_{i_i} \right) - \tilde{K}_i \right], \quad (13)$$

$$a_2(\mathcal{J}) = \max_{i \in \mathcal{J}} \{\tilde{K}_i\} - \min_{i \in \mathcal{J}} \{\tilde{K}_i\}.$$

Смысл величин, определенных в (13), достаточно ясен: $a_1(\mathcal{J})$ – сумма на множестве \mathcal{J} отклонений величин показателей K_i от среднего их значения в том же множестве; $a_2(\mathcal{J})$ – диапазон изменений величин \tilde{K}_i во множестве \mathcal{J} .

Далее определим функции $F_j(\tilde{R}, I)$:

$$\tilde{F}_1(\tilde{R}, I) = \sum_{i \in \mathcal{I}_L} a_1(I_e); \quad (14)$$

$$\tilde{F}_2(\tilde{K}, I) = \sum_{e \in \mathcal{I}_L} \alpha_1(I_e); \quad (I5)$$

$$\tilde{F}_3(\tilde{K}, I) = \max_{e \in \mathcal{I}_L} \left\{ \frac{\alpha_1(I_e)}{|I_e|} \right\}; \quad (I6)$$

$$\tilde{F}_4(\tilde{K}, I) = \sum_{e \in \mathcal{I}_L} \alpha_2(I_e); \quad (I7)$$

$$\tilde{F}_5(\tilde{K}, I) = \max_{e \in \mathcal{I}_L} \{ \alpha_2(I_e) \}. \quad (I8)$$

Легко видеть, что модифицированные целевые функции $\tilde{F}_j(\tilde{K}, I)$ совпадают с целевыми функциями основной задачи только для $j=4,5$ при $P=I$ (сравните (I7), (I8) с (9), (10)). Тем не менее и в остальных случаях по своему физическому смыслу исходные и модифицированные целевые функции являются весьма близкими.

Будем задачу I, в которой целевые функции из (6)–(10) заменены соответственно целевыми функциями из (I4)–(I8), называть модифицированной задачей I. Для последней справедлива следующая теорема.

Теорема I. Пусть I'_0 – оптимальное разбиение модифицированной задачи I с целевой функцией $\tilde{F}_j(\tilde{K}, I)$. Пусть I'_{e_10} и I'_{e_20} – любые два подмножества этого разбиения и пусть для этих подмножеств определены величины:

$$\tilde{K}_{min}^*(l_1) = \min_{i \in I'_{e_10}} \{ \tilde{K}_i \}, \quad \tilde{K}_{max}^*(l_1) = \max_{i \in I'_{e_10}} \{ \tilde{K}_i \};$$

$$\tilde{K}_{min}^*(l_2) = \min_{i \in I'_{e_20}} \{ \tilde{K}_i \}, \quad \tilde{K}_{max}^*(l_2) = \max_{i \in I'_{e_20}} \{ \tilde{K}_i \}.$$

Тогда, возможны лишь два взаимоисключающих случая: либо $\tilde{K}_{max}^*(l_1) \leq \tilde{K}_{min}^*(l_2)$, либо $\tilde{K}_{min}^*(l_1) > \tilde{K}_{max}^*(l_2)$.

Результат, аналогичный содержащемуся в теореме I, доказывается в [2]. Поэтому на доказательстве теоремы I мы не останавливаемся. Отметим, что результат теоремы I позволяет использовать при решении модифицированной задачи I простые процедуры динамического программирования. Действительно, в силу теоремы I все объекты достаточно упорядочить в порядке монотонного убывания величин \tilde{K}_i , а затем в полученным ряду чисел провести границы групп с учетом выбран-

шего критерия. Задача же о границах легко приводится к нему, допускающему использование алгоритмов динамического программирования (см. [2,3]).

Алгоритм решения модифицированной задачи I включает три этапа.

Этап I состоит в упорядочении исходных объектов в соответствии с монотонным убыванием величин R_i и в последующей перенумерации объектов в соответствии с найденной упорядоченностью.

Этап 2 состоит в определении величин B_{iej} и индексов m_{iej} (для $i_{e-min} \leq i \leq i_{e-max}$ и $e \in \mathcal{I}_L$), которое осуществляется с помощью рекуррентной процедуры, выполняемой последовательно для $e = 2, 3, \dots, L$ и описываемой следующими соотношениями:

$$B_{iej} = b_j(i, i), \quad i_{e-min} = n_{e-min}, \quad i_{e-max} = n_{e-max} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} B_{iej} &= \min_{i'_e \leq i_e \leq i''_e} \{ B_{i'_e, e-1, j} \oplus b_j(i_e + 1, i) \}, \\ i'_e &= \max \{ i'_{(e-1)min}, i - n_{e-max} \}, \\ i''_e &= \min \{ i'_{(e-1)max}, i - n_{e-min} \}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$i_{e-min} = i_{e-1-min} + n_{e-min}, \quad (21)$$

$i_{e-max} = \min \{ i_{e-max} + n_{e-max}, N - (n_{e-min} + n_{e-1-min} + \dots + n_{e+1-min}) \}$. Индекс m_{iej} совпадает с индексом i_1 , для которого в (20) достигается минимум. При этом, в (19), (20) используются величины $b_j(i_1, i_2)$, где $i_1, i_2 \in \mathcal{I}_N$, $i_1 < i_2$, которые соответствуют целевым функциям $F_j(R, I)$ и определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}[i_1, i_2] &= \{ i | i_1 \leq i \leq i_2 \}; \\ b_1(i_1, i_2) &= a_1 \{ \mathcal{I}[i_1, i_2] \}; \\ b_2(i_1, i_2) &= b_3(i_1, i_2) = \frac{a_1 \{ \mathcal{I}[i_1, i_2] \}}{i_2 - i_1 + 1}; \\ b_4(i_1, i_2) &= b_5(i_1, i_2) = a_2 \{ \mathcal{I}[i_1, i_2] \}. \end{aligned} \quad (22)$$

Кроме того, в (20) используется операция \oplus , которая для $j = 1, 2, 4$ совпадает с обычной операцией сложения, а для $j = 3, 5$ дает максимальную из величин операндов. Отметим, что при $\ell = L$ процедуру достаточно выполнять лишь для $i = N$.

Этап 3 состоит в построении разбиения I. Указанное разбиение строится по результатам выполнения этапа 2, а точнее с использованием системы индексов m_{ej} . Предварительно, в рекуррентной процедуре для ℓ , последовательно принимая значения $L, L-1, \dots, 2$, определяются индексы m_{ej} :

$$m_{ej} = m_{i'e_j}, \quad i' = m_{e+1j}, \quad (23)$$

где $m_{e+1j} = N$. Затем в предположении $m_{ej} = 0$, определяются подмножества $\tilde{I}_{\ell_0}^j (\ell \in \mathcal{J}_L)$ подмножества разбиения \tilde{I}_0^j :

$$\tilde{I}_{\ell_0}^j = \mathcal{I}\{[m_{ej} + 1, m_{e+1j}]\}, \quad \ell \in \mathcal{J}_L. \quad (24)$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Разбиение \tilde{I}_0^j , полученное с помощью процедуры (19)-(24), является оптимальным в модифицированной основной задаче с целевой функцией $F_j(\bar{K}, I)$.

Доказательство теоремы 2 опирается на теорему I и соотношения (19)-(24), по которым строится разбиение \tilde{I}_0^j . Отметим, что аналогичные результаты содержатся в [2, 3].

5. Алгоритмы решения основной задачи

Рассмотрим два подхода к решению задачи I.

В первом подходе существенно используются результаты предыдущего раздела. Суть подхода в следующем. Упорядочим объекты по убыванию величин K_i . В рамках новой нумерации, соответствующей этому упорядочению, выполним процедуру (19)-(24), в которой вместо величин $b_j(i_1, i_2)$ будем использовать величины $b_{j\rho}(i_1, i_2)$, определяемые следующим образом ($\rho = 1, 2$):

$$b_{j\rho}(i_1, i_2) = \sum_{i_3=i_1}^{i_2} \sum_{i_4=i_1}^{i_2} a_\rho(i_3, i_4), \quad (25)$$

$$b_{2p}(i_1, i_2) = b_{3p}(i_1, i_2) = \frac{b_{1p}(i_1, i_2)}{(i_2 - i_1 + 1)}; \quad (26)$$

$$b_{4p}(i_1, i_2) = b_{5p}(i_1, i_2) = \max_{i_3 \leq i_1, i_4 \leq i_2} \{a_p(i_3, i_4)\}. \quad (27)$$

В соответствующей процедуре параметры i_{min}, i_{max} и получаемое разбиение \tilde{I}_0^j приобретают еще один индекс P . Разбиение \tilde{I}_0^j принимаем в качестве решения задачи I. Это решение является оптимальным для $j=4,5$ и $P=1$, и является приближенным в остальных случаях.

Решение задачи I в рамках первого подхода автоматически решает я задачу II. Точнее, получаемая при определении разбиения \tilde{I}_0^{jP} нумерация его подмножеств $\tilde{I}_{e_0}^{jP}$ (см. (24)) совпадает с нумерацией, которая получилась бы при упорядочении этих подмножеств в соответствии с монотонным убыванием величин $\tilde{K}_z(\tilde{I}_{e_0}^{jP})$ для любого $z=1,4$.

Что касается второго подхода к решению задачи I, то он не связан с предварительным упорядочением объектов и состоит в непосредственном решении данной задачи. Для этого может быть использован любой из известных методов решения дискретной задачи классификации (см., например, обзор [47]). После решения задачи I для полученного разбиения решается задача II.

Отметим, что качество решения задачи II можно характеризовать некоторой функцией $\Phi(\pi, \tilde{K}_z, I)$, где I – разбиение, \tilde{K}_z – вектор размерности L с компонентами $\tilde{K}_z(I_e)$ ($z=1,4$), π – перестановка из L элементов, упорядочивающая множества I_e в соответствии с монотонным уменьшением величин $\tilde{K}_z(I_e)$.

Два простейших и разумных способа задания функции Φ определяются следующими соотношениями:

$$\Phi_1(\pi, \tilde{K}_z, I) = \min_{e \in \mathcal{I}_L \setminus L} [\tilde{K}_z(I_{\pi_e}) - \tilde{K}_z(I_{\pi_{e+1}})], \quad (28)$$

$$\Phi_2(\pi, \tilde{K}_z, I) = \sum_{e \in \mathcal{I}_L \setminus L} [\tilde{K}_z(I_{\pi_e}) - \tilde{K}_z(I_{\pi_{e+1}})]. \quad (29)$$

Таким образом, исходную задачу можно трактовать как задачу векторной оптимизации с двумя критериями F (см. (6) – (10)) и Φ (см. (28)–(29)), что может оказаться полезным при разработке новых подходов к формированию обобщенной оценки объектов, комплексно оцениваемых наборами показателей.

Л и т е р а т у р а

1. Дорофеев А.А. Алгоритм автоматической классификации (обзор литературы). – В кн.: Проблемы расширения возможностей автоматов. Вып. I. М., ИАТ, 1971.
2. Рубинштейн И.И. Эффективные алгоритмы решения некоторых задач классификации. Труды Всесоюзной школы-семинара по управлению большими системами. Тб., "Мецниереба", 1976.
3. Йившиц Э.И., Рублинский В.И. Об оптимальном разбиении упорядоченного множества на интервалы. – В кн.: Вычислительная математика и вычислительная техника. Вып. III. Харьков, физико-техн. ин-т инженерных температур, 1972.
4. Миркин Б.Г. Дискретные задачи классификации взаимосвязанных объектов (обзор). – В кн.: Вопросы анализа сложных систем, Новосибирск, СО "Наука", 1974.

МЕХАНИЗМ НАЗНАЧЕНИЯ ОПТОВЫХ ЦЕН НА НОВУЮ ПРОДУКЦИЮ И КОРРЕКТИРОВКА ВСТРЕЧНЫХ ПЛАНОВ

I. Назначение оптовых цен на новую продукцию

Механизм назначения оптовых цен на новую продукцию производственно-технического назначения оказывает существенное влияние на переход хозяйственных организаций (ХО) к выпуску высокоеффективной новой продукции [1].

Рассмотрим систему, состоящую из назначающего оптовые цены центра (Ц) и m предприятий, переходящих к выпуску новой продукции (НП).

Формирование оптовых цен \bar{x}^o на новую продукцию осуществляется в два этапа. На первом этапе предприятия-производители сообщают в Ц (всегда $i=1, \dots, m$):

C_i - оценку себестоимости НП;

μ_i - оценку величины затрат на освоение НП;

x_i - проектируемый объем выпуска НП.

Предприятия-потребители оценивают и сообщают в Ц оценки эффективности опытных образцов НП - e_j .

