ПРИМЕНЕНИЕ НЕМАНИПУЛИРУЕМЫХ МЕХАНИЗМОВ АКТИВНОЙ ЭКСПЕРТИЗЫ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПЕРАТИВНОГО ПРОЕКТНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Бондарик В.Н., Колосова Е.В., Коргин Н.А.[1]
ОАО «Гипросвязь», Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

Ключевые слова: неманипулируемые механизмы планирования, управление проектами, распределение ресурсов, активная экспертиза.

Введение

На примере одной из «классических» задач оперативного управления проектами - задачи сокращения времени выполнения работ проекта [1,2], иллюстрируются два подхода к решению задач планирования в условиях неполной информированности лица принимающего решения (ЛПР) – как задачи распределения ресурсов (когда каждый подчиненный сообщает ЛПР только о своих желаемых компонентах плана) и задачи активной экспертизы (когда каждый из подчиненных, выступая в роли эксперта, сообщает план целиком).

В большинстве работ по управлению проектами данная задача рассматривается в следующей постановке. Считается, что вся предоставляемая для планирования информация «достоверна» (в том смысле, что не производилось умышленного ее искажения), и руководитель проекта (или специалисты по планированию), должен решить оптимизационную задачу календарно-сетевого планирования в различных ее постановках [3-5].

В статье рассматривается другой аспект данной проблемы. Информация, необходимая для решения оптимизационной задачи, отсутствует, но может быть получена от непосредственных исполнителей работ по проекту. Рассматривается следующая постановка. Руководитель проекта спрашивает у подчиненных (исполнителей отдельных этапов проекта) - насколько каждый из них может сократить время выполнения своих работ. На основании сообщений подчиненных, руководитель определяет, кто и

[1] Работа частично поддержана грантами РФФИ 09-07-00093.

как должен будет сократить время выполнения своей работы. Типовой проблемой для подобных методов решения задач планирования, является проблема манипулирования – каждый из подчиненных может не достоверно сообщать о своих возможностях, тем самым пытаясь *манипулировать* итоговым решением, предпринимаемым руководителем. Механизмы планирования, которые позволяют избежать манипулирования со стороны подчиненных, получили название неманипулируемых механизмов планирования [6].

Рассматриваются два возможных подхода. В первом, руководитель спрашивает у каждого из подчинённых его собственные возможности по сокращению времени выполняемых работ. А для решения применяется неманипулируемые *механизмы распределения ресурсов* (и затрат) [7].

Во втором подходе, каждого подчиненного спрашивают о том, как именно каждый из исполнителей должен сократить время выполнения своих операций. Итоговое решение принимается руководителем на основе неманипулируемого механизма *многокритериальной активной экспертизы* [8].

1. Постановка задачи

Формальная модель записывается следующим образом. Проект (на данной фазе реализации) состоит из n работ, составляющих критический путь[2] или цепь [4]. Суммарное время выполнения работ превышает требуемое на T. Для простоты, будем считать, что сокращение любой из работ на T также не меняет критического пути (цепи) сетевой структуры зависимости выполняемых работ [9].

Предполагается, что непосредственный исполнитель (агент) каждой из работ $i \in \{1,...,n\}$ может обладать информацией о том, как лучше распределить требуемое сокращение между всеми работами $\tau^i = (\tau_1^i,...,\tau_n^i): \sum_{j=1}^{n} \tau_j^i \geq T$.

Руководитель проекта (Центр), запрашивает эту информацию у исполнителей и на ее основании принимает решение о том, каким будет итоговое сокращение работ по проекту $t = (t_1,...,t_n): \sum_{j=1}^{n} t_j \geq T$.

