УДК 519.714.3

АНАЛИЗ РЕАЛИЗУЕМОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЭКСПЕРТИЗЫ – ПРИМЕНЕНИЕ «СВОЙСТВА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ»

Н.А. Коргин

Исследованы свойства неманипулируемых механизмов многокритериальной экспертизы, представимых в виде обобщенных медианных схем, позволяющих уменьшить трудоемкость проверки «свойства пересечения» — условия, необходимого и достаточного для того, чтобы результаты экспертизы принадлежали множеству допустимых результатов. Предложен алгоритм, позволяющий для произвольной обобщенной медианной схемы определить — для каких множеств допустимых результатов экспертизы эта схема удовлетворяет свойству пересечения.

Ключевые слова: активная экспертиза, коллективный выбор, неманипулируемый механизм, обобщенная медианная схема.

ВВЕДЕНИЕ

При проведении экспертизы, в которой участвуют эксперты, заинтересованные в ее результате, актуальна проблема манипулирования сообщаемой информацией с их стороны. В этом проявляется так называемое «оппортунистическое» поведение экспертов — действия в собственных интересах вопреки интересам всей системы в целом. Механизмы экспертизы с участием заинтересованных экспертов получили название механизмов активной экспертизы [1, 2], которые также можно рассматривать как механизмы коллективного выбора [3] с совпадающими непрерывными множествами допустимых альтернатив и результатов выбора (поэтому, в рамках данной статьи, понятия «результат экспертизы» и «результат выбора» считаются эквивалентными). Механизмы активной экспертизы (правила агрегирования сообщений экспертов о своих функциях предпочтения), в которых все эксперты предпочитают сообщать истину, называются неманипулируемыми механизмами активной экспертизы [1, 2]. В работе [4] был предложен конструктивный механизм построения многокритериальных механизмов на основе так называемых *обобщенных медианных схем* [3, 5, 6] для случая, когда множество допустимых результатов экспертизы (или множество допустимых альтернатив в терминологии теории коллективного выбора [3, 5, 6]) является многомерным прямоугольником — декартовым произведением множеств допустимых значений каждого из критериев. Было доказано, что для множества допустимых альтернатив, представимого в виде многомерного компакта, любой неманипулируемый механизм коллективного выбора также представим в виде обобщенной медианной схемы, при условии, что данная схема удовлетворяет особому условию на данном множестве — *свойству пересечения* [6]. Данное свойство гарантирует, что, если все сообщения участников выбора (экспертов в нашем понимании) принадлежат множеству допустимых альтернатив, то результат выбора в соответствии с применяемым неманипулируемым механизмом также будет принадлежать этому множеству. Однако, как отмечалось [4], проверка данного свойства достаточно трудоемка и осуществляется для комбинации «проверяемый неманипулируемый механизм выбора — исследуемое множество допустимых альтернатив». В рамках данной статьи исследуются свойства обобщенных медианных схем, позволяющие уменьшить трудоемкость проверки свойства пересечения. Предлагается алгоритм, позволяющий для произвольной обобщенной медианной схемы определить — для каких множеств допустимых альтернатив эта схема обладает свойством пересечения, а для каких нет. Данный подход актуален в том смысле, что позволяет организатору экспертизы зафиксировать устраивающий его неманипулируемый механизм многокритериальной активной экспертизы и проверять, при каких условиях на допустимые сообщения экспертов этот механизм можно будет применять.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Определим необходимые основные понятия. В развернутой форме все эти понятия даны в работе [4], поэтому здесь они будут изложены кратко, без подробных комментариев.

Пусть заданы множество критериев, по которым производится экспертиза $M = \{1, ..., m\}$, множество допустимых альтернатив $A \in \Re^m$, являющееся компактным и множество агентов (избирателей или экспертов) $N = \{1, ..., n\}$. На основании сообщений агентов о наиболее предпочтительных с их точек зрения альтернативах должна быть выбрана одна — как результат коллективного выбора, получаемый с помощью некоторой функции коллективного выбора $f(\cdot)$: $A^n \to A$. В рамках данной статьи будет предполагаться, что множество A выпукло, хотя часть определений и результатов будет обсуждаться и для случая невыпуклых множеств допустимых альтернатив. Предпочтения агентов над множеством альтернатив описывается многомерно однопиковыми функциями предпочтения [6] $u^i(\cdot)$: $\Re^m \to \Re$, $i \in N$:

— существует единственная альтернатива $\tau^i = \arg\max\limits_{y \in A} u^i(y)$ — точка «пика» агента i, $\forall i \in N\ \tau^i \in A$;

— $\forall z, z' \in \Re^m$,

$$[z' \in \widehat{B}(\{z, \tau^i\}),\ z' \neq z] \Rightarrow [u^i(z') > u(z)],$$

где $\widehat{B}(\{z, \tau^i\})$ — минимальный m-мерный прямоугольник, содержащий альтернативы z и τ^i, определяемый следующим образом. Для произвольного множества $A \subseteq \Re^m$ обозначим через A_k проекцию данного множества на координатную ось $k \in M$, т. е. $A_k = \mathrm{Proj}_k(A)$. Нижнюю и верхнюю границы множества A_k обозначим $\min A_k$ и $\max A_k$ соответственно. Тогда минимальный m-мерный прямоугольник, содержащий множество $A \subseteq \Re^m$, определяется как

$$\widehat{B}(A) = \prod_{k \in M} [\min A_k,\ \max A_k].$$

Будем называть допустимыми альтернативы $z \in A$, а недопустимыми — $z \in \widehat{B}(A) \backslash A$.

Далее речь будет вестись о задаче построения такой неманипулируемой функции коллективного выбора[1] $f(\cdot)$, при которой агенты заинтересованы в сообщении истинного значения своих точек пиков. В работах [3, 5, 6] доказано, что такие функции неманипулируемы тогда и только тогда, когда они представимы в виде обобщенных медианных схем[2]. Далее приводятся основные понятия, необходимые для данного представления.

Для описания медианных схем используется понятие систем правых и левых коалиций, изначально определяемое на одномерном пространстве альтернатив.

Определение 1 [6]. Система правых (левых)[3] коалиций W определяет для каждой альтернативы $z \in [d, D] \subset \Re^1$ набор коалиций агентов $W(z)$ в соответствии со следующими требованиями:

— принцип суверенитета: $\forall z \in (d, D]$ ($[d, D)$), $W(z) \neq \varnothing$, $\varnothing \notin W(z)$ и $W(d) = 2^N \backslash \varnothing$ ($W(D) = 2^N \backslash \varnothing$);

— монотонность коалиций: если $S \in W(z)$ и $S \subset S'$, то $S' \in W(z)$;

— монотонность результата: если $z' < (>) z$ и $S \in W(z)$, то $S \in W(z')$;

— полунепрерывность сверху: $\forall S \subseteq N$, $\forall z \in [d, D]$ и для любой последовательности $\{z^t\} \subseteq [d, D]$ такой, что $\lim\limits_{t \to \infty} z^t = z$, верно $[\forall t,\ S \in W(z^t)] \Rightarrow [S \in W(z)]$. ♦

Иными словами, вводится функция $W(\cdot)$: $[d, D] \to 2^N \backslash \varnothing$, ставящая в соответствие каждой альтернативе $z \in [d, D]$ некоторое подмножество множества всех непустых коалиций агентов $2^N \backslash \varnothing$. В случае многокритериального выбора, для минимального многомерного прямоугольника, содержащего множество допустимых альтернатив A, $\widehat{B}(A) = \prod\limits_{k=1}^{m} A_k$ можно определить семейство систем правых коалиций R — набор $\{R_k\}_{k=1}^m$, где R_k является системой правых коалиций. Аналогичным образом можно определить семейство систем левых коалиций L — набор $\{L_k\}_{k=1}^m$.

