УДК 519

ПРИМЕНЕНИЕ БЛОЧНОГО МЕТОДА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДОПУСТИМЫХ НЕМАНИПУЛИРУЕМЫХ МЕХАНИЗМОВ АКТИВНОЙ ЭКСПЕРТИЗЫ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Бондарик В.Н., Коргин Н.А.[1]
МФТИ, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

Задача распределения ограниченных финансовых ресурсов на наукоемкие проекты формулируется как задача многокритериальной активной экспертизы. Для ситуации, когда априори значимость всех проектов и мнений всех экспертов одинакова, определяется класс симметричных и анонимных неманипулируемых механизмов, дающих допустимое распределение ресурсов.

Ключевые слова: неманипулируемые механизмы планирования, управление проектами, распределение ресурсов, многокритериальная активная экспертиза, обобщенные медианные схемы.

Введение

Одной из ключевых проблем при определении объемов финансирования научно-исследовательских и инновационных проектов при ограниченном бюджете является высокая сложность проверки достоверности предоставляемой о них информации – как о необходимом финансировании, так и об ожидаемых результатах. Поэтому, наиболее часто используются экспертные советы для принятия решения о том, как именно должен распределяться бюджет между предлагаемыми к реализации проектами. При подобном подходе сохраняется проблема *лоббирования* – продвижения экспертами отдельных проектов. При этом одним из способов лоббирования является *манипулирование сообщаемой информацией* (обзор различных способов манипулирования и подходов к борьбе с ними см., например в [1]) – когда лоббирующий эксперт старается завысить оценки продвигаемых им проектов и занизить оценки других проектов. Механизмы, устой-

[1] Работа частично поддержана грантом РФФИ, проект № 12-07-00365-а.

чивые к подобному поведению экспертов, принято называть *неманипулируемыми*.

Для отдельных предположений о том, как именно может быть формализована заинтересованность экспертов в определенном итоговом распределении ресурсов по проектам, существуют конкретные примеры механизмов, которые являются неманипулируемыми. Например, если предполагапредполагается, что для каждого эксперта важно не абсолютное значение выделяемого финансирования на каждый проект, а пропорция, в которой делится бюджет, то неманипулируемыми являются *механизмы согласия* [2, 3].

Рассмотрим следующую модель. Ограниченное финансирование R распределяется между m проектами путем согласования мнений n лиц (агентов) – при этом каждый из агентов может быть заинтересован в определенном распределении объемов финансирования.

Обозначим множество проектов - M, $\#M = m$, множество агентов N, $\#N = n$, множество допустимых вариантов распределения ресурсов - $A = \{x \quad (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}_m^+ \mid \sum_{j=1}^{m} x_j \le R\}$.

Заинтересованность (предпочтения) агентов описывается их функциями полезности $u^i(x): A \to \mathbb{R}_1$, $i \in N$. Будем рассматривать ситуацию частной информации – когда $u^i(x)$ знает лишь сам агент $i \in N$. Будем рассматривать случай *сепарабельных однопиковых* функций полезности. Обозначим $\tau_j^i = \arg\max_{x_j} u^i(x)$ - оптимальное количество ресурсов, которое с точки зрения агента i следует выделить на проект j. При этом оптимальное количество ресурсов, выделяемое на любой из проектов, не зависит от того, сколько ресурсов выделяется на остальные. Набор $\tau^i = \{\tau_j^i\}_{j \in M}$ будем называть *точкой пика* агента $i \in N$. Набор $\tau = \{\tau^i\}_{i \in N}$ будем называть *профилем* точек пиков агентов.

Рассмотрим класс *прямых* механизмов агрегирования мнений агентов - $x = \pi(\tau): A^n \to A$. Тогда *неманипулируемость* $\pi(\tau)$ означает, что $\forall i \in N$, при любом его наилучшем мнении $\tau^i \in A$, любой другой возможной его заявке о желаемом распределении $s^i \in A$ и любого набора сообщений остальных исполнителей $s^{-i} \in A^{n-1}$ выполняется
$u^i(\pi(\tau^i, s^{-i})) \ge u^i(\pi(s^i, s^{-i}))$.