Предположим, что в условиях полной информированности существует правило, определяющее для любого набора мнений исполнителей $\tau = (\tau^1,...,\tau^n)$ итоговое сокращение работ по проекту - $t = \pi(\tau)$. Определим для этого правила понятие *неманипулируемости*. Для этого необходимо определить множество возможных сокращений времен выполнения работ:

$A=\{x\in A\subset \Re^n \mid \sum_{j=1}^{n} t_j \geq T,\ t_j \in [0,\bar{t}_j],\ \forall j\in N\}$, $N=\{1,\dots,n\}$,

и для каждого исполнителя задать его предпочтения на данном множестве - $u^i(\cdot): A\to \mathbb{R}^1$. Тогда неманипулируемость $\pi(\tau)$ означает, что $\forall i\in N$, при любом его наилучшем мнении $\tau^i \in A$, любой другой возможной его заявке о желаемом распределении $s^i\in A$ и любого набора сообщений остальных исполнителей $s^{-i}\in A^{n-1}$ выполняется

$u^i(\pi(\tau^i,s^{-i}))\geq u^i(\pi(s^i,s^{-i}))$

Иными словами, независимо от сообщений остальных исполнителей, каждый из них заинтересован достоверно сообщать руководителю проекта информацию о том, как лучше сокращать время выполнение работ с его точки зрения.

Задача – определить, какие правила сокращения времени выполнения проекта являются неманипулируемыми.

На данный момент существуют результаты, определяющие, каким требованиям должно удовлетворять правило $\pi(\tau)$, что бы быть неманипулируемым, для случая, когда:

1. функция предпочтений каждого исполнителя является однопиковой по времени сокращения своей работы, а время сокращения работ по другим проектам не важно. Формально $\forall i\in N$, $\forall t_{-i}, s_{-i}\in \mathbb{R}^n_+$:
   a. Существует единственная *точка пика* $\tau^i_i = \arg\max_{t_i\in\mathbb{R}^1_+} u^i(t_i,t_{-i})$;
   b. $\forall s,s'\in \mathbb{R}_+$, если $\tau_i > s > s'$, то $u^i(s,t_{-i})\geq u^i(s',t_{-i})$, если $z>z'>\tau_i$, то $u^i(s,t_{-i})\leq u^i(s',t_{-i})$;
   c. $\forall s\in \mathbb{R}_+\ u^i(s,t_{-i})=u^i(s,s_{-i})$.
2. функция предпочтений каждого исполнителя является многомерно однопиковой [10] – по каждой работе существует наилучшее время сокращения, которое не зависит от того, на сколько сокращаются остальные работы. Формально $\forall i\in N$:
   a. Существует единственная *точка пика* $\tau^i = \arg\max_{t^i\in B(A)} u^i(t^i)$, $\tau^i\in A$;
   b. $\forall s,s'\in B(A)\ [s'\in B(\{s,\tau^i\}), s'\neq s]\Rightarrow [u^i(s')>u(s)]$.

Здесь $B(\{s,\tau^i\})$ - минимальный *n*-мерный прямоугольник, содержащий s и τ^i b определяемый следующим образом. Для произвольного множества $A\subseteq \mathbb{R}^n$ обозначим через A_k проекцию данного множества на координатную ось $k \in N$, т.е. A_k =Proj$_k$(A). Нижнюю и верхнюю границу множества A_k обозначим min A_k и max A_k соответственно. Тогда минимальный m-мерный прямоугольник, содержащий множество $A \subseteq \Re^m$, определяется как:

$$B(A) = \prod_{k \in M} [\min A_k, \max A_k].$$

Для рассматриваемой модели $B(A) = [0, T]^n$

Рассмотрим последовательно оба случая. Для первого случая применимы результаты по построению неманипулируемых механизмов распределения ресурсов [6,7,11], для второго – для многокритериальной активной экспертизы [8,10].

2. Сокращение времени выполнения проекта как задача распределения ресурсов

В данное постановке задачи целесообразно, что бы каждый из исполнителей сообщал только время, на которое он готов сократить свою работу. Потребуем, чтобы правило сокращения времени выполнения проекткапроекта $t = \pi(\tau)$ удовлетворяло следующим достаточно простым и естественным требованиям:

1. Позволяло любому агенту увеличить время, на которое будет сокращена его работа, изменив сообщаемую оценку τ_i^i.
2. Пусть общее время, на которое нужно сократить некоторые работы $S \subseteq N$, уменьшилось. Тогда при перераспределении данного времени сокращения между этими работами для любой работы $i \in N \setminus S$ время сокращения не должно увеличиваться.

