Министерство образования и науки Российской Федерации
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(государственный университет)
ФАКУЛЬТЕТ РАДИОТЕХНИКИ И КИБЕРНЕТИКИ
КАФЕДРА ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ

На правах рукописи
УДК 519.176

ТИМОФЕЕВ АСКАР ВЛАДИМИРОВИЧ

УЛУЧШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ НИЖНИХ ОЦЕНОК ЗАТРАТ ДРЕВОВИДНОЙ СЕТИ РОУТЕРОВ ДЛЯ ВОГНУТОЙ ФУНКЦИИ ЗАТРАТ

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Направление подготовки 010900 «Прикладные математика и физика»

Заведующий кафедрой	___________________	Д.А. Новиков
Научный руководитель	___________________	М.В. Губко
Студент	___________________	А.В. Тимофеев

г. Долгопрудный
2014

Оглавление

1. Введение. 3

2. Постановка задачи 4

2.1 Обзор литературы 7

2.2 Аддитивная функция затрат 8

2.3 Нижние оценки затрат оптимальной сети 10

2.4 Качество нижних оценок 14

3. Улучшение нижних оценок 15

3.1 Парная линеаризация для одного роутера 16

3.2 Парная линеаризация для нескольких роутеров 21

3.3 Гипотеза о приоритетности одной из линеаризаций 24

4. Эксперимент 27

4.1 Описание эксперимента 27

4.2 Экспериментальные данные 28

4.3 Результаты эксперимента 28

5. Обсуждение результатов 29

Список литературы 29

1. Введение.

Эффективность систем во многом определяется совокупностью связей различной природы между их элементами, совокупность этих связей назовем *структурой*. В частности, интересны прикладные задачи поиска оптимальной иерархической структуры, минимизирующую тот или иной критерий.

Так, например, с точки зрения практики представляет интерес задача построения корпоративной инфокоммуникационной сети. При построении инфокоммуникационных сетей важно учитывать затраты на содержание сети. Причин возникновения затрат может быть много. Затраты можно поделить на зависящие от трафика, например, затраты на электроэнергию, и зависящие от конфигурации сети, например затраты на амортизацию оборудования.

Сложные системы управления зачастую также имеют иерархическую структуру, что обычно связано с необходимостью декомпозиции задачи управления. Интенсивный информационный обмен порождает сложные процессы обработки информации, таким образом, минимизация затрат на обработку потоков информации между компонентами системы может быть интересной с точки зрения оптимизации структуры системы управления.

В настоящей дипломной работе рассматривается модель связывающей сети. В данной модели между заданными вершинами необходимо построить сеть, добавляя новые вершины, причем все затраты возникают именно в дополнительных вершинах и определяются протекающими через них потоками. Интересным частным случаем формы определения затрат является аддитивная функция затрат, состоящая из двух слагаемых, определяемых количеством инцидентных ребер и величинами протекающих через вершину потоков, соответственно.

Для вышеописанной модели в условиях аддитивной функции затрат известны нижние оценки [1] затрат древовидной сети. Темой настоящей работы является улучшение нижних оценок затрат оптимальной сети, вогнутым образом зависящих от потока (например, для инфокоммуникационных сетей – от объема трафика).

Подобного рода оценки интересны с точки зрения различных прикладных задач, а также могут быть применены при исследовании качества эвристических алгоритмов поиска оптимальной сети.

2. Постановка задачи

Опишем общую модель оптимизации связывающей сети, как она сформулирована в [1].

Пусть задано множество $W = \{1, \ldots, n\}$ *элементов нижнего уровня*. Через $w \in W$ будем обозначать типичный элемент нижнего уровня.

Ориентированный граф с множеством вершин W и множеством дуг $L \subseteq W \times W$ – граф связи, задающий *потребности в связи*. Без ограничения общности граф $<W, L>$ можно считать связным. Если $(w_1, w_2) \in L$, то между парой элементов w_1 и w_2 необходимо наладить связь, для чего строится *сеть связи* – ориентированный граф, вершинами которого являются все элементы W, а также добавляемые вершины-роутеры, обеспечивающие коммутацию информационных потоков. Множество роутеров обозначим через M, тогда множество вершин сети $V = W \cup M$. Через v будем обозначать типичную вершину сети.

Множество дуг сети обозначим через $E \subseteq V \times V$, где направление дуги соответствует направлению потока информации. Типичную сеть $< V, E >$ будем обозначать через H. Пусть $E_{in}(v) \subseteq E$ – множество входящих в вершину v дуг, а $E_{out}(v)$ – множество исходящих из нее дуг. Будем считать, что элементы нижнего уровня неспособны к коммутации, т.е для произвольных $w_1 \in W$ и $w_2 \in W$ нет дуг $(w_1, w_2) \in E$, и также, что элемент нижнего уровня может иметь не более одной исходящей и одной входящей дуги. Далее под роутером и вершиной-роутером будем понимать одно и то же.

Для каждой дуги $(v_1, v_2) \in E$ зададим функцию маршрутизации потоков $\lambda_{v_1,v_2}: L \rightarrow [0, 1]$, определяющую долю каждого потока $(w_1, w_2) \in L$, протекающего по данной дуге. Если $\lambda_{v_1,v_2}(w_1, w_2) = 1$, значит, по дуге

(v_1, v_2) протекает поток (w_1, w_2) в полном объеме. Если функция равна нулю, поток (w_1, w_2) по дуге (v_1, v_2) не идет.

Наложим естественные требования на функцию маршрутизации:

(1) $\lambda_{w_1,v_1}(w_1, w_2) = 1$, $\lambda_{v_2,w_2}(w_1, w_2) = 1$,

для любого потока $(w_1, w_2) \in L$. Здесь $E_{out}(w_1) = (w_1, v_1), E_{in}(w_2) = (v_2, w_2)$,

а также, для любой вершины-роутера $m \in M$ сети H и любого потока $(w_1, w_2) \in L$ верно равенство:

(2) $\sum_{(v,m)\in E_{in}(m)} \lambda_{(v,m)} (w_1, w_2) = \sum_{(v,m)\in E_{out}(m)} \lambda_{(m,v)} (w_1, w_2)$.

Считая, что затраты сети возникают только в вершинах-роутерах и для каждой вершины зависят только от локальной структуры сети в ее окрестности, определим т.н. *потоковую* функцию затрат $c(m, H)$ для вершины m, являющуюся функцией от всех функций маршрутизации для всех входящих и исходящих потоков этой вершины:

$$c(m, H) = c(\lambda_{e_1^{in}}(\cdot), \dots, \lambda_{e_k^{in}}(\cdot), \lambda_{e_1^{out}}(\cdot), \dots, \lambda_{e_k^{out}}(\cdot))$$

Затраты сети равны сумме затрат ее вершин-роутеров.

Общая постановка задачи об оптимальной связывающей сети состоит в том чтобы найти допустимую сеть (с функцией маршрутизации, которая удовлетворяет (1) и (2) для всех потоков $(w_1, w_2) \in L$ и имеет минимальные затраты.

2.1 Обзор литературы

Рассмотрим задачи дискретной оптимизации, близкие к приведенной постановке задачи построения связывающей сети.