На втором этапе Ц на основе оценок эффективности НП определяет верхний предел цены на НП Λ . Одновременно для всех предприятий, переходящих на выпуск НП, в Ц рассчитывается значение нижнего предела цены $\lambda_i = (1+p_i)C_i$ и коэффициента $\chi_i = \Lambda/\lambda_i + \mu_i$, где p_i - среднеотраслевая рентабельность, рассчитанная по отношению к себестоимости. Упорядочивая ХО по убыванию величины коэффициента χ_i , Ц определяет номер ℓ такой ХО, что выполняется $\chi_\ell > \bar{x}^o$, $\chi_{\ell+1} < \bar{x}^o$, где $\bar{x}^o = 1,15$. При этом разрешаемый объем выпуска НП y_i выбирается из условия:

$$y_i = \varepsilon_i x_i, \text{ где } \varepsilon_i = \begin{cases} 0, & \text{если } \chi_i < \bar{x}^o; \bar{x}^o = 1; \\ 0, & \text{если } \bar{x}^o < \chi_i < \chi_\ell \quad \prod_{i=\ell+1}^m x_i \\ \theta_i, & \text{если } \bar{x}^o \leq \chi_i \leq \chi_\ell \quad \prod_{i=\ell+1}^m x_i \\ 1, & \text{если } \chi_\ell < \chi_i. \end{cases}$$

Здесь Π - заданная потребность в НП, а величина θ_i выбирается Ц таким образом, что $0 < \theta_i \leq 1$. Производя упорядочение ХО по возрастанию оценок C_i , определяется номер k такой, что выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{k-1} y_i \leq \sum_{i=1}^n y_i < \sum_{i=1}^k y_i,$$

которое служит для определения оценки себестоимости C , принимаемой за базу оптовой цены НП

$$C = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i C_i y_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i y_i}; \text{ где } \omega_i = \begin{cases} 0, & \text{если } C_i > C_k, \\ 1, & \text{если } C_i \leq C_k. \end{cases} \quad (I)$$

Проектируемые затраты на освоение НП определяются по формуле

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i y_i}{\sum_{i=1}^n y_i}.$$

На основе C , μ и Λ в Ц рассчитывается коэффициент

$$\chi = \frac{\Lambda}{\lambda + \mu}, \quad \text{где } \lambda = (1+p_i)C,$$

величина экономического эффекта, распределяемого между предприятиями-производителями и предприятиями-потребителями

$$\vartheta = \lambda - (\lambda + \mu) \chi^0,$$

а также надбавка к цене $\bar{B} \cdot \Delta(\chi)$, где \bar{B} - среднеотраслевая нормативная прибыль. Значения ступенчатой функции $\Delta(\chi)$ приведены в [I] и даны в таблице:

χ	0+1,15	1,16+1,3	1,31+1,41	1,41+1,5	1,51+1,7
$\Delta(\chi)$	0	0,2	0,3	0,4	0,5

χ	1,71+1,9	1,91+2,2	2,21+2,6	2,61+3,0	3,0
$\Delta(\chi)$	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0

В этих условиях оптовая цена определится из условия

$$\lambda^* = \min \{ \theta; \Omega \},$$

где $\theta = \lambda + \sigma \cdot \Delta(\chi)$; $\Omega = \lambda + 0,5 \sigma$.

Предприятие, переходящее к выпуску НП, может влиять на величину назначаемой оптовой цены, изменения сообщаемые оценки C_i , μ_i и χ_i .

Если величина λ такова, что $\chi \geq \bar{\chi}$ ($\bar{\chi} = 3,0$), то уменьшение λ ниже значения $(\Lambda/\bar{\chi} - \mu)$ нецелесообразно, т.к. приводит к снижению значения $\lambda^* = \min \{ \lambda + \sigma;$

$\lambda + 0,5(\chi - \bar{\chi})(\lambda - \mu) \}$. Увеличение затрат на освоение НП при фиксированных λ и Λ не приводит к росту λ^* , поскольку величины χ и σ убывают, а $\Delta(\chi)$ не возрастают с ростом μ .

Возрастание величины λ при постоянных значениях Λ и μ хотя и приводит к уменьшению χ и, соответственно $\Delta(\chi)$, может приводить к росту λ^* . На рис. 1 и 2 показаны зависимости $\theta(\chi)$, $\Omega(\chi)$ и $\lambda^*(\chi)$ при фиксированном значении μ . Как видно, в некоторых случаях низкие значения χ и, соответственно, высокие значения λ и C могут обеспечить наибольшую величину оптовой цены.

В случае, когда $\chi < \chi^*$ Ц разрешает выпуск НП только при высокой потребности в этой продукции; при этом, несмотря на отсутствие надбавки, оптовая цена может быть достаточно высока при высоких значениях λ .

Увеличивая C ХО могут добиться повышения цены нижнего предела λ , однако при этом ХО должна учитывать, что если оценка себестоимости превышает уровень $C_i' = (\Lambda/\chi^* - \mu) \times \frac{1}{1+p_1}$, соответствующий значению $\chi_i = \chi^*$, Ц может запретить выпуск НП. Кроме того, как следует из (I), повышение оценки себестоимости выше уровня C_i' не приводит к росту C и, следовательно, увеличению λ и λ^* .

Таким образом, если к НП переходят несколько ХО, то для увеличения оптовой цены целесообразно придерживаться стра-

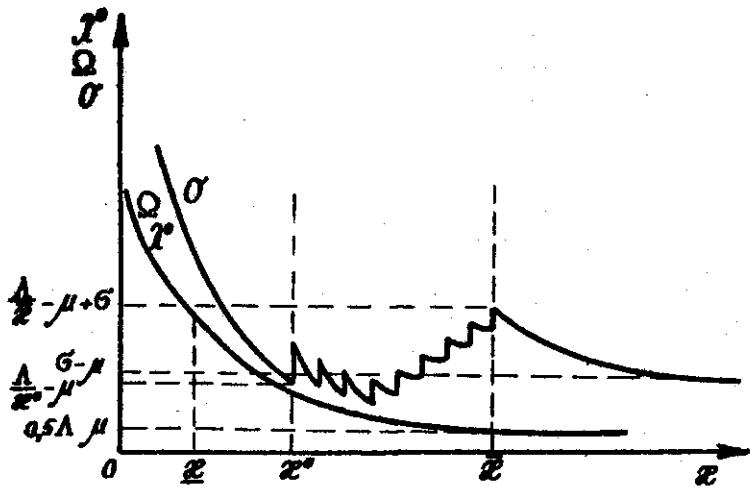


Рис.1

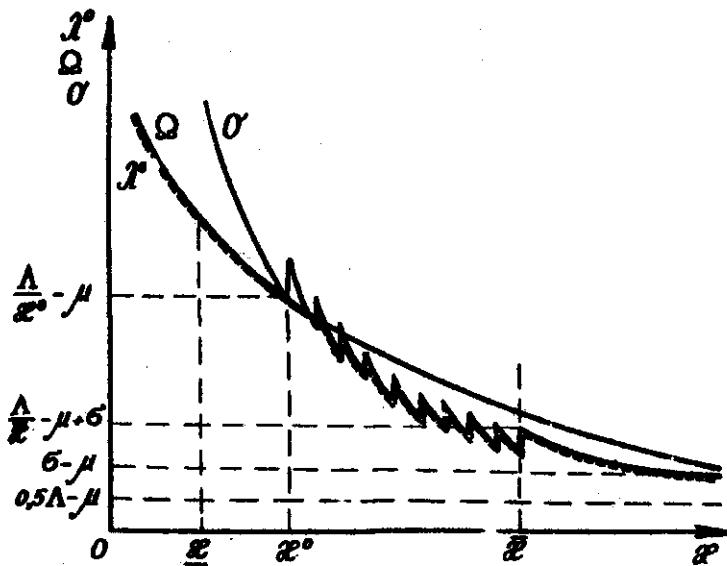


Рис.2

тегий, соответствующих сообщению оценок себестоимости таких, что

$$C_i > \min \left\{ C_k ; \left(\frac{\Lambda}{x^*} - \mu \right) \frac{1}{1 + p_k} \right\}.$$

Поскольку на первом этапе назначения оптовых цен каждой ХО не имеет информации о величине C_k , то, принимая решение о величине оценки C_i , целесообразно оценивать величину C_k на основе имеющейся в каждой ХО информации о потребности Ц в НП и предполагаемых оценках других предприятий-производителей. Точное значение C_k ХО имеет возможность рассчитать только в случае полной информированности об оценках других ХО. Например, если известно, что только одна ХО переходит к выпуску НП, то величина C_k не ограничивает оценку себестоимости и ХО может добиться большей цены.

2. Корректировка встречных планов

Рассмотрим иерархически организованную двухуровневую систему, состоящую из n предприятий, выдвигавших уточненные годовые планы u_i и встречные планы v_i (здесь $i=1, \dots, n$), и центра (Ц), который утверждает эти планы. В отдельных случаях для обеспечения заданного уровня потребностей всей системы центр корректирует выдвигаемые ХО встречные планы, утверждая планы \tilde{v}_i таким образом, что

$$\tilde{v}_i = u_i + \delta_i^f (v_i - u_i), \quad \text{где } \delta_i^f = \begin{cases} 0, & v_i \leq \tilde{v}, \\ 1, & v_i > \tilde{v}, \end{cases}$$

\tilde{v} — минимальный утверждаемый встречный план, устанавливаемый Ц с учетом потребности в продукции и выдвигаемых предприятиями планов.

Рассмотрим выбор предприятиями встречных планов v_i^* с учетом их последующей корректировки Ц. Пусть $\eta_i''(v_i)$ и $\eta_i'(g_i)$ — максимальные значения математического ожидания фонда материального поощрения предприятия при утвержденных оптимальных встречных планах \tilde{v}_i и оптимальных уточнен-

ных годовых планах q_i . В работе [2] показано, что $\tau_i > q_i$ и $\eta''(\tau_i) > \eta''(q_i)$. Обозначим q_i утвержденный план такой, что $q_i > \tau_i$ и

$$\eta''(q_i) = \eta''(q_i) < \eta''(\tau_i).$$

Очевидно, что предприятию невыгодно утверждение встречного плана $\tilde{z}_i > q_i$, так как той же величины фонда материально-го поощрения $\eta'_i(q_i) \geq \eta''(z_i > q_i)$ предприятие может добиться, принимая уточненный годовой план $u_i = q_i < q_i$ большей надежности

$$P(q_i) > P(z_i > q_i),$$

(т.к. $q_i < q_i$ соответствует $F_i(q_i) < F_i(q_i)$, где $F_i(\xi)$ - функция распределения количества выпускаемой продукции ξ).

Наиболее выгоден для предприятия утвержденный встречный план $\tilde{z}_i = \tau_i$. Для того, чтобы центр утвердил план $\tilde{z}_i = v_i$ ХО должна выдвинуть встречный план $v_i > \tilde{v}$. Если величина \tilde{v} превышает значение q_i , выдвижение встречных планов v_i невыгодно, т.к.

$$\eta''(z_i - v_i) < \eta''(z_i - q_i) = \eta'(q_i),$$

где $v_i > \tilde{v} > q_i$.

При $\tilde{v} < \tau_i$ наиболее выгоден план $\tilde{z}_i = \tau_i$.

Пусть, например, \tilde{v} определяется следующим образом:

$$\tilde{v} = \min \{v_i\} \quad (i=1,2,\dots,n).$$

Если упорядочить предприятия по значениям q_i так, что $q_1 < q_2 < \dots < q_n$, то встречные планы v_i ($i=2,\dots,n$) определяются из выражения

$$v_i = \begin{cases} q_1 + \gamma, & \text{если } q_1 + \gamma > \tau_i \\ \tau_i & \text{если } q_1 + \gamma \leq \tau_i \end{cases},$$

где γ - малая положительная величина. Значение q_1 может быть найдено из уравнения

$$\eta''_i(q_i) = \eta'_i(q_i),$$

где $\eta''_i(x_i)$ и $\eta'_i(u_i)$ получается из условий, приведенных в работе [2]. Оптимально годовые планы рассчитываются согласно следующим выражениям:

а) встречные:

при $v_i^* < W_i$

$$z_i = W_i + \frac{\frac{\beta}{\alpha+\beta} - F_i(W_i)}{f_i'(W_i)} ;$$

при $W_i < v_i^* < T + (T - W_i)/\alpha$

$$z_i = W_i + \frac{\frac{\beta}{\alpha+\beta} - F_i(W_i)}{f_i'(W_i) \cdot \alpha / (\alpha + \beta)} ;$$

при $T + (T - W_i)/\alpha < v_i^*$

$$z_i = W_i + \frac{\frac{\beta}{\alpha+\beta} [1 - F_i(W_i)] - \frac{\alpha}{\alpha+\beta} F_i(T)}{f_i'(W_i) \left[1 - \frac{\alpha^2}{(1+\alpha)(\alpha+\beta)} \right]} ;$$

б) уточненные:

при $F_i(W_i) > \beta / (\alpha + \beta)$

$$g_i = W_i + \frac{\frac{\beta}{\alpha+\beta} - F_i(W_i)}{f_i'(W_i)} ;$$

при $F_i(W_i) < \beta / (\alpha + \beta)$

$$g_i = W_i + \frac{\frac{\beta}{\alpha+\beta} - F_i(W_i)}{f_i'(W_i) \left[1 - \frac{\alpha^2}{(1+\alpha)(\alpha+\beta)} \right]} ,$$

$$\text{здесь } f_i(\xi_i) = \frac{d\bar{F}_i(\xi_i)}{d\xi_i},$$

W_i - директивный план,

T - минимальное значение выпуска, при котором для предприятий, принимающих встречные планы, норматив отчислений в фонд материального поощрения не снижается.