Используя данные понятия, вводится следующее формальное определение обобщенной медианной схемы.

Определение 2 [6]. Пусть задано множество допустимых результатов выбора A и семейство систем правых R (левых L) коалиций на множестве $\widehat{B}(A)$. Тогда обобщенная медианная схема $x = h(\tau)$[4],

[1] В рамках данной статьи понятия «механизм активной экспертизы», «механизм коллективного выбора» «функция коллективного выбора» считаются эквивалентными.

[2] Поэтому, в рамках данной статьи, понятия «прямой неманипулируемый механизм активной экспертизы» и «обобщенная медианная схема» считаются эквивалентными.

[3] В данном определении в скобках идет запись соответствующего условия для левой системы коалиций.

[4] Подразумевается, что агенты сообщают свои наилучшие альтернативы (точки пика).

порожденная совокупностью (A, R) (соответственно (A, L)), определяется следующим образом:

$$h_k(\tau_k) = \max\{z_k \in A_k | \{i \in N | \tau_k^i \geqslant z_k\} \in R_k(z_k)\},$$

$$(h_k(\tau_k) = \min\{z_k \in A_k | \{i \in N | \tau_k^i \leqslant z_k\} \in L_k(z_k)\})$$

для $\forall \tau \in A^n$ и $\forall k \in M$. ♦

Иными словами, в качестве результата экспертизы по каждому критерию выбирается максимальная (минимальная) проекция альтернативы $z_k \in A_k$, для которой множество экспертов, чьи точки пика лежат справа (слева) от данной проекции, удовлетворяет требованиям выбранной системы правых (левых) коалиций по данному критерию для данной проекции альтернативы.

Связь между системами левых и правых коалиций, порождающими одну и ту же медианную схему (для одного критерия), определялась следующим образом [6]:

$$L^*(z) = \{S \in 2^N | \forall z' > z, \forall S' \in R(z'), S \cap S' \neq \varnothing\}.$$

Проиллюстрируем введенные определения.

Пример 1. Рассмотрим механизм активной экспертизы, усредняющий сообщения агентов по каждому критерию:

$$x = f(s): \forall k \in M, x_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} s_k^i. \qquad (1)$$

Данный механизм манипулируем. Если агенты сообщают честно значения своих точек пика, то результатом выбора будет

$$x(\tau): \forall j \in M, x_j(\tau_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \tau_j^i,$$

где τ_k^i — наилучшее значение критерия k для агента i (или наилучшая альтернатива по данному критерию), а выигрыш каждого агента будет $u^i(x(\tau))$, $i \in N$.

Любому агенту $i \in N$, для которого $x(\tau^i, s^{-i}) \neq \tau^i$ при любом наборе сообщений остальных агентов s^{-i}, будет выгодно исказить свое сообщение. Если результат выбора по какому-либо критерию $k \in M$ будет меньше, чем значение наилучшей альтернативы агента по данному критерию, т. е. $x_k(\tau_k^i, s_k^{-i}) < \tau_k^i$, то сообщение искаженного значения своей наилучшей альтернативы $s_k^i > \tau_k^i$ увеличит значение x_k, приблизив его к τ_k^i, тем самым улучшив выигрыш агента $u^i(x(s^i, s^{-i})) \geqslant u^i(x(\tau^i, s^{-i}))$. Аналогично, для каждого критерия $k \in M$, такого что $x_k(\tau_k^i, s_k^{-i}) > \tau_k^i$, сообщение $s_k^i < \tau_k^i$, уменьшит значение $x_k(\tau_k)$, тем самым увеличив выигрыш агента.

Однако, проанализировав подобным образом поведение агента, можно определить равновесные по Нэшу сообщения $s^*(\tau)$ при заданном профиле (наборе) τ точек пика агентов. Механизм $h(\tau) = f(s^*(\tau))$, $\forall \tau \in A^n$ называется соответствующим $f(s)$ прямым механизмом. Если механизм $h(\tau)$неманипулируемый, то он называется эквивалентным $f(s)$ [1, 2].

В работе [4] было показано, что семейства систем правых и левых коалиций, порождающих прямой механизм, эквивалентный механизму $f(s)$ и определяемый выражением (1), имеют следующий вид:

$$R_k(z_k) = \left\{ S \subset N | \#S = r \geqslant n \frac{z_k - \min A_k}{\max A_k - \min A_k} \right\},$$

$$\forall z_k \in (\min A_k, \max A_k],$$

$$R_k(\min A_k) = 2^N \backslash \varnothing, \forall k \in M,$$

$$L_k^*(z_k) = \left\{ S \subset N | \#S = l \leqslant n \frac{\min A_k - z_k}{\max A_k - \min A_k} \right\},$$

$$\forall z_k \in [\min A_k, \max A_k),$$

$$L_k^*(\max A_k) = 2^N \backslash \varnothing, \forall k \in M.$$

Символ # обозначает мощность множества.

На рис. 1 представлен данный прямой неманипулируемый механизм для случая двух критериев и трех экспертов. В качестве множества допустимых результатов выбора рассматривается «бюджетное ограничение» $A = \{x \in \Re^2 | x_1 + x_2 \leqslant 1, x_1, x_2 \geqslant 0\}$. Для данного множества допустимых альтернатив $\widehat{B}(A) = [0, 1]^2$. Символами r_k и l_k, $k = \{1, 2\}$ обозначено число участников коалиции, необходимое для удовлетворения требований системы правых и левых коалиций по критерию $k \in \{1, 2\}$. Точки пиков агентов отмечены белыми кружками. Пунктирными линиями обозначены проекции точек пиков трех агентов на каждый из критериев. Штриховыми — изменение требований к коалициям по каждому из критериев. В первоначальном варианте формулировки обобщенных медианных схем, предложенной Э. Муленом [3] — точки пика «фантомных» агентов для определения результатов выбора по каждому из критериев. В качестве результата выбора по каждому критерию берется медиана проекций точек пика реальных и фантомных агентов. Результат выбора отмечен черным кружком.