Задача построения дерева Штейнера на плоскости [4], интересна тем, что в ней, так же как и в задаче построения связывающей сети, строится оптимальное дерево над фиксированным множеством висячих вершин. Отличие же заключается в том, что в задаче Штейнера критерием является общая сумма длин всех ребер дерева. Помимо этого, в связывающей сети никакой роли не играет геометрия, а лишь топология сети.

В [1] отмечается схожесть задачи о связывающей сети с поиском оптимальной иерархии для секционной функции затрат. В частности, эти задачи эквивалентны для древовидных ненаправленных сетей. Аналогии существуют и для других частных случаев.

Известно [1], что основным принципом построения оптимальной сети является сокращение пути в сети между сильно связанными вершинами. Для этого производится их объединение локальными роутерами, которые, в свою очередь соединяются друг с другом, с целью обеспечить менее интенсивные потоки между большим числом вершин. Этот же принцип используется задачах классификации, где для некоторых наборов вершин задана мера близости (в роли которой в рассматриваемой модели выступает объем потока) и ставится задача разбиения множества вершин на кластеры с целью максимизировать близость вершин внутри кластеров и минимизировать близость вершин разных кластеров (см. обзор в [8]). В задаче классификации иерархия строится в результате последовательности решений о разбиении графа на основе локального критерия, основанного на объемах межкластерных взаимодействий, и на размерах кластеров. Иерархия обычно строится «сверху-вниз», а для построения разбиений активно используются результаты спектральной теории графов [7, 11].

2.2 Аддитивная функция затрат

В [1] подробно исследуется частный случай модели связывающей сети, в рамках которого ищутся ненаправленные сети (в которых все связи между вершинами двунаправлены), единственной характеристикой потока (w_1, w_2) является его объем $\rho(w_1, w_2)$, а функция затрат вершины *аддитивна*, то есть представима в виде $c(m, H) = c_1(d_H(m)) + c_2(\rho_H(m))$, где $c_1(\cdot), c_2(\cdot)$ – монотонные функции, $d_H(m)$ – степень вершины $m \in M$ в сети H, то есть количество ребер, инцидентных вершине в сети H, а $\rho_H(m)$ – суммарный объем потока через эту вершину в сети H.

Таким образом, постановка задачи для аддитивной функции затрат примет вид:

Найти оптимальную неориентированную сеть для множества вершин нижнего уровня W, матрицы $R = \big(\rho(w, w')\big)_{w,w'} \in W$ объемов потребности в связи между элементами нижнего уровня в условиях аддитивной функции затрат $c(m, H) = c_1(d_H(m)) + c_2(\rho_H(m))$.

В общем случае для того, чтобы найти оптимальную сеть H, необходимо найти оптимальные величины:

1. количество вершин-роутеров q,
2. их степени $r_1, ..., r_q$ в сети H,
3. набор связей между вершинами-роутерами множества $M := \{1, ..., q\}$, то есть множество ребер $E_M \subseteq M \times M$,
4. количество $k_m < r_m$ вершин нижнего уровня, подчиненных каждой вершине $m \in M$ (возможно, для некоторых $m \in M$ $k_m = 0$)[1].
5. разбиение $W_1, ..., W_q$ ($\cup_{m=1,...,q} W_m = W$, $W_m \cap W_{m'} = \emptyset$, $|W_m| = k_m$) вершин нижнего уровня по инцидентным им вершинам-роутерам, которое также задает множество остальных ребер сети $E_W := \{ (w, m) : w \in W_m m = 1, \dots, q\}$.
6. функции маршрутизации потоков по всем дугам множества $E := E_W \cup E_M$ (для древовидных сетей однозначно определяется предыдущими пунктами).

Полностью эта задача пока не решена, однако в [1] был исследован пятый этап. В этом случае фиксированы степени вершин-роутеров, а, следовательно, первые слагаемые функции затрат $c_1(d_H(m))$ всех вершин

[1] Равенство $k_m = r_m$ возможно только в случае если сеть состоит из единственной вершины-роутера.

$m \in M$ постоянны, и можно считать, что затраты сети определяются только вторым слагаемым $c_2(\rho_H(m))$, зависящим от потока через роутер. В этом случае особый интерес представляют поиск оптимальной двухуровневой сети и поиск оптимальной древовидной сети (см. подробнее [1]).

2.3 Нижние оценки затрат оптимальной сети

Следуя [1], опишем логику построения нижней оценки затрат древовидной сети для аддитивной функции затрат $c(m,H) = c_1(d_H(m)) + c_2(\rho_{H_M}(m))$, где $c_2(\rho_{H_M}(m))$ – вогнутая функция, при заданной топологии сети роутеров H_M и заданном количестве инцидентных каждой вершине-роутеру вершин нижнего уровня.

В общем случае некоторые роутеры могут не иметь ни одной инцидентной вершины нижнего уровня, количество роутеров, имеющих хотя бы одну инцидентную вершину нижнего уровня, обозначим через p. Без ограничения общности будем считать, что роутеры пронумерованы таким образом, что $k_m > 0$ для $m = 1, \dots p$. Введем вектор $k \coloneqq \left(k_1, k_2, \dots, k_p\right)$ и соответствующую диагональную матрицу K, элементы на главной диагонали которой соответственно равны элементам вектора k.

Здесь и далее будет рассматриваться только фиксированная топология сети роутеров H_M, и фиксированный вектор k, поэтому во всех последующих записях опустим зависимость от этих величин.

В случае вогнутой функции $c_2(\rho(m))$, если для вершины m известен диапазон $\rho(m) = [\underline{\rho}(m), \bar{\rho}(m)]$, которому гарантированно принадлежит поток через вершину m, то можно оценить снизу значение потоковой функции затрат как:

(3) $$c_2(\rho(m)) \geq c_2^0(\rho(m)) := c_2\left(\underline{\rho}(m)\right) + \beta_m\left(\rho(m) - \underline{\rho}(m)\right),$$

где $\beta_m = \frac{c_2(\bar{\rho}(m)) - c_2\left(\underline{\rho}(m)\right)}{\bar{\rho}(m) - \underline{\rho}(m)}$.

Обозначим через X индикаторную матрицу расстановок элементов нижнего уровня, соответствующую разбиению $W_1, \dots, W_p$ по вершинам-роутерам, где $x_{wm} = 1$, если элемент нижнего уровня w инцидентен вершине-роутеру m, в противном случае $x_{wm} = 0$. Кроме того, матрица X должна удовлетворять требованиям:

1. $X^T e_n = k$,

2. $X e_p = e_n$, в силу неспособности вершин нижнего уровня к коммутации. Через Ξ обозначим множество таких матриц.