Пусть $t = (t_1, ..., t_n) : t_i = \pi_i(\tau)$ - итоговое распределение времен сокращения работ. Тогда любое неманипулируемое правило распределения времени выполнения работ, удовлетворяющее этим требованиям, может быть записано на основе результатов, полученных для задачи распределения ресурсов [11], следующим образом:

(1) $t_i = \max\{\tau_i^i, \min_{S \subseteq N : i \in S} \{T(S) d_i(S)\}\}$, $i \in N$,

где $T(S) = T - \sum_{j \in N \setminus S} \tau_j^j, S \subseteq N$, а $d_i(S), i \in N$ - параметры настройки механизма, обеспечивающие $\sum_{i=1}^{n} t_i = T$. Качественно, можно считать, что величины $d_i(S)$ определяют ту долю времени $T(S)$, на которую должно быть сокращено общее время выполнения работ в группе S, которая должна быть обеспечена за счет работы $i \in N$. Для многих неманипулируемых механизмов эта доля действительно зависит только от той группы, в которую входит работа. В частности это выполняется для неманипулируемых механизмов, эквивалентных механизмам *прямых* и *обратных приоритетов* [7]. Более того, для механизмов *прямых приоритетов* эти параметры определяются крайне просто. Для каждой работы определяется ее некоторый *абсолютный приоритет* $a_i, i \in N$, а

$$d_i(S) = \frac{a_i}{\sum_{j \in S} a_j},$$

т.е. означает *относительный приоритет* работы i в группе работ S.

Качественно, механизм сокращения времени выполнения проекта является механизмом прямых приоритетов, если итоговое время сокращения любой работы убывает с уменьшением заявки ее исполнителя о желательном времени сокращения.

В общем случае, величины $d_i(S)$ могут определяться более сложным образом – т.е. зависеть не только от S но и от других параметров (но не от заявки исполнителя $i \in N$).

Отдельный интерес представляют так называемые *анонимные механизмы* - механизмы в которых любым двум работам, заявки на сокращения которых идентичны, должно быть назначено одинаковое сокращение. Оказывается, существует единственный неманипулируемый анонимный механизм [7]. Для анонимного механизма приоритеты всех работ одинаковы, поэтому $\forall S \subseteq N,\ \forall i \in S,\ d_i(S) = 1/\#S,$ где $\#S$ - число работ в группе S. При этом аналитическая запись анонимного неманипулируемого механизма выглядит следующим образом:

$$(2) \qquad t_i = \max\{\tau_i^i, \frac{T - \sum_{j<i} \tau_j^j}{n-(i-1)}\},\ i \in N,$$

где подразумевается, что работы упорядочены в порядке убывания $\tau_i^i\ i \in N$.

Аналитическая запись неманипулируемого механизма распределения времени сокращения не позволяет понять принципа его функционирования. Однако, существует алгоритм, определяющий, как распределяется ресурс, и поясняющий, почему неманипулируемые механизмы этого типа получили название механизмов последовательного распределения.

Действие алгоритма следует разделить на два этапа. На первом этапе для каждой из работ определяются в $d_i(S)$, которые сообщаются всем исполнителям работ. После чего каждый исполнитель сообщает, на сколько он готов сократить свою работу - τ_i^i. Определяется группа работ с удовлетворенным заявками, которая на первым этапе является пустой - $K = \varnothing$.

На втором этапе запускается итеративная процедура. На каждом шаге процедуры определяются работы $i \in N \setminus K$, для которых выполняется условие

(3) $\tau_i^i \geq T(N \setminus K) d_i(N \setminus K)$.

Этим работам назначается сокращение $t_i = \tau_i^i$, и они переводятся в группу работ с удовлетворенным заявками -$K = K \cup i$. Если в группе $N \setminus K$ нет работ, удовлетворяющих (3), то процедура останавливается. Общее число шагов этой итеративной процедуры не превышает числа работ, между которым распределяется сокращение времени.

Проиллюстрируем описанный алгоритм на двух примерах.

Пример 1. Продолжительность пяти работ надо сократить на 10 дней.

Этап 1.

Все работы считаются одинаково значимыми, поэтому для распределения выбирается анонимный механизм последовательного сокращения, в котором в любой группе время, на которое должны быть сокращены работы в ней, делится поровну. Идеальные времена сокращения, сообщенные исполнителями работ: 4,4,1,0,0.

Этап 2.

