УДК 519.714.3

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ МЕДИАННЫХ СХЕМ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ НЕМАНИПУЛИРУЕМЫХ МЕХАНИЗМОВ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ АКТИВНОЙ ЭКСПЕРТИЗЫ

В.Н. Бурков, М.Б. Искаков, Н.А. Коргин

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

Механизмы многокритериальной активной экспертизы представлены в виде обобщенных медианных схем принятия коллективных решений в терминах семейств систем правых и левых коалиций, что позволило применить результаты теории коллективного выбора в области построения неманипулируемых механизмов.

ВВЕДЕНИЕ

Многие управленческие решения в современных условиях принимаются на основании результатов экспертизы. Нередко складываются ситуации, когда эксперты заинтересованы в результате экспертизы, что создает предпосылки для так называемого оппортунистического поведения с их стороны — искажения сообщаемой информации с целью влияния на результат в собственных интересах. В теории организационных систем подобные ситуации моделируются в рамках активной экспертизы. Механизмы активной экспертизы (правила определения итоговой оценки на основании заявок экспертов) называются неманипулируемыми, если они побуждают экспертов честно сообщать свое мнение.

Задачи экспертизы, при решении которых эксперты должны производить оценку по нескольким критериями одновременно, называются многокритериальными задачами экспертизы. Если эксперты, участвующие в подобной экспертизе, заинтересованы в ее результатах, то это будет задача многокритериальной активной экспертизы. Построение многокритериальных неманипулируемых механизмов активной экспертизы представляется достаточно актуальной задачей, так как обеспечение объективности результатов экспертизы всегда крайне важно. Отдельную сложность в задачах экспертизы по многим критериям составляет наличие нетривиальной связи между значениями различных критериев — на диапазон возможных значений отдельно взятого критерия могут влиять значения остальных критериев. Наиболее простой пример многокритериальной экспертизы со связанными значениями критериев и поэтому применяемый в качестве иллюстрации в данной работе представляет собой задача распределения ресурсов, где каждый эксперт сообщает наилучшее с его точки зрения распределение ресурса между всеми потребителями. Другой пример — задача формирования бюджета или сметы на портфель проектов.

На данный момент задача построения неманипулируемого механизма активной экспертизы решена для однопиковых функций предпочтения экспертов и частных видов множества возможных сообщений (и наиболее предпочтительных с их точки зрения результатов экспертизы) экспертов:

отрезка (одномерного компакта) [1—3] — при моделировании экспертизы по одному критерию;

двумерного симплекса [4, 5] — при моделировании экспертизы по двум критериям, связанным балансовым ограничением[1];

многомерного прямоугольника (декартова произведения одномерных отрезков) [5] — при моделировании многокритериальной экспертизы с несвязанными критериями, когда множество возможных значений каждого отдельно взятого критерия не зависит от конкретных значений остальных критериев.

Для более сложных видов множества возможных заявок экспертов задача построения немани-

[1] Под балансовым ограничением подразумевается ограничение типа равенства, когда сумма значений оценок по всем критериям должна быть постоянной.

пулируемых механизмов активной экспертизы остается нерешенной.

Задача построения неманипулируемых механизмов активной экспертизы в значительной мере пересекается с задачами поиска неманипулируемых функций коллективного выбора в теории коллективного выбора [3], в частности, функций, определяющих наилучший с точки зрения общества уровень коллективного блага[2] [6—8]. Один из важных результатов теории коллективного выбора заключается в *медианной схеме* (median voter scheme) — методе построения неманипулируемых функций коллективного выбора, в котором к n реальным голосующим членам общества (агентам) добавляется $n - 1$ «фантомный» агент, каждый из которых имеет собственный предпочтительный уровень коллективного блага. И все агенты, реальные и фантомные, упорядочиваются по значению их предпочтительного уровня коллективного блага. Результирующий уровень коллективного блага определяется как значение, предпочтительное с точки зрения агента, который находится в середине списка (служит медианой полученного упорядочения). Причем, варьируя значения предпочтительного уровня коллективного блага фантомных агентов, можно обеспечить любое из допустимых результирующих значений между минимальным и максимальным предпочтительными уровнями блага реальных агентов. Изначально данный метод был получен в работе [8] для одномерного случая, когда значение результирующего уровня коллективного блага и предпочтения агентов принадлежат пространству $\Re^1$. Затем полученные результаты были расширены на $\Re^m$ [7], т. е. когда множеством возможных значений альтернатив (предпочтительного уровня коллективного блага каждого из агентов) и результата коллективного выбора являются точки m-мерного пространства. Неманипулируемые функции коллективного выбора в пространстве $\Re^m$ были представлены в виде *обобщенных медианных схем* — набора из m одномерных медианных схем. Наконец, полученный результат был расширен на случай, когда соответствующее множество имело вид ограниченного замкнутого подмножества в пространстве $\Re^m$ [6, 9]. Для этого была предложена альтернативная формулировка медианных схем в терминах так называемых систем правых или левых коалиций агентов и введено дополнительное свойство — *свойство пересечения*. Обладание обобщенной медианной схемой свойством пересечения является необходимым и достаточным условием того, что результат общественного выбора, полученный в рамках данной схемы, будет всегда принадлежать множеству возможных значений альтернатив. Соответственно, было показано, что функция коллективного выбора в некотором компактном подмножестве пространства $\Re^m$ неманипулируема тогда и только тогда, когда она представима в виде обобщенной медианной схемы, обладающей свойством пересечения.

Цель настоящей работы заключается в представлении механизмов многокритериальной активной экспертизы в виде обобщенных медианных схем с целью применения результатов теории коллективного выбора для построения неманипулируемых многокритериальных механизмов активной экспертизы.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ АКТИВНОЙ ЭКСПЕРТИЗЫ

В качестве примера многокритериальной активной экспертизы рассмотрим задачу распределения ресурса, в которой каждый агент (эксперт) сообщает не собственную заявку — сколько ресурсов (например, денежных) ему требуется для его проекта[3], а распределение ресурсов по всем проектам, наилучшее с его точки зрения. Число проектов может не совпадать с числом экспертов.

Приведем формальное описание данной задачи. Организатору экспертизы — центру (Ц) — необходимо распределить ресурс в количестве C между набором проектов $M = \{1, ..., m\}$. Результирующее распределение ресурсов $x = (x_1, ..., x_m)$ (x_j — ресурс, выделяемый на проект j) по проектам определяется на основании сообщений экспертов: $s^i = (s^i_1, ..., s^i_m)$ — сообщение эксперта i, $\forall i \in N$, $s^i \in A$, где $N = \{1, ..., n\}$ — множество экспертов; $A = \{x \in A \subset \Re^m | \sum_{j=1}^{m} x_j \leqslant C, x_j \geqslant 0, \forall j \in M\}$ — множество возможных значений результатов экспертизы, определяемое как неотрицательное подпространство m-мерного пространства действительных чисел $\Re^m$, ограничиваемое бюджетным ограничением C. В данной статье речь пойдет о любых компактных подмножествах пространства $\Re^m$. Однако в качестве примера, иллюстрирующего получаемые результаты, будет взято именно подобное множество.