Известно [1], что затраты сети $\underline{C_2}$ соответствующие точному решению задачи для вогнутых функций $c_2(\rho(m))$ превосходят оценку $\underline{C_2^{\cap}}$ затрат сети для линеаризованных функций затрат (3), которая может быть найдена в виде:

(4) $$\underline{C_2^{\cap}} := \sum_{m=1}^{q}\left[c_2\left(\underline{\rho}(m)\right) + \beta_m e_n^T R e_n - \beta_m \underline{\rho}(m)\right] - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(R)\lambda_i\left(\tilde{P}(\beta)\right),$$

где через $\lambda_i(A)$ обозначены упорядоченные по убыванию собственные числа симметричной действительной матрицы A,

$\tilde{P}(\beta) := K^{\frac{1}{2}}P(\beta)K^{\frac{1}{2}}$, $P(\beta) := \sum_{m=1}^{q}\beta_m P_m P_m^T$,

$P_m = (p_{m'i}^m)$, $m = 1,\ldots,q$ – это $p \times (r_m - k_m)$ матрицы, элемент $p_{m'i}^m$ которых равен единице, если вершина-роутер $m' \in 1,\ldots,p$ достижима из вершины $m \in M$ через i-ое ребро, инцидентное вершине m.

Получение нижней спектральной оценки (4) в [1] производится посредством вычисления минимума затрат сети на *релаксированном* множестве матриц $\Omega \coloneqq \{X: X^TX = K\}$. При этом, как показано в [1], матрица X^*, на которой достигается минимум, равный правой части (4), может быть найдена по формуле

(5) $X^* = U_1U_2^TK^{\frac{1}{2}}$,

где U_1 – $n \times q$ матрица, столбцы которой – нормированные на единицу собственные вектора матрицы R, соответствующие q ее наибольшим собственным числам, упорядоченным по убыванию, а U_2 – $q \times q$ матрица, столбцы которой – нормированные на единицу собственные вектора матрицы $\tilde{P}(\beta)$, также упорядоченные по убыванию соответствующих им собственных чисел. Поток через роутер m, соответствующий матрице X, обозначим через:

(6) $\rho(m,X) = e_n^TRe_n - trX^TRXP_mP_m^T$.

Для получения диапазона $[\underline{\rho}(m), \bar{\rho}(m)]$ рассмотрим произвольную вершину-роутер $m \in M$ и оценим величину $\underline{\rho}(m)$. Для этого рассмотрим задачу минимизации $\rho(m)$ по всевозможным разбиениям элементов нижнего уровня по вершинам-роутерам. В [1] показано, что ее можно записать как поиск:

$$\min_{Y_m} \rho(m) = e_n^T R e_n - \max_{Y_m} trY_m^T R Y_m,$$

где оптимизация ведется по всем $n \times (r_m - k_m)$ матрицам Y_m, удовлетворяющим следующим свойствам:

1. $Y_m \otimes Y_m = Y_m$,
2. $Y_m^T Y_m = P_m^T K P_m$.

Пусть Ξ_m – множество таких матриц. В [1] показано, что тогда справедлива оценка:

$$\rho(m) \geq \min_{Y_m \in \Xi_m} \rho(m) \geq e_n^T R e_n - \max_{Y_m:\, Y_m^T Y_m = P_m^T K P_m} trY_m^T R Y_m.$$

Определим матрицу Z_m так, что: $Y_m := Z_m K^{\frac{1}{2}}$, тогда

$$\rho(m) \geq e_n^T R e_n - \max_{Z_m: Z_m^T Z_m = I_p} tr\, Z_m^T R Z_m K^{\frac{1}{2}} P_m P_m^T K^{\frac{1}{2}},$$

где I_p – единичная $p \times p$ матрица, или, с учетом обозначения $\tilde{B}_m := K^{\frac{1}{2}} P_m P_m^T K^{\frac{1}{2}}$,

$$\rho(m) \geq e_n^T R e_n - \max_{Z_m: Z_m^T Z_m = I_p} tr\, Z_m^T R Z_m \tilde{B}_m.$$

таким образом,

$$\underline{\rho}(m) = e_n^T R e_n - \sum_{i=1}^{r_m - k_m} \lambda_i(R) \lambda_i(\tilde{B}_m).$$

По аналогии можно найти максимальный поток:

$$\bar{\rho}(m) = e_n^T R e_n - \sum_{i=1}^{r_m - k_m} \lambda_{n-(r_m-k_m)+i}(R) \lambda_{r_m-k_m-i+1}(\tilde{B}_m).$$

2.4 Качество нижних оценок

Основной характеристикой получаемых нижних оценок является их качество. Качеством сконструированной оценки будем называть отношение её величины к величине затрат сети $\underline{C}_2$ соответствующих точному решению задачи.

Качество нижней оценки (4) зависит от двух факторов:

- *Погрешности линеаризации:*

Качество оценки сильно зависит от характера линеаризации потоковых функций затрат. Определим величину погрешности линеаризации как:

$$\sigma_1 = \frac{\{\underline{C}_2 - \sum_{m\in M} c_2^*\left(\rho(m, X^0)\right)\}}{\underline{C}_2},$$

где $c_2^*\left(\rho(m, X^0)\right)$ – значение линеаризованной функции затрат роутера m, при расстановке элементов нижнего уровня по роутерам X^0, соответствующей точному решению линеаризованной задачи.

- *Погрешности релаксации:*

Ухудшение качества нижней оценки (4) затрат сети также возникает вследствие *релаксации* множества матриц X. Идея релаксации заключается в том, чтобы избавиться от неприятного условия целочисленности матрицы X. Определим величину погрешности релаксации как:

$$\sigma_2 = \{\sum_{m\in M} c_2^*\left(\rho(m, X^0)\right) - \sum_{m\in M} c_2^*(\rho(m, X^*))\}/\underline{C}_2 ,$$

где $\rho(m, X^*)$ – оценка потока через роутер m в сети роутеров H_M, определяемая по формуле (6), для матрицы X^*, определяемой по формуле (5) в соответствии с введенной линеаризацией. Оба эффекта приводят к тому, что качество нижней оценки (4) примерно равно 70% (см. подробное описание эксперимента в разделе 4.2).

Темой настоящей дипломной работы является повышение качества оценки (4) путем конструирования и проверки иных методов линеаризации для снижения погрешности линеаризации σ_1.

3. Улучшение нижних оценок

Как отмечено выше, использование линеаризации (3) вогнутой функции затрат роутера $c_2(\rho(m))$, предложенное в [1], дает общее качество нижней оценки (4) около 70% (См. п. 4). Графически эту оценку изобразить как показано на рис.1:

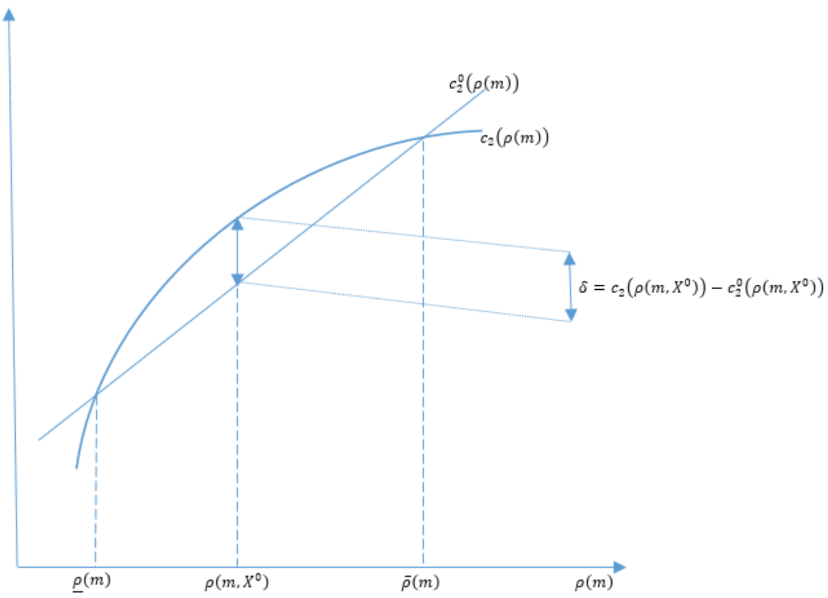

Рис. 1 Базовая линеаризация

Обозначим через $X_{optimal} = \mathrm{argmin}_{X\in\Xi} \sum_{m\in M} c_2\big(\rho(m,X)\big)$ матрицу расстановок на которой достигается точное решение задачи в условии вогнутых функций затрат роутеров. Из рис. 1 видно, что, если пренебречь разницей между X^0, X^* и $X_{optimal}$ разность $c_2\Big(\rho\big(m, X_{optimal}\big)\Big) - c_2^0\big(\rho(m,X^0)\big)$, а соответственно и погрешность линеаризации σ_1 тем меньше, чем ближе величина потока $\rho(m,X^0)$ через вершину m, к границам отрезка $[\underline{\rho}(m), \bar{\rho}(m)\,]$. Аналогично, если величина потока $\rho(m,X^0)$ далека от точек сечения $\underline{\rho}(m)$ и $\bar{\rho}(m)$, разность $c_2\Big(\rho\big(m, X_{optimal}\big)\Big) - c_2^*\big(\rho(m,X^0)\big)$ дает значительный вклад в погрешность линеаризации σ_1. Необходимость в сокращении этого вклада приводит нас к идее *парной линеаризации*.

3.1 Парная линеаризация для одного роутера

Рассмотрим пару линеаризаций функции затрат произвольной вершины-роутера $m \in M$

$$(7) \qquad c_2'(\rho(m)) = c_2\left(\underline{\rho}(m)\right) + \beta'_m\left(\rho(m) - \underline{\rho}(m)\right),$$

где $\beta'_m = \frac{c_2(\rho_0(m)) - c_2\left(\underline{\rho}(m)\right)}{\rho_0(m) - \underline{\rho}(m)}$;

$$(8) \qquad c_2''(\rho(m)) = c_2(\bar{\rho}(m)) + \beta''_m(\rho(m) - \bar{\rho}(m)),$$

где $\beta''_m = \frac{c_2(\bar{\rho}(m)) - c_2(\rho_0(m))}{\bar{\rho}(m) - \rho_0(m)}$;

и $\rho_0(m)$ – некоторая точка из интервала $(\underline{\rho}(m), \bar{\rho}(m))$, далее $\rho_0(m)$ будем считать заблаговременно выбранной.

Графически эта пара линеаризаций выглядит как показано на рис. 2:

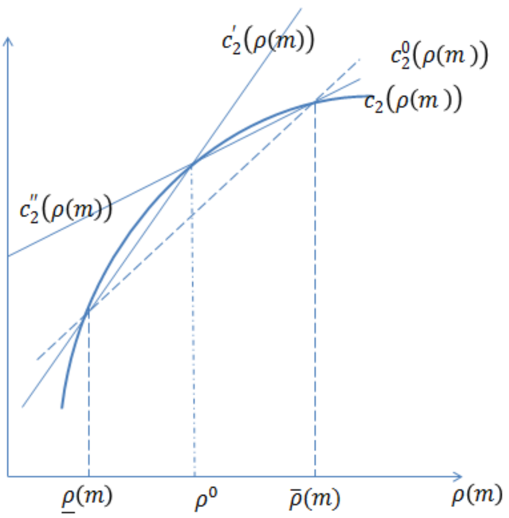

Рис. 2 Парная линеаризация

Пусть для функции затрат произвольного роутера m' была произведена линеаризация (7), а для функций затрат всех остальных роутеров линеаризации вида (3). Тогда для линеаризации (7) формула (4) запишется как:

$$(9) \qquad \underline{C_2'}(m') \coloneqq \sum_{m\in M\setminus\{m'\}} \left[c_2^0\left(\underline{\rho}(m)\right) + \beta_m e_n^T R e_n - \beta_m \underline{\rho}(m)\right] +$$

$$\left[c_2'\left(\underline{\rho}(m')\right) + \beta_{m'}' e_n^T R e_n - \beta_{m'}' \underline{\rho}(m')\right] - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(R)\lambda_i(\tilde{P}(\beta')),$$

где β' - набор соответствующих углов линеаризации.

Аналогично для линеаризации (6) роутера m' можно определить $\underline{C_2''}(m')$ и β''.

Рассмотрим задачу поиска нижней оценки затрат древовидной сети для аддитивной функции затрат $c(m) = c_1(d(m)) + c_2(\rho(m))$, где $c_2(\rho(m))$ – вогнутая функция, при заданной топологии сети роутеров H_M и заданном векторе k. В условиях этой задачи докажем следующие утверждения.

Утверждение 1: Для произвольного роутера $m' \in M$ величина $\min\{\underline{C_2'}(m'), \underline{C_2''}(m')\}$ является нижней оценкой затрат сети.

Доказательство: В силу того, что формула (9) дает нижнюю оценку затрат сети для линеаризованных функций затрат роутеров верно следующее неравенство:

$$\underline{C_2'}(m') \leq \min_{X\in\Omega}\Big[\sum_{m\in M\setminus\{m'\}} c_2(\rho(m,X)) + c'_2\big(\rho(m',X)\big)\Big],$$

аналогичное неравенство верно и для $\underline{C_2''}(m')$.

Рассмотрим точное значение затрат сети для распределения вершин нижнего уровня по роутерам, описываемого произвольной матрицей $X \in \Omega$:

$C_2(X) \coloneqq \sum_{m=1}^{q} c_2(\rho(m,X)),$

при этом выполнено следующее неравенство: $c_2\big(\rho(m',X)\big) \geq \min\ \{c'_2\big(\rho(m',X)\big), c''_2\big(\rho(m',X)\big)\}.$

Таким образом, $C_2(X) = \sum_{m=1}^{q} c_2(\rho(m,X)) \geq \sum_{m\in M\setminus\{m'\}} c_2(\rho(m,X)) + \min\ \{c'_2\big(\rho(m',X)\big), c''_2\big(\rho(m',X)\big)\}.$