Для прямого механизма, эквивалентного механизму (1), результат выбора на множестве A определяется следующим образом [4]:

$$h_k(\tau_k) = \max\{z_k \in [0, 1] | \#\{i \in N | \tau_k^i \geqslant z_k\} \geqslant nz_k\},$$
$$k \in \{1, 2\}. \qquad (2)$$

Из рис. 1 видно, что результат выбора по критерию 1 h_1 равен 1/3, что пропорционально доле аген-

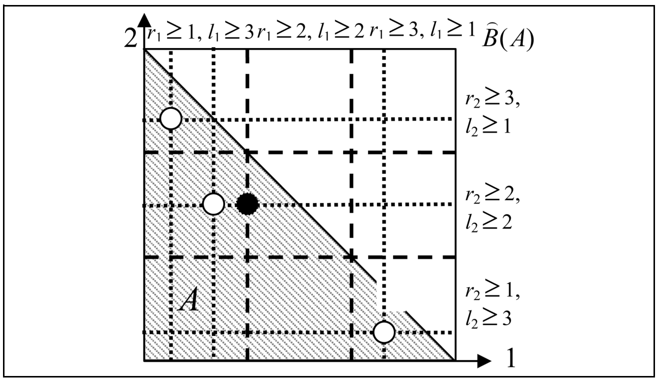

Рис. 1. Обобщенная медианная схема

тов (один из трех), значение проекций точек пика которых не меньше h_1. Аналогично по второму критерию $h_2 = 2/3$. ♦

В ходе дальнейшего изложения термин «правые» или «левые коалиции» заменим на *выбирающие коалиции*, уточняя, где необходимо, о каких именно коалициях будет идти речь.

Обобщенные медианные схемы определяются на множестве $\widehat{B}(A)$, т. е. на m-мерном прямоугольнике. Поэтому любой прямой неманипулируемый механизм коллективного выбора, определенный в терминах *семейства систем выбирающих коалиций* (ССВК) для произвольного m-мерного прямоугольника B, останется таковым для любого множества допустимых результатов выбора A, такого что $\widehat{B}(A) = B$. Для проверки реализуемости прямого неманипулируемого механизма используется понятие *свойства пересечения* для порождающего его ССВК.

Для любой пары альтернатив $y, z \in \widehat{B}(A)$ обозначим множества $M^+(y, z) = \{k \in M | z_k > y_k\}$ и $M^-(y, z) = \{k \in M | z_k < y_k\}$, которые определяют набор критериев, для которых значение соответствующей компоненты альтернативы z строго больше y — альтернатива z расположена правее по данным критериям y, и наоборот — альтернатива z расположена левее по данным критериям y. Если $k \notin M^+(y, z) \cup M^-(y, z)$, то альтернативы неразличимы по данному критерию. Таким образом, положение альтернативы y относительно альтернативы z описывается парой множеств $\{M^-(y, z), M^+(y, z)\}$.

Определение 3 [6]. Семейство систем правых коалиций $R = \{R_k\}_{k=1}^{m}$, определенное на множестве $\widehat{B}(A)$, обладает *свойством пересечения* для множества A, если для $\forall y \in \widehat{B}(A)\backslash A$ и любого конечного подмножества $\{z^1, ..., z^T\} \subset A$ верно:

$$\bigcap_{t=1}^{T}\left\{\left[\bigcup_{k \in M^+(y, z^t)} l_k(y_k)\right] \cup \left[\bigcup_{k \in M^-(y, z^t)} r_k(y_k)\right]\right\} \neq \varnothing \quad (3)$$

для любой коалиции $r_k(y_k) \in R_k(y_k)$, где $k \in \bigcup_{t=1}^{T} M^-(y, z^t)$ и любой коалиции $l_k(y_k) \in L_k^*(y_k)$, где $k \in \bigcup_{t=1}^{T} M^+(y, z^t)$. ♦

Качественно, наличие свойства пересечения у ССВК означает, что любая недопустимая альтернатива $y \in \widehat{B}(A)\backslash A$ может быть выбрана в результате применения прямого неманипулируемого механизма только в том случае, если найдется хотя бы один агент, чья точка пика также не принадлежит множеству A. Если ССВК обладает свойством пересечения на множестве A, то порождаемая им обобщенная схема удовлетворяет свойству пересечения на этом же множестве. Если ССВК удовлетворяет условию (3) для какой-либо альтернативы $y \in \widehat{B}(A)\backslash A$, то будем считать, что данное семейство *обладает свойством пересечения для A в y*.

Введя все необходимые определения, приведем основной результат, полученный группой С. Барберы:

«*Функция коллективного выбора на профиле многомерно однопиковых предпочтений над множеством допустимых альтернатив* $A \subseteq \Re^m$ *неманипулируема тогда и только тогда, когда она представима в виде обобщенной медианной схемы, удовлетворяющей свойству пересечения*» [6].

В работах [6, 7] было показано, что условие (3) достаточно проверять лишь для одного *решающего* множества $\widehat{S}(y) \subset A$ для каждой недопустимой альтернативы $y \in \widehat{B}(A)\backslash A$. Для выпуклых компактных множеств $\forall y \in \widehat{B}(A)\backslash A$ решающее подмножество $\widehat{S}(y) = \{z^1, ..., z^m\} \subset A$ определяется следующим образом — из каждого сечения A гиперплоскостью, проходящей через альтернативу y, выбирается по одной альтернативе; $\forall t = 1, ..., m$ $z_k^t = y_k$, если $k = t$, а z_k^t для $k \neq t$ любые такие, что $z^t \in A$. Из условия [7] следует, что для решающих множеств условие (3) может быть записано следующим образом:

$$\left[\bigcap_{k \in M^+(y, A)} l_k(y_k)\right] \cap \left[\bigcap_{k \in M^-(y, A)} r_k(y_k)\right] \neq \varnothing, \quad (4)$$

для любой коалиции $r_k(y_k) \in R_k(y_k)$, где $k \in M^-(y, A)$, и любой коалиции $l_k(y_k) \in L_k^*(y_k)$, где $k \in M^+(y, A)$.

Однако проверка, реализуем или нет прямой неманипулируемый механизм выбора на заданном множестве, остается отдельной сложной задачей, так как требуется проверять все недопустимые альтернативы $y \in \widehat{B}(A)\backslash A$ и не существует конструктивного алгоритма, позволяющего уменьшить сложность проверки. Разработке подобного алгоритма посвящено дальнейшее изложение.

2. МОНОТОННОСТЬ СВОЙСТВА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ

Покажем, что проверку свойства пересечения можно существенно облегчить, так как достаточно проверять недопустимые альтернативы $y \in \widehat{B}(A)\backslash A$, лежащие как можно «ближе» к замыканию множества A — clA.