Таким образом, все предприятия, кроме первого, могут обеспечить себе утверждение встречных планов \bar{v}_i таких, что $\bar{v} < \bar{v}_i < g_i$. Для первого предприятия более выгоден оптимальный уточненный годовой план g_i .

* * *

1. Наибольшей оптовой цены предприятия могут добиться переходя к выпуску новой продукции с высоким верхним пределом ее цены и низкими оценками затрат на освоение. В тех случаях, когда увеличение оценок себестоимости приводит к повышению оптовой цены, предприятия могут получить большее значение цены, осваивая новую продукцию, к выпуску которой переходит малое число предприятий и потребность в которой велика. При этом выпускаемые изделия могут незначительно модифицироваться, если не требуется больших затрат на освоение.

2. Если центр корректирует встречные планы, предприятия могут быть заинтересованы во встречных планах, превышающих оптимальные встречные планы \bar{v}_i и имеющих меньшую надежность. При этом ожидаемая величина фонда материального поощрения становится ниже, чем при стимулировании без корректировки встречных планов и затраты центра на поощрение не возрастают.

Л и т е р а т у р а

- Гусаров А.С., Плотников К.Н. Цена в социалистической экономике. М., "Знание", 1976.
- Ивановский А.Г., Мурзаев С.К., Гетман О.А. Анализ современных механизмов стимулирования. Механизмы стимулирования в системе исследование - производство. М., Институт проблем управления, 1978.

А.К. Еналеев

СОГЛАСОВАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ АКТИВНОЙ СИСТЕМОЙ ПРИ НАЛИЧИИ ЛИНЕЙНЫХ ШТРАФОВ ЗА ОТКЛОНЕНИЕ РЕАЛИЗАЦИИ ОТ ПЛНА

Одним из основных требований, которые предъявляются к экономическим объектам в планируемой экономике, является выполнение утвержденных вышестоящими органами плановых показателей. В связи с этим процедура планирования должна быть связана с процедурой стимулирования производственных звеньев за реализацию установленных планов, иначе говоря, требование выполнения плана должно обеспечиваться соответствующими экономическими стимулами. Если система стимулирования выбрана, то обеспечение выполнения планов сводится к построению согласованных законов планирования, т.е. таких процедур планирования, при которых назначаются "выгодные" для производственных звеньев планы.

В работе для двухуровневых активных систем [1] устанавливается оптимальный закон согласованного планирования и показывается, что при штрафах, зависящих линейно от величины отклонения реализации от плана, этот закон планирования обеспечивает вместе с выполнением планов максимально возможную эффективность функционирования системы. Кроме этого в работе определяются необходимые и достаточные условия того, что план будет выполнен.

Описание активной системы

В описание активной системы входят описание структуры системы, переменных, ограничений, целевых функций и описание процесса её функционирования.

Будем рассматривать систему, состоящую из управляющего органа (центра) и n подчиненных ему активных элементов (АЭ). Состояние каждого АЭ определяется вектором y_i из множества Y_i возможных состояний, где $Y_i \subset E_i^{N_i}$, $E_i^{N_i} = N_i$ -мерное евклидово пространство, $i \in I = \{i | i = 1, 2, \dots, n\}$. Состояние всей системы задается со-

вокупностью $y_i = \{y_i\}$ из множества $Y_i = (\prod_{j \in Y_i} Y_j) \cap Y_i^m$, где Y_i^m - глобальные ограничения. При выборе состояния y_i каждый i -й элемент стремится максимизировать свой критерий $W_i = f_i(\rho, x_i, y_i)$, где ρ - вектор общих для всех АЭ управлений, x_i - план, т.е. требуемое центром значение вектора состояния y_i . Будем рассматривать случай информированности центра о множествах Y_i и целевых функциях W_i элементов.

С целью организации функционирования активной системы центр устанавливает механизм функционирования Σ системы путем задания процедуры стимулирования и закона управления. Процедура стимулирования определяется целевыми функциями $W_i = f_i(\rho, x_i, y_i) = \mu_i(\rho, y_i) - \eta_i(x_i, y_i)$,

где $\mu_i(\rho, y_i)$ - известная центру функция "дохода" элемента, а $\eta_i(x_i, y_i)$ - устанавливаемая центром функция штрафа за отклонение состояния y_i от плана x_i . В работе рассматривается случай, когда $\eta_i(x_i, y_i) = -(\alpha_i, |y_i - x_i|)$, α_i - вектор с компонентами $\alpha_j > 0$, $|y_i - x_i|$ - вектор с компонентами $|y_{ij} - x_{ij}|$, $j = 1, 2, \dots, N_i$. Закон управления \mathcal{T} выбирается центром как процедура вычисления управляющих параметров $\mathcal{T} = (\rho, x)$, где $x = \{x_i\}$ - план системы.

В условиях полной информированности центра о моделях элементов процесс функционирования состоит из двух этапов: назначения центром управляющих параметров $\mathcal{T} = (\rho, x)$ и выбора элементами рациональных состояний $\{y_i^*\}$.

Обозначим $R(\rho, x)$ множество рациональных состояний элементов $y^* = \{y_i^*\}$ в рассмотрим множество H таких механизмов функционирования, при которых рациональные стратегии y_i^* являются локально оптимальными, т.е. определяются условиями $y_i^* \in R_i(\rho, x_i) = \arg \max_{y_i \in Y_i} f_i(\rho, x_i, y_i)$.

Такой выбор является рациональным только тогда, когда любое состояние $y^* = \{y_i^*\}$ удовлетворяет глобальным ограничениям

$$\prod_{i \in I} R_i(\rho, x_i) \subset Y^{\prime \prime}. \quad (I)$$

В этом случае $R(\rho, x) = \prod_{i \in I} R_i(\rho, x_i)$. При выполнении условия реализуемости (I) элементы выбирают свои состояния y_i^* независимо. В случае полной независимости элементов, т.е. $\prod_{i \in I} Y_i \subset Y^{\prime \prime}$ условие (I) имеет место.

Эффективность механизма функционирования будем оценивать величиной

$$K(\Sigma) = \min_{y \in R(\rho, x)} \Phi(\rho, x, y), \quad (2)$$

т.е. гарантированным на множестве рациональных состояний значением целевой функции центра $\Phi(\rho, x, y)$, в целевой функции центра будем предполагать наличие потерь при не выполнении плана ($y \neq x$) таких, что

$$\Phi(\rho, x, y) < \Phi(\rho, y, y). \quad (3)$$

Синтез оптимального закона управления

Задача синтеза оптимального механизма функционирования ставится следующим образом: найти механизм Σ^* такой, что

$$K(\Sigma^*) = \max_{\Sigma \in G} K(\Sigma), \quad (4)$$

где G - заданное множество механизмов, причем $G \subset H$. При фиксированных целевых функциях W_i элементов задача (4) является задачей синтеза оптимального закона управления.

В случае полной информированности центра о моделях элементов решением задачи синтеза оптимального закона уп-

равления на множестве G является закон оптимального планирования с прогнозом (ОПП):

$$(\rho^*, x^*) \in \arg \max_{(\rho, x) \in \mathcal{E}} [\min_{y \in R(\rho, x)} \Phi(\rho, x, y)], \quad (5)$$

где \mathcal{E} — множество управляющих параметров, при которых имеет место (1). Значение критерия эффективности (2) в этом случае равно $\hat{K} = \max_{(\rho, x) \in \mathcal{E}} \min_{y \in R(\rho, x)} \Phi(\rho, x, y)$.

При законе ОПП, если не вводить ограничений на вид целевых функций элементов, выбиравшееся состояние системы y^* может не совпадать с планом x^* . В связи с этим представляет интерес задача синтеза оптимального закона управления на H , при котором реализация y^* совпадает с планом. Предположим наличие "благожелательности" элементов по отношению к центру при выборе своих состояний. "Благожелательность" определим как выбор i -м элементом состояния $y_i^* = x_i$, если $x_i \in R_i(\rho, x_i)$, $i \in I$.

Решение этой задачи даёт следующая теорема.

Теорема I. Если $x \in P^*(\rho)$, то $y^* = x \in K(\Sigma_\alpha) = \hat{K}$, где $P^*(\rho) = \bigcup_{x \in Y} R(\rho, x)$ — объединение по всем возможным планам всех рациональных стратегий y^* системы, а Σ_α — механизм функционирования с законом управления (5) и дополнительным условием $x \in P^*(\rho)$.

Доказательство. Докажем сначала, что $y^* = x$, если $x \in P^*(\rho)$. Предположим противное: $\exists i \in I, y_i^* \neq x_i$. Тогда

$$\mu_i(\rho, y_i^*) - (\alpha_i, |y_i^* - x_i|) > \mu_i(\rho, x_i). \quad (6)$$

По определению множества $P^*(\rho)$ имеем, что

$$\begin{aligned} \exists x'_i: \mu_i(\rho, x_i) - (\alpha_i, |x_i - x'_i|) &\geq \\ &\geq \mu_i(\rho, y_i^*) - (\alpha_i, |y_i^* - x'_i|) . \end{aligned} \quad (7)$$

Складывая (6) с (7), имеем противоречивое неравенство
 $(\alpha_i, |y_i^* - x_i'|) > (\alpha_i, |x_i - x_i'|) + (\alpha_i, |y_i^* - x_i|)$.

Следовательно, предположение, что $y_i^* \neq x_i$ — неверно.

Покажем, что $K(\Sigma_\alpha) = K$. Пусть y_{om}^* — состояние, выбранное в системе при законе управления (5). По определению множества $P^\alpha(\rho)$ имеем: $y_{om}^* \in P^\alpha(\rho^{om})$. Обозначим $x^* = y_{om}^*$. Учитывая (3), можно записать

$$\begin{aligned} \hat{K} &= \max_{(\rho, x) \in \mathcal{E}} \min_{y \in R(\rho, x)} \Phi(\rho, x, y) = \Phi(\rho^{om}, x^{om}, y_{om}^*) \leq \\ &\leq \Phi(\rho^*, y_{om}^*, y_{om}^*) = \Phi(\rho^{om}, x^*, x^*) \leq \\ &\leq \max_{(\rho, x) \in \mathcal{E}, x \in P_\alpha(\rho)} \Phi(\rho, x, x) = K(\Sigma_\alpha). \end{aligned}$$

Но поскольку закон управления (5) оптимален, то $\hat{K} \geq K(\Sigma_\alpha)$, следовательно $\hat{K} = K(\Sigma_\alpha)$.

Замечание. Из теоремы I, в частности, следует, что при "благожелательности" элементов $R(\rho, x) = \{x\}$ как только $x \in P^\alpha(\rho)$. Это позволяет представить оптимальный закон управления в механизме Σ_α как решение задачи:

$$\max_{x, \rho} \Phi(\rho, x, x), \text{ где } (\rho, x) \in \mathcal{E}, x \in P^\alpha(\rho).$$

При конструировании таких законов управления, в которых планы удовлетворяют условию $x \in P^\alpha(\rho)$ (будем называть эти законы "правильными"), возникает математическая задача построения множества $P^\alpha(\rho)$ "правильных" планов. Приводимая ниже теорема 2 дает необходимые условия того, что

$x \in P_\alpha(\rho)$ и, таким образом, может оказаться полезной при определении множества $P^\alpha(\rho)$.

Пусть множества Y_i возможных состояний элементов заданы с помощью неравенств: $Y_i = \{y_i / g_j(y_i) > 0, j \in J_i\}$, где $g_j(y_i)$ — дифференцируемые функции $i \in I$, $j \in J_i$. Кроме того, для ограничений Y_i удовлетворяются условия регулярности. Будем использовать формулировку этих условий, приведенную в [2]. Введем понятие множества возможных направлений $\mathfrak{D}_i(y_i) = \{d_i / \exists \sigma_i > 0\}$ такое, что из $\sigma_i \geq t_i > 0$ следует $y_i + t_i d_i \in Y_i\}$ в множестве Y_i из точки y_i . Обозначим $\bar{\mathfrak{D}}_i(y_i)$ замыкание множ-

хества $\bar{\mathcal{D}}_i(y_i)$. Условие регулярности выполнено, если
 $\bar{\mathcal{D}}_i(y_i) \subset \tilde{\mathcal{D}}_i(y_i)$, где $\tilde{\mathcal{D}}_i(y_i) = \{d_i / \nabla g_{ij}(y_i) d_i > 0, j \in K_i(y_i)\}$, $K_i(y_i)$ множество индексов j , для которых $g_{ij}(y_i) = 0^+$.