Для данной модели было показано, что класс неманипулируемых механизмов является подклассом *обобщенных медианных схем* (ОМС) [4,5]. В этих механизмах объем финансирования каждой из работ определяется с помощь собственного правила - т.е. только на основе заявок экспертов о желаемом ее объеме финансирования и не зависит от предложений по финансированию других работ. Формальная запись этого правила выглядит следующим образом [5]:

(1) $x_j = \min_{S \subseteq N: i \in S} (\max(a_j(S), \tau_{ji}))$, $j \in N$,

где $a_j(S)$, $j \in N$ - параметры настройки механизма, определяемые независимо для каждой из работ для каждой из возможных групп экспертов $S \subseteq N \setminus \varnothing$, причем $\forall j \in N$ $a_j(S) \geq a_j(M)$ при $S \subset M$. Если $\forall j \in M$ $a_j(S) = a(S)$, то правило считается *симметричным* – для определения того, как должна финансироваться каждая работа, используется одно и тоже правило. Если $a_j(S)$ не зависит от того, кто именно из экспертов входит в группу S а зависит лишь от числа экспертов в группе $\# S$, то правило является *анонимным*. В этом случае $a_j(S)$ может принимать всего $n-1$ значений, которые могут трактоваться как *виртуальные заявки* (заявки несуществующих экспертов), а результатом выбора будет *медиана* среди $2n-1$ реальных исполнителей и этих виртуальных экспертов.

В силу независимости итогового финансирования для каждой из работ при использовании ОМС, они могут давать *недопустимое* распределение бюджета.

Пример 1. 10 млн. руб. надо распределить между тремя проектами. Экспертный совет состоит из трех экспертов. Для определения объемов финансирования каждого из проектов берется *медиана* в упорядочении по возрастанию заявок экспертов на финансирование данного проекта. Данная процедура является ОМС и является неманипулируемой.

Пусть оптимальным с точки зрения первого эксперта является следующее распределение бюджета – {6;4;0}, второго – {0;6;4}, третьего – {4;0;6}. Тогда для каждого из проектов заявки экспертов, упорядоченные по возрастанию будут представимы в виде ряда {0;4;6}, медианой в котором будет 4. Т.е. на каждый из проектов в соответствии с процедурой надо будет выделить по 4 млн. руб., в сумме – 12, что недопустимо, т.к. превышает имеющийся бюджет, хотя заявка каждого эксперта была допустимой.

Для того чтобы ОМС могла быть использована для решения задачи распределения ресурсов, она должна быть *реализуема* на A. Т.е. $\forall \tau \in A^n$ результат, получаемый в соответствии с ОМС так же должен принадлежать A.

В [4] были сформулированы условия реализуемости ОМС – т.н. свойство пересечения. Однако, проверка этих условий была достаточно трудоемкой. В [6,7] был предложен конструктивный алгоритм проверки данных условий для конкретных ОМС и множества допустимых результатов – т.н. *блочный метод*. С помощью этого алгоритма определим, какие симметричные и анонимные ОМС могут быть использованы как механизмы распределения ресурсов в зависимости от числа проектов m и n.

Блочный метод проверки реализуемости ОМС

В соответствии с [4] любая одномерная медианная схема может быть представлена в форме *системы правых выбирающих коалиций*. Для рассматриваемой задачи система правых выбирающих коалиций на отрезке $[0, R]$ это соответствие $\Re$, которое для каждого $z \in [0, R]$ определяет набор $\Re(z)$ коалиций агентов, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\forall z \in (0, R]$ $\Re(z) \neq \varnothing$, $\{\varnothing\} \notin \Re(z)$ и $\Re(0) = 2^N \setminus \{\varnothing\}$.

2) Если $S \in \Re(z)$ и $S \subset S' \Rightarrow$ $S' \in \Re(z)$.

3) Если $z' < z$ и $S \in \Re(z) \Rightarrow$ $S \in \Re(z')$.

4) $\forall S \subseteq N$, $\forall z \in [0, R]$и любой последовательности $\{z^t\} \subset [0, R]$ такой что $\lim_{t \to \infty} z^t = z$, выполняется, что
$[\forall t, S \in \Re(z^t)] \Rightarrow [S \in \Re(z)]$.