Заинтересованность каждого эксперта в результате экспертизы отражается его многомерно однопиковой функцией предпочтения.

[2] Коллективное благо — благо, уровень которого влияет на полезность всех членов общества. Например, результат экспертизы в случае, когда все эксперты заинтересованы в нем, является коллективным благом для них.

[3] Под проектом мы будем понимать работы, в выполнении которых заинтересован данный эксперт.

Определение 1 [6]. Функция предпочтения $u^i(x)$: $\Re^m \to \Re$ является *многомерно однопиковой* на множестве $A \subseteq \Re^m$, если:

- существует единственная точка $\tau^i = \arg\max_{y \in A} u^i(y)$ — точка «пика» эксперта i, $\forall i \in N\ \tau^i \in A$;
- $\forall z, z' \in \Re^m\ [z' \in \widehat{B}(\{z, \tau^i\}), z' \neq z] \Rightarrow [u^i(z') > u(z)]$,

где $\widehat{B}(\{z, \tau^i\})$ — минимальный m-мерный прямоугольник, содержащий точки z и τ^i, определяемый следующим образом. Для произвольного множества $A \subseteq \Re^m$ обозначим через A_k проекцию данного множества на координатную ось $k \in M$, т. е. $A_k = \mathrm{Proj}_k(A)$. Нижнюю и верхнюю границы множества A обозначим $\min A_k$ и $\max A_k$ соответственно. Тогда минимальный m-мерный прямоугольник, содержащий множество $A \subseteq \Re^m$, определяется как

$$\widehat{B}(A) = \prod_{k \in M} [\min A_k, \max A_k]. \ \blacklozenge$$

В рамках рассматриваемой модели точка τ^i трактуется как наиболее предпочтительный результат экспертизы (распределение ресурсов по проектам) с точки зрения эксперта i.

Примером однопиковой функции полезности эксперта может служить функция от нормы разности точки пика и результата экспертизы:

$$u^i(x) = \mathrm{const} - \|\tau^i - x\|^{\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

или квадратичная сепарабельная функция:

$$u^i(x) = \mathrm{const} - \sum_{k = m} (\tau_k^i - x_k)^{2\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Организатор экспертизы (центр) определяет результаты экспертизы на основании сообщений экспертов по заранее объявленной процедуре (механизму) экспертизы $\pi(s)$: $\Re^{m \times n} \to \Re^m$, где:

$s^i = (s_1^i, ..., s_m^i)$ — сообщение эксперта i о распределении ресурса по всем проектам, причем $\forall i \in N\ s^i \in A$;

$s = (s^1, ..., s^m)$ — вектор сообщений экспертов, $s \in A^n$;

$s_j = (s_j^1, ..., s_j^n)$ — сообщения всех экспертов по j-му проекту.

Будем работать с механизмами активной экспертизы, удовлетворяющими следующим требованиям [1].

А.1. Функция $\pi(s)$ строго монотонна по всем переменным при $s \in A^n$.

А.2. Функция $\pi(s)$ непрерывна по всем переменным при $s \in A^n$.

А.3. Если обозначить $s^a = (a, ..., a)$, $a \in A$, то $\pi(s^a) = a$ (*условие единогласия*).

Примером механизма, удовлетворяющего требованиям А.1—А.3 является механизм пропорционального распределения ресурса:

$$x = \pi(s)\colon \forall j \in M\ x_j = \frac{1}{n} \sum_{i = 1}^{n} s_j^i. \qquad (1)$$

При применении данного механизма бюджет, выделяемый на каждый проект, будет определяться в результате усреднения сообщений всех экспертов по данному проекту. Отметим, что данный механизм является сепарабельным по критериям, т. е. в данном примере бюджет каждого проекта определяется независимо от бюджетов других проектов.

Определение 2. Механизм многокритериальной экспертизы $x = \pi(s)$ является *сепарабельным по критериям*, если $\forall k \in M\ x_k = \pi_k(s_k)$. ♦

Таким образом, модель многокритериальной активной экспертизы описывает выбор результирующего значения экспертизы из некоторого множества возможных значений A на основании сообщений экспертов (принадлежащих множеству A), заинтересованных в результате экспертизы (что отражается их однопиковой функцией полезности с точкой пика из множества A) по процедуре, отвечающей требованиям монотонности, непрерывности и единогласия.

Как было показано, например, в работе [1], применение подобных механизмов дает возможность экспертам манипулировать своими сообщениями, решающим задачу максимизации собственной полезности. Вследствие этого возникает игра экспертов, так как результат экспертизы зависит от всех сообщений. В зависимости от выбранной концепции равновесия, в игре экспертов сформируется вектор их равновесных сообщений[4] $s^*(\tau) \in A^n$, не обязательно совпадающий с точкой τ. В данной модели будем полагать, что равновесные сообщения определяются на основе концепции равновесия Нэша.

Мы еще не уточнили, как связано сообщение каждого эксперта с его точкой пика. Изначально, сообщение может быть произвольным, хотя мы и предположили, что область его допустимых значений совпадает с областью допустимых значений точек пиков экспертов и результата экспертизы — т. е. сообщение эксперта должно быть в тех же терминах, в каких определяется и результат экспертизы. Например, для задачи распределения ресурсов можно спросить у эксперта, сколько ресурсов

[4] Равновесное сообщение определяется на основании принятых в модели предположений о поведении игроков (экспертов) и концепции равновесия. Отметим, что такого сообщения может не быть вообще или их может быть несколько. Если равновесий несколько, то необходимо ввести правило отбора равновесий, позволяющее из любого множества равновесий выбирать единственное.

нужно выделить на каждый из проектов, в то время как вопрос о его точке пика должен будет иметь другой вид — какое распределение наилучшее с точки зрения эксперта? Подобный механизм называется *непрямым* [2]. Для каждого непрямого механизма можно предложить *соответствующий ему прямой механизм,* определив его как $h(\tau) = \pi(s^*(\tau))$, $\forall \tau \in A^n$. Если в соответствующем прямом механизме сообщение достоверной информации является равновесием в доминантных стратегиях, то такой механизм называется *эквивалентным прямым механизмом.*

Сформулировав математическую модель многокритериальной активной экспертизы, перейдем к постановке задачи построения неманипулируемого многокритериального механизма активной экспертизы.