А значит, это верно и для матрицы $X^{**} \in \Xi$ – расстановки, являющейся точным решением задачи $\min_{X\in\Xi} C_2(X)$:

$$\min_{X\in\Xi} C_2(X) = \sum_{m=1}^{q} c_2(\rho(m,X^{**})) \geq$$

$$\geq \sum_{m\in M\setminus\{m'\}} c_2(\rho(m,X^{**})) + \min\left\{c'_2\big(\rho(m',X^{**})\big), c''_2\big(\rho(m',X^{**})\big)\right\} \geq$$

$$\geq \min_{X\in\Xi}\Big[\sum_{m\in M\setminus\{m'\}} c_2(\rho(m,X)) + \min\left\{c'_2\big(\rho(m',X)\big), c''_2\big(\rho(m',X)\big)\right\}\Big] \geq$$

$$\geq \min\left\{\begin{array}{l} \min\limits_{X\in\Xi}\left[\sum\limits_{m\in M\setminus\{m'\}} c_2\big(\rho(m,X^{**})\big) + c'_2\big(\rho(m',X)\big)\right]; \\ \min\limits_{X\in\Xi}\left[\sum\limits_{m\in M\setminus\{m'\}} c_2\big(\rho(m,X^{**})\big) + c''_2\big(\rho(m'',X)\big)\right] \end{array}\right\} \geq$$

$$\min\left\{\begin{array}{l} \min\limits_{X\in\Omega}\left[\sum\limits_{m\in M\setminus\{m'\}} c_2\big(\rho(m,X^{**})\big) + c'_2\big(\rho(m',X)\big)\right]; \\ \min\limits_{X\in\Omega}\left[\sum\limits_{m\in M\setminus\{m'\}} c_2\big(\rho(m,X^{**})\big) + c''_2\big(\rho(m'',X)\big)\right] \end{array}\right\} =$$

$$= \min\left\{\underline{C}'_2(m'), \underline{C}''_2(m')\right\}.$$

Таким образом, утверждение доказано.

Как и нижняя оценка (4), оценка $\min\{\underline{C_2'}(m'), \underline{C_2''}(m')\}$ достигается на матрице $X' \in \Omega$, которая определяется по формуле (5) при условии линеаризации функций затрат роутеров, соответствующей минимальной из оценок $\underline{C_2'}(m'), \underline{C_2''}(m')$. Это позволяет нам сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 2. Для произвольного роутера $m' \in M$ нижняя оценка $\min\{\underline{C_2'}(m'), \underline{C_2''}(m')\}$ не меньше оценки $\underline{C_2^{\cap}}$.

Доказательство: Без ограничения общности считаем, что $\min\{\underline{C_2'}(m'), \underline{C_2''}(m')\} = \underline{C_2'}(m')$ и пусть $X' \in \Omega$ – матрица, на которой достигается оценка $\underline{C_2'}(m')$, а $X^* \in \Omega$ – матрица, на которой достигается оценка $\underline{C_2^{\cap}}$, тогда имеем:

$$\min\{\underline{C_2'}(m'), \underline{C_2''}(m')\} =$$

$$=\sum_{m\in M\setminus\{m'\}} c_2^0\big(\rho(m, X')\big) + c'_2\big(\rho(m', X')\big) \geq \sum_{m\in M} c_2^0\big(\rho(m, X')\big).$$

Последнее выражение дает значение линеаризованных по формуле (3) затрат сети при потоках, определяемых фиксированной матрицей $X' \in \Omega$. Но $\underline{C_2^{\cap}}$ дает нижнюю оценку этих затрат, то есть $\min\{\underline{C_2'}(m'), \underline{C_2''}(m')\} \geq \underline{C_2^{\cap}}$, что и требовалось доказать.

Экспериментальные данные подтверждают доказанные утверждения, оценка $\min\{\underline{C_2'}(m'), \underline{C_2''}(m')\}$, сконструированная для парной линеаризации, имеет общее качество 76% (см. описание эксперимента в разделе 4.2).

3.2 Парная линеаризация для нескольких роутеров

Успешность парной линеаризации для одной вершины-роутера с точки зрения качества общих оценок затрат сети можно развить, применяя парную линеаризацию одновременно к нескольким вершинам-роутерам.

Пусть $\xi \subseteq M$ – непустое множество вершин-роутеров, для которых произведена пара линеаризаций вида (7), (8). Всего на основе произведенных линеаризаций можно построить $2^{|\xi|}$ оценок по формуле (4) вида:

$$(10) \qquad \underline{C}_2^{**}(\theta,\mu) \coloneqq \sum_{m\in M\setminus\xi}\left[c_2^0\left(\underline{\rho}(m)\right)+\beta_m e_n^T R e_n-\beta_m\underline{\rho}(m)\right]+ \sum_{m\in\theta}[c'_2\left(\underline{\rho}(m)\right)+\beta'_m e_n^T R e_n-\beta'_m\underline{\rho}(m)]+\sum_{m\in\mu}[c''_2\left(\underline{\rho}(m)\right)+ \beta''_m e_n^T R e_n-\beta''_m\underline{\rho}(m)]-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i(R)\lambda_i(\tilde{P}(\beta^*_{\theta\mu})),$$

где $\theta \subseteq \xi$ – множество роутеров, для функций затрат которых была произведена линеаризация (7), $\mu := \xi\setminus\theta$ – множество роутеров, для функций затрат которых была произведена линеаризация (8), а $\beta^*_{\theta\mu}$ – вектор соответствующих углов линеаризации.

Утверждение 3: Для произвольного непустого множества $\xi \subseteq M$ величина

$$(11) \qquad \min_{\theta\subseteq\xi}\ \underline{C}_2^{**}(\theta,\xi\setminus\theta)$$

является нижней оценкой затрат сети.

Доказательство: Доказательство производится по аналогии с доказательством утверждения 1.

$$\forall m' \in \xi, \forall X \in \Omega \quad c_2\big(\rho(m',X)\big) \geq \min\ \{c'_2\big(\rho(m',X)\big), c''_2\big(\rho(m',X)\big)\},$$

$$C_2(X) \coloneqq \sum_{m=1}^{q} c_2(\rho(m,X)) \geq$$

$$\geq \sum_{m\in M\setminus\xi} c_2(\rho(m,X))+\sum_{m\in\xi}\min\ \{c'_2\big(\rho(m',X)\big), c''_2\big(\rho(m',X)\big)\},$$

А значит, это верно и для матрицы X^{**}, на которой достигается минимум $\min_{X\in\Omega} C_2(X)$:

$$\min_{X \in \Omega} C_2(X) = \sum_{m=1}^{q} c_2(\rho(m, X^{**})) \geq$$

$$\geq \sum_{m \in M \setminus \xi} c_2(\rho(m, X^{**})) + \sum_{m \in \xi} \min\{c'_2\big(\rho(m, X^{**})\big), c''_2\big(\rho(m, X^{**})\big)\}$$

Заметим, что выбор выражений, на которых достигаются минимумы в последней сумме, определяет некоторые множества $\theta' \coloneqq \{m \in \xi : c'_2\big(\rho(m', X^{**})\big) \leq c''_2\big(\rho(m', X^{**})\big)\}$ и $\mu' \coloneqq \xi \setminus \theta'$ и для этих множеств, в силу того что формула (4) дает нижнюю оценку для линеаризованных функций на множестве Ω, имеем:

$$\sum_{m \in M \setminus \xi} c_2(\rho(m, X^{**})) + \sum_{m \in \xi} \min\{c'_2\big(\rho(m', X^{**})\big), c''_2\big(\rho(m', X^{**})\big)\} \geq$$

$$\geq \sum_{m \in M \setminus \xi} c_2(\rho(m, X^{**})) + \sum_{m \in \theta'} c'_2\big(\rho(m, X^{**})\big) + \sum_{m \in \xi \setminus \theta'} c''_2\big(\rho(m, X^{**})\big) \geq$$

$$\geq \min_{X \in \Omega} \Big[\sum_{m \in M \setminus \xi} c_2(\rho(m, X)) + \sum_{m \in \theta'} c'_2\big(\rho(m, X)\big) + \sum_{m \in \xi \setminus \theta'} c''_2\big(\rho(m, X)\big) \Big] =$$

$$= \underline{C_2}^{**}(\theta', \xi \setminus \theta') \geq \min_{\theta \subseteq \xi} \underline{C_2}^{**}(\theta, \xi \setminus \theta).$$

Таким образом, утверждение доказано.