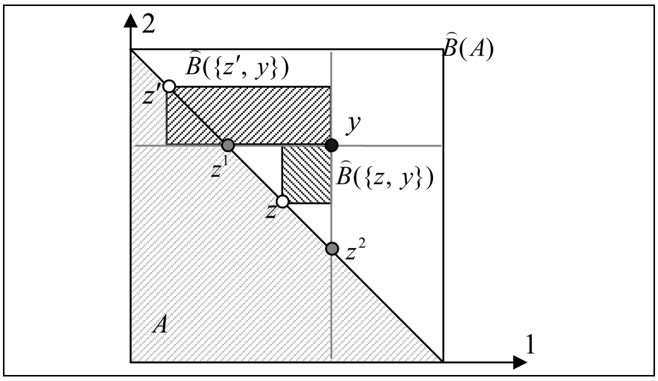

Рис. 2. Определение положения недопустимой альтернативы

Для описания взаимного положения двух альтернатив $y, z \in \widehat{B}(A)$ перейдем от множеств $M^+(y, z) = \{k \in M | z_k > y_k\}$ и $M^-(y, z) = \{k \in M | z_k < y_k\}$ к вектору *направления* $d(y, z) = \{d_1(y, z), ..., d_m(y, z)\}$, $d(y, z) \in 3^M$, где $d_k(y, z) = l$, если $k \in M^+(y, z)$, $d_k(y, z) = r$, если $k \in M^-(y, z)$, $d_k = 0$, если $k \notin M^+(y, z) \cup M^-(y, z)$. Определим положение нереализуемой альтернативы $y \in \widehat{B}(A) \backslash A$ относительно выпуклого множества A следующим образом. Зададим для произвольной недопустимой альтернативы $y \in \widehat{B}(A) \backslash A$ множество *ближайших допустимых* альтернатив $clA(y) = \{z \in A\colon \widehat{B}(\{z, y\}) \cap A = z\}$ (см. рис. 2 — $clA(y) = [z^1, z^2]$, $z' \notin clA(y)$). Очевидно, что $clA(y) \subseteq clA$. Данное множество тесно связанно с понятием решающего множества, используемого для проверки свойства пересечения для A в y. Например, на рис. 2 $\widehat{S}(y) = \{z^1, z^2\}$, т. е. альтернативы из решающего множества для $y \in \widehat{B}(A) \backslash A$ являются «вершинами» $clA(y)$.

Тогда можно сформулировать

Определение 4. Альтернатива $y \in \widehat{B}(A) \backslash A$ расположена *левее (правее)* относительно множества A по критерию $k \in M - A >_k (<_k) y$, если $\forall z \in clA(y)$, $k \notin M^{-(+)}(y, z)$ и $\exists z' \in clA(y)$ такое, что $k \in M^{+(-)}(y, z)$. ♦

Определение 4 по своей сути является аналогом определения положения двух альтернатив относительно друг друга по отдельному критерию. Иллюстрацией этого определения служит рис. 2 для $\mathfrak{R}^2$ (множество допустимых альтернатив A взято из примера 1). Альтернатива $y \in \widehat{B}(A) \backslash A$ расположена правее относительно A по обоим критериям, так как для $\forall z \in [z^1, z^2]$ $M^+(y, z) = \varnothing$, и $\forall z \in (z^1, z^2)$ $M^-(y, z) = \{1, 2\}$.

Обозначим по аналогии с $M^{+(-)}(y, z)$ множество критериев, по которым недопустимая альтернатива расположена левее множества — $M^+(y, A) = \{k \in M | A >_k y\}$ и правее — $M^-(y, A) = \{k \in M | A <_k y\}$. Может оказаться, что найдется критерий, быть может, не один, $k' \in M$ такой что $k' \notin M^+(y,A) \cup M^-(y,A)$. Очевидно, что если множество A выпукло, то $M^+(y, A) \cap M^-(y, A) = \varnothing$.

Соответственно, можно определить вектор направления $d(y, A) = \{d_1, ..., d_m\}$, $d(y, A) \in 3^M$, где $d_k(y, A) = l$, если $k \in M^+(y, A)$, $d_k(y, A) = r$, если $k \in M^-(y, A)$, $d_k = 0$, если $k \notin M^+(y, A) \cup M^-(y, A)$. Если $\exists k \in M^+(y, A) \cup M^-(y, A)$, то число векторов направлений удваивается — всего положение недопустимой альтернативы относительно A описывается 2^g векторами направлений, где $g = \#(M^+(y, A) \cup M^-(y, A))$. Если множество A выпукло, то вектор направления один. Кроме того, очевидно, что для любой допустимой альтернативы $d_k = 0$ для $\forall k \in M$, т. е. $\forall z \in A$ $d(z, A) = \{0, ..., 0\}$.

Начиная с этого момента все изложение будет осуществляться для выпуклых множеств допустимых альтернатив, поэтому считаем, что положение недопустимой альтернативы относительно множества A определяется однозначно.

Для произвольной недопустимой альтернативы $y \in \widehat{B}(A) \backslash A$ определим *противоположный многомерный прямоугольник относительно множества* A:

$$\breve{B}(\{y, A\}) = \left(\prod_{k \in M^+(y, A)} [\min A_k, y_k]\right) \times \left(\prod_{k \in M^-(y, A)} [y_k, \max A_k]\right).$$

На рис. 3 приведен пример данного прямоугольника. Определим, что все недопустимые

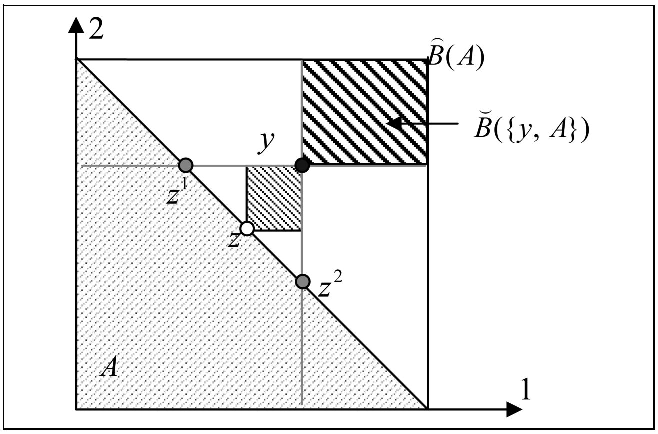

Рис. 3. Противоположный многомерный прямоугольник

альтернативы $y' \in \breve{B}(\{y, A\})$ *расположены дальше от* A, чем y. Очевидно, что для всех $y' \in \breve{B}(\{y, A\})$ $d(y', A) = d(y, A)$. Аналогично, все недопустимые альтернативы $y'' \in \widehat{B}(A)\backslash A$, такие, что $\exists z \in clA(y)$ и $y'' \in \widehat{B}(y, z)$ *расположены ближе к* A, чем y. Для этих альтернатив также верно, что $d(y'', A) = d(y, A)$.

Можно доказать, что если требования, необходимые для обладания ССВК свойством пересечения выполнены для какой-либо альтернативы $y \in \widehat{B}(A)\backslash A$, то они также выполнены для всех недопустимых альтернатив, расположенных дальше от множества A, чем альтернатива y:

Лемма 1. *Пусть задано ССВК* $W = \{W_k\}_{k=1}^{m}$, *определенное на множестве* $\widehat{B}(A)$ *и обладающее свойством пересечения для множества* A *в альтернативе* $y \in \widehat{B}(A)\backslash A$. *Тогда данное ССВК обладает свойством пересечения для* A *в любой недопустимой альтернативе* $y' \in \breve{B}(\{y, A\})$. ♦

Доказательства данной леммы и всех дальнейших утверждений вынесены в приложение.

Следствие леммы 1. *Пусть* $\exists y \in \widehat{B}(A)\backslash A$ *такая, что ССВК* $W = \{W_k\}_{k=1}^{m}$, *определенное на множестве* $\widehat{B}(A)$, *не обладает свойством пересечения для* A *в* y. *Тогда это ССВК не обладает свойством пересечения для множества* A *в любой недопустимой альтернативе* y', *расположенной ближе к* A, *чем* y. ♦

Лемма 1 и ее следствие показывают «монотонность» свойства пересечения и позволяет существенно облегчить проверку наличия свойства пересечения, так как достаточно проверять недопустимые альтернативы $y \in \widehat{B}(A)\backslash A$, лежащие как можно «ближе» к clA. Но, в силу открытости множества $\widehat{B}(A)\backslash A$, решить эту задачу достаточно трудно. Покажем, что возможно дальнейшее упрощение алгоритма проверки наличия свойства пересечения.

3. ПУСТЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ МЕДИАННЫХ СХЕМ

Следующим этапом в построении конструктивного алгоритма проверки наличия свойства пересечения для множества A у ССВК $W = \{W_k\}_{k=1}^{m}$, определенном на множестве $\widehat{B}(A)$, будет формулировка свойств, которым оно наделяет все альтернативы из $\widehat{B}(A)$. Эти свойства определяются на $\widehat{B}(A)$ и являются критичными для проверки наличия свойства пересечения у $W = \{W_k\}_{k=1}^{m}$ для любого A', такого, что $\widehat{B}(A') = \widehat{B}(A)$.

Определение 5. Пусть задано ССВК $W = \{W_k\}_{k=1}^{m}$, определенное на $\widehat{B}(A)$. Подмножества критериев M_r, $M_l \subseteq M$, $M_r \cap M_l = \varnothing$ определяют для альтернативы $y \in \widehat{B}(A)$ *пустое направление* $\{M_r, M_l\}_y$, если найдется такой набор выбирающих коалиций по всем критериям, что их пересечение пусто — т. е. $\forall k \in M_r \exists r_k(y) \in R_k(y)$ и $\forall k \in M_l\ \exists l_k(y) \in L_k^*(y)$ такие, что

$$\left[\bigcap_{k \in M_l} l_k(y)\right] \cap \left[\bigcap_{k \in M_r} r_k(y)\right]. ♦$$

Пустое направление находится «правее» по всем критериям из множества M_r и «левее» по критериям из M_l. Альтернативным описанием пустых направлений будет запись $d(y) = \{d_1(y), ..., d_m(y)\}$, $d(y) \in 3^M/\varnothing$, где $d_k(y) = r$, если $k \in M_r$, $d_k(y) = l$, если $k \in M_l$, $d_k(y) = 0$, если $k \notin M_l \cup M_r$.

Легко заметить, что пустое направление означает, что для альтернативы $y \in \widehat{B}(A)$ не выполняется условие (4), если будет проверяться именно эта комбинация критериев и выбирающих коалиций по ним. Качественно, смысл пустого направления очень простой и важный — если для множества A существует недопустимая альтернатива $y \in \widehat{B}(A)\backslash A$, лежащая в своем пустом направлении относительно множества A: $d(y) = d(y, A)$, то ССВК $W = \{W_k\}_{k=1}^{m}$ не обладает свойством пересечения для A в y.

Для любой альтернативы может существовать не одно пустое направление, поэтому определим множество пустых направлений $D^0(y) = \{d(y)\}$. Справедлива следующая теорема, позволяющая проверять наличие свойства пересечения через пустые направления:

Теорема 1. Семейство систем выбирающих коалиций $W = \{W_k\}_{k=1}^{m}$, определенное на множеств $\widehat{B}(A)$, обладает свойством пересечения для A, тогда и только тогда, когда $\forall y \in \widehat{B}(A)\backslash A$ верно, что $d(y, A) \notin D^0(y)$. ♦

Рис. 4 иллюстрирует проверку свойства пересечения в терминах пустых направлений. Если направление «правее» по обоим критериям $d = (r, r)$ является пустым для альтернативы $y \in \widehat{B}(A)\backslash A$, то ССВК, которым было определено данное пустое направление, не обладает свойством пересечения для множества A. Для ССВК из примера 1 (случай трех экспертов) множество альтернатив, для которого направление (r, r) является пустым, множество $\widehat{B}_{rr}(A)$ изображено на рисунке серым цветом.

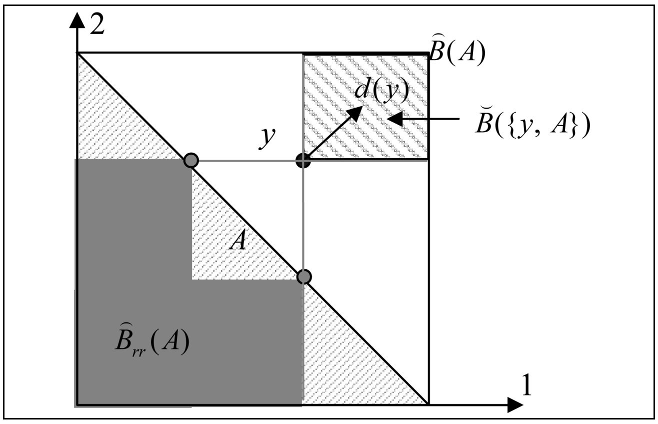

Рис. 4. К проверке свойства пересечения пустых направлений в терминах

Пустые направления для альтернатив обладают свойством, аналогичным монотонности свойства пересечения — если направление d пустое для какой-либо альтернативы $y \in \widehat{B}(A)$, то оно также пустое для всех других альтернатив $\forall z \in \widehat{B}(A)$ таких, что альтернатива y лежит в этом направлении относительно них: $d(y, z) = d$.

Лемма 2. Пусть вектор $d \in 3^M \backslash \varnothing$ задает пустое направление для альтернативы $y \in \widehat{B}(A)$ — $d \in D^0(y)$. Тогда для $\forall z \in \widehat{B}(A)$, таких что $d(y, z) = d$ данный вектор также задает пустое направление: $d \in D^0(z)$. ♦

Из леммы 2 следует, что $D^0(y) \subseteq D^0(z)$.

Если направление (r, r) — (см. рис. 4) — пустое для альтернативы y, то для любой альтернативы, расположенной левее по обоим критериям от y (ближе к A), оно также пустое.

Опираясь на этот результат, можно определить понятие *критичных* альтернатив для каждого из пустых направлений.

Определение 6. Альтернатива $y \in \widehat{B}(A)$ является критичной для пустого направления $d \in 3^M \backslash \varnothing$, если $\forall z \in \widehat{B}(A)$, таких что $d(z, y) = d$, верно $d \notin D^0(z)$. ♦

Другими словами, альтернатива y является критичной для своего пустого направления, если для любой альтернативы, лежащей в этом направлении от y, оно не пустое. Если альтернатива y (см. рис. 4) является критичной для пустого направления (r, r), то для всех альтернатив $z \in \widehat{B}(\{y, A\})$, расположенных дальше от A, чем y), данное направление не пустое. Определим множество критичных альтернатив для произвольного пустого направления d:

$$Emp_d \widehat{B}(A) = \{y \in \widehat{B}(A)\colon d \in D^0(y),\ \forall z \in \widehat{B}(A),\ d = d(z, y) \Rightarrow d \notin D^0(z)\}.$$

По сути, множество критичных альтернатив $Emp_d \widehat{B}(A)$ является граничной поверхностью для всего подмножества альтернатив из множества $\widehat{B}(A)$, для которых направление d пустое: $Emp_d \widehat{B}(A) = cl\{y \in \widehat{B}(A)\colon d \in D^0(y)\} \backslash cl \widehat{B}(A)$. На рис. 5 жирной линией выделено множество $Emp_{(r,r)} \widehat{B}(A)$ критичных альтернатив для направления (r, r) для ССВК из примера 1.