2. НЕМАНИПУЛИРУЕМОСТЬ МЕХАНИЗМОВ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ АКТИВНОЙ ЭКСПЕРТИЗЫ: ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ

Прежде чем приступить к построению неманипулируемого механизма многокритериальной активной экспертизы, перечислим результаты, на которые мы будем опираться при решении данной задачи.

Первоначально, см. работу [1], для однокритериальной (одномерной) задачи активной экспертизы было доказано, что для любого механизма, удовлетворяющего требованиям А.1—А.3, существует эквивалентный прямой механизм. Соответствующая модель активной экспертизы описывается следующим образом. Пусть τ_i — точка пика i-го эксперта (его тип), $i \in N$ — множество всех экспертов, $\tau^i \in [d, D] \subset R^1$, $i \in N$, $-\infty < d < D < +\infty$. Экспертам известна процедура π: $[d, D]^n \to [d, D]$ определения результата экспертизы на основе их сообщений $s^i \in [d, D]$, $i \in N$: $x = \pi(s)$. Функции полезности экспертов $u(z)$ — однопиковые с точками пика τ^i, $i \in N$:

$$\forall z,\ z' \in [d, D] \cdot [z' \in (z, \tau^i),\ z' \ne z] \Rightarrow [u^i(z') > u(z)].$$

Тогда, если функция (процедура) выбора результатов экспертизы $\pi(s)$ удовлетворяет требованиям А.1—А.3, то для нее найдется эквивалентный прямой механизм $h_\pi(\tau)$, определяемый условием

$$x = \max_{i \in N} \min(s^i, w^{i-1}), \qquad (2)$$

где эксперты упорядочены в порядке возрастания точек пика, а $w^k = \pi(s(k))$, и $s(k)$ определяется следующим образом:

$$s(k) = \begin{cases} k \text{ первых экспертов сообщают } d, k = \overline{0, n}; \\ (n-k) \text{ последних экспертов сообщают } D. \end{cases}$$

Элементы убывающей последовательности $w^k = \pi(s(k))$ могут рассматриваться как точки пиков $(n + 1)$ фантомных агентов.

Например, для механизма $x = \pi(s)$: $x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s^i$ последовательность точек w_k разбивает отрезок $[d, D]$ на n равных отрезков:

$$w^k = (kD + (n - k)d)/n, \quad k = \overline{0, n}. \qquad (3)$$

Данный результат в значительной мере пересекается с результатами, полученными Э. Муленом [8], который доказал, что для задачи выбора уровня коллективного блага из упорядоченного множества A, в том числе, отрезка $\mathfrak{R}^1$, справедливо следующее утверждение.

Функция коллективного выбора на профиле[5] *однопиковых предпочтений над упорядоченным множеством неманипулируема тогда и только тогда, когда она является медианной схемой.*

Все медианные схемы строятся по следующему принципу. Каждой группе агентов $S \subset 2^N \backslash \varnothing$ ставится в соответствие некоторая точка $a_S \in A$ (точнее, фантомный агент с точкой пика a_S), а результат выбора определяется как

$$h(\tau) = \inf_{S \subset N}(\sup_{i \in S}(a_S, \tau^i)).$$

Нетрудно показать, что условие (2) может быть получено подобным образом. Однако медианные схемы просто описывают весь класс прямых неманипулируемых механизмов, не позволяя определить механизм, оптимальный по какому-либо критерию или соответствующий произвольному непрямому механизму коллективного выбора. В то же время в работе [1] решались задачи построения прямых неманипулируемых механизмов активной экспертизы, оптимальных по различным критериям, в частности, по критерию максимальной погрешности процедуры экспертизы $\Delta_\pi = \max_{\tau \in [d, D]^n} |h_\pi(\tau) - \pi(\tau)|$, где функция $h_\pi(\tau)$ определялась выражением (2).

Важным результатом, полученным Э. Муленом, был тот факт, что значение функции коллективного выбора, являющейся медианной схемой, зависит только от точек пика функций предпочтения агентов, т. е. результат *определяется по точкам пика*[6].

На основании результатов, полученных при решении описанной задачи однокритериальной активной экспертизы были предложены методы

[5] Под профилем предпочтений подразумевается вектор функций предпочтений агентов.

[6] «*tops-only*» в оригинале.

построения неманипулируемых механизмов активной экспертизы для случая двухкритериальной экспертизы, когда множество допустимых результатов экспертизы является двумерным симплексом $A = \{x \in A \subset \Re^2: x_1 + x_2 = \mathrm{const}\}$. Было показано [4], что подобные задачи экспертизы могут быть сведены к однокритериальным задачам.

Результаты, полученные Э. Муленом, были расширены К. Бордером и Д. Джорданом [7] на многомерные задачи коллективного выбора, когда множеством допустимых результатов выбора является пространство $\Re^m$, или декартово произведение отрезков из пространства $\Re^1$: $A = \prod_{k \in M} A_k$, $A_k = [d_k, D_k] \subset \Re^1$ — m-мерный (далее многомерный) прямоугольник. В работе [7] рассматривались так называемые звездообразные сепарабельные функции предпочтения агентов, обладающие одной точкой пика и определяемые следующим образом:

- существует единственная точка $\tau^i = \arg\max_{y \in A} u^i(y)$ — точка «пика» эксперта i, $\forall i \in N$, $\tau^i \in A$;
- $\forall z \in \Re^m$, $\forall \lambda \in (0, 1)$, $u^i(\tau^i) > u^i(\lambda\tau^i + (1 - \lambda)z) > u(z)$;
- $\forall k \in M$, $\forall z_k, z'_k, \tilde{z}_{-k}, \hat{z}_{-k}$ $[u^i(z'_k, \hat{z}_{-k}) > u(z_k, \hat{z}_{-k})] \Rightarrow [u^i(z'_k, \tilde{z}_{-k}) > u(z_k, \tilde{z}_{-k})]$.

При перечисленных допущениях было доказано, что

функция коллективного выбора на профиле звездообразных сепарабельных предпочтений над множеством $\Re^m$ неманипулируема тогда и только тогда, когда она представима в виде набора одномерных медианных схем.

Иными словами, многомерная задача коллективного выбора декомпозируется на набор одномерных, для каждой из которых подбирается своя медианная схема. Такой набор медианных схем получил название *обобщенной медианной схемы.* Причем результат коллективного выбора в каждой одномерной задаче определяется проекциями точек пика агентов на соответствующую ось. Формально, каждой коалиции агентов $S \subset 2^N \backslash \varnothing$ ставится в соответствие точка $a_S = (a_{1S}, ..., a_{mS}) \in A$ коллективного выбора, а результат выбора определяется как $x = (x_1, ..., x_m)$, где $x_k = \pi(\tau_k) = \inf_{S \subset N} (\sup_{i \in S} (a_{kS}, \tau^i_k))$, $\forall k \in M$.