Утверждение 4: Добавление еще одного роутера к множеству ξ не уменьшает величину оценки, то есть:

$$\forall \xi \subset M, \forall m' \in M \setminus \xi \quad \min_{\theta \subseteq \xi \cup \{m'\}} \underline{C_2}^{**}(\theta, \xi \cup \{m'\} \setminus \theta) \geq \min_{\theta \subseteq \xi} \underline{C_2}^{**}(\theta, \xi \setminus \theta)$$

Доказательство: Пусть $\xi' = \xi \cup \{m'\}$ – множество с добавленным произвольным роутером $m' \in M \setminus \xi$. Проведем доказательство по аналогии с доказательством утверждения 2. Пусть $X^{**} \in \Omega$ – матрица, на которой достигается оценка $\min_{\theta' \subseteq \xi'} \underline{C_2}^{**}(\theta', \xi' \setminus \theta')$, а $X^{***} \in \Omega$ – матрица, на которой достигается оценка $\min_{\theta\subseteq\xi} \underline{C_2}^{**}(\theta,\xi\backslash\theta)$. Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\min\{c'_2(\rho(m',X^{**})),c''_2(\rho(m',X^{**}))\}\geq c_2^0(\rho(m',X^{**}) \;\Rightarrow$$

$$\min_{\theta'\subseteq\xi'} \underline{C_2}^{**}(\theta',\xi'\backslash\theta')=\sum_{m\in M\backslash\xi'} c_2^0(\rho(m,X^{**}))+$$

$$+\sum_{m\in\xi'}\min\{c'_2(\rho(m,X^{**})),c''_2(\rho(m,X^{**}))\}\geq$$

$$\geq\sum_{m\in M\backslash\xi} c_2^0(\rho(m,X^{**}))+\sum_{m\in\xi}\min\{c'_2(\rho(m,X^{**})),c''_2(\rho(m,X^{**}))\}\geq$$

$$\min_{X\in\Omega}\sum_{m\in M\backslash\xi} c_2^0(\rho(m,X))+\sum_{m\in\xi}\min\{c'_2(\rho(m,X)),c''_2(\rho(m,X))\}=$$

$$=\sum_{m\in M\backslash\xi} c_2^0(\rho(m,X^{***}))+\sum_{m\in\xi}\min\{c'_2(\rho(m,X^{***})),c''_2(\rho(m,X^{***}))\}=$$

$=\underline{C_2}^{**}(\theta^*,\xi\backslash\theta^*)$, где $\theta^*\coloneqq\{m'\in\xi: c'_2(\rho(m',X^{***}))\leq\; c''_2(\rho(m',X^{***}))\}$. В свою очередь:

$$\underline{C_2}^{**}(\theta^*,\xi\backslash\theta^*)\geq\;\min_{\theta\subseteq\xi}\underline{C_2}^{**}(\theta,\xi\backslash\theta)$$

Следовательно, $\min_{\theta\subseteq\xi\cup\{m'\}} \underline{C_2}^{**}(\theta,\xi\cup\{m'\}\backslash\theta)\geq\;\min_{\theta\subseteq\xi}\underline{C_2}^{**}(\theta,\xi\backslash\theta)$. Таким образом, утверждение доказано.

Экспериментальные данные подтверждают доказанные утверждения: оценка $\min_{\theta,\mu\subset k'} \underline{C_2}^{**}(k,\theta,\mu)$ для двух роутеров дает общее качество оценки 78% (см. описание эксперимента в разделе 4.2).

3.3 Гипотеза о приоритетности одной из линеаризаций

Основным минусом парной линеаризации для нескольких роутеров является экспоненциальная зависимость трудоемкости вычислений от мощности множества ξ, так как для получения оценки необходимо вычислить $2^{|\xi|}$ оценок вида (4).

Для фиксированного множества ξ рассмотрим произвольную вершину-роутер $m' \in \xi$ и произвольное множество роутеров $\theta \subseteq \xi \backslash \{m'\}$. Для них можно вычислить следующие оценки: $\underline{C_2^{**}}(\theta, \xi \backslash \theta)$ и $\underline{C_2^{**}}(\theta \cup \{m'\}, \xi \backslash (\theta \cup \{m'\}))$. .

Если для любого множества роутеров $\theta \subseteq \xi \backslash \{m'\}$ одна из оценок, $\underline{C_2^{**}}(\theta, \xi \backslash \theta)$ или $\underline{C_2^{**}}(\theta \cup \{m'\}, \xi \backslash (\theta \cup \{m'\}))$, не больше другой, то соответствующая ей линеаризация роутера m' *приоритетна*, и при выборе минимума в (11) всегда будет выбрана она. Это сокращает количество оценок, необходимых к вычислению, в два раза.

Рассмотрим разность $\underline{C_2^{**}}(\theta \cup \{m'\}, \xi \backslash (\theta \cup \{m'\})) - \underline{C_2^{**}}(\theta, \xi \backslash \theta)$. Если это выражение для любого $\theta \subseteq \xi \backslash m'$ имеет один знак, то одна из линеаризаций (7), (8) роутера m' приоритетна.

$$\underline{C_2^{**}}(\theta \cup \{m'\}, \xi \backslash (\theta \cup \{m'\})) - \underline{C_2^{**}}(\theta, \xi \backslash \theta) =$$

$$\sum_{m\in M\backslash\xi}\left[c_2^0\left(\underline{\rho}(m)\right) + \beta_m e_n^T R e_n - \beta_m \underline{\rho}(m)\right] + \sum_{m\in\theta}[c'_2\left(\underline{\rho}(m)\right) + \beta'_m e_n^T R e_n - \beta'_m \underline{\rho}(m)] + \sum_{m\in\xi\backslash(\theta\cup\{m'\})}[c''_2\left(\underline{\rho}(m)\right) + \beta''_m e_n^T R e_n - \beta''_m \underline{\rho}(m)] - \sum_{i=1}^p \lambda_i(R)\lambda_i(\tilde{P}(\tilde{\beta}')) - \sum_{m\in M\backslash\xi}\left[c_2^0\left(\underline{\rho}(m)\right) + \beta_m e_n^T R e_n - \beta_m \underline{\rho}(m)\right] - \sum_{m\in\theta}\left[c'_2\left(\underline{\rho}(m)\right) + \beta'_m e_n^T R e_n - \beta'_m \underline{\rho}(m)\right] - \sum_{m\in\xi\backslash(\theta\cup\{m'\})}[c''_2\left(\underline{\rho}(m)\right) + \beta''_m e_n^T R e_n - \beta''_m \underline{\rho}(m)] + \sum_{i=1}^p \lambda_i(R)\lambda_i(\tilde{P}(\tilde{\beta}'')) +$$

$$+ c'_2\left(\underline{\rho}(m')\right) + \beta'_{m'} e_n^T R e_n - \beta'_m \underline{\rho}(m') - c''_2\left(\underline{\rho}(m')\right) - \beta''_{m'} e_n^T R e_n + \beta''_m \underline{\rho}(m) =$$