Обозначим $\hat{B}(A) = [0, R]^m$ - *минимальный ящик*, содержащий множество допустимых распределений бюджета A. Любая ОМС определяется как *семейство* систем правых выбирающих коалиций ($\forall j \in M$ - своя система $\Re_j(z)$), заданное на $\hat{B}(A) = [0, R]^m$, разбивая его на конечное число *блоков* - $m-$мерных прямоугольных параллелепипедов. При этом, результат выбора в соответствии с ОМС будет определяться как

(2) $\quad x_j = \max\{z \in [0, R] \mid \{i \in N \mid \tau_j^i(u^i) \geq z\} \in \Re_j(z)\}, \ j \in M$.

Для рассматриваемой модели распределения ресурсов в соответствии с [4] ОМС, определяемая семейством систем правых выбирающих коалиций реализуемо для A только тогда, когда

(3) $\quad \forall x \in \hat{B}(A) \setminus A \ \forall S_j \subset \Re_j(x_j) \ j \in M \ \bigcap_{j \in M} S_j \neq \varnothing$.

С учетом открытости множества $\hat{B}(A) \setminus A$ анализ выполнимости данного условия представлялся трудоемкой задачей. Предложенный в [6,7] блочный метод позволил трансформировать этот анализ в конечное число проверок.

Для симметричных и анонимных ОМС *блочное представление* можно записать следующим образом. Отрезок $[0,R]$ разбивается на $k \leq n$ отрезков $[z_{l-1}, z_l]$, $l \in \{\underline{k},...,\overline{k}\}$, $z_{\underline{k}-1} = 0$, $z_{\overline{k}} = R$. Причем $\forall l \in \{\underline{k},...,\overline{k}\}$, $\forall S \in \Re(z_l)$ $\#S \geq l$ и $\forall z \in (z_{l-1}, z_l]$ $\Re(z) = \Re(z_l)$. Т.е. номер отрезка определяет минимальное число агентов, для которых объем финансирования z не превышает их оптимума для конкретного проекта. Причем возможно, что для каких-то $l \in \{\underline{k},...,\overline{k}\}$ $z_{l-1} = z_l$.

Обозначим $B_W = \{B_w\}_{w \in W}$ - разбиение куба $[0,R]^m$ на блоки, где $W = \{\ w = (w_1,...,w_m) : \forall j \in M\ \ w_j \in \{\underline{k},...,\overline{k}\}\ \}$, $B_w = \prod_{j=1}^{m} [z_{w_j - 1}, z_{w_j}]$ - отдельный блок. $B_W = \{B_w\}_{w \in W}$ является *блочным представлением* ОМС. *Граничными* называются блоки, которые содержат как допустимые результаты распределения бюджета, так и не допустимые - $B_w \in B_W$: $B_w \cap \hat{B}(A) \setminus A \neq \varnothing$ и $B_w \cap A \neq \varnothing$. Они образуют *множество граничных блоков* $B_W(cl(A))$.

Условие реализуемости для рассматриваемой модели в соответствии с [7] может быть записано следующим образом:

(4) $\quad \forall B_w \in B_W(cl(A)) \sum_{j \in M} w_j \geq (m-1)n + 1$

Проиллюстрируем работу блочного метода на примере.

Пример 2. Описанная в примере 1 обобщённая медианная схема для $n = 3$ задается следующей системой правых выбирающих коалиций:
$\forall z \in (0,R]$ $\Re(z) = \{S \subseteq N \mid \#S \geq 2\}$.

Соответственно, блочное разбиение состоит всего из одного блока, индекс которого при $m = 3$ $w = \{2,2,2\}$. Этот же блок, очевидно, является и единственным граничным.

Получаем, что условие (4) не выполнено для данной ОМС т.к. $3 * 2 < (3-1)3 + 1 = 7$. Т.е. ОМС из примера 1 не реализуема, что и было в нем продемонстрировано.

Используя условие (4), проанализируем, какие ОМС допустимы в качестве механизмов распределения ресурсов в зависимости от m и n.