Данный результат был использован в работе [5] для построения неманипулируемого механизма многокритериальной активной экспертизы для аналогичного вида множества допустимых значений результатов экспертизы — было показано, что подобные задачи многокритериальной экспертизы могут рассматриваться как набор задач однокритериальной экспертизы — по каждому критерию экспертиза может быть проведена независимо.

Однако остается открытым вопрос о том, как решить задачу построения неманипулируемых функций коллективного выбора для множества допустимых результатов выбора более сложного вида, чем многомерный прямоугольник.

В качестве примера рассмотрим задачу распределения бюджета между тремя проектами ($m = 3$) на основании заявок двух экспертов ($n = 2$) в рамках модели, описанной в § 1. Результат экспертизы определяется на основании функции усреднения заявок экспертов по каждому проекту, определяемой выражением (1). Множество допустимых результатов экспертизы A — единичный куб — $x_i \in [0, 1]$, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$. Точки пика функций предпочтения экспертов — (1, 0, 0) и (0, 1/2, 1/2). Легко получить, учитывая формулу (3), что результатом экспертизы будет точка (1/2, 1/2, 1/2). Однако если мы наложим бюджетное ограничение на распределяемый ресурс $x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 1$, то полученный нами ранее результат экспертизы не будет принадлежать множеству допустимых результатов экспертизы, так как бюджетное ограничение не будет выполнено. Иными словами, данный механизм не обладает *свойством реализуемости* — его применение не гарантирует, что полученный результат будет принадлежать множеству допустимых значений A даже при условии, что точки пиков всех экспертов принадлежат этому множеству.

Результаты К. Бордера и Д. Джордана [7] были расширены группой ученых под руководством С. Барберы, обзор результатов которой представлен в работах [6, 9], на более сложный вид множеств допустимых результатов коллективного выбора — произвольное компактное подмножество $\Re^m$, при условии, что функции предпочтения агентов многомерно однопиковые в смысле определения 1. Для этого была предложена альтернативная формулировка обобщенных медианных схем — в терминах *систем правых и левых коалиций.* Приведем необходимые определения.

Определение 3 [6]. Система правых (левых)[7] коалиций W определяет для каждой точки $z \in [d, D] \subset \Re^1$ набор коалиций $W(z)$ в соответствии со следующими требованиями.

1. Принцип суверенитета: для $\forall z \in (d, D]$ ($[d, D)$), $W(z) \neq \varnothing$, $\varnothing \notin W(z)$, и $W(d) = 2^N \backslash \varnothing$ ($W(D) = 2^N \backslash \varnothing$).

2. Монотонность коалиций: если $S \in W(z)$ и $S \subset S'$, то $S' \in W(z)$.

3. Монотонность результата: если $z' < (>)\ z$ и $S \in W(z)$, то $S \in W(z')$.

---

[7] В данном определении и далее в скобках идет запись соответствующего условия для системы левых коалиций.

4. Полунепрерывность сверху: для $\forall S \subseteq N$, для $\forall z \in [d, D]$ и для любой последовательности $\{z^t\} \subseteq [d, D]$ такой, что $\lim\limits_{t \to \infty} z^t = z$, верно $[\forall t,\ S \in W(z^t)] \Rightarrow [S \in W(z)]$. ♦

Иными словами, вводится функция $W(\cdot)$: $[d, D] \to 2^N \backslash \varnothing$, ставящая в соответствие каждой точке $z \in [d, D]$ некоторое подмножество множества всех непустых коалиций агентов $2^N \backslash \varnothing$. Для минимального многомерного прямоугольника, содержащего множество допустимых результатов выбора A, $\hat{B}(A) = \prod\limits_{k=1}^{m} A_k$, можно определить *семейство систем правых коалиций* R — набор $\{R_k\}_{k=1}^{m}$, где R_k является системой правых коалиций. Аналогичным образом можно определить *семейство систем левых коалиций* L — набор $\{L_k\}_{k=1}^{m}$. Используя данные понятия, вводится следующее формальное определение обобщенной медианной схемы.

Определение 4 [6]. Пусть задано множество допустимых результатов выбора A и семейство систем правых (левых) коалиций R (L) на множестве $\hat{B}(A)$. Тогда обобщенная медианная схема $x = h(\tau)$, порожденная совокупностью (A, R) (соответственно (A, L)), определяется следующим образом: для $\forall \tau \in A^n$ и любого $k \in M$

$$h_k(\tau_k) = \max\{z_k \in A_k | \{i \in N | \tau_k^i \geqslant z_k\} \in R_k(z_k)\},$$

$$(h_k(\tau_k) = \min\{z_k \in A_k | \{i \in N | \tau_k^i \leqslant z_k\} \in L_k(z_k)\}).\ ♦$$

Иными словами, в качестве результата экспертизы по каждому критерию выбирается максимальное (минимальное) значение $z_k \in A_k$, для которого эксперты, чьи точки пика лежат справа (слева) от данной точки, составляют коалицию, удовлетворяющую требованиям выбранной системы правых (левых) коалиций для данной точки. Связь между системами левых и правых коалиций, порождающими одну и ту же медианную схему (для одного критерия), определялась следующим образом: $L^*(z) = \{S \in 2^N | \forall z' > z,\ \forall S' \in R(z'),\ S \cap S' \neq \varnothing\}$, т. е. для любой точки $\forall z' > z$ найдется хотя бы один агент, входящий одновременно и в правую для z, и в левую для z' коалиции (и это верно для всех соответствующих правых и левых коалиций), удовлетворяющие требованиям соответствующих систем коалиций, порождающих один и тот же механизм.

Обобщенные медианные схемы определяются на множестве $\hat{B}(A)$, т. е. на m-мерном прямоугольнике. Поэтому любой прямой неманипулируемый механизм коллективного выбора, определенный в терминах системы правых или левых коалиций для произвольного m-мерного прямоугольника B, останется таковым для любого множества допустимых результатов выбора A, такого что $\hat{B}(A) = B$. Однако, как было показано ранее, не для всех A верно, что для $\forall \tau \in A^n$, $h(\tau) \in A$. Для проверки реализуемости прямого неманипулируемого механизма для порождающего его семейства систем правых коалиций $R = \{R_k\}_{k=1}^{m}$ и семейства систем левых коалиций $L^* = \{L_k^*\}_{k=1}^{m}$ было сформулировано следующее свойство пересечения.