Шаг 1. Время, на которое исполнители первых двух работ согласны их сократить не меньше чем 10/5=2 дня. Поэтому первые две работы сокращаются на время, заявленное их исполнителями.

Шаг 2. Между оставшимися тремя работами остается к распределению 10-8=2 дня. Третья работа получает заявленное сокращение на 1 день, т.к. 1>2/3.

Шаг 3. Заявленные времена сокращения работ 4 и 5 не удовлетворяют условию 3 – они меньше чем 1/2 дня. Поэтому оставшийся день делится поровну между работами 4 и 5. А итеративная процедура останавливается.

Итоговое сокращение времен выполнения работ проекта – 4,4,1,1/2,1/2

Пример 2. Условия те же, что и в примере 1, но работа 5 настолько важна, что ее сокращение сверх того, на которое согласен ее исполнитель – недопустимо. Все остальные работы одинаково значимы. Поэтому на первом этапе фиксируются следующие приоритеты работ:

1/4, 1/4, 1/4, 1/4,0.

Исполнители сообщают те же идеальные времена, что и в примере 1.

Этап 2.

Шаг 1. Время, на которое исполнители согласны сократить первые две работы не меньше чем 10/4=2 дня. Им назначается заявленное время сокращения. Кроме того, условие 3 выполняется так же для работы 5: 0=10*0.
Шаг 2. Между работами 3 и 4 остается к распределению 10-8=2 дня. Приоритеты работ - {1/2,1/2}.Третья работа получает заявленное сокращение на 1 день, т.к. 1=2/2. Оставшийся день сокращается за счет работами 4 и 5. А итеративная процедура останавливается.

Итоговое сокращение времен выполнения работ проекта - 4,4,1,1,0.

Приведенные примеры иллюстрируют важное свойство описываемых в этом разделе механизмов сокращения времени выполнения проекта – они являются сбалансированными (сумма сокращений времени выполнения работ в точности совпадает с требуемым сокращением времени выполнения проекта) и *оптимальным по Паретто* [12].

Описанные в этом разделе механизмы распределения времени сокращения проекта являются неманипулируемыми только при условии, что каждому исполнителю существенно лишь время, на которое будет сокращена его работа. В случае, если для какой-либо работы так же будет играть роль (например отражаться на качестве самой работы или затратах на ее выполнение), то, на сколько будут сокращены другие работы, данные механизмы перестают быть неманипулируемыми. Опишем, подходы, которые могут быть применены для построения неманипулируемых механизмов в этих условиях.

3. Сокращение времени выполнения проекта как задача активной экспертизы

В случае, когда предпочтения руководителей работ над множеством возможных вариантов сокращения описываются многомерно-однопиковыми функциями, задача сокращения времени проекта может быть сформулирована как задача *многокритериального выбора* (или *активной экспертизы)*. Каждый исполнитель, выступая в роли *эксперта,* сообщает руководителю проекта желаемое распределение времени сокращения проекта по всем работам критического пути.

Потребуем, чтобы правило сокращения проекта $t = \pi(\tau)$ на основе сообщаемых руководителями работ вариантов сокращения удовлетворяло следующим требованиям:

1. Выполнялось *условие единогласия* – если все руководители сообщили одинаковый вариант сокращения, то выбран должен быть именно этот вариант.
2. Время сокращения любой из работ должно непрерывно и монотонно зависеть от компоненты заявки любого из руководителей по данной работе.

Если предпочтения агентов описываются многомерно-однопиковыми функциями, то любое неманипулируемое правило распределения времени выполнения работ, удовлетворяющее этим требованиям, является *обобщенной медианной схемой.* Сокращение каждой из работ определяется с помощь собственного правила - т.е. на основе заявок исполнителей на сокращение данной работы и не зависит от предложений по сокращению других работ. Формальная запись этого правила выглядит следующим образом [3]:

(4) $t_j = \min_{S \subseteq N : i \in S} (\max(a_j(S), \tau_i^j))$, $j \in N$,

где $a_j(S)$, $j \in N$ - параметры настройки механизма, определяемые независимо для каждой из работ для каждой из возможных групп руководителей $S \subseteq N \setminus \varnothing$, причем $\forall j \in N \quad a_j(S) \geq a_j(M)$ при $S \subset M$. Если $\forall j \in N \; a_j(S) = a(S)$, то правило считается *симметричным* – для определения того, как должна быть сокращена каждая работа, используется одно и тоже правило. Если $a_j(S)$ не зависит от того, кто именно из руководителей входит в группу S а зависит лишь от числа руководителей работ в группе $\#S$, то правило является *анонимным*. В отличии от рассматриваемой в предыдущем разделе постановки задачи, здесь анонимность подразумевает, что при определении времени сокращения работы одинаковые заявки от разных исполнителей должны учитываться одинаково. В этом случае $a_j(S)$ может принимать всего $n-1$ значений, которые могут трактоваться как *виртуальные заявки* (заявки несуществующих экспертов), а результатом выбора будет *медиана* среди $2n-1$ реальных исполнителей и этих виртуальных экспертов.

Проиллюстрируем применение неманипулируемых механизмов активной экспертизы на конкретном примере.

Пример 3. Продолжительность пяти работ надо сократить на 10 дней. Мнения исполнителй, как и сами работы для проекта одинаково значимы, поэтом будем применять анонимную симметричную медианную схему, которая дает результат, «наиболее близкий» к усреднению мнений агентов (см., например, [13]) – для каждой из работ зафиксируем следующие виртуальные заявки на ее сокращение - 2,4,6,8.

Инсолнители работ предлагают следующие варианты сокращения.

Первый - (*0*,2,2,3,3), второй - (2,*0*,2,3,3), третий - (3,2,*0*,2,3), четвертый - (3,2,2,*0*,2), пятый - (3,3,2,2,*0*). Наклонным выделены заявки исполнителей по своим работам.

Тогда, все предложенные варианты сокращения работ, упорядоченные в порядке возрастания предложений будут следующими (полужирынм выделены виртуальные заявки). Первая работа - 0,**2**,2,3,3,3,**4**,**6**,**8**. Медианой в этом упорядочении будет предложение сократить эту работу на 3 дня. Предложения для второй работы - 0,**2**,2,2,2,3,**4**,**6**,**8**. Соответственно вторая работа будет сокращена на два дня. Варианты для третьей работы - 0,**2**,2,2,2,2,**4**,**6**,**8**, четвертой - 0,**2**,2,2,3,3,**4**,**6**,**8** и пятой - 0,**2**,2,3,3,3,**4**,**6**,**8**. Соответственно, третья работа будет сокращена на 2 дня, четвертая и пятая – на 3.

Итоговое сокращение будет – (3,2,2,3,3). Т.е. проект будет сокращён в сумме на 13 дней.

Пример 3 иллюстрирует тот факт, что в случае, если число сокращаемых работ больше двух, неманипулируемые механизмы активной экспертизы будут обеспечивать сокращение времени строго больше требуемого практически для большинства возможных сообщений руководителей работ [8]. Следует отметить, что превышение требуемого времени сокращения является частным аспектом большего недостатка, которым обладают обобщенные медианные схемы – для числа работ больше двух с их помощью нельзя обеспечить оптимальность по Парето [10] итогового распределения.

Также следует заметить, что далеко не все обобщенные медианные схему можно применять для решения задачи сокращения времени выполнения проекта. Приведем пример правила, которое является обобщенной медианной схемой, но не позволяет обеспечить требуемое время сокращения проекта даже при условии, что все исполнители предложили варианты, которые обеспечивают требуемое время сокращения.

Пример 4. Пусть проект, состоящий из пяти работ, должен быть сокращен на 10 дней. Применяется анонимная симметричная медианная схема, которая выбирает в качестве сокращения для каждой работы медиану из предложений исполнителей (медианой пяти заявок будет третья в их упорядочении). Виртуальные заявки на сокращения каждой из работ в этой схеме выглядят следующим образом - 0,0,10,10.

Исполнители предлагают следующие варианты сокращения.

Первый - (*0*,1,1,4,4), второй - (1,*0*,1,1,7), третий - (1,1,*0*,1,7), четвертый - (7,1,1,*0*,1), пятый - (4,4,1,1,*0*).