Отметим следующее достаточно очевидное, но важное свойство пустых направлений — их «расширяемость» по критериям.

Лемма 3. Пусть существует пустое направление $d(y)$ для альтернативы $y \in \widehat{B}(A)$, такое что $\exists M_0 \subset M$, $\forall k \in M_0$ $d_k(y) = 0$. *Тогда, пустыми являются все направления* $d'(y) \neq d(y)$ *такие что* $\forall k \in M \backslash M_0$ $d'_k(y) = d_k(y)$. ♦

Пустые направления d(y), для которых $\forall k \in M$ $d_k(y) \neq 0$, будем называть *полноразмерными пустыми направлениями* и обозначим множество полноразмерных пустых направлений как $Df^0(y) \subseteq D^0(y)$. Результат леммы 3 значителен по следующей причине. В терминах определения 5 существует $3^M \backslash \varnothing$ возможных пустых направлений относительно практически любой альтернативы $y \in \widehat{B}(A)$. В то время как полноразмерных пустых направлений относительно той же альтернативы может существовать $2^M \backslash \varnothing$, и для проверки свойства пересечения достаточно исследовать только их.

Леммы 2 и 3, вкупе с понятием пустого направления, позволяют сформулировать основной результат данной статьи.

Теорема 2. Семейство систем выбирающих коалиций $W = \{W_k\}_{k=1}^m$, определенное на множестве $\widehat{B}(A)$, обладает свойством пересечения для множес-

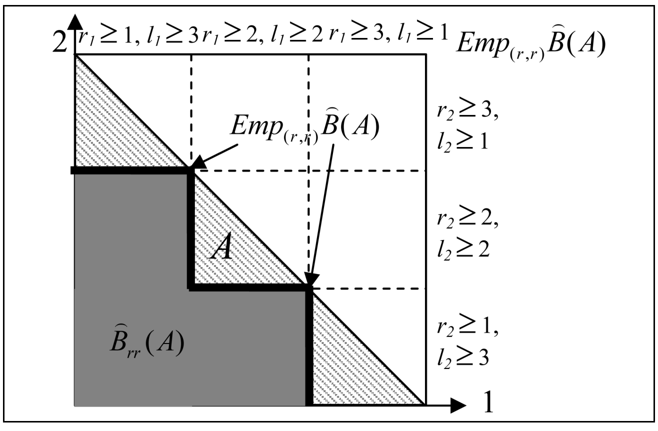

Рис. 5. Множество критичных альтернатив

тва A тогда и только тогда, когда для любого вектора направлений $d \in 2^M \backslash \varnothing$, такого что $\exists z \in \widehat{B}(A) \backslash A$, $d(z, A) = d$, верно, что для $\forall y \in Emp_d \widehat{B}(A)$ $d(y, A) \notin D^0(y)$.

Теорема 2 дает конструктивный способ проверки наличия свойства пересечения у определенной на многомерном прямоугольнике ССВК для произвольных множеств допустимых результатов выбора. Отметим, что перспективным представляется исследование множеств критичных альтернатив для дальнейшего упрощения алгоритма проверки свойства пересечения.

Алгоритм, позволяющий проверить ССВК на обладание свойством пересечения для некоторого множества допустимых альтернатив, выглядит следующим образом.

1. Для множества допустимых альтернатив A определяется минимальный многомерный прямоугольник $\widehat{B}(A)$, содержащий это множество.

2. Определится множество направлений проверки $D(A)$: $d \in 3^M \backslash \varnothing | \ \exists y \in \widehat{B}(A) \backslash A$: $d(y, A) = d$.

3. Для каждого направления $d \in D(A)$:

а) определяется множество критичных альтернатив $Emp_d \widehat{B}(A)$;

б) проверяется, существуют ли недопустимые альтернативы, в которых ССВК не обладает свойством пересечения для A, т. е. $y \in \widehat{B}(A) \backslash A \cap \cap Emp_d \widehat{B}(A)$: $d(y, A) = d$.

Если, в соответствии с данным алгоритмом, найдена хотя бы одна такая недопустимая альтернатива, то исследуемая ССВК не обладает свойством пересечения для множества A. Если таких альтернатив не найдено, то ССВК обладает свойством пересечения для A. Следовательно, прямой неманипулируемый механизм, порождаемый исследуемой ССВК реализуем на данном множестве допустимых альтернатив A.

4. ПРИМЕНЕНИЕ ПУСТЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ ПРОВЕРКИ СВОЙСТВА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ

Проиллюстрируем проверку наличия свойства пересечения у ССВК предложенным алгоритмом.

Пример 2. Рассмотрим ССВК, порождающую прямой неманипулируемый механизм (2), эквивалентный механизму усреднения по каждому критерию (см. пример 1) для случая двух критериев и трех агентов:

$$h_k(\tau_k) = \max\{z_k \in [0, 1] | \ \# \{i \in \{1, 2, 3\} | \tau_k^i \geqslant z_k\} \geqslant nz_k\}, \quad k \in \{1, 2\}.$$

Проверим наличие свойства пересечения у этой ССВК для множества допустимых альтернатив A, моделирующего бюджетное ограничение $A = \{x \in \Re^2 \ |x_1 + x_2 \leqslant 1, x_1, x_2 \geqslant 0|\}$. На рис. 5 изображены ССВК и множество A. Все недопустимые альтернативы из множества $\widehat{B}(A) \backslash A$ в данном примере лежат в направлении (r, r) относительно множества A. Поэтому достаточно исследовать только множество критичных альтернатив для данной ССВК для направления (r, r) — $Emp_{(r,r)} \widehat{B}(A)$, которое также изображено на рис. 5. Видно, что $Emp_{(r,r)} \widehat{B}(A) \subseteq A$, следовательно, любая альтернатива из множества $Emp_{(r,r)} \widehat{B}(A)$ не лежит в направлении (r, r) от множества допустимых альтернатив A. Поэтому по теореме 2 ССВК, порождающая прямой неманипулируемый механизм, эквивалентный механизму усреднения по двум критериям для трех экспертов:

$$x = f(s): \forall j \in \{1, 2\} \ x_j = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} s_j^i,$$

обладает свойством пересечения для множества $A = \{x \in \Re^2 \ |x_1 + x_2 \leqslant 1, x_1, x_2 \geqslant 0|\}$. ♦

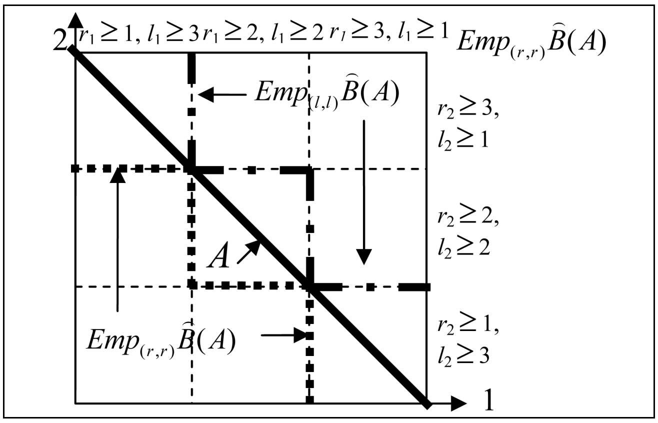

Рис. 6. Множество критичных альтернатив для балансового ограничения

Пример 3. Проверим, обладает ли ССВК из примера 2 свойством пересечения для множества допустимых альтернатив A, моделирующего «балансовое» ограничение — $A = \{x \in \Re^2 \ |x_1 + x_2 = 1, x_1, x_2 \geqslant 0|\}$. На рис. 6 изображены ССВК и множество A (жирная линия).