Определение 5 [6]. Семейство систем правых коалиций $R = \{R_k\}_{k=1}^{m}$, определенное на множестве $\hat{B}(A)$, обладает *свойством пересечения* для A, если для $\forall y \in \hat{B}(A) \backslash A$ и любого конечного подмножества $\{z^1, ..., z^T\} \subset A$

$$\bigcap_{t=1}^{T} \left\{ \left[\bigcup_{k \in M^+(y, z^t)} l_k(y_k) \right] \cup \left[\bigcup_{k \in M^-(y, z^t)} r_k(y_k) \right] \right\} \neq \varnothing, \qquad (4)$$

для любой коалиции $r_k(y_k) \in R_k(y_k)$, где $k \in \bigcup\limits_{t=1}^{T} M^-(y, z^t)$ и любой коалиции $l_k(y_k) \in L_k^*(y_k)$, где $k \in \bigcup\limits_{t=1}^{T} M^+(y, z^t)$. ♦

Множества $M^+(y, z) = \{k \in M | z_k > y_k\}$ и $M^-(y, z) = \{k \in M | z_k < y_k\}$ определяют для любой пары векторов $y, z \in \hat{B}(A)$ набор координатных осей, для которых значение соответствующей компоненты вектора z строго больше y и наоборот.

Качественно, наличие свойства пересечения у семейства систем правых коалиций означает, что любая точка $y \in \hat{B}(A) \backslash A$ может быть выбрана в результате применения прямого неманипулируемого механизма только в том случае, если найдется хотя бы один агент, чья точка пика также не принадлежит множеству A. Если семейство систем правых коалиций обладает свойством пересечения на множестве A, то порождаемая им обобщенная схема удовлетворяет свойству пересечения на этом же множестве.

Определение свойства пересечения достаточно сложно на первый взгляд, но может быть упрощено — в частности, условие (4) достаточно проверять лишь для одного *решающего* множества $\hat{S}(y) \subset A$ для каждой точки $y \in \hat{B}(A) \backslash A$. Мы не будем подробно излагать общий алгоритм построения решающего множества, описанный в работе [9], приведя лишь результат, актуальный для рассматриваемых нами задач:

для выпуклых компактных множеств A для $\forall y \in \hat{B}(A) \backslash A$ $\hat{S}(y) = \{z^1, ..., z^m\} \subset A$, где для $\forall t = 1, ..., m$

$z_k^t = y_k$, если $k = t$, а z_k^t для $k \neq t$ любые такие, что $z^t \in A$.

Введя все необходимые определения, приведем основной результат, полученный группой С. Барберы:

функция коллективного выбора на профиле многомерно однопиковых предпочтений над множеством допустимых результатов голосования $A \subseteq \mathfrak{R}^m$ неманипулируема тогда и только тогда, когда она представима в виде обобщенной медианной схемы, удовлетворяющей свойству пересечения.

По сути, было доказано, что переход от множества допустимых результатов голосования, представимых в виде многомерного прямоугольника, к более сложным множествам (единственное требование, предъявляемое к ним — компактность и «полноразмерность»[8]) не изменяет формы представления неманипулируемых функций коллективного выбора, а лишь добавляет новое условие — *свойство пересечения*. Удовлетворение этому свойству какого-либо набора одномерных медианных схем гарантирует, что для любого профиля функций предпочтения агентов результат коллективного выбора будет принадлежать множеству допустимых значений. Там же было доказано, что для новой формулировки медианной схемы результаты, полученные Э. Муленом [8], К. Бордером и Д. Джорданом [7], остаются в силе.

Перечислив необходимые результаты, полученные в работах [6, 9] можно перейти к решению задачи построения неманипулируемых механизмов многокритериальной активной экспертизы. Для этого требуется представить задачу однокритериальной и многокритериальной активной экспертизы в терминах семейств систем правых и левых коалиций и проанализировать получаемые медианные схемы на предмет выполнения свойства пересечения.

3. ФОРМУЛИРОВКА МЕХАНИЗМА МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ АКТИВНОЙ ЭКСПЕРТИЗЫ В ТЕРМИНАХ ЛЕВЫХ И ПРАВЫХ КОАЛИЦИЙ

Для представления неманипулируемых механизмов однокритериальной активной экспертизы определим понятие медианной схемы на основании определения 4.

[8] Иначе говоря, множество A — замкнутая область, т. е. $A = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(A))$, где cl и int означают замыкание и внутренность соответственно.

Определение 6. Медианная схема $x = h(\tau)$ на множестве $A \subset \mathfrak{R}^1$ порождена системой правых (левых) коалиций $R(z)$ ($L(z)$), если для $\forall t \in A^n$

$$h(\tau) = \max\{z \in A | \{i \in N | \tau^i \geqslant z\} \in R(z)\}$$

$$(h(\tau) = \min\{z \in A | \{i \in N | \tau^i \leqslant z\} \in L(z)\}). \ \blacklozenge$$

Опираясь на данное определение, сформулируем требования к системам правых и левых коалиций, определяющих прямые неманипулируемые однокритериальные механизмы активной экспертизы, эквивалентные процедурам экспертизы, удовлетворяющим условиям А.1—А.3. Обозначим s_S — вектор сообщений экспертов, участников коалиции S, $s_{N/S}$ — вектор сообщений остальных экспертов.

Лемма. *Пусть задана функция π: $[d, D]^n \to [d, D]$, удовлетворяющая условиям А.1—А.3. Тогда функция R_π: $[d, D] \to 2^N \backslash \varnothing$, определяема как*

$$R_\pi = \{S \subset N | \pi(s_S, s_{N/S}) \geqslant z, \quad s_S = (D, ..., D),$$
$$s_{N/S} = (d, ..., d)\}, \ \ \forall z \in (d, D], \ R_\pi(d) = 2^N \backslash \varnothing, \quad (5)$$

является системой правых коалиций. ♦

Доказательства леммы и утверждений 1—3 (см. далее) вынесены в Приложение.

Качественно, запись (5) означает, что для любой коалиции $S \subset N$ максимальный результат экспертизы, который гарантированно может обеспечить данная коалиция, определяется на основе вектора сообщений, в котором все участники коалиции сообщают максимально возможное значение параметра D, а эксперты, не входящие в эту коалицию, — минимально возможное значение d.

Покажем, что определяемая выражением (5) функция R_π порождает прямой механизм, эквивалентный механизму $\pi(s)$.