Описание ОМС, допустимых в качестве механизмов распределения ресурсов

Для анализа условия (4) необходимо определить мн-во граничных блоков. Для рассматриваемой модели это мн-во определяется достаточно просто:

(5) $$B_w \in B_W(cl(A)) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m} z_{w_j-1} \le R,\ \sum_{j=1}^{m} z_{w_j} > R.$$

Т.е. «левая» вершина блока должна быть допустимым распределением ресурса, «правая» - недопустимым.

Класс симметричных и анонимных ОМС, допустимых в качестве механизмов распределения ресурсов в зависимости от m и n описывается следующим утверждением.

Утверждение 1. $\forall m,n>1$ симметричная и анонимная ОМС реализуема для $A=\{x \quad (x_1,\ldots,x_m)\in\mathbb{R}_m^+ \mid \sum_{j=1}^{m} x_j \le R\}$ тогда и только тогда, когда задающая ее система правых выбирающих коалиций $\Re(z)$ разбивает отрезок $[0,R]$ не более чем на $k=\left\lfloor\frac{n-1}{m-1}\right\rfloor+1$ частей отрезками $[z_{l-1},z_l]$, $l\in\{n-k+1,\ldots,n\}$, $z_{n-k}=0$, $z_n=R$. Причем:

1. $\forall l\in\{n-k+1,\ldots,n\}$, $\forall S\in\Re(z_l)$ $\#S\ge l$ и $\forall z\in(z_{l-1},z_l]$ $\Re(z) \quad \Re(z_l)$.
2. Для любого B_w т.ч. $\sum_{j=1}^{m} z_{w_j-1}\le R$, но $\sum_{j=1}^{m} z_{w_j}>R$ необходимо, чтобы $$\sum_{j=1}^{m} w_j \ge (m-1)n+1.$$

Доказательство. Рассмотрим некоторое блочное разбиение $\hat{B}(A)$, порождаемое анонимной и симметричной ОМС. Оно определяется разбиением отрезка $[0,R]$ на $k\le n$ отрезков $[z_{l-1},z_l]$, $l\in\{\underline{k},\ldots,\overline{k}\}$, $1\le\underline{k}<\overline{k}\le n$, $z_{\underline{k}-1}=0$, $z_{\overline{k}}=R$. Пусть $z_{\underline{k}}>0$ и $z_{\overline{k}-1}<R$. Тогда любой блок с индексом $w:\exists! t\in M\ w_t=\overline{k}$, $\forall j\ne t\ w_t=\underline{k}$ является граничным т.к. $z_{\overline{k}}+(m-1)z_{\underline{k}}>R$ а $z_{\overline{k}-1}+(m-1)z_{\underline{k}-1}<R$. Для данного блока пункт 2 утверждения эквивалентен выполнению условия (4) и означает, что $\overline{k}+(m-1)\underline{k}\ge(m-1)n+1$. Если $\overline{k}=n$, то $\underline{k}\ge n-\frac{n-1}{m-1}$. Если $\overline{k}<n$, то $\underline{k}\ge n-\frac{\overline{k}-1}{m-1}$. Откуда получаем, что анонимная и симметричная ОМС до-

пустима в качестве механизма распределения ресурсов только если $\forall z \in (0,R]\ \ \forall S \subset \Re(z)\ \ \#S \geq n - \left[\dfrac{n-1}{m-1}\right]$.

Т.е. отрезок $[0,R]$ делится не более чем на $k = \left[\dfrac{n-1}{m-1}\right] + 1$ частей. Утверждение доказано, т.к. пункт 2 утверждения соответствует условию (4).

Следствие 1. При $m > n \geq 1$ существует единственная симметричная и анонимная ОМС, допустимая в качестве неманипулируемого механизма распределения ресурсов:

$\forall j \in M \quad x_j = \min\{\tau_j^i\}_{i \in N}$.

Доказательство. Из утверждения 1 следует, что $\forall z \in (0,R]\ \ \forall S \subset \Re(z)$ $\#S \geq n - \left[\dfrac{n-1}{m-1}\right]$. Т.к. $m > n$, получаем, что $\forall z \in (0,R]\ \ \#S = n$, что означает, что $\forall j \in M\ \ x_j = \min\{\tau_j^i\}_{i \in N}$, ч.т.д.