Тогда, все предложенные варианты сокращения работ, упорядоченные в порядке возрастания предложений будут следующими (полужирынм выделены виртуальные заявки). Первая работа - {**0**,**0**,0,1,1,4,7,**10**,**10**}. Медианой в этом упорядочении будет предложение сократить эту работу на 1 день. Предложения для второй третьей и четвертой работ - {**0**,**0**,0,1,1,1,4,**10**,**10**}. Соответственно все они будут так же сокращены на один день. Варианты для пятой - {**0**,**0**,0,1,4,7,7,**10**,**10**}. Соответственно, пятая работа будет сокращена на 4 дня.

Итоговое сокращение будет – (1,1,1,1,4). Т.е. проект будет сокращён в сумме только на 8 дней.

Приведенная в примере медианная схема не удовлетворяет т.н. *условию пересечения* [10] для множества возможны вариантов сокращений - $A=\{x \in A \subset \Re^n \mid \sum_{j=1}^{n} t_j \geq T,\, t_j \in [0, \overline{t_j}],\ \forall j \in N\}$, $N=\{1,\ldots,n\}$. В [14] приводится конструктивный алгоритм проверки данного свойства, позволяющий достаточно решать проблему обеспечения требуемого общего времени сокращения проекта.

4. Заключение

В настоящей работе иллюстрируется применение механизмов распределения ресурсов и активной экспертизы для решения задачи сокращения времени выполнения проекта. Приводятся условия неманипулируемости этих механизмов и их применимости.

Литература

1. Project Management Institute Руководство к Своду знаний по Управлению Проектами (Руководство PMBOK) – Четвертое издание - Project Management Institute, 2009 г., 496 с.
2. Управление проектами. Справочник для профессионалов. Под ред. А.В. Цветкова, В.Д. Шапиро. 2-е изд., перераб. и доп. - М: Омега-Л, 2010 г., 1276 с.
3. Баркалов С.А., Воропаев В.И., Секлетова Г.И. и др. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЕКТАМИ: Учебное пособие/ Под ред. В.Н. Бурков а – М.: Высшая школа, 2005. – 423 с.

4. Лич Л. Вовремя и в рамках бюджета. Управление проектами по методу критической цепи. Critical Chain Project Management. М: Альпина Паблишер, 2010 г., 360 стр.
5. Новиков Д.А. Управление проектами: организационные механизмы. – М.: ПМСОФТ, 2007г., 140 с.
6. Бурков В.Н., Буркова И.В., Губко М.В., и др. МЕХАНИЗМЫ УПРАВЛЕНИЯ: Мультифункциональное учебное пособие / Под ред. чл.-к. РАН Д.А. Новикова. – М.: Ленанд, 2010 г., 192 с.
7. Бурков В.Н., Горгидзе И.И., Новиков Д.А и др., Модели и механизмы распределения затрат и доходов в рыночной экономике. М.: ИПУ РАН, 1997. - 59 с.
8. Бурков В.Н., Искаков М.Б., Коргин Н.А. Применение обобщенных медианных схем для построения неманипулируемого механизма многокритериальной активной экспертизы / Проблемы управления, 2008 г. , №4 С. 38-47
9. Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А. Теория графов в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2001. – 124 с.
10. Barber`a, S., Strategy-proof social choice. In: Arrow, K. J., Sen, A. K., Suzumura, K. (Eds.), Handbook of Social Choice and Welfare. 2006 Vol. 2.
11. Коргин Н. А. Эквивалентность и неманипулируемость неанонимных приоритетных механизмов распределения ресурсов / Управление большими системами. Выпуск 26.1. М.: ИПУ РАН, 2009. С.319-347
12. Barbera S., Jackson M., Neme A., *Strategy-Proof Allotment Rules* // Games and Economic Behavior. Volume 18, Issue 1, January 1997 - pp.1-21.
13. Коргин Н.А. Задача минимизации гарантированной погрешности неманипулируемых механизмов активной экспертизы / Труды V Всероссийской школы-семинара молодых ученых «Управление большими системами» Липецк. ЛГТУ 2008, с. 194-202.

14. Korgin N Algorithmic Verification of Feasibility for Generalized Median Voter Schemes on Compact Ranges // Proceedings of the 18th World Congress of the IFAC, Milan, Italy, August 29-September 2, 2011. P. 824-829.