Утверждение 1. *Пусть на множестве $[d, D]^n$ задан механизм активной экспертизы $\pi(s)$, удовлетворяющий требованиям А.1—А.3. Тогда система правых коалиций R_π определяемая выражением (5), порождает эквивалентный ему прямой механизм.* ♦

Для отдельных примеров механизмов экспертизы формула (5) принимает более наглядный вид. В частности, для механизма

$$x = \pi(s): x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s^i, \quad \forall i \ \alpha_i > 0, \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,$$

система правых коалиций записывается следующим образом: $\forall z \in (d, D]$,

$$R_\pi(z) = \left\{ S \subset N | \sum_{i \in S} \alpha_i \geq \frac{z-d}{D-d} \right\},$$
$$\forall z \in (d, D], \ R_\pi(d) = 2^N \backslash \varnothing.$$

В частности, для механизма усреднения (1) эта запись приобретает вид:

$$R_\pi(z) = \left\{ S \subset N | \# S = r \geq \frac{z-d}{D-d} \right\}, \ \forall z \in (d,\ D],$$

$$R_\pi(d) = 2^N \backslash \varnothing.$$

Другими словами, возможности коалиции экспертов влиять на результат экспертизы определяются отношением их численности к общему числу экспертов. Например, если трое экспертов определяют в результате экспертизы точку на отрезке [0, 1], то для выбора любой точки из диапазона [0, 1/3] достаточно одного эксперта, чья точка пика будет расположена не левее этой точки, для точки из полуинтервала (1/3, 2/3] — двух, для точки из полуинтервала (2/3, 1] — трех.

Таким образом, мы определили вид системы правых коалиций, порождающей интересующие нас прямые неманипулируемые механизмы однокритериальной активной экспертизы. В соответствии с работой [6] можно определить условия на систему левых коалиций $L^*(z)$, порождающую тот же механизм, что и заданная система правых коалиций $R(z)$.

Утверждение 2. *Для системы правых коалиций* $R_\pi(z)$, *определяемой выражением* (5), *система левых коалиций* L_π^*, *порождающая тот же механизм, записывается следующим образом:*

$$L_\pi^* = \{S \subset N | \pi(s_S,\ s_{N/S}) \leqslant z,\ \ s_S = (d,\ ...,\ d),$$
$$s_{N/S} = (D,\ ...,\ D)\},\ \forall z \in [d,\ D),\ L_\pi^* = 2^N \backslash \varnothing. \ \blacklozenge \quad (6)$$

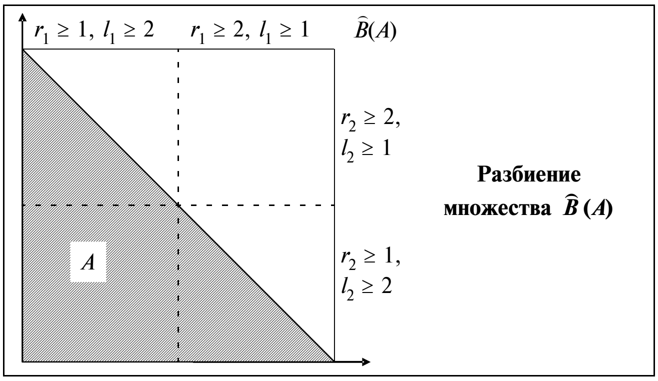
Для наглядности приведем вид условия (6) для механизма экспертизы $x = \pi(s)$: $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i s^i$:

$$L_\pi(z) = \left\{ S \subset N | \sum_{i \in S} \alpha_i \leq n \frac{D-z}{D-d} \right\}, \quad \forall z \in [d,\ D),$$
$$L_\pi(D) = 2N \backslash \varnothing.$$

А для механизма (1):

$$L_\pi(z) = \left\{ S \subset N | \# S = l \leq \frac{D-z}{D-d} \right\}, \ \ \forall z \in [d,\ D),$$
$$L_\pi(D) = 2N \backslash \varnothing.$$

Полученные в утверждениях 1 и 2 системы правых и левых коалиций для однокритериальных задач активной экспертизы могут быть использованы для построения многокритериальных неманипулируемых механизмов активной экспертизы в соответствии с определением 4 — путем определения семейств правых или левых коалиций. По сути, эти семейства коалиций разбивают все множество $\widehat{B}(A)$ на n^m m-мерных прямоугольников вида $B_{S_1^{i_1},\ ...,\ S_m^{i_m}} = \prod\limits_{k \in M} [\pi_k(S_k^{i_k - 1}),\ \pi_k(S_k^{i_k})]$.



Для $\forall z \in \operatorname{int} B_{S_1^{i_1},\ ...,\ S_m^{i_m}}$ все требования к правым и левым коалициям неизменны. На границах требования меняются — на нижних границах по каждому критерию изменяются требования к правым коалициям, на верхних — к левым. На рисунке приведен пример такого разбиения для задачи, сформулированной в § 1 при $n = 2$, $m = 2$.

В данной статье мы не исследуем подробно вопрос, для каких механизмов многокритериальной экспертизы можно построить эквивалентные прямые механизмы, ограничиваясь лишь формулировкой следующего утверждения.

Утверждение 3. *Пусть задан многокритериальный механизм активной экспертизы* $\pi(s)$, *удовлетворяющий свойствам А.1—А.3, определенный на множестве* A^n, *где* $A = \prod\limits_{k \in M} A_k$, $A_k = [d_k,\ D_k] \subset \Re^1$. *Тогда эквивалентный ему прямой механизм* $h_\pi(\tau)$ *существует тогда и только тогда, когда механизм* $\pi(s)$ *является сепарабельным по критериям. Причем прямой механизм* $h_\pi(\tau)$ *порождается семейством систем правых коалиций* $R_\pi = \{R_k\}_{k=1}^{m}$, *определяемым следующим образом: для* $\forall k \in M$

$$R_k(z_k) = \{S \subset N | \pi_k(s_k^S,\ s_k^{N/S}) \geqslant z_k,$$
$$s_k^S = (D_k,\ ...,\ D_k),\ \ s_k^{N/S} = (d_k,\ ...,\ d_k)\},$$
$$\forall z \in (d_k,\ D_k],\ \ R_k(d_k) = 2^N \backslash \varnothing. \ \blacklozenge \qquad (7)$$

Нами приведен класс механизмов многокритериальной активной экспертизы, для которых можно построить эквивалентные прямые механизмы, если множество допустимых результатов голосования — многомерный прямоугольник. Утверждения 1—3 составляют основной результат данной работы — прямые неманипулируемые механизмы активной экспертизы представлены как обобщенные медианные схемы, сформулированные в терминах семейств правых и левых коалиций, что позволяет проверять наличие у них свойства пересечения для различных множеств допустимых результатов экспертизы.

4. ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ АЛГОРИТМА ПРОВЕРКИ РЕАЛИЗУЕМОСТИ ПРЯМОГО НЕМАНИПУЛИРУЕМОГО МЕХАНИЗМА МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ АКТИВНОЙ ЭКСПЕРТИЗЫ

Проиллюстрируем применение алгоритма проверки выполнения свойства пересечения для сформулированной в § 1 задачи распределения ресурса на основании экспертных оценок по механизму усреднения, определяемого выражением (1), на множестве $A = \{x \in A \subset \Re^m | \sum_{j=1}^{m} x_j \leqslant C, x_j \geqslant 0, \forall j \in M\}$.

Определим, для какого числа проектов эквивалентный прямой механизм реализуем — результат экспертизы остается в области допустимых значений. Из утверждения 3 получаем, что семейство систем правых коалиций, порождающее неманипулируемый прямой механизм, эквивалентный механизму (1), имеет следующий вид:

$$R_k(z) = \left\{S \subset N | \# S = r \geq n\frac{z}{C}\right\}, \quad \forall z \in (0, \ C],$$

$$\forall k \in M, \ \ R_k(0) = 2^N \backslash \varnothing, \qquad (8)$$

семейство левых коалиций:

$$L_k(z) = \{S \subset N | \# S = l \leqslant n(C - z)/C\}, \quad \forall z \in [d, \ C),$$

$$\forall k \in M, \ \ L_k(C) = 2^N \backslash \varnothing.$$

Для рассматриваемого множества A для любой точки $y \in \hat{B}(A) \backslash A$ точки решающего множества $\hat{S}(y) \subset A$ определяются следующим образом [9]: $\forall t \subset M \, z^t \in \hat{S}(y)$: $z_k^t = y_k$ если $k = t$, а $z_k^t = 0$ для $k \neq t$.

То, что $y \in \hat{B}(A) \backslash A$ означает, что $\sum_{j=1}^{m} y_j > C$. Для каждой точки $y \in \hat{B}(A) \backslash A$ и соответствующего ей решающего множества $\hat{S}(y) = \{z^1, ..., z^m\} \subset A$ для $\forall t \in M$, $M^+(y, z^t) = \varnothing$, а $M^-(y, z^t) = M \backslash t$. Поэтому выражение (4) принимает следующий вид:

$$\bigcap_{t=1}^{m} \left\{ \bigcup_{k \in M \backslash \{t\}} r_k(y_k) \right\} \neq \varnothing,$$

что эквивалентно следующей записи:

$$\sum_{j=1}^{m} r_j(y_j) \geqslant nC^{-1} \sum_{j=1}^{m} y_j > n \geqslant (m - 1)n + 1.$$

Из полученного условия видно, что для $\forall n \geqslant 2$ прямой многокритериальный механизм активной экспертизы, порождаемый механизмом (8), реализуем только для $m \leqslant 2$. Однако «ослабление» бюджетного ограничения может увеличить число критериев, для которых данный механизм будет реализуем. Рассмотрим множества допустимых результатов экспертизы следующего вида:

$$A = \left\{x \in A \subset \Re^m | \sum_{j=1}^{m} x_j \leqslant C, \, x_j \in [0, \, 1], \, \forall j \in M\right\},$$

где $C \in [1, \, m]$. В смысле задачи распределения ресурсов, с помощью множества подобного вида моделируется ситуация, когда на каждый проект разрешается выделять долю средств из общего объема финансирования C не более чем $1/C$, причем при $C = m$ множество A превращается в m-мерный прямоугольник. Можно показать, что прямой механизм активной экспертизы, порождаемый механизмом (8), удовлетворяет свойству пересечения на множестве A при $C \geqslant m - 1$.

Качественно это означает, что чем больше проектов рассматривается при распределении бюджета, тем меньшую долю средств позволено любому эксперту выделять на отдельный проект.

Более подробное рассмотрение зависимости вида прямого неманипулируемого механизма, а, точнее, обобщенных медианных схем, порождающих его, и вида множеств допустимых значений результатов экспертизы, на которых данный механизм обладает свойством реализуемости, представляет собой отдельную задачу, интересной, как с теоретической, так и практической точки зрения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье проиллюстрирована возможность применения обобщенных медианных схем для построения прямых неманипулируемых механизмов многокритериальной активной экспертизы. Для этого механизм представляется в терминах семейств систем левых и правых коалиций, что позволяет анализировать его на предмет выполнения свойства пересечения. Полученные утверждения, определяющие вид семейств систем левых и правых коалиций, позволяют наглядно представить прямые неманипулируемые механизмы активной экспертизы. Применение данного подхода представляется достаточно перспективным для практической реализации неманипулируемых механизмов экспертизы. Однако за рамками статьи остались такие важные вопросы, как оптимальность построенного механизма по какому-либо критерию, точнее, вопрос сохранения оптимальности механизма при переходе от множества допустимых результатов экспертизы, описываемого многомерным прямоугольником, к множеству, вписанному в него, для которого механизм обладает свойством пересечения. Отдельной перспективной и актуальной с практической точки зрения является задача поиска связи вида множества допустимых результатов экспертизы с множеством допустимых механизмов — прямых неманипулируемых механизмов, обладающих свойством реализуемости. И, как отмечалось, за рамками данной статьи осталась задача построения прямого неманипулируемого механизма активной экспертизы, эквивалентного произвольному непрямому, так как задача решена лишь для узкого класса механизмов экспертизы — сепарабельных по критериям. И, даже для данного класса, следует анализировать сохранение свойства эквивалентности при изменении вида множества допустимых результатов экспертизы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы. Для доказательства проверим, что функция R_π, определяемая выражением (5), удовлетворяет всем пунктам определения 3.

1. Из записи (5) следует, что $R_\pi(d) = 2^N\backslash\varnothing$, и для $\forall z \in (d, D]$, $R_\pi(z) \ne \varnothing$, так как хотя бы для $S = N$ $\pi(s_S, s_{N/S}) = D \geqslant z$ из условия единогласия А.3. Из этого же условия следует, что для $S = \varnothing$ $\pi(s_S, s_{N/S}) = d$, следовательно, для $\forall z \in (d, D]$ $\varnothing \in R_\pi(z)$.

2. Если $S \in R_\pi(z)$ и $S \subset S'$, из условия строгой монотонности А.1 и условия единогласия А.3 следует, что $\pi(s_{S'}, s_{N/S'}) \geqslant \pi(s_S, s_{N/S}) \Rightarrow S' \in R_\pi(z)$.

3. Если $z' < z$ и $S \in R_\pi(z)$, то $\pi(s_{S'}, s_{N/S'}) > z' \Rightarrow S \in R_\pi(z')$.

4. Из условия непрерывности А.2. следует, что если для любой последовательности $\{z^t\} \subseteq [d, D]$ такой, что $\lim\limits_{t\to\infty} z^t = z$ и для $\forall S \subseteq N$, таких, что $\pi(s_S, s_{N/S}) \geqslant z'$, т. е. $\pi(s_S, s_{N/S}) \geqslant z'$, верно, что $\pi(s_S, s_{N/S}) \geqslant z \Rightarrow [S \in W(z)]$.