Теорема 2. Если выполняются условия регулярности, функции $\mu_i(\rho, y_i)$ и $g_{ij}(y_i)$ дифференцируемы ($i \in I, j \in J_i$), то

$$P^\alpha(\rho) \subset X^\alpha(\rho), \quad (8)$$

где $X^\alpha(\rho)$ -множество планов x таких, что справедливы следующие утверждения:

$$x \in Y'^\alpha ; \quad (9)$$

существуют множители $\lambda_{ij} > 0$ ($i \in I, j \in J_i$), что

$$\lambda_{ij} g_{ij}(x_i) = 0 ; \quad (10)$$

$$|\nabla \mu_i(\rho, x_i) + \sum_{j \in J_i} \lambda_{ij} \nabla g_{ij}(x_i)| \leq \alpha_i . \quad (II)$$

Доказательство. Покажем сначала, что

$$P^\alpha(\rho) = Y'^\alpha \cap \prod_{i \in I} P_i^\alpha(\rho), \quad (12)$$

где $P_i^\alpha(\rho) = \bigcup_{x_i \in Y_i} R_i(\rho, x_i)$. На самом деле, из определения $P^\alpha(\rho)$ следует, что если $x \in P^\alpha(\rho)$, то $x \in Y'^\alpha$ и, кроме того, в силу (I) $x \in \prod_{i \in I} R_i(\rho, x_i)$, откуда следует $x \in Y'^\alpha \cap \prod_{i \in I} \bigcup_{x_i \in Y_i} R_i(\rho, x_i) = Y'^\alpha \cap \prod_{i \in I} P_i^\alpha(\rho)$. Наоборот, из $x \in Y'^\alpha \cap \prod_{i \in I} P_i^\alpha(\rho)$ следует, что $x \in Y$, $x \in R(\rho, x)$.

к) В [2] показано, что всегда $\bar{\mathcal{D}}_i(y_i) \subset \tilde{\mathcal{D}}_i(y_i)$, т.е. при выполнении условий регулярности имеет место $\bar{\mathcal{D}}_i(y_i) = \tilde{\mathcal{D}}_i(y_i)$.

поскольку из $X_i \in P_i^\alpha(\rho)$ по теореме I следует, что $R_i(\rho, x_i) = \{x_i\}$, а из (I) — что $R(\rho, x) = \prod_{i \in I} R_i(\rho, x_i)$. Состоиние (I2) доказано.

Из (9), (10), (II) следует, что

$$X^\alpha(\rho) = Y^n \cap \prod_{i \in I} X_i^\alpha(\rho), \quad (I3)$$

где $X_i^\alpha(\rho)$ определяется для каждого i условиями (10), (II). Сравнивая (I2) в (I3), получаем, что $P^\alpha(\rho) \subset X^\alpha(\rho)$, когда

$$P_i^\alpha(\rho) \subset X_i^\alpha(\rho). \quad (I4)$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать справедливость (I4). Ниже для сокращения записи индекса i будем опускать.

I° Так как $y = x$ для $x \in P_i^\alpha(\rho)$, имеем
 $\max_{y \in Y} (\mu(\rho, y) - (\alpha, |y - x|)) = \mu(\rho, x)$, или
 $\max_{y \in Y} (\mu(\rho, y) - \mu(\rho, x) - (\alpha, |y - x|)) = 0$, что может иметь место только, когда

$$\forall y: \mu(\rho, y) - \mu(\rho, x) \leq (\alpha, |y - x|). \quad (I5)$$

Условие (I5) можно переписать также в виде

$$\forall d \in \mathcal{D}(x): \mu(\rho, x+d) - \mu(\rho, x) \leq (\alpha, |d|), \quad (I6)$$

где $d = y - x$, а $|d|$ — вектор с компонентами $|d_s|$,
 $s = 1, 2, \dots, N$. Справедлива следующая лемма.

Лемма. $\forall d \in \mathcal{D}(x): (\nabla \mu(\rho, x), d) \leq (\alpha, |d|)$.

Доказательство. Положим, что $\exists d$ такое, что

$(\nabla \mu(\rho, x), d) > (\alpha, |d|)$. тогда $\exists \delta$ такое, что $\forall 0 < \eta < \delta$:

$$\mu(\rho, x + \eta d) - \mu(\rho, x) > (\alpha, |d|)\eta^2,$$

что противоречит (I6).

Более того, справедливо следующее неравенство

$$\forall d \in \bar{\mathcal{D}}(x) : (\nabla \mu(\rho, x), d) \leq (\alpha, |d|). \quad (I7)$$

На самом деле, направление $\bar{d} \in \bar{\mathcal{D}}(x)$ может быть рассмотрено как предел последовательности направлений $d' \in \mathcal{D}(x)$, $\bar{d} = \lim_{p \rightarrow \infty} d'$. Так как (I7) справедливо для всех $d' \in \mathcal{D}(x)$, то

$$(\alpha, |\bar{d}|) = (\alpha, \lim_{p \rightarrow \infty} |d'|) \geq \lim_{p \rightarrow \infty} (\nabla \mu(\rho, x), d') = (\nabla \mu(\rho, x), \bar{d}),$$

т.е. (I7) верно.

Представим множество Y как объединение его внутренности $Y' = \{y / g_j(y) > 0, j \in J\}$ и границы Γ_y .

$$\Gamma_y = Y \setminus Y'.$$

2°. Положим $x \in Y'$, т.е. $g_j(x) > 0, j \in J$ и покажем, что

$$|\nabla \mu(\rho, x)| \leq \alpha, \quad (I8)$$

где $|\nabla \mu(\rho, x)| = |\nabla \mu|$ — вектор с компонентами $\left| \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \right|, i = 1, 2, \dots, N$.

Из $x \in Y'$ следует, что \exists замкнутый шар $B_\varepsilon(x) \subset Y'$ радиуса ε с центром в точке x . Пусть (I8) не выполняется, т.е. $|\nabla \mu| > \alpha$, тогда из (I7) следует, что $(\nabla \mu, d) \leq (\alpha, |d|) < (|\nabla \mu|, |d|)$. Выберем $d = d_\varepsilon = -\varepsilon \frac{\nabla \mu}{|\nabla \mu|}, \nabla \mu \in B_\varepsilon(x)$. Тогда получим

$$\frac{\varepsilon}{|\nabla \mu|} (\nabla \mu, \nabla \mu) = \frac{\varepsilon}{|\nabla \mu|} (|\nabla \mu|, |\nabla \mu|) \leq \frac{\varepsilon}{|\nabla \mu|} (|\nabla \mu|, \alpha) < \frac{(|\nabla \mu|, |\nabla \mu|) \varepsilon}{|\nabla \mu|}, \text{ т.е.}$$

$|\nabla \mu|^2 = (\nabla \mu, \nabla \mu) < (|\nabla \mu|, |\nabla \mu|) = |\nabla \mu|^2$, что приводит к противоречию, следовательно (I8) справедливо.

3°. Пусть теперь $x \in \Gamma_y$, т.е. $g_k(x) = 0$ хотя бы для одного $k \in K(x) \subset J$. Рассмотрим два случая.

а) Пусть $(\nabla \mu, d) \leq 0$ для $\forall d \in \bar{\mathcal{D}}(x) = \{d / \nabla g_i(x)d \geq 0, i \in K(x)\}$, тогда по лемме Фаркаша [2] найдутся множители $\lambda_j \geq 0$ такие, что

$$\nabla \mu(p, x) + \sum_{j \in K(x)} \lambda_j \nabla g_j(x) = 0.$$

б) Пусть, наконец, предположение пункта а) не выполняется, но

$$\exists d : 0 < (\nabla \mu, d) \leq (\alpha, |d|). \quad (I9)$$

Определим вектор $d^* \in \bar{\mathcal{D}}(x)$ такой, что

$$\frac{(\nabla \mu, d^*)}{\|d^*\|} = \max_{d \in \bar{\mathcal{D}}(x)} \frac{(\nabla \mu(x), d)}{\|d\|}.$$

Такое направление d^* существует, так как в силу (I9)

$$0 < \frac{(\nabla \mu, d^*)}{\|d^*\|} < \frac{(x, |d^*|)}{\|d^*\|} < \text{const} \quad \text{. Рассмотрим вектор}$$

$b = \nabla \mu - \frac{(\nabla \mu, d^*)}{\|d^*\|} d^*$ и покажем, что в $(b, \nabla g_j(x)) \leq 0, j \in K(x)$, т.е.

$$(\nabla \mu, \nabla g_j(x)) - \frac{(\nabla \mu, d^*)}{\|d^*\|^2} (d^*, \nabla g_j) \leq 0, j \in K(x). \quad (20)$$

Заметим, что $\frac{(\nabla \mu, d^*)}{\|d^*\|} (d^*, \nabla g_j) \geq 0$, так как $(\nabla \mu, d^*) > 0$ в силу (I9), а $(d^*, \nabla \mu) \geq 0$ в силу $d^* \in \bar{\mathcal{D}}(x)$. Таким образом, если $(\nabla \mu, \nabla g_j(x)) \leq 0$, то (20) справедливо. Если же $(\nabla \mu, \nabla g_j(x)) > 0$, то справедливо следующее неравенство:

$$(\nabla \mu, \nabla g_j) - \frac{(\nabla \mu, d^*)}{\|d^*\|} (d^*, \nabla g_j) \leq$$

$$\leq (\nabla \mu, \nabla g_j) - \frac{(\nabla \mu, \nabla g_j)}{\|\nabla g_j\|^2} (\nabla g_j, \nabla g_j) = 0, \quad \text{т.е.}$$

имеет место (20).

Из $(b, \nabla g_j) \leq 0, j \in K(x)$ следует, что

вектор b можно представить в виде

$$b = - \sum_{j \in K(x)} \lambda_j \nabla g_j(x), \quad \lambda_j \geq 0$$

или $\nabla \mu + \sum_{j \in K(x)} \lambda_j \nabla g_j(x) = \frac{(\nabla \mu, d^*)}{\|d^*\|} d^*$.

Отсюда следует $|\nabla \mu + \sum_{j \in K(x)} \lambda_j \nabla g_j| = \|d^*\| \frac{(\nabla \mu, d^*)}{\|d^*\|}$. Покажем, что

$$\frac{(\nabla \mu, d^*)}{\|d^*\|^2} \|d^*\| \leq \alpha. \quad (21)$$

Пусть (21) несправедливо, т.е. $\frac{(\nabla \mu, d^*)}{\|d^*\|^2} \|d^*\| > \alpha$, тогда,

умножив это неравенство скалярно на $|d^*|$ и учитывая (17), получим цепочку неравенств

$\frac{(\nabla \mu, d^*)}{\|d^*\|^2} (|d^*|, |d^*|) > \frac{(\nabla \mu, d^*)}{\|d^*\|^2} (|d^*|, |d^*|) > (\alpha, |d^*|)$, которые приводят к противоречивому неравенству $\alpha |d^*| > \alpha |d^*|$. Таким образом

$$|\nabla \mu + \sum_{j \in K(x)} \lambda_j \nabla g_j(x)| < \alpha. \quad (22)$$

Объединяя доказанные неравенства (18), (19), (22), получим справедливость (14), и, следовательно, справедливость теоремы.

Замечание. Теорема 2 является в определенном смысле аналогом теоремы Куна - Таккера для рассматриваемой задачи. На самом деле, при $\alpha_i = 0$, т.е. отсутствии штрафов, а также независимости элементов $\prod_{i \in I} Y_i \subset Y^m$, она даёт условия Куна - Таккера для оптимального состояния y_i^* каждого i -го элемента.

Достаточные условия того, что $x \in P(\rho)$ дают следующую теорему.

Теорема 3. Если функции $\mu_i(\rho, y_i)$ строго выпуклы, а функции $g_{ij}(y_i)$ выпуклы, $i \in I$, $j \in J_i$, то в предположениях теоремы 2 $P^*(\rho) = X(\rho)$.

Доказательство. Заметим, что Y_i — выпуклые множества, так как $g_{ij}(x_i)$ — вогнутые функции.