$= c_2'\left(\underline{\rho}(m')\right) - c_2''\left(\underline{\rho}(m')\right) + \left(\beta'_{m'} - \beta''_{m'}\right)(e_n^T R e_n - \underline{\rho}(m')) +$

$- \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(R)\{ \lambda_i\left(\tilde{P}(\tilde{\beta}')\right) - \lambda_i\left(\tilde{P}(\tilde{\beta}'')\right)\},$

где $\tilde{\beta}' \coloneqq \{\beta_m^*: \beta_m^* = \beta_m', m \in \theta; \beta_m^* = \beta_m'', m \in \xi\backslash\theta; \beta_m^* = \beta_m, m \in M\backslash\xi\}$ и

$\tilde{\beta}'' \coloneqq \{\beta_m^*: \beta_m^* = \beta_m', m \in \theta \cup \{m'\}; \beta_m^* = \beta_m'', m \in \xi\backslash(\theta \cup \{m'\}; \beta_m^* = \beta_m, m \in M\backslash\xi\}$ - наборы углов линеаризаций, соответствующие $\underline{C_2}^{**}(\theta, \xi\backslash\theta)$ и $\underline{C_2}^{**}(\theta \cup \{m'\}, \xi\backslash(\theta \cup \{m'\}))$ соответственно.

Основной сложностью проверки данной гипотезы является нахождение оценок снизу и сверху для выражения $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i(R)\lambda_i\{(\tilde{P}(\tilde{\beta}') - \ (\tilde{P}(\widetilde{\beta''}\ )\}$, данная задача относится к классу спектральных неравенств, для которых пока не известны аналитические методы решения.

Основываясь на аналогичных соображениях, построим выражения для значений затрат сети $C_2'(m', X)$ и $C_2''(m', X)$ в условии линеаризованных функций затрат, аналогичных $\underline{C_2}^{**}(\theta \cup \{m'\}, \xi\backslash\theta)$ и $\underline{C_2}^{**}(\theta, \xi\backslash(\theta \cup \{m'\}))$, соответствующих некоторой произвольной расстановке $X.$ Для краткости обозначим через $c_2^*\left(\rho(m, X)\right)$ значение линеаризованных функций затрат роутеров $m \in M\backslash m'$, а через β^* - соответствующий угол линеаризации:

$C_2'(m', X) = \sum_{m \in M\backslash m'} c_2^*\left(\rho(m, X)\right) + c'(\rho(m', X)),$

$C_2''(m', X) = \sum_{m \in M\backslash m'} c_2^*\left(\rho(m, X)\right) + c''(\rho(m', X),$

из [1]: $\rho(m, X) = \beta_m e_n^T R e_n - trX^T RXP_m P_m^T$

$C_2'(m', X) = \sum_{m \in M\backslash m'} c_2^*(\beta_m e_n^T R e_n - trX^T RXP_m P_m^T) + c'\left(\beta'_{m'} e_n^T R e_n - trX^T RXP_{m'} P_{m'}^T\right) = \sum_{m \in M\backslash m'} c_2^*(\beta_m e_n^T R e_n - trX^T RXP_m P_m^T) + +c_2\ \left(\underline{\rho}(m')\right) + \beta'_{m'}\left(\left(\beta'_{m'} e_n^T R e_n - trX^T RXP_{m'} P_{m'}^T\right) - \underline{\rho}(m')\right),$

Аналогичное выражение можно записать и для $C_2''(m', X)$:

$C_2'(m', X) = \sum_{m \in M\backslash m'} c_2^*(\beta_m e_n^T R e_n - trX^T RXP_m P_m^T) +$

$+c_2\ \left(\bar{\rho}(m')\right) + \beta''_{m'}\left(\left(\beta''_{m'} e_n^T R e_n - trX^T RXP_{m'} P_{m'}^T\right) - \bar{\rho}(m')\right),$

Запишем разность $C_2'(m', X) - \ C_2''(m', X)$, сократив общие члены:

$$C_2'(m',X) - C_2''(m',X) =$$
$$= c_2\left(\underline{\rho}(m')\right) - c_2\left(\bar{\rho}(m')\right) + \left({\beta'^2}_{m'} - {\beta''^2}_{m'}\right)e_n^T R e_n$$
$$+ {\beta''}_{m'}\bar{\rho}(m') - {\beta'}_{m'}\underline{\rho}(m') - \left({\beta'}_{m'} - {\beta''}_{m'}\right) trX^T RXP_{m'}P_{m'}^T.$$

Запишем сравнение $C_2'(m',X) - C_2''(m',X)$ в виде:

$$C_2'(m',X) - C_2''(m',X) = c_2\left(\underline{\rho}(m')\right) - c_2\left(\bar{\rho}(m')\right) + \left({\beta'^2}_{m'} - {\beta''^2}_{m'}\right)e_n^T R e_n + {\beta''}_{m'}\bar{\rho}(m') - {\beta'}_{m'}\underline{\rho}(m') - \left({\beta'}_{m'} - {\beta''}_{m'}\right) trX^T RXP_{m'}P_{m'}^T$$

В [1] показано, что минимумы и максимумы выражений вида $trX^T RXP_{m'}P_{m'}^T$ можно оценить через собственные числа квадратных симметричных матриц R и $P_{m'}P_{m'}^T$:

$$trX^T RXP_{m'}P_{m'}^T \geq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(R)\lambda_i(P_{m'}P_{m'}^T),$$

$$trX^T RX\left({\beta'}_{m'} - {\beta''}_{m'}\right)P_{m'}P_{m'}^T \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_{n-i+1}(R)\lambda_{p-i+1}(P_{m'}P_{m'}^T),$$

Таким образом, критерий применимости линеаризаций (7), (8) для роутера m' примет вид:

Если $c_2\left(\underline{\rho}(m')\right) - c_2\left(\bar{\rho}(m')\right) + \left({\beta'^2}_{m'} - {\beta''^2}_{m'}\right)e_n^T R e_n + {\beta''}_{m'}\bar{\rho}(m') - {\beta'}_{m'}\underline{\rho}(m') \geq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(R)\lambda_i(P_{m'}P_{m'}^T),$

то линеаризация вида (7) приоритетна, и может быть использована в (11) при парной линеаризации для нескольких роутеров, без каких либо проверок.

Если $c_2\left(\underline{\rho}(m')\right) - c_2\left(\bar{\rho}(m')\right) + \left({\beta'^2}_{m'} - {\beta''^2}_{m'}\right)e_n^T R e_n + {\beta''}_{m'}\bar{\rho}(m') - {\beta'}_{m'}\underline{\rho}(m') \geq \sum_{i=1}^{p} \lambda_{n-i+1}(R)\lambda_{p-i+1}(P_{m'}P_{m'}^T),$

то линеаризация вида (8) приоритетна, и может быть использована в (11) при парной линеаризации для нескольких роутеров, без каких либо проверок.