Следовательно, определяемая выражением (5) функция R_π является системой правых коалиций. Лемма доказана. ♦

Доказательство утверждения 1. Упорядочим экспертов по возрастанию точек пика τ. Обозначим $w^i = \pi(s(i))$, где $s(i)$: $\{\forall j > i\ s_j = D, \forall j \leqslant i\ s_j = d\}$; т. е. $w^{i-1} = \pi(s_{S_i}, s_{N/S_i})$, где коалиция S_i состоит из всех экспертов с индексами i и выше. Тогда условие $\{i \in N|\tau^i \geqslant z\} \in R_\pi(z)$ эквивалентно условию $\{i \in N|\min(\tau^i, w^{i-1}) \geqslant z\}$. Соответственно, в определении схемы «среднего голоса» в терминах правых коалиций $h(\tau) = \max\{z \in [d, D]|\{i \in N|\tau^i \geqslant z\} \in R_\pi(z)\}$ можно перейти от максимума по z к максимуму по i и записать: $h(\tau) = \max\limits_{i \in N} \min(\tau^i, w^{i-1})$. Данная запись эквивалентна условию (2); т. е., в соответствии с результатами работы [1], прямой неманипулируемый механизм, порожденный системой правых коалиции (5), эквивалентен механизму $\pi(s)$. Утверждение 1 доказано.

Доказательство утверждения 2. Очевидно, что для точек d и D выражение (6) верно, так как

$$R_\pi(d) = 2^N\backslash\varnothing,\ L_\pi^* = \{N\} \Rightarrow \forall S \in R_\pi(d), \forall S' \in L_\pi^*(d)\ S \cap S' \ne \varnothing$$
$$\text{и } L_\pi^*(D) = 2^N\backslash\varnothing,\ R_\pi(d) = \{N\} \Rightarrow \forall S \in R_\pi(D),$$
$$\forall S' \in L_\pi^*(D_k)\ S \cap S' \ne \varnothing.$$

Функция $\pi(S)$: $\pi(s_S, s_{N/S})$, $s_S = (d, ..., d)$, $s_{N/S} = (D, ..., D)$, $S \subset N$ задает разбиение отрезка $[d, D]$ не более чем на 2^n отрезков. Введем упорядочение на множестве всех подмножеств N по возрастанию функции $\pi(S)$: $\forall i, j \in 2^n, j > i, \pi(S_i) \leqslant \pi(S_j)$. Тогда рассматриваемые нами системы правых и левых коалиций можно записать как $\forall i\ R(\pi(S_i)) = \{S_j, j \geqslant i\}$, $\forall z \in (\pi(S_i), \pi(S_{i+1}))$, $R(z) = R(\pi(S_{i+1}))$, если $\pi(S_i) = \pi(S_{i+1})$, то $R(\pi(S_{i+1})) = R(\pi(S_i)) = \{S_j, j \geqslant i\}$, и $\forall i\ L^*(\pi(S_i)) = \{N\backslash S_j, j \leqslant i\}$ $\forall z \in (\pi(S_{i-1}), \pi(S_i))$, $L^*(z) = L^*(\pi(S_i))$, если $\pi(S_i) = \pi(S_{i+1})$, то $L^*(\pi(S_{i-1})) = L^*(\pi(S_i)) = \{N\backslash S_j, j \leqslant i\}$.

Тогда для всех $\forall r \geqslant i + 1$ и $\forall l \leqslant i$ ситуация, что $S_r \cap N\backslash S_l = \varnothing$ возможна только в том случае, когда $S_r \subset S_l$, чего не может быть в силу свойств монотонности функции $x = \pi(s)$ и введенного нами упорядочения. Следовательно, система левых коалиций $L^*(z)$ определяемая выражением (6) удовлетворяет записи (4). Утверждение 2 доказано. ♦

Доказательство утверждения 3. Докажем, что прямой механизм, эквивалентный многокритериальному механизму активной экспертизы, удовлетворяющему условиям А.1—А.3 и сепарабельному по критериям, порождается семейством систем правых коалиций, определяемым записью (7). Из определения 2 следует, что результат голосования по каждому критерию определяется лишь сообщениями экспертов по данному критерию — $x = \pi(s)$: $\forall k \in M\ x_k = \pi_k(s_k)$; т. е. мы можем рассмотреть m однокритериальных задач экспертизы, для каждой из которых предложив систему правых коалиций в соответствии с выражением (5) — тем самым получив запись (7).

Покажем необходимость сепарабельности по критериям механизма активной экспертизы для существования эквивалентного ему прямого механизма. Из определения 4 видно, что любой прямой механизм, порождаемый семейством систем правых или левых коалиций, является сепарабельным по критериям. Из выражения (7) видно, что это возможно только в том случае, если механизм $\pi(s)$ является сепарабельным по критериям. Утверждение 3 доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Большие* системы: моделирование организационных механизмов / В.Н. Бурков, Б. Данев, А.К. Еналеев и др. — М.: Наука, 1989. — 245 с.
2. *Новиков Д.А., Петраков С.Н.* Курс теории активных систем. — М.: СИНТЕГ, 1999. — 108 с.
3. *Петраков С.Н.* Механизмы планирования в активных системах: неманипулируемость и множества диктаторства. — М.: ИПУ РАН, 2001. — 135 с.
4. *Иващенко А.А., Коргин Н.А., Новиков Д.А.* Модели и методы оценки эффективности портфеля проектов // Системы управления и информационные технологии. — 2005. — № 3 (20). — С. 92—98.
5. *Иващенко А.А., Коргин Н.А., Новиков Д.А.* Неманипулируемые механизмы экспертизы при неограниченных множествах возможных сообщений экспертов // Изв. Тульского гос. ун-та. — 2005. — Вып. 8. — Ч. 2. — С. 159—165.
6. *Barbera S., Masso J., Serizawa S.* Strategy-proof voting on compact ranges // Games and Behavior. — 1998. — Vol. 25. — P. 272—291.
7. *Border K., Jordan J.* Straightforward elections, unanimity and phantom voters // Review of Economic Studies. — 1983. — Vol. 50. — P. 153—170.
8. *Moulin H.* On strategy-proofness and single-peakedness // Public Choice. — 1980. — Vol. 35. — P. 437—455.
9. *Barbera S., Masso J., Neme A.* Voting under Constraints // Journ. Econ. Theory. — 1997. — Vol. 76. — P. 298—321.

☎ *(495) 334-79-00; e-mail: nkorgin@ipu.ru*

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым. ❑