Предположим, что $\exists x_i \in X_i^*(\rho)$, но $x_i \notin P_i^*(\rho)$, т.е. $\exists y_i$ такое, что

$$\mu_i(\rho, x_i + d_i) - \mu_i(\rho, x_i) > (\alpha_i, |d_i|), \quad (23)$$

где $d_i = y_i - x_i$. Заметим, что $d_i \in \mathcal{D}_i(x_i)$, так как $x_i, y_i \in Y_i$, Y_i — выпукло. В силу $d_i \in \mathcal{D}_i(x_i)$ условия (I0) и (II) эквивалентны неравенству $|\nabla \mu_i| \leq \alpha_i$, что приводит к $(|\nabla \mu_i|, |d_i|) \leq (\alpha_i, |d_i|)$. Так как функция $\mu_i(\rho, y_i)$ вогнута, то $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $\mu_i(\rho, x_i + \varepsilon d_i) < \mu_i(\rho, x_i) + \mathcal{E}(|\nabla \mu_i(\rho, x_i)|, d_i)$. откуда получаем $\mu_i(\rho, x_i + \varepsilon d_i) < \mu_i(\rho, x_i) + \mathcal{E}(\alpha_i, |d_i|)$. С другой стороны из вогнутости $\mu_i(\rho, y_i)$ имеем неравенство

$$\mu_i(\rho, x_i + \varepsilon d_i) = \mu_i(\rho, x_i + \varepsilon(y_i - x_i)) > \varepsilon \mu_i(\rho, y_i) + (1 - \varepsilon) \mu_i(\rho, x_i),$$

которое можно записать в виде

$$\mu_i(\rho, x_i) + \mathcal{E}(\alpha_i, |d_i|) > \varepsilon \mu_i(\rho, x_i + d_i) + (1 - \varepsilon) \mu_i(\rho, x_i) \quad \text{или}$$

$$\mu_i(\rho, x_i + d_i) - \mu_i(\rho, x_i) < (\alpha_i, |d_i|), \quad \text{что противоречит (23).}$$

Л и т е р а т у р а

1. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. М., "Наука", 1977.
2. Зангвилл У.И. Нелинейное программирование. М., "Сов. радио", 1973.

ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ АКТИВНЫХ СИСТЕМ ПРИ АГРЕГИРОВАНИИ ИНФОРМАЦИИ

I. Динамическая активная система

Рассматривается двухуровневая активная система (АС), состоящая из центра и N активных элементов (АЭ). Для k -го периода функционирования y_{ik} — состояние i -го АЭ (реализация), $Y_i(\tau_{ik})$ — множество возможных реализаций y_{ik} (τ_{ik} — вектор параметр), x_{ik} — план, т.е. желательное значение всех или части компонент вектора реализации, λ_k — управление (например, цены), $Y(\tau_k) = Y''(\tau_k) \cap (\prod_{i \in I} Y_i(\tau_{ik}))$ — множество возможных реализаций $y_k = \{y_{ik}\}$, где $\tau_k = \{\tau_{ik}\}$.

$Y''(\tau_k)$ — глобальные ограничения на реализацию y_k . $y_k \in Y''(\tau_k)$, $\Phi_k(\lambda_k, x_k, y_k)$ — целевая функция АС. Предполагается, что центр знает лишь множество Ω_{ik} возможных значений параметров τ_{ik} , $\tau_{ik} \in \Omega_{ik}$, $i \in I$, где

$$I = \{1, 2, \dots, N\}.$$

Механизмы функционирования двухуровневых активных систем достаточно подробно исследованы для случаев, когда функционирование системы разбито на дискретные периоды, планирование производится на один период функционирования, и модели элементов не изменяются от одного периода функционирования системы к другому [1].

Предположим, что центр формирует планы для подчиненных АЭ сразу на несколько периодов T , причем модель АЭ от периода к периоду может меняться (в введенных обозначениях это значит, что может быть $\tau_{ik} \neq \tau_{ikm}$). Целевая функция центра при этом будет выражаться в виде $W = \sum \Phi_k(\lambda_k, x_k, y_k)$, а целевые функции АЭ будут иметь вид $W_i = \sum_{k=1}^T p_{ik} \Phi_k(\lambda_k, x_k, y_{ik})$.

Функционирование активной системы в этом случае будет происходить также, как и в случае планирования на один период [1]. На этапе формирования данных каждый АЭ сообщает в центр оценку $S_i = \{S_{ik}\}$ ($S_{ik} \in \Omega_{ik}$) — вектор-параметра $\tau_i = \{\tau_{ik}\}$. На этапе планирования центр опреде-

дляет управление $\lambda(s)$ в планы $x(s)$ по заданному закону управления $\mathcal{K}(s)$ и сообщает их АЭ. На этапе реализации каждый АЭ определяет реализацию $y_{ik} \in B_{ik}(x_{ik}, z_{ik})$. В соответствии с [I] определяется выбор реализации i -м АЭ как максимизация своей целевой функции при заданном плане и при заданном управлении, т.е.

$$\sum_{k=1}^T f_{ik}(\lambda_k, x_{ik}(s_k), y_{ik}) = \max_{z_i \in B_i(x_i(s), z_i)} \sum_{k=1}^T f_{ik}(\lambda_k, x_{ik}(s_k), z_{ik}), \quad (I)$$

где $B_i(x_i(s), z_i) = \bigcup_{k=1}^T B_{ik}(x_{ik}(s_k), z_{ik})$.

В работе рассматриваются активные системы с независимыми элементами, причем предполагается, что реализация в k -м периоде не влияет на реализацию в $k+1$ -м периоде. При сделанных предположениях выражение (I) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^T f_{ik}(\lambda_k, x_{ik}(s_k), y_{ik}) &= \sum_{k=1}^T \max_{z_{ik} \in B_{ik}(x_{ik}, z_{ik})} f_i(\lambda_k, x_{ik}(s_k), z_{ik}) = \\ &= \sum_{k=1}^T \varphi_{ik}(\lambda_k, x_{ik}(s_k), z_{ik}) \end{aligned}$$

или

$$\max_{z_{ik} \in B_{ik}(x_{ik}, z_{ik})} f_{ik}(\lambda_k, x_{ik}(s_k), z_{ik}) = \varphi_{ik}(\lambda_k, x_{ik}, z_{ik}), \quad k=1, \dots, T.$$

Таким образом, функцию $\sum_{k=1}^T \varphi_{ik}(\lambda_k(s_k), x_{ik}(s_k), z_{ik})$, где $S_k = \{S_{ik}\}$, будем называть целевой функцией i -го АЭ с учетом правила выбора реализации [I] при встречном способе формирования данных.

Формально функционирование такой системы можно рассматривать как статическую задачу, расширив соответственно пространство состояний. А отсюда следует, что результаты, полученные для статической АС, переносятся на описанную динамическую систему. В этом случае ситуация равновесия по Нэшу при условии слабого влияния для закона управления $\mathcal{K}(s) = \{\lambda(s), x(s)\}$ записывается в виде

$$\sum_{k=1}^T \varphi_{ik}(\lambda_k^*, x_{ik}^*(S_k^*), \gamma_{ik}) = \sum_{k=1}^T \max_{S_{ik}^* \in \Omega_{ik}} \varphi_{ik}(\lambda_k^*, x_{ik}(S_k^*(i)), \gamma_{ik}), \quad (2)$$

где $\lambda_k^* = \lambda_k(S_k^*)$, $S_k^* = S_{1k}^*, \dots, S_{ik}^*, \dots, S_{Nk}^*$. Для выполнения (2) достаточно существования точки S_k^* такой, что управление $\lambda_k^* = \lambda_k(S^*)$ в план $x_k^* = x_k(S_k^*)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^T \varphi_{ik}(\lambda_k^*, x_{ik}^*, \gamma_{ik}) = \sum_{k=1}^T \max_{x_{ik} \in X_k(x_{ik})} \varphi_{ik}(\lambda_k^*, x_{ik}, \gamma_{ik}). \quad (3)$$

Так же, как и в [1], легко показать, что для закона открытого управления (ОУ) ситуация $S^* = \gamma$ является равновесием вида (3).

2. Агрегирование информации на этапе обработки данных

При составлении планов на T периодов на этапе формирования данных каждый АЭ сообщает в центр информацию о каждом из T периодов, т.е. в центр поступает информации в T раз больше по сравнению с информацией, которая поступала в центр при планировании на один период. Предположим, что возможности центра по обработке информации, поступающей от элементов, ограничены, а задача, стоящая перед ним, остается прежней - сформировать планы сразу на T периодов. Для решения этой задачи необходимо как-то уменьшить объем информации. Один из путей - это агрегирование информации на этапе сбора данных. Для этого центр может T периодов функционирования разбить на группы по t периодов в каждой и считать, что в каждой группе реализация АЭ (параметр γ) не меняется от периода к периоду, т.е. с точки зрения центра в каждые t периодов j -й группы параметр γ i -го АЭ не меняется и равен γ_i . Предположим, что таких групп будет n , тогда $T = n \cdot t$. Соответственно, на этапе формирования данных центр требует, чтобы АЭ сообщали ему оценку S_i^j ($i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, n$) вектор-параметра $\{\gamma_i\}$ не по всем T периодам, а только по n группам. Вы-

поляния это требование, i -й АЭ на этапе сбора данных будет сообщать в центр не вектор \vec{s} размерностью T , а вектор размерностью n .

3. Задача распределения плановых задачий

Пусть x_{it} – объем работ, который необходимо выполнить i -му АЭ в t -м периоде, λ_t – стоимость единицы объема работы. Параметр γ_{it} определим как коэффициент эффективности производства. Предположим, что целевая функция i -го АЭ имеет вид

$$W_i = \sum_{t=1}^T [\lambda_t x_{it} - \Psi_{it}(x_{it}, \gamma_{it})],$$

где $\Psi_{it}(x_{it}, \gamma_{it})$ – функция затрат i -го АЭ. Задача центра состоит в том, чтобы назначить план каждому АЭ так, чтобы суммарный выпуск за T периодов был равен заданному количеству X_T , а затраты на выполнение этих работ были минимальными. Таким образом, на этапе планирования центр решает задачу

$$\sum_{k=1}^T \sum_{i=1}^N \Psi_{ik}(x_{ik}, \gamma_{ik}) \rightarrow \min, \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^T \sum_{i=1}^N x_{ik} = X_T. \quad (5)$$

При планировании на основе принципа открытого управления к задаче (4)–(5) добавляется условие совершенного согласования

$$\sum_{k=1}^T [\lambda_k x_{ik} - \Psi_{ik}(x_{ik}, \gamma_{ik})] = \max_{z \in \chi_i(S)} \sum_{k=1}^T [\lambda_k z_{ik} - \Psi_{ik}(z_{ik}, \gamma_{ik})], \quad i \in I, \quad (6)$$

где $\chi_i(S_i) = \bigcup_{k=1}^T \chi_{ik}(S_{ik})$, функция $\sum_{k=1}^T [\lambda_k x_{ik} - \Psi_{ik}(x_{ik}, \gamma_{ik})]$ – функция предпочтения. Поскольку периоды между собой независимы, выражение (6) можно переписать в виде

$$[\lambda_i x_{it} - \Psi_{it}(x_{it}, s_{it})] = \max_{z_{it} \in \chi_{it}(s_{it})} [\lambda_i z_{it} - \Psi_{it}(z_{it}, s_{it})]$$

Подробный анализ такой модели приведен в [1].

4. Согласованное управление при распределении плановых заданий

Цель на этапе сбора данных центр получает агрегированную информацию. Оценку вектор-параметра $\{\gamma_{it}\}$, $t=1, \dots, T$ i -й АЭ представляет в виде некоторого вектора $\{S_i^j\}$, $j=1, \dots, n$, причем центр считает, что

$$\gamma_{it(j-1)+1} = \gamma_{it(j-1)+2} = \dots = \gamma_{it(j-1)+t} = S_i^j$$

в соответствии функция предпочтения i -го АЭ имеет вид

$$t \sum_{j=1}^n [\lambda_j x_i^j - \Psi_{ij}(x_i^j, s_i^j)].$$

На этапе планирования, при согласовании интересов центра с интересами активных элементов, решается задача

$$t \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \Psi_{ij}(x_i^j, s_i^j) \rightarrow \min, \quad (7)$$

$$t \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_i^j = \chi T, \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^n [\lambda_j x_i^j - \Psi_{ij}(x_i^j, s_i^j)] = \max_{z_i \in \chi_i(s_i)} \sum_{j=1}^n [\lambda_j z_{ij} - \Psi_{ij}(z_{ij}, s_i^j)], i \in I,$$

$$\chi_i(s_i) = \bigcup_{j=1}^n \chi_i^j(s_i^j). \quad (9)$$

Учитывая, что периоды функционирования не связаны между собой, условие согласования (9) можно переписать в виде

$$[\lambda_j x_i^j - \Psi_{ij}(x_i^j, s_i^j)] = \max_{z_{ij} \in \chi_i^j(s_i^j)} [\lambda_j z_{ij} - \Psi_{ij}(z_{ij}, s_i^j)]. \quad (10)$$

Общие затраты АС на выполнение работ определяются выражением

$$\sum_{k=1}^T \sum_{i=1}^N \Psi_{ik}(x_{ik}, \tau_{ik}). \quad (\text{II})$$

Для простоты положим

$$\Psi_{ik}(x_{ik}, \tau_{ik}) = \frac{x_{ik}^2}{2 \tau_{ik}}$$

и цена λ не меняется в течение всех T периодов. Тогда, решая задачу (7), (8), (10), легко получить

$$x_i^j = \frac{\chi n s_i^j}{\sum_{j=s}^n \sum_{t=s}^n s_t^j}, \quad \lambda = \frac{\chi n}{\sum_{j=s}^n \sum_{t=s}^n s_t^j}.$$