Следствие 2. При $m = n > 1$ симметричная и анонимная ОМС допустима в качестве неманипулируемого механизма распределения ресурсов, если описывающая ее система правых выбирающих коалиций удовлетворяет следующим требованиям:

$\forall z \in (0, z_{n-1}]\ \ z_{n-1} \leq R/m,\ \Re(z) = \{S \subseteq N \mid \#S \geq n-1\}$.

Доказательство. Из утверждения 1 следует, что $\forall z \in (0,R]\ \ \forall S \subset R(z)$ $\#S \geq n-1$. Т.к. $m = n$, получаем, что $m(n-1) < (m-1)n + 1$, откуда следует, что $mz_{n-1} \leq R$, ч.т.д.

Следствие 3. Если симметричная и анонимная ОМС допустима в качестве неманипулируемого механизма распределения ресурсов при определенных m и n, то она так же является допустимой при любом $\tilde{m} < m$ и том же n

Доказательство. При $\tilde{m} < m$

$(\tilde{m}-1)n + 1 = (m-1)n + 1 - (m - \tilde{m})n$.

В тоже время, для любого блока из блочного разбиения $[0,R]^{\tilde{m}}$, порождаемого симметричной ОМС, которая была задана при m выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^{\tilde{m}} w_j \leq \sum_{j=1}^{m} w_j - (m - \tilde{m})n$$

т.к. $\forall w \in W \quad \forall i \in M \;\; w_i \le n$. Откуда следует, что если условие (4) выполнялось для какого-либо из блоков при m, то оно будет так же выполняться и при $\tilde{m} < m$.

Фактически, для случая $m = n > 1$ любой неманипулируемый механизм может быть описан следующим образом:

$$x_j = \max\{z \in (0, R] \,|\, \#\{i \in N \,|\, \tau_{ji} \ge z\} \ge n - \left[\frac{R - z}{R - z_{n-1}} \right]\}, \quad z_{n-1} \le R / m, \quad j \in M$$

При $m > n > 1$ утверждение 1 определяет основные шаги конструктивного алгоритма построения неманипулируемых симметричных и анонимных механизмов распределения ресурсов. При этом целесообразным представляется обозначение $z_{n-k+1} = R / m - y$ и определение z_l, $l \in (n - k + 2, n - 1]$ на основе $y \in [0, R / m]$. Проиллюстрируем работу этого алгоритма.

Пример 3. Пусть $m = 3$, $n = 9$. Тогда $k = 5$, $w_j \in \{5, ..., 9\}$, $j \in \{1, 2, 3\}$. Граничными могут быть блоки, для которых $w_1 + w_2 + w_3 \ge 19$. Обозначив $z_5 = R / 3 - y$, получаем, что $z_8 \le R / 3 + 2y$, $z_6 + z_7 \le 2R / 3 + y$, $z_5 \le z_6 \le z_7 \le z_8$.

Положив $y = 0$, получаем механизм, в котором для того, чтобы на любой из проектов было выделено хотя бы треть ресурсов, необходимо, чтобы не меньше этой суммы запросили как минимум 5 экспертов для этого проекта. Чтобы было выделено от одной третьей до всего доступного финансирования – все 9 экспертов должны просить выделить на данный проект такую сумму.

Положив $y = 1 / 6$, получаем механизм, в котором отрезок $[0, R]$ может быть разбит на 5 отрезков последовательностью $\{R / 6, R / 3, R / 2, 2R / 3\}$. Для каждого проекта число заявок агентов, значения которых не ниже выбираемого объема финансирования составляет 5 для диапазона финансирования $(0, R / 6]$, 6 – для $(R / 6, R / 3]$, 7 – для $(R / 3, R / 2]$, 8 – для $(R / 2, 2R / 3]$, 9 - для $(2R / 3, R]$соответственно.

Следствие 3 можно трактовать, как *свойство монотонности по числу проектов* для ОМС, допустимых для распределения ресурсов – с уменьшением числа проектов при неизменном числе экспертов класс допустимых ОМС расширяется.