Стоит отметить, что в условиях заданной топологии H_M, заданном k, и выбранных параметрах линеаризации все величины, используемые в критерии известны. Таким образом, нами получен аналитический критерий выбора одной линеаризации из пары (7), (8).

4. Эксперимент

4.1 Описание эксперимента

Целью поставленного эксперимента являлось определение качества сконструированных оценок, качество оценки определялось как отношение ее величины к величине затрат сети $\underline{C}_2$, соответствующих точному решению задачи. Эксперимент производился для заданной топологии сети H_M(см. рисунок 3), заданного количества вершин нижнего уровня n, матрица R определялась случайным образом. При этом рассматривались всевозможные допустимые векторы k.

Были получены следующие оценки:

- Оценка для случая линеаризации (3) вогнутой функции затрат;
- Оценка для случая парной линеаризации (7), (8) вогнутой функции затрат одного роутера;
- Оценка для случая парной линеаризации (7), (8) вогнутой функции затрат двух роутеров.

Точное значение затрат оптимальной сети определялось перебором. В ходе эксперимента был количественно измерен эффект повышения качества нижней оценки для парной линеаризации одного и нескольких роутеров.

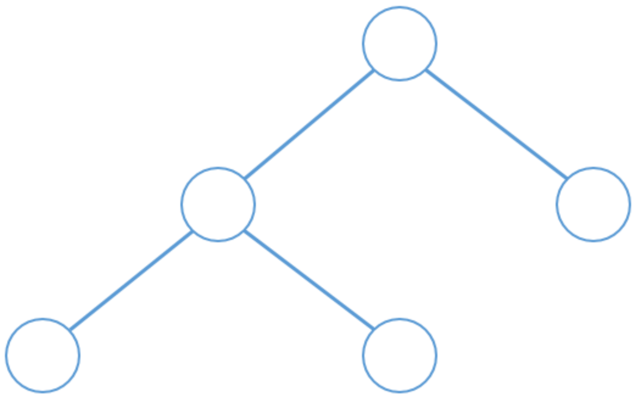

Рис. 3 Топология сети вершин-роутеров

4.2 Экспериментальные данные

Входными данными в серии экспериментов являлись количество вершин нижнего уровня n и количество T различных матриц связи R, остальные параметры эксперимента определялись из заданной топологии сети роутеров (см. рис. 3).

Матрица связи R для каждого эксперимента заполнялась случайными целыми числами, полученными равномерным распределением в диапазоне от 0 до 20.

В качестве вогнутой функции затрат была взята $c_2(\rho) = 2\sqrt{\rho}$, соответствующая аддитивная функция затрат имела вид:

$$c(\rho) = 2\sqrt{\rho} + 1.3 + d^2.$$

Расчеты производились в среде MATLAB на компьютере с системной конфигурацией AMD Turion 64 X2 TL-60 2.00GHz 2Gb

Были поставлены следующие серии экспериментов:

I. $T = 20$, $n = 5$,

II. $T = 20$, $n = 7$.

4.3 Результаты эксперимента

В результате проведенного эксперимента были получены следующие показатели качества нижних оценок для случая вогнутой функции затрат древовидной сети.

Наименование оценки	Качество оценки	
	n =5	n = 7
T	20	20
Линеаризация (3)	0.7052	0.6675
Парная линеаризация (7), (8) для одного роутера	0.7526	0.7175
Парная линеаризация (7), (8) для двух роутеров	0.8097	0.7572

5. Обсуждение результатов

Итак, в дипломной квалификационной работе были сконструированы нижние оценки, улучшающие известные оценки затрат древовидной сети для задачи поиска оптимальной расстановки элементов нижнего уровня в условиях вогнутой функции затрат. Сконструированные оценки основываются на идее перехода от одной линеаризации к выбору наиболее подходящей из конструируемой пары линеаризаций.

1. Для сконструированных оценок было доказано то, что они действительно являются нижними оценками для исследуемой задачи. Также было доказано, что они не хуже известных оценок.
2. Было сконструировано два критерия приоритетности одной из линеаризаций в случае парной линеаризации для нескольких роутеров. Для второго критерия была получена форма, поддающаяся прямому анализу.
3. Были получены экспериментальные данные, подтверждающие теоретические результаты.

Перспективой дальнейшего исследования является оценка величины $C_2'(m',X) - C_2''(m',X) = c_2'\left(\underline{\rho}(m')\right) - c_2''\left(\underline{\rho}(m')\right) + ({\beta'}_m - {\beta''}_m)(e_n^T R e_n - \underline{\rho}(m')) - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(R)\{\lambda_i\left(\tilde{P}(\tilde{\beta}')\right) - \lambda_i\left(\tilde{P}(\tilde{\beta}'')\right)\}$,

с целью получения критерия приоритетности линеаризации в явном виде. Для этого необходимо оценить величину $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i(R)\{\lambda_i\left(\tilde{P}(\tilde{\beta}')\right) - \lambda_i\left(\tilde{P}(\tilde{\beta}'')\right)\}$, сверху и снизу, что позволит получить аналитическую форму более строгого критерия приоритетности одной из линеаризаций.

Список литературы

1. Губко М. В. Модели и методы оптимизации структуры иерархических систем обработки информации. дисс. на соиск. степени д.ф.-м.-н. – М.: ИПУ РАН, 2014.

2. Губко М.В. Спектральные нижние оценки затрат связывающей сети // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014), Москва, 16-19 июня 2014 г. С. 1959-1970.

3. Гордеев Э.Н., Тарасцов О.Г. Задача Штейнера. Обзор // Дискретная математика. 1993. Том 5, №2, С. 3–28.

4. Губко М.В. Математические модели оптимизации иерархических структур. – М.: ЛЕНАНД, 2006.

5. Дементьев В.Т., Ерзин А.И., Ларин Р.М. и др. Задачи оптимизации иерархических структур. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1996.

6. Donath W.E., Hoffman A.J. Lower bounds for the partitioning of graphs // IBM J. Res. Dev. 1973. V. 17, No 5. P. 420–425.

7. Rendl F., Wolkowicz H. A projection technique for partitioning the nodes of a graph // Annals of Operations Research. 1995. V. 58. No 3. P. 155–179.

8. Schaeffer S.E. Survey: Graph clustering // Comput. Sci. Rev. 2007. V. 1. No 1. P. 27–64.

9. Wolkowicz H., Zhao Q. Semidefinite programming relaxations for the graph partitioning problem // Discrete Applied Mathematics. 1999. No 96–97 P. 461–479.

10. Handbooks in Operations Research and Management Science. Supply Chain Manage-ment: Design, Coordination and Operation / [Ed. by S.C. Graves, A.G. de Kok] V. 11. Elsevier, 2003

11. Spielman D. Spectral graph theory and its applications: Lecture notes (Fall 2012), http://www.cs.yale.edu/homes/spielman/561/ [дата доступа: 14.07.2014]