Целевая функция i -го АЭ при этом равна

$$W_i = \sum_{j=s}^n \sum_{t=t(j-s)+1}^{t_i} \left[\lambda x_i^j - \frac{(x_i^j)^2}{2 \tau_{ik}} \right] = \lambda^2 t \sum_{j=s}^n s_i^j - \frac{\lambda^2}{2} \sum_{j=s}^n (s_i^j)^2 \sum_{t=t(j-s)+1}^{t_i} \frac{1}{\tau_{ik}}.$$

В точке равновесия по Нашу при гипотезе слабого влияния каждый АЭ достигает оптимума по своим переменным, поэтому $\frac{\partial W_i}{\partial s_i^j} = 0, j=1, \dots, n; i \in I$, причем $\frac{\partial W_i}{\partial \lambda} = 0$. Это приводит к системе уравнений

$$t - s_i^j \sum_{t=t(j-s)+1}^{t_i} \frac{1}{\tau_{ik}} = 0, \quad i \in I, \quad j=1, \dots, n.$$

Отсюда следует

$$s_i^{j*} = \frac{t}{\sum_{t=t(j-s)+1}^{t_i} \frac{1}{\tau_{ik}}},$$

$$x_i^{j*} = \frac{\chi n}{\sum_{k=t(j-1)+1}^{tj} \frac{1}{\gamma_{ik}} \sum_{l=1}^n \sum_{j=s}^n \frac{1}{\gamma_{il}}}$$

Затраты всей АС на выполнение работ при разбиении Т периодов на n групп определяются выражением

$$\tilde{W}_n = \frac{\chi^2 n^2}{2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sum_{k=t(j-1)+1}^{tj} \frac{1}{\gamma_{ik}}}}, \quad T = n \cdot t. \quad (I2)$$

Если же T периодов было разбито на m групп по $t+1$ периодам в каждой группе, то затраты АС на выполнение работ определяются выражением

$$\tilde{W}_m = \frac{\chi^2 m^2}{2 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sum_{k=(t+1)(j-1)+1}^{(t+1)j} \frac{1}{\gamma_{ik}}}}, \quad T = m(t+1). \quad (I3)$$

Очевидно, что $n > m$. Значения \tilde{W}_n и \tilde{W}_m зависят от информации об АЭ в положении равновесия по Нэшу при гипотезе слабого влияния. Необходимо выяснить, всегда ли более грубое разбиение Т периодов ухудшает целевую функцию центра, то есть всегда ли $\tilde{W}_m > \tilde{W}_n$.

Теорема. Если параметр γ_{ik} изменяется по закону $\gamma_{ik} = \gamma_i \alpha^k$ ($\alpha > 0$), тогда всегда выполняется неравенство $\tilde{W}_m > \tilde{W}_n$.

Выражая в (I2) и (I3) γ_{ik} через $\gamma_i \alpha^k$, получим

$$\tilde{W}_n = \frac{\chi^2 n^2 (1-\alpha^t)^2}{2(1-\alpha)(1-\alpha^r) \alpha^t \sum_{i=t}^n z_i},$$

$$\tilde{W}_m = \frac{\chi^2 m^2 (1-\alpha^{t+1})^2}{2(1-\alpha)(1-\alpha^r) \alpha^{t+1} \sum_{i=t+1}^m z_i};$$

Для того, чтобы $\tilde{W}_m > \tilde{W}_n$, необходимо

$$\frac{m^2 (1-\alpha^{t+1})^2}{\alpha^{t+1}} \geq \frac{n^2 (1-\alpha^t)^2}{\alpha^t}.$$

Для доказательства справедливости этого неравенства перепишем его в виде

$$\frac{(1-\alpha^{t+1})^2}{(t+1)^2 \alpha^{t+1}} \geq \frac{(1-\alpha^t)^2}{t^2 \alpha^t}$$

или

$$\frac{\left(\frac{1}{\alpha^{t+1}} - \alpha^{-\frac{t+1}{2}}\right)^2}{(t+1)^2} \geq \frac{\left(\frac{1}{\alpha^t} - \alpha^{-\frac{t}{2}}\right)^2}{t^2}.$$

Пусть $\alpha^{-\frac{t}{2}} = \beta$, тогда

$$\frac{\left(\frac{1}{\beta^{t+1}} - \beta^{t+1}\right)^2}{(t+1)^2} \geq \frac{\left(\frac{1}{\beta^t} - \beta^t\right)^2}{t^2}.$$

Пусть $\beta \in (0, 1)$. Достаточно показать, что

$$\frac{\frac{1}{\beta^{t+1}} - \beta^{t+1}}{t+1} \geq \frac{\frac{1}{\beta^t} - \beta^t}{t}. \quad (14)$$

Действительно

$$\frac{1}{\beta^t} - \beta^t = \left(\frac{1}{\beta} - \beta\right)\left(\frac{1}{\beta^{t-1}} + \frac{1}{\beta^{t-2}} + \dots + \beta^{t-3} + \beta^{t-1}\right).$$

Теперь (I4) можно переписать в следующем виде

$$\frac{\beta^{-t} + \beta^{-(t+1)} + \dots + \beta^{-(t-2)} + \beta^{-t}}{t+1} > \frac{\beta^{-t+1} + \beta^{-t+2} + \dots + \beta^{-(t-3)} + \beta^{-(t-1)}}{t}$$

Доказательство этого неравенства приведено в [2]. Таким образом $\tilde{W}_n > \tilde{W}_{n-1}$.

Приведем пример, когда более мелкое разбиение T периодов не улучшает целевую функцию центра в равновесии по Нашу при гипотезе слабого влияния. Пусть имеется один АЭ,

$$T=6 \quad \{z\} = \left\{ \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}; 1; \frac{1}{3}; \frac{1}{8} \right\} \quad ; \chi = \sqrt{2}$$

Тогда

$$\tilde{W}_n = \frac{n^2}{\sum_{j=1}^n \sum_{k=t(j-1)+1}^{t(j)} \frac{1}{x_{ik}}}$$

При $n=2$, $\tilde{W}_2 = 17 \frac{1}{7}$, а при $n=3$, т.е. при более мелком разбиении, $\tilde{W}_3 = 19 \frac{41}{49}$.

Предположим теперь, что центр предоставляет элементам нижнего уровня "большую" свободу в выборе плановых заданий. Пусть на этапе планирования центр определяет общий объем работ, который должен выполнить i -й АЭ за t периодов в каждой выделенной группе, а определение объема работ, выполняемого в каждый период, производится уже самими АЭ.

Таким образом, на этапе планирования центр определяет цену

$$\lambda = \frac{\chi n}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^t S_i^j}$$

и объем работ $y_{ij} = t x_i^j = \frac{\chi n t S_i^j}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^t S_i^j}$ на каждые t периодов.

Конкретное значение x_{ik} i -й АЭ определяет, максимизируя свою целевую функцию

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=t(j-1)+1}^{t(j)} \left[\lambda x_{ik} - \frac{x_{ik}^2}{2 r_{ik}} \right] \rightarrow \max$$

при ограничениях $\sum_{k=t(j-1)+1}^{tj} x_{ik} = y_{ij}$.

В результате получается

$$x_{ik} = \frac{\lambda t s_i^j z_{ik}}{\sum_{k=t(j-1)+1}^{tj} z_{ik}}.$$

Целевую функцию i -го АЭ теперь можно записать в виде

$$W_i = \lambda^2 t \sum_{j=1}^n s_i^j - \frac{\lambda^2 t^2}{2} \sum_{j=1}^n \frac{s_i^{j*}}{\sum_{k=t(j-1)+1}^{tj} z_{ik}}.$$

В точке равновесия по Нэшу при гипотезе слабого влияния информации, представляемой в центр i -м АЭ, выражается в виде

$$s_i^{j*} = \frac{\sum_{k=t(j-1)+1}^{tj} z_{ik}}{t},$$

а затраты АС в виде

$$W = \frac{\lambda^2 T^2}{2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^T z_{ik}}.$$

Отсюда видно, что затраты АС на выполнение всего объема работы не зависят от разбиения T периодов на группы.

Заключение

Проведенный анализ функционирования АС при распределении плановых заданий показал, что для рассмотренной модели более точное представление информации (более мелкое разбиение T периодов) не всегда улучшает целевую функцию

центра в равновесии по Нэшу при гипотезе слабого влияния. Кроме того, если центр предоставляет АЭ "большую" свободу в смысле выбора конкретного значения планового задания, то функционирование АС близко к оптимальному с точки зрения центра.

Л и т е р а т у р а

1. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. М., "Наука", 1977.
2. Харце Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Палия Г. Неравенства .М., ИЛ, 1948.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМ С СОРЕВНУЩИМИСЯ ЭЛЕМЕНТАМИ

Настоящая статья посвящена обсуждению концепции систем с соревнующимися элементами (ССЭ), а также различных свойств систем, принадлежащих классу ССЭ. Она содержит пять разделов, в каждом из которых в скатой (тезисной) форме изложены результаты и выводы, представляющие самостоятельный интерес, причем некоторые из них имеют принципиальное значение для обоснования и дальнейшего развития выбранного направления исследований. В первом разделе обсуждается концепция ССЭ, её правомерность и отчасти затронута история вопроса. Во втором разделе приводятся критерии для классификации законов распределения мест между соревнующимися элементами (ЗРМ). Классификация проводится с целью выяснения условий, при которых система обладает свойством управляемости. В третьем разделе строятся устойчивые (в некотором указанном ниже смысле) решения, которые являются неким обобщением решения по Стекельбергу в классе ССЭ при любом $n > 2$.

В частности, введенное ранее автором *C*-решение является таким обобщением. В четвертом разделе рассматриваются некоторые свойства объекта управления, интересные с общесистемных позиций. И наконец пятый – посвящен фундаментальному, по мнению автора, свойству нетождественности целей ССЭ (как единого целого), порожденных механизмом соревнования, и целей вышестоящего управляющего элемента а также следствиям из этого свойства. Прежде чем перейти к изложению перечисленных вопросов, сделаем следующие замечания. Понятия и обозначения, используемые в дальнейшем, которые можно рассматривать как устоявшиеся, приводятся без комментариев (их можно найти, например, в [1]). Для обозначения классов ЗРМ и предположений (аксиом), которым ЗРМ из данного класса отвечают, использованы одинаковые обозначения, т.к. из контекста всегда ясно, о чём именно идет речь.

Концепция ССЭ (обсуждение). Общеизвестно, что разные авторы, как правило, ставят во главу рассмотрения те стороны исследуемого явления, которые им лично представляются

наиболее существенными. Это обстоятельство служит источниковым многообразия моделей одних и тех же явлений; причем исходные посылки, заложенные в модель, во многом предопределяют результаты исследований. В концепции ССЭ под соревнующимися элементами (СЭ) понимаются элементы, выигрыши которых зависят не только от величины показателя функционирования элемента, но и от занятого им места. Понятия "место, занятое СЭ" и "премия, получаемая СЭ в соответствии с занятым им местом", по существу, выделялись как главные уже в [2]. Однако наличие ЗРМ позволяет не только взглянуть на объект, моделируемый при помощи ССЭ, под новым углом зрения, но и открывает известные возможности для отражения его общесистемных свойств, таких как целостность и т. п., и работы с ними [1]. Поэтому автор данной статьи в свое время счел целесообразным ввести для выделения класса ССЭ следующее определение: системы с СЭ называются системы, обладающие двумя свойствами: во-первых, они содержат СЭ, и, во-вторых, состояние всей системы в целом характеризуется распределением мест между СЭ, а так же, быть может, и показателями функционирования отдельных (всех) элементов системы.

Заметим, что предлагаемый подход к соревновательной проблематике не является единственным возможным даже с теоретико-игровых позиций. Так, например, в [3] в разделе "Игры типа "Соревнование" намечен подход, не использующий понятий "место" и "премии".

Управляемость ССЭ и классификация ЗРМ. С позиций общей теории систем для того, чтобы задать систему необходимо как минимум описать её элементы, структуру межэлементных связей и механизм функционирования. Из определения ССЭ следует, что в механизме функционирования ССЭ – механизме соревнования, как он понимается в рамках концепции ССЭ, особое внимание концентрируется на ЗРМ. В связи с чем возникает центральный с точки зрения теории управления (и значит решающий для жизнеспособности развивающейся концепции) вопрос: можно ли использовать ЗРМ в качестве "рычага управления" и, если "да", то насколько он эффективен. Ответ на поставленный вопрос следующий. Управляемость ССЭ при помощи

ЗРМ и эффективность подобного управления зависят, в частности, от того, к какому классу по классификации, основанной на приводимых ниже критериях, относится рассматриваемый ЗРМ.