Все недопустимые альтернативы из множества $\widehat{B}(A) \backslash A$ в данном примере лежат в направлениях (r, r) и (l, l) относительно множества A. Поэтому достаточно исследовать только множества критичных альтернатив для данной ССВК для данных направлений — $Emp_{(r,r)} \widehat{B}(A)$, которое изображено жирной пунктирной линией (см. рис. 6) и $Emp_{(l,l)} \widehat{B}(A)$ — жирная штрихпунктирная линия. В данном примере $Emp_{(r,r)} \widehat{B}(A) \not\subset A$ и $Emp_{(l,l)} \widehat{B}(A) \not\subset A$, но любая альтернатива из множества $Emp_{(r,r)} \widehat{B}(A)$ не лежит в направлении (r, r) допустимых альтернатив A и любая альтернатива из $Emp_{(l,l)} \widehat{B}(A)$ не лежит в направлении (l, l) от множества допустимых альтернатив *A*. Следовательно, по теореме 2, ССВК, прямой неманипулируемый механизм, эквивалентный механизму усреднения по двум критериям для трех экспертов:

$$x = f(s)\colon \forall j \in \{1, 2\}\ x_j = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} s_j^i,$$

обладает свойством пересечения для множества $A = \{x \in \Re^2\ |x_1 + x_2 = 1,\ x_1,\ x_2 \geqslant 0|\}$. ♦

Пример 4. Покажем, как предложенный алгоритм показывает, что ССВК не обладает свойством пересечения для некоторого множества допустимых альтернатив. Для этого рассмотрим ССВК, порождающую прямой неманипулируемый механизм, эквивалентный механизму усреднения по каждому критерию (см. пример 1) для случая трех критериев и трех агентов:

$$h_k(\tau_k) = \max\{z_k \in [0,1] | \#\{i \in \{1, 2, 3\} | \tau_k^i \geqslant z_k\} \geqslant nz_k\},\quad k \in \{1, 2, 3\}. \tag{5}$$

Проверим наличие свойства пересечения у этой ССВК для множества допустимых альтернатив *A*, моделирующего бюджетное ограничение

$$A = \{x \in \Re^3\ |x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 1,\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0|\}.$$

По аналогии с примером 2, все недопустимые альтернативы из множества $\widehat{B}(A) \backslash A$ лежат в направлении (*r*, *r*, *r*) относительно множества А. На рис. 7 изображены ССВК, множество *A* (заштрихованная область) и $Emp_{(r,r,r)}\widehat{B}(A)$ (затемненная область).

Недопустимая альтернатива $y = (2/3,\ 1/3,\ 1/3)$, изображенная белым кружком на рис. 7 принадлежит множеству $Emp_{(r,r,r)}\widehat{B}(A)$. Следовательно, по теореме 2, ССВК, порождающая прямой неманипулируемый механизм, эквивалентный механизму усреднения по трем критериям для трех экспертов:

$$x = f(s)\colon \forall j \in \{1, 2, 3\}\ x_j = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} s_j^i,$$

не обладает свойством пересечения для $A = \{x \in \Re^3\ |x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0|\}$.

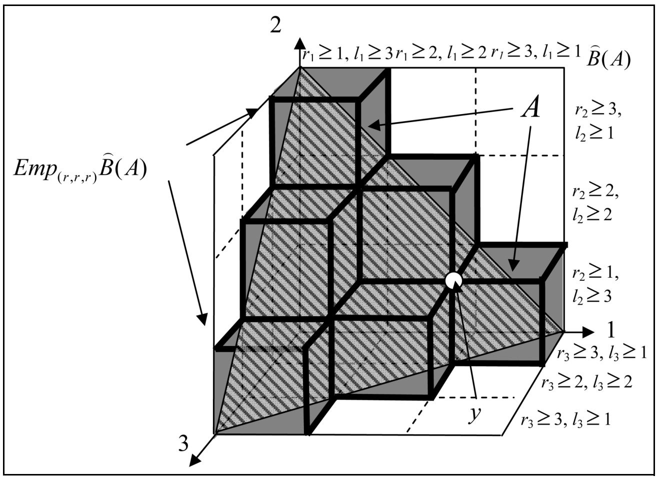

Рис. 7. Пример для случая трех критериев

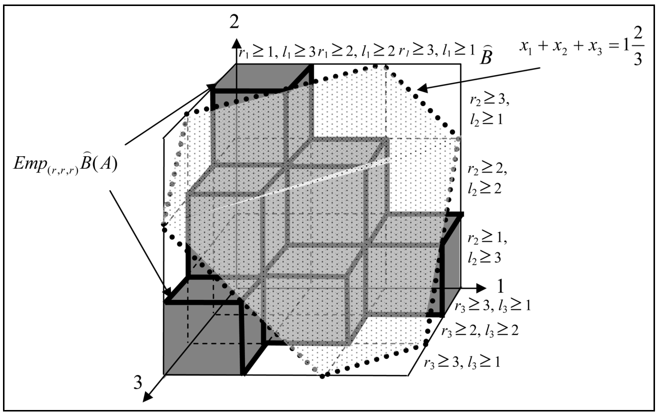

Рис. 8. Определение допустимых бюджетных ограничений

Действительно, возьмем трех агентов со следующими точками пиков: $\tau^1 = (2/3,\ 0,\ 1/3)$, $\tau^2 = (1,\ 0,\ 0)$, $\tau^3 = (0,\ 1,\ 0)$. Очевидно, что $\forall i \in \{1, 2, 3\}\ \tau^i \in A$. Из выражения (5) получаем, что результат выбора по критерию 1 $h_1(2/3,\ 1,\ 0) = 2/3$, по критерию 2 $h_2(0,\ 0,\ 1) = 1/3$, по критерию 3 $h_2(1/3,\ 0,\ 0) = 1/3$, т. е. результатом выбора будет недопустимая альтернатива $y = (2/3,\ 1/3,\ 1/3)$. ♦

На этом же примере покажем, как полученные результаты могут быть применены для (*r*, *r*) множества допустимых альтернатив, для которого заданная ССВК обладает свойством пересечения. Определим, для каких «бюджетных» ограничений $A = \{x \in \Re^3\ |x_1 + x_2 + x_3 \leqslant C,\ x_1,\ x_2,\ x_3 \in [0,\ 1]|\}$ прямой неманипулируемый механизм (5) реализуем. Легко видеть, что при $C \geqslant 1\frac{2}{3}$ любая альтернатива из множества $Emp_{(r,r,r)}\widehat{B}(A)$ не лежит в направлении (*r*, *r*) от множества допустимых альтернатив *A* — (рис. 8); т. е. ССВК, порождающая прямой механизм (5), обладает свойством пересечения для множества

$$A = \{x \in \Re^3\ |x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 1\frac{2}{3},\ x_1,\ x_2,\ x_3 \in [0,\ 1]|\}.$$