К сожалению, получаемые в соответствии с утверждением 1 ОМС являются сбалансированными в том смысле, что всегда обеспечивают распределение ресурсов полностью, более того, верно следующее утверждение

Утверждение 2. $\forall m \geq 3,\ \forall n \geq 2\ \ \exists \tau \in A^n$ т.ч. $\forall i \in N \sum_{i \in N} \tau_j^i = R$, для которого любая реализуемая симметричная и анонимная ОМС в качестве итогового распределение ресурсов будет давать $\forall j \in M\ \ x_j = 0$.

Доказательство. Пусть при произвольных $m \geq 3,\ n \geq 2$ каждый эксперт предпочитает, чтобы весь ресурс был отдан на один проект и голоса экспертов делятся «примерно» поровну - $\forall i \in N,\ \ \exists! j \in M : \tau_j^i = R$, $\forall j \in M\ \ \#\{i \in N \mid \tau_j^i \quad R\} \in \{[n/m],[n/m]+1\}$. Тогда для выделения на какой-либо проект ненулевого финансирования необходимо, чтобы $\left[\frac{n}{m}\right] + 1 \geq n - \left[\frac{n-1}{m-1}\right]$. Это условие выполняется только при $m \leq 2$ и $n \geq 1$. Поэтому, в соответствии с утверждением 1, при заданном наборе предпочтений экспертов $\forall j \in M\ \ x_j = 0$, ч.т.д.

Иными словами, неманипулируемые механизмы не допускают распределения ресурса в ситуациях «сильного» разногласия агентов. В частности, при $m > n > 1$ ресурсы распределяются полностью только в ситуации единогласия - $\forall i \in N\ \ x = \tau^i$.

4. Заключение

В настоящей работе охарактеризован класс всех неманипулируемых механизмов распределения ресурсов при сепарабельных однопиковых предпочтениях экспертов и приведен алгоритм их построения.

Показано, что если число проектов, на которые распределяется ресурс больше числа экспертов, на основании мнений которых принимается решение, то единственным неманипулируемым правилом является правило «минимальной заявки» - на каждый проект выделяется минимальное количество ресурса из заявленного экспертами.

Если число экспертов равно числу проектов, то для выделения ресурсов в объеме не более R/m на какой либо из проектов необходимо наличие заявок от всех экспертов (за исключением, быть может одного), каждая из которых не меньше выделяемого количества ресурсов. На любой из проектов может быть выделено более R/m ресурсов только если все эксперты просят об этом.

Для случая, когда число экспертов больше числа проектов, класс допустимых неманипулируемых механизмов становится существенно шире, однако, ни один из них не является сбалансированным.

При этом было показано, что с уменьшением числа проектов при неизменном числе экспертов, класс ОМС, допустимых для распределения ресурсов, расширяется.

Литература

1. Губанов Д.А., Коргин Н.А., Новиков Д.А., Райков А.Н. СЕТЕВАЯ ЭКСПЕРТИЗА / Под ред. чл.-к. РАН Д.А. Новикова, проф. А.Н. Райкова. – М.: Эгвес, 2010. – 170 с.
2. Бурков В.Н., Грацианский Е.В., Еналеев А.К., Умрихина Е.В. Организационные механизмы управления научно-техническими программами. М.: ИПУ РАН, 1993. – 64 с.
3. Иващенко А.А., Коргин Н.А., Новиков Д.А. Модели и методы оценки эффективности портфеля проектов. // Системы управления и информационные технологии, 2005, N 3(20), с. 92-98.
4. Barberá S., Masso J., Serizawa S. Strategy-proof voting on compact ranges // Games and Economic Behavior, 1998, vol.25, pp. 272-291
5. Barberá S., Strategy-proof social choice. In: Arrow, K. J., Sen, A. K., Suzumura, K. (Eds.), Handbook of Social Choice and Welfare. 2006 Vol. 2.
6. Коргин Н.А. Анализ реализуемости результатов многокритериальной экспертизы - применение "свойства пересечения"/ Проблемы управления, 2009 г. , №6 С. 18-27
7. Korgin N Algorithmic Verification of Feasibility for Generalized Median Voter Schemes on Compact Ranges // Proceedings of the 18th World Congress of the IFAC, Milan, Italy, August 29-September 2, 2011. P. 824-829.