Критерий А. В $\{g\}$ – множестве всех законов распределения мест между СЭ – можно выделить G_{a_1} и G_{a_2} , которые соответствуют прямо противоположным отправным посылкам (точкам зрения). Первая (G_{a_1}) базируется на том, что для получения "лучшего" места необходимо опередить большее число конкурентов, вторая (G_{a_2}) – на том, что для получения "лучшего" места необходимо отстать от возможно меньшего числа конкурентов.

Критерий Б. Пусть множество премий состоит из положительных констант. Тогда в $\{g\}$ можно выделить G_{b_1} и G_{b_2} в зависимости от того $\sum_{i=1}^n f_{Q_i}(b_i) = \text{const}$ – (случай G_{b_1}) или $\sum_{i=1}^n f_{Q_i}(b_i) = f(Q) \neq \text{const}$ – (случай G_{b_2}).

Критерий В. $[g \in G_{b_1}] \Leftrightarrow [Q(\pi\sigma) = \pi Q(\sigma)]$ при любых π (перестановка) и σ , где $b = (b_1, \dots, b_n)$ – вектор оценок показателей функционирования СЭ-ов. $G_{b_2} = \{g\} \setminus G_{b_1}$.

Критерии А и В тесно связаны с тем одинаковые или нет требования предъявляются различным СЭ, т.е. с вопросом "симметричности" используемого механизма функционирования. Механизм соревнования назовем симметричным, если $f_{i(\sigma)}(b) = f_{j(\sigma)}(b)$ и $g \in G_{a_1}$, где $i(b^*)$ – номер S_j , для которого $Q_j(b^*) = \{i\}$.

Обобщение решения по Стенхельбергу за случай произвольного $n \geq 2$. Рассмотрим ЛССЭ [I], для которой $n=2$, $k=1$, $f_{Q_i}(b) = \text{const}$ и g определяется следующими соотношениями: $[Q_i(b)=\{1\}] \Leftrightarrow [b_i - b_j > \rho_i^i(b_j) > 0]$ и $[Q_i(b) \neq \{1\}] \Rightarrow [Q_i(b) = \{2\}]$. Очевидно, что, в случае, когда $\rho_i^i(b_j) = -\rho_j^i(b_i)$ при всех b_i и b_j , таких, что $\|b_i\| = \|b_j\|$, $g \in G_{a_2}$ и $g \in G(p)$ [I]. В случае же, когда $\rho_i^i(b_j) \neq -\rho_j^i(b_i)$ хотя бы для одной пары b_i и b_j , такой, что $\|b_i\| = \|b_j\|$, то $g \in G_{a_1}$. Если требовать, чтобы $g \in G_{a_1}$, то можно при любых k_1 и k_2 построить g такие, что $\{C(1,1) - \text{реш.}\} = \{(\frac{4k_1}{k_1 + k_2}, 0)\}$ или же, при $2k_1 - k_2 > 0$, – такие, что $\{C(1,1) - \text{реш.}\} = \{(0, 4\rho_1^i(\frac{k_1}{k_1 + k_2}))$, $(4\rho_1^i(\frac{k_1}{k_1 + k_2}), 0)\}$. Если же при $2k_1 - k_2 > 0$ требовать, чтобы $g \in G_{a_2}$, то можно построить g такие, что $\{C(1,1) - \text{реш.}\} = \{(0, 4\rho_1^i(\frac{k_1}{k_1 + k_2})), (\frac{4k_1}{k_1 + k_2}, 0)\}$.

При этом все b^* , принадлежащие указанным множествам $C(1,1) -$

решений, являются решениями по Стэкельбергу (стратегиями Стэкельберга) [4,5] на $X_{C(i)}(x_i)$, причем в роли "лидера" ("ведущего") выступают те S_i , для которых $b_i(\sigma^*) \neq 0$. Использование приведенных $\{C(1,1)-\text{реш.}\}$ и соответствующих им $\rho_i(x_i)$ и $\rho'_i(x_i)$ в качестве исходных модулей позволяет строить различные устойчивые решения, являющиеся обобщениями решения по Стэкельбергу в классе ССЭ для любого $n > 2$. Это обобщение отличается от предложенного в [6] и основано на следующей идее пошагового построения решения. Сначала (I шаг) строится σ^1 - $C(1,1)$ -решение для пары S_n, S_{n-1} на $\{\bar{b}_{n-1}\} \times \{\bar{b}_n\}$, затем (II шаг) эта операция повторяется для пары $S_{1(\sigma^1)}, S_{n-2}$ на $\{\bar{b}_{1(\sigma^1)}\} \times \{\bar{b}_{n-2}(\sigma^1)\} \times \{\bar{b}_n\} \times \{\bar{b}_{n-1}\}$, где $\beta(\sigma^1) = \|\bar{b}_{1(\sigma^1)}\|$, в результате получаем σ^2 - $C(1,1)$ -решение на $\{\bar{b}_{n-2}\} \times \{\bar{b}_{n-1}\} \times \{\bar{b}_n\}$ и т.д. Интересно отметить, что "нагрузка на S_0 ", его роль, важность осуществляемых им, как вышестоящим элементом, функций различна в зависимости от того, какие из трех $\{C(1,1)-\text{реш.}\}$, приведенных выше, использованы при построении решения, обобщающего решение Стэкельберга.

Несимметричность свойств объекта управления. Отметим что, наряду с тенденцией к самоорганизации (специализация СЭ - несимметричность выполняемых СЭ функций: "лидер" - "ведомый"), даже в случае, когда используемый механизм соревнования симметричен, сам объект управления - множество СЭ - проявляет тенденцию к несимметрии свойств. Так, если предположить, что в ЛССЭ, описанной выше, СЭ-ам присуще стремление к устойчивости, которую гарантирует, в частности, выбор $\bar{b}_i \geq \bar{b}_i + \frac{\Delta \bar{b}_i}{k_i}$, то представляются естественными следующая гипотеза и определение. Гипотеза о поведении СЭ: "при каждой фиксированной $\bar{b}_j = \bar{b}'_j$, S_i ($i=1,2$) максимизирует свой выигрыш либо на $\{\bar{b}|Q_i(\bar{b})=\{1\}\} \cap \{\bar{b}|b_i \geq \bar{b}_i + \frac{\Delta \bar{b}_i}{k_i}\}$ либо на $\{\bar{b}|Q_i(\bar{b})=\{2\}\} \cap \{\bar{b}|b_j - \bar{b}'_j\}$ ". Определение: "решение уравнения $\Delta \bar{b}_i = -(\bar{b}_i + \frac{\Delta \bar{b}_i}{k_i})k_i$, смысл которого очевиден, назовем \bar{b}_i^{out} ". Тогда $\bar{b}_j^{out} = \Delta \bar{b}_j (\frac{1}{k_j} - \frac{1}{k_i})$ и из условия положительности \bar{b}_j^{out} вытекает, что может существовать только \bar{b}_2^{out} . Что же касается поведения СЭ, то из двух игроков только S_1 может придерживаться стратегии поведения, предписываемой предложенной гипотезой.

Нетождественность целей ССЭ и вышестоящего управляющего элемента. Относительно целей ССЭ как единого целого (если они вообще существуют) следует заметить, что в общем случае их отождествление с целями S_0 неправомерно. В разделе "Функция, осуществляемая механизмом соревнования" [1] показано, что механизм соревнования является механизмом целенаправленного перераспределения между СЭ некоторого жизненно важного для них ресурса, причем этот факт никаким образом не связан с целями S_0 . Нетождественность целей S_0 и всей системы в целом обусловлена главным образом тем, что истинные цели системы, внутренне ей присущие, не известны S_0 . Конечно, и в ССЭ S_0 может сознательно стремиться к некоторым целям, отличным от целей, вытекающих из природы используемого механизма функционирования. Однако специфика ССЭ заключается в том, что из-за незнания целей ССЭ, порожденных механизмом соревнования, S_0 не может достаточно эффективно управлять системой СЭ даже в случае, когда он руководствуется исключительно соображениями экстремизации целевой функции системы. Решение же вопроса о том, можно ли при помощи модели, использующей определенный язык (в нашем случае — язык теории игр и исследования операций), и правил формального вывода полностью вскрыть функцию, осуществляющую механизмом соревнования связано, по всей вероятности, с ограничениями, налагаемыми теоремой Гёделя (о неполноте).

Л и т е р а т у р а

1. Сандак Н.Н. Некоторые общесистемные и математические аспекты теории систем с соревнующимися элементами. В кн.: Управление техническими и организационными системами с применением вычислительной техники. М., "Наука", 1979.
2. Бурков В.Н., Немцева А.Н., Соколов В.Б. Деловые игры "Ресурс", "Соревнование", "Общество". В кн.: Активные системы. М., Институт проблем управления, 1973.
3. Ватель И.А., Ерешко Ф.И. Математика конфликта и сотрудничества. М., "Знание", 1973.

- 4.Von Stackelberg H.The Theory of the Market Economy.Oxford University,Press,Oxford,England,1952.
- 5.Chen C.I.,Cruz J.B.,Jr. Stackelberg Solution for Two-Person Games with Biased Information Patterns.IEEE Transactions on Automatic Control.1972,Vol.AC-17 n°6.
- 6.Simaa M.,Cruz J.B.,Jr. A Stackelberg Solution for Games with Many Players.IEEE Transactions on Automatic Control.1973,Vol.AC-18 n°3.

В.Н.Бурков, В.В.Кондратьев, А.А.Прокопенко
М.Д.Спектор

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АНАЛИЗА ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ

I. Структура и "технологическое" описание модели

В работе рассматриваются производственные системы, которые можно упрощенно представить в виде двухуровневой иерархической статической детерминированной системы, состоящей из $n+2$ структурных подсистем: центра, обобщенно представляющего органы хозяйственного управления системой;

n производственных предприятий (активных элементов, множество которых обозначим через $J = \{j | j = 1, 2, \dots, n\}$); "внешней среды", включающей в себя, в частности, другие звенья народного хозяйства в виде пассивных составляющих. Состояние внешней среды и его влияние на функционирование модели считаются известными как центру, так и элементам и не рассматриваются в работе. Период функционирования системы T принимается постоянным.

Состояние отдельного элемента задается посредством вектора y_i . Будем предполагать, что его образуют: v_i - вектор затрат ресурсов, u_i - вектор выпусков продукции и x_i - вектор "внутреннего состояния". В работе [1] под внутренними переменными понимаются "интенсивности технологических процессов". В соответствии с методическими указаниями [2] к ним можно отнести методы организации и технологии производства в уровня использования ресурсов. В свою очередь можно предположить (см., например, работу [3]), что эти переменные зависят от количества и качества труда производственного коллектива предприятия в рассматриваемом интервале времени. Тогда при заданной умелости труда работников в простейшем случае можно допустить, что x_i является скалярным показателем и отражает среднюю интенсивность труда работников производственного предприятия.

Обозначим через Y множество возможных состояний i -го элемента.

В практических расчетах обычно планируются только компоненты \tilde{y}_i , $\tilde{y}_i = (v_i, u_i)$ вектора y_i , характеризующие состояние затрат-выпусков. Поэтому множество Y удобно представить в следующем виде:

$$Y_i = \{y_i | z_i \in Z_i, \tilde{y}_i \in \tilde{Y}_i(z_i)\}, \quad (1)$$

где Z_i – множество возможных значений z_i , $\tilde{Y}_i(z_i)$ – множество возможных значений затрат-выпусков при заданном z_i . Будем считать, что $0 \in Z_i$. $\forall v_i$ из $z_i = 0 \Rightarrow u_i = 0$ и элемент может непрерывно изменять свою среднюю интенсивность труда от $z_i = 0$ до $z_i = z_i^2$.

Качественным отличием средней интенсивности труда от переменных, характеризующих затраты-выпуски, является невозможность для центра непосредственного измерения z_i . Поэтому на практике для оценки z_i применяют косвенные методы, в частности, к ним можно отнести учет состояния внутренних переменных с помощью нормативов затрат ресурсов. Обозначим через z_i'' среднюю интенсивность труда, соответствующую нормативам (нормативную интенсивность труда).

2. Целевые функции центра и элементов

Допустим, что цель центра совпадает с целью системы и выражает требования национального хозяйства по отношению к системе.

Возможный вариант представления национальнохозяйственного критерия функционирования элементов дает типовая методика определения экономической эффективности капитальных вложений [4]. В соответствии с ней целевую функцию центра можно записать в следующем виде:

$$W = \sum_{i \in I} [Q_i(\tilde{y}_i, z_i) + E_n K_i(\tilde{y}_i, z_i) - \vartheta_i(\tilde{y}_i, z_i)] - \varPhi(\tilde{y}, z) \rightarrow \min, \quad (2)$$

где $Q_i(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$ - текущие затраты на функционирование i -го элемента с учетом сопряженных затрат; E_H - нормативный коэффициент эффективности капитальных вложений; $K_i(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$ - капитальные вложения в i -й элемент, с учетом сопряженных затрат и затрат на пополнение (уменьшение) оборотных средств; $\vartheta_i(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$ - экономический эффект, возникающий у потребителя; \tilde{x}_i - вектор плана i -го элемента, компоненты которого соответствуют компонентам вектора \tilde{y}_i ; $\tilde{y} = \{\tilde{y}_i\}$.