Если рассмотреть данный пример как задачу распределения ресурсов между тремя проектами на основании сообщений трех экспертов, то это будет означать, что при применении прямого неманипулируемого механизма (5) из суммарного бюджета *C* на каждый проект в отдельности можно выделять не более $\frac{3}{5}C$ средств.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показана возможность упрощения проверки свойства пересечения для обобщенных медианных схем. Предложен алгоритм, позволяющий для произвольной обобщенной медианной схемы определить — для каких множеств допустимых результатов выбора эта схема удовлетворяет свойству пересечения, а для каких нет. К недостатку алгоритма следует отнести трудоемкость построения множеств критичных альтернатив. В дальнейшем будет предложено развитие данного алгоритма, основанное на том факте, что пустые направления для альтернатив из минимального многомерного прямоугольника, в который вписывается множество допустимых результатов выбора, изменяются дискретно — семейство систем выбирающих коалиций порождает разбиение данного прямоугольника на «блоки», также представляющие собой многомерные прямоугольники. Для проверки свойства пересечения у медианной схемы достаточно проверять по одной недопустимой альтернативе из каждого такого блока, через которые проходит граница множества допустимых результатов выбора.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Из определения систем выбирающих коалиций следует их монотонность: для любого вектора y', $y'' \in \hat{B}(A)$ и произвольного $k \in M$ если $y'_k \geqslant y''_k$, то $R_k(y'_k) \subseteq R_k(y''_k)$, если $y'_k \leqslant y''_k$, то $L^*_k(y'_k) \subseteq L^*_k(y''_k)$. Также достаточно очевиден тот факт, что $\forall y' \in \breve{B}(\{y, A\})$ верно $M^+(\breve{y}, A) = M^+(y, A)$ и $M^-(\breve{y}, A) = M^-(y, A)$.

Из «монотонности» семейств систем выбирающих коалиций следует, что (4) верно также для $\forall \breve{y} \in \breve{B}(y, A)$, так как множества M^+ и M^- остаются неизменны. ♦

Доказательство теоремы 1. Пусть ССВК $W = \{W_k\}_{k=1}^m$ обладает свойством пересечения для A. Тогда $\forall y \in \hat{B}(A)\backslash A$ она обладает свойством пересечения для A в y. Следовательно, из определения пустого направления, $\forall y \in \hat{B}(A)\backslash A$ $d(y, A) \notin D^0(y)$, т. е. любая недопустимая альтернатива не лежит в своем пустом направлении относительно множества A.

Пусть $\forall y \in \hat{B}(A)\backslash A$ верно, что $d(y, A) \notin D^0(y)$, но ССВК $W = \{W_k\}_{k=1}^m$ не обладает свойством пересечения. Это значит, что $\exists y \in \hat{B}(A)\backslash A$ такая, что для нее не выполняется условие (4); т. е. $d(y, A) \in D^0(y)$. Получили противоречие. ♦

Доказательство леммы 2. Из определения систем выбирающих коалиций следует их монотонность: для любых альтернатив y', $y'' \in \hat{B}(A)$ и произвольного $k \in M$ если $y'_k \geqslant y''_k$, то $R_k(y'_k) \subseteq R_k(y''_k)$, если $y'_k \leqslant y''_k$, то $L^*_k(y'_k) \subseteq L^*_k(y''_k)$. Следовательно, для $\forall k \in M^-(y, z)$ $R_k(y_k) \subseteq R_k(z_k)$ и $\forall k \in M^+(y, z)$ $L^*_k(y_k) \subseteq$ $\subseteq L^*_k(z_k)$. Следовательно, для выбирающих коалиций для альтернативы z таких, что $\forall k \in M_r$ $r_k(z) = r_k(y) \in R_k(z)$ и $\forall k \in M_l$ $l_k(z) = l_k(y) \in L^*_k(z)$ верно

$$\left[\bigcap_{k \in M_l} l_k(z)\right] \cap \left[\bigcap_{k \in M_r} r_k(z)\right]. \ ♦$$

Доказательство леммы 3. Пусть направление $d(y)$ описывается множествами M_r, $M_l \subseteq M$, а направление $d'(y)$ — M'_r, $M'_l \subseteq M$. Тогда $M_r \subseteq M'_r$ и $M_l \subseteq M'_l$. Следовательно, для направления $d'(y)$ верно:

$$\left[\bigcap_{k \in M'_l} l_k(y)\right] \cap \left[\bigcap_{k \in M'_r} r_k(y)\right] =$$

$$= \left[\bigcap_{k \in M'_l \backslash M_l} l_k(y)\right] \cap \left[\bigcap_{k \in M'_r \backslash M_r} r_k(y)\right]. \ ♦$$

Доказательство теоремы 2. Необходимость следует очевидным образом из теоремы 1.

Достаточность. Пусть для $\forall d \in 2^M/\varnothing$ такая, что $\exists y \in \hat{B}(A)\backslash A$, $d(y, A) = d$ верно, что $\forall y \in Emp_d\hat{B}(A)$ $d(y, A) \neq d$. Предположим, что $\exists \tilde{d} \in 2^M/\varnothing$ и $\exists \tilde{y} \in \hat{B}(A)\backslash A$ такая, что $d(\tilde{y}, A) = \tilde{d}$ и $\tilde{d} \in D^0(\tilde{y})$; т. е. ССВК не обладает свойством пересечения для A в $\tilde{y}$. Из определения 6 следует, что $\forall y' \in Emp_{\tilde{d}}\hat{B}(A)$ такая, что $d(\tilde{y}, y') = \tilde{d}$; т. е. альтернатива $\tilde{y}$ лежит ближе к множеству A, чем альтернатива y'; т. е. $d(y', A) = \tilde{d}$. Получили противоречие. ♦

ЛИТЕРАТУРА

1. *Большие* системы: моделирование организационных механизмов / В.Н. Бурков, Б. Данев, А.К. Еналеев и др.— М.: Наука, 1989. — 245 с.
2. *Новиков Д.А., Петраков С.Н.* Курс теории активных систем. — М.: СИНТЕГ, 1999. — 108 с.
3. *Moulin H.* On strategy-proofness and single-peakedness // Public Choice. — 1980. — Vol. 35. — P. 437—455.
4. *Бурков В.Н., Искаков М.Б., Коргин Н.А.* Применение обобщенных медианных схем для построения неманипулируемого механизма многокритериальной активной экспертизы // Проблемы управления. — 2008. — № 4. — С. 38—47.
5. *Border K., Jordan J.* Straightforward elections, unanimity and phantom voters // Review of Economic Studies. — 1983. — Vol. 50. — P. 153 — 170.
6. *Barbera S., Masso J., Serizawa S.* Strategy-proof voting on compact ranges // Games and Behavior. — 1998. — Vol. 25. — P. 272—291.
7. *Barbera S., Masso J., Neme A.* Voting under Constraints // J. Econ. Theory. — 1997. — Vol. 76. — P. 298—321.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Коргин Николай Андреевич — канд. техн. наук,
ст. науч. сотрудник, Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН,
☎(495) 335-60-37, ✉ nkorgin@ipu.ru.