$\mathcal{X} = \{\tilde{x}_i\}, i \in I$. При этом в текущие затраты естественно включать затраты на экономическое стимулирование производственных предприятий, которые соответствуют народнохозяйственным издержкам по своему характеру.

Как видно из выражения (2) критерий W не зависит явно от $Z = \{\tilde{x}_i\}, i \in I$.

Критерии элементов $W_i, i \in I$ отражают объективно существующие коллективные интересы производственных предприятий. В соответствии с определениями коллективного интереса, приводимыми в работах экономистов (например, в работе [5]), можно выделить две его стороны. Первая сторона коллективного интереса - общепароцкий интерес, он совпадает с критерием народного хозяйства. Вторая сторона - непосредственный коллективный интерес W_{in} , который в простейшем случае можно считать зависящим только от векторов состояния \tilde{y}_i и плана \tilde{x}_i самого предприятия: $W_{in} = f_{in}(\tilde{y}_i, \tilde{x}_i)$. При этом коллективный интерес $W_i = F_i(W, W_{in})$ монотонно возрастает по обеим переменным.

В дальнейших рассуждениях будем рассматривать "несоответственные" элементы, интересы которых в основном определяются непосредственно коллективными интересами.

Попытаемся теперь определить вид функций $f_{in}, i \in I$. Следуя работе [5], можно предположить, что W_{in} зависит от средней интенсивности труда \tilde{x}_i , материального P_i^1 и морального P_i^2 поощрений, приходящихся в среднем на каждого работника i -го элемента в рассматриваемом интервале времени: $W_{in} = \varphi_{in}(\tilde{x}_i, P_i)$, где $P_i = \{P_i^1, P_i^2\}$. Естественно считать, что функция φ_{in} монотонно возрастает от P_i при любом значении поощрений.

Правила, определяющие объем поощрений P_i (система стимулирования), устанавливаются центром. В условиях хозяйственной реформы материальное поощрение каждого производственного предприятия осуществляется через фонд заработной платы S_{oi} и фонды экономического стимулирования (фонд материального поощрения S_{ii} , фонд социально-культурных мероприятий и жилищного строительства S_{ai} и фонд развития производства S_{hi}). При этом описанные фонды $\bar{S}_i = \{S_{oi}, S_{ii}, S_{ai}, S_{hi}\}$

зарисят от векторов затрат-выпусков \tilde{y}_i и плана \mathcal{F}_i i -го элемента: $\bar{S}_i = \bar{S}_i(\tilde{y}_i, \mathcal{F}_i)$. Ограничившись рассмотрением только материального стимулирования $P_i^I - P_i - P_i(\bar{S}_i(\tilde{y}_i, \mathcal{F}_i))$, непосредственно количественный интерес i -го элемента можно представить следующим образом:

$$W_{in} = f_{in}(y_i, \mathcal{F}_i) = \varphi_{in}(z_i, P_i(\bar{S}_i(\tilde{y}_i, \mathcal{F}_i))) , \quad \tilde{y}_i \in \tilde{Y}_i(z_i).$$

Предположив для активных элементов соизмеримость трудовых усилий и материальных поощрений, функцию φ_{in} можно также записать в виде

$$W_{in} = R_i(z_i) + P_i(\bar{S}_i(\tilde{y}_i, \mathcal{F}_i)) , \quad \tilde{y}_i \in \tilde{Y}_i(z_i), \quad (3)$$

где $R_i(z_i)$, $P_i(\bar{S}_i(\tilde{y}_i, \mathcal{F}_i))$ — критерии, характеризующие в явленной форме отношение i -го элемента к труду и объем полученных им материальных поощрений соответственно.

3. Степень информированности центра

В соответствии с выражением (1) для описания производственных возможностей i -го элемента достаточно знать множество Z_i и $Y_i(z_i)$. Относительно переменных \tilde{y}_i в простейшем случае можно допустить, что центр знает множество $\tilde{Y}_i(z_i)$, в то время как для переменных \tilde{x}_i центр может только производить оценку $\tilde{Z}_i'' = [0, \tilde{x}_i'']$ реального множества "внутренних возможностей" i -го элемента $Z_i = [0, z_i']$.

При этом, в отличие от описанной в работе [6] постановки, элемент может выбирать любое значение \tilde{x}_i из множества \tilde{Z}_i .

Кроме того, как говорилось выше, целевая функция i -го элемента (3) включает слагаемое R_i , зависящее непосредственно от \bar{x}_i , в вид этой зависимости не известен центру.

4. Анализ выполнимости планов

Одним из требований к планированию и экономическому стимулированию в производственных системах является выполнение (или перевыполнение) элементами назначаемых им планов. При этом в качестве множества возможных планов во многих задачах планирования берется множество G , построенное на основе нормативов: $G = G(\bar{z}^*) \subseteq Y(\bar{z}^*) = \prod_{i \in I} \bar{Y}_i(\bar{z}_i^*)$. Очевидно, что для выполнимости плана необходимо, чтобы $\bar{Z}^* \subseteq Z$, где $Z^* = \prod_{i \in I} Z_i^*$, $Z = \prod_{i \in I} Z_i$.

Допустим, что действующие системы планирования и экономического стимулирования обеспечивают выполнимость планов при выборе элементами $\bar{z} = \bar{z}^*$.

В соответствии с выражением (3) на этапе реализации i -й элемент выбирает \bar{z}_i , выходя из максимума функции $\hat{f}_i : \hat{f}_i(\bar{z}_i, \bar{x}_i) = R_i(\bar{z}_i) + P_i^*(\bar{S}_i(\hat{y}_i(\bar{z}_i), \bar{x}_i)) = R_i(\bar{z}_i) + \max_{\hat{y}_i \in Y_i(\bar{z}_i)} P_i^*(\bar{S}_i(\hat{y}_i, \bar{x}_i))$. При этом

средняя интенсивность труда, выбранная элементом \bar{z}_i ,
 $\bar{z}_i \in \arg \max_{\bar{z}_i \in Z_i} \hat{f}_i(\bar{z}_i, \bar{x}_i)$ в общем случае отличается от нормативной, что может привести к срыву назначаемого элементам плана \bar{x} в ухудшение критерия центра. Игнорирование такой возможности оправдано только в предположении, что $\Phi(\hat{f}(z), \bar{x}) = \text{const}$ при $z \in Z$ или
 $\forall i \in I : f(z_i, \bar{x}_i) = \text{const}$ при $z_i \in Z_i$ и что вы-

а) Ограничения, вводимые центром, и глобальные ограничения не учитываются.

б) Знак $\arg \max_{x \in X} f(x)$ обозначает множество таких $x^* \in X$, что $f(x^*) = \max_{x \in X} f(x)$.

поддается гипотезе доброкачественности. В остальных случаях для того, чтобы оправа плана не происходило, необходимо определить множество \bar{Z}^* , $\bar{Z}^* = \prod_{i \in I} \bar{Z}_i^*$ такое, что для любой $\bar{x} \in \bar{Z}^*$: $\Phi(\hat{y}(\bar{x}), \bar{x}) \geq \Phi(\bar{x}, \bar{x})$, где $\hat{y} = \{y_i\}$, $i \in I$ и строить систему стимулирования таким образом, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\forall i \in I : \arg \max_{z_i \in Z_i} f_i^*(z_i, x_i) \subseteq \bar{Z}_i^*.$$

Л и т е р а т у р а

1. Багриновский К. И. Основы согласования плановых решений. М., "Наука", 1977.
2. Методические указания к разработке государственных планов развития народного хозяйства СССР. М., "Экономика", 1974.
3. Егизарян Г. А. Материальное стимулирование роста эффективности промышленного производства. М., "Мысль", 1976.
4. Госплан СССР, Госстрой СССР, АН СССР. Типовая методика определения экономической эффективности капитальных вложений. М., "Экономика", 1969.
5. Егизарян Г. А., Емельянов А. М., Михайлов М. В. Коллективные материальные интересы при социализме (методический очерк). М., "Миръ", 1968.
6. Бурков В. Н. Основы математической теории активных систем. М., "Наука", 1977.

УДК 65.012.2

Механизмы корректировки планов в производственной системе. Ивановский А.Г., Мурзаев С.К. Синтез механизмов управления сложными системами. Сборник статей. М., Институт проблем управления, 1980.

Рассматриваются механизмы корректировки планов в производственной системе. Исследуются проблемы сообщения оптимальных оценок планов хозяйственными организациями, выпускающими однородную продукцию. Библ. наим. 3.

УДК 65.012.2

Организационное управление с использованием нормативной модели. Авдеев В.П., Бурков В.Н., Еналеев А.К., Кондратьев В.В., Мышляев Л.П. Синтез механизмов управления сложными системами. Сборник статей. М., Институт проблем управления, 1980.

Развивается подход к стимулированию человека в системе управления на основе оценивания эффективности его решений в сравнении с нормативными решениями. Описывается применение этого подхода в системах АСУ ТП и АСУП. Илл. 1, библ. наим. 6.

УДК 330.115

Формирование нормативной информации в активных системах. Андреев С.П., Кулаков С.М., Марченко Ю.Н. Синтез механизмов управления сложными системами. Сборник статей. М., Институт проблем управления, 1980.

Рассматриваются различные способы формирования нормативов и оценивается их эффективность. Библ. наим. 4.

УДК 65.012.2

Формирование обобщенной оценки объектов, комплексно оцениваемых наборами показателей. Рубиншнейн М.И., Черкашин А.М. Синтез механизмов управления сложными системами. Сборник статей. М., Институт проблем управления, 1980.

Предлагается подход к решению проблемы формирования комплексной оценки качества управления сложным объектом, использующий методы автоматической классификации. Библ. наим. 4.

УДК 65.012.2

Механизм назначения оптовых цен на новую продукцию и корректировка встречных планов. Ивановский А.Г., Гетьман О.А. Синтез механизмов управления сложными системами. Сборник статей. М., Институт проблем управления, 1980.

Рассматриваются механизмы ценообразования на новую продукцию с учетом сложившегося порядка назначения оптовых цен. Исследуется один вариант выбора корректировки планов. Илл. 2, библ. наим. 2.

УДК 330.115

Согласованное управление активной системой при наличии линейных штрафов за отклонение реализации от плана. Еналеев А.К. Синтез механизмов управления сложными системами. Сборник статей. М., Институт проблем управления, 1980.

Исследуется задача синтеза закона согласованного управления двухуровневой активной системой при наличии линейных штрафов в целевых функциях элементов. Устанавливаются необходимые и достаточные условия совпадения реализации системы с планом. Библ. наим. 2.

УДК 330.115

Функционирование динамических активных систем при агрегировании информации. Щепкин А.В. Синтез механизмов управления сложными системами. Сборник статей. М., Институт проблем управления, 1980.

Исследуется закон согласованного управления в динамической задаче распределения плановых заданий. Показывается, что агрегирование информации в рассматриваемой задаче не ухудшает эффективность функционирования системы. Библ. наим. 2.

УДК 330.115

Некоторые свойства систем с соревнующимися элементами. Сандац Н.Н. Синтез механизмов управления сложными системами. Сборник статей. М., Институт проблем управления. 1980.

Обсуждается концепция систем с соревнующимися элементами. Построены обобщения решения Стэкельберга и класс-

сификация законов распределения мест между соревнующимися элементами. Рассмотрены вопросы о несимметрии свойства объекта управления и нетождественности целей соревнующихся элементов и вышестоящего элемента. Библ. 6.

УДК. 65.012.2

Некоторые вопросы анализа функционирования производственных систем. Бурков В.Н., Кондратьев В.В., Прокопенко А.А., Спектор М.Д. Синтез механизмов управления сложными системами. Сборник статей. М., Институт проблем управления, 1980.

В работе рассматриваются некоторые вопросы моделирования множеств технических возможностей производственных элементов с учетом переменных, характеризующих их внутреннее состояние. Описывается один из возможных подходов к моделированию целевых функций центра и элементов. Станется задача обеспечения реализуемости планов, назначаемых в условиях нед полной информированности центра.

Библ. 6.

**СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ УПРАВЛЕНИЯ
СЛОЖНЫМИ СИСТЕМАМИ. Сборник статей.**

Редактор В.В. Андреянова
Художественный редактор Г.А. Крулев
Технический редактор Л.И. Шайкова
Корректор З.В. Старостина

**Т-05381 от 14.03.80 г.
Уч.-изд.л. 4,0. Цена 40 коп.
Тираж 500 . Заказ № 95.
Институт проблем управления.
117342, Москва, Профсоюзная, 65**