ЗАДАЧА СТИМУЛИРОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ ВНУТРЕННЕЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ О ТИПАХ АГЕНТОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПАРЕТО

Н.А. Коргин, Д.А. Новиков
(Институт проблем управления РАН, Москва)

1. Введение

При постановке и решении задачи синтеза системы оплаты труда (задачи стимулирования [4]) используется такая агрегированная индивидуальная характеристика агента, как его тип – параметр, отражающий все существенные свойства агента. Содержательными интерпретациями типа являются: эффективность деятельности, продуктивность, производительность труда и т.д. Решение задачи стимулирования обычно ищется для произвольных фиксированных типов агентов [3]. Однако, с одной стороны, на практике часто встречаются ситуации, когда агенты распределены (в статистическом смысле) по типам вполне определенным образом, зависящим от конкретной прикладной задачи (отрасли народного хозяйства, вида деятельности и т.д.). Учет этой специфики может повысить эффективность стимулирования. В настоящей работе для описания индивидуальных различий агентов предлагается использовать распределение Парето [1, 6].

2. Описание модели

Пусть имеет место случай асимметричной информированности – внутренняя неопределенность [3], то есть, центру не известны типы агентов, но известно, что они описываются распределением Парето. Задача центра заключается в том, чтобы предложить агентам меню контрактов – свою зависимость размера вознаграждения от действия агента для каждого из типов агентов. При этом желательно, чтобы агенты различных типов выбирали различные «пункты меню» и выполнялось условие согласованности – агенту любого типа не должно быть выгодно выбирать системы стимулирования, соответствующие другим типам. Данная задача является типовой задачей теории контрактов и ей посвящено множество исследований [1,2, 5]. Получим ее решение для рассматриваемой в настоящей работе модели.

Рассмотрим двухуровневую организационную систему с одним центром на верхнем уровне и одним агентом[1] на нижнем.

Функция полезности центра: $\Phi(\sigma, y) = H(y) - \sigma$, функция полезности агента: $f(\sigma, y, r) = \sigma - c(y, r)$, где $c(y, r)$ – функция затрат агента, зависящая от выбираемого им действия $y \geq 0$ и типа r.

Введем следующие предположения относительно функции затрат агента: $\forall\ r \in \Omega,\ \forall\ y > 0$:

1) $c(y, r)$ непрерывна по r и y;

2) $\frac{\partial c(y,r)}{\partial r} < 0$ – затраты убывают с ростом типа агента;

3) $\frac{\partial c(y,r)}{\partial y} > 0$ – затраты увеличиваются с увеличением действия;

4) $\frac{\partial^2 c(y,r)}{\partial y \partial r} < 0$ – условие «однократного пересечения» или условие Спенса-Мирлиса [5];

5) $\frac{\partial c^2(y,r)}{\partial y^2} > 0$ условие выпуклости функции затрат по действию.

Примером функции затрат, удовлетворяющей всем перечисленным требованиям, является функция Кобба-Дугласа: $c(y, r) = \frac{1}{\gamma}\ (y)^{\gamma}(r)^{1-\gamma}$, $\gamma > 1$.

Задача стимулирования в условиях внутренней вероятностной неопределенности (неполной информированности центра о типе агента) формулируется следующим образом: найти механизм стимулирования с сообщением информации $\pi(s) = (y(s), \sigma(s))$, во-первых, максимизирующий ожидаемую полезность центра:

$$E\Phi(\sigma(s)) \to \max_{\pi(s)},$$

где s – сообщение агента центру о своем типе, и, во-вторых, обеспечивающий сообщение агентом своего истинного типа: $s = r$. Особенностью рассматриваемой в данной статье модели является тот факт, что тип агента в распределен по Парето. Произведя описание модели, перейдем к описанию свойств распределения Парето.

3. Распределение Парето

Известен так называемый «закон Парето» (иногда его называют «закон 80 / 20», на жаргоне – «пивной закон», в соответствии с которым 20 % людей выпивают 80 % пива), отражающий неравномерность

[1] *Систему с одним агентом, тип которого описывается вероятностным распределением, условно можно считать «многоэлементной» – при вычислении математического ожидания, с точностью до мультипликативного множителя (числа агентов), получается тот же результат.*

распределения характеристик экономических и социальных явлений и процессов :

- 20 % населения владеют 80 % капиталов (первоначальная формулировка самого В. Парето [6], см. также обзор современных моделей в [1]);
- 80 % стоимости запасов на складе составляет 20 % номенклатуры этих запасов;
- 80 % прибыли от продаж приносят 20 % покупателей;
- 20 % усилий приносят 80 % результата;
- 80 % проблем обусловлены 20 % причин;
- за 20 % рабочего времени работники выполняют 80 % работы;
- 80 % работы выполняют 20 % работников и т.д.

«Формализацией» закона Парето является распределение Парето случайной величины $z \geq z_0 > 0$, характеризуемое двумя параметрами – минимально возможным значением z_0 и показателем степени $\alpha > 0$:

$$p(\alpha, z_0, z) = \frac{\alpha}{z_0}\left(\frac{z_0}{z}\right)^{1+\alpha}. \quad (1)$$

Плотности распределения (1) соответствует интегральная функция распределения

$$F(\alpha, z_0, z) = 1 - \left(\frac{z_0}{z}\right)^{\alpha}. \quad (2)$$

Распределение Парето обладает свойством самоподобия: распределение значений, превышающих величину $z^0 \geq z_0$, также является распределением Парето:

$$\forall\, z^0 \geq z_0 \;\; p(\alpha, z^0, z) = p(\alpha, z_0, z) / (1 - F(\alpha, z_0, z^0)) = \frac{\alpha}{z^0}\left(\frac{z^0}{z}\right)^{1+\alpha}. \quad (3)$$

Можно вычислить вероятность того, что случайная величина принадлежит заданному диапазону $[z_1; z_2]$, где $z_1 \geq z_0$:

$$\text{Prob}\,\{z \in [z_1; z_2]\} = F(\alpha, z_0, z_1) - F(\alpha, z_0, z_2) =$$
$$= [z_1\, p(\alpha, z_0, z_1) - z_2\, p(\alpha, z_0, z_2)] / \alpha. \quad (4)$$

Для распределения Парето существуют только моменты, порядка, меньшего, чем степень α. Например, математическое ожидание случайной величины z с распределением (1) существует при $\alpha > 1$ и равно

$$E\, z = \frac{\alpha}{\alpha - 1}\, z_0, \quad (5)$$

где «E» – символ математического ожидания. Отметим, что с ростом α распределение «вырождается» и математическое ожидание (5) стремится к z_0. Это свойство распределения Парето используется в следующих разделах для иллюстрации принципа соответствия – при предельном переходе от случая вероятностной неопределенности к детерминированному случаю.

Кроме того, в рамках предположения о том, что случайная величина распределена по Парето, зная математическое ожидание Ez и минимальное значение z_0, можно легко вычислить параметр распределения α (см. (5)):

$$\alpha = \frac{Ez}{Ez - z_0}.$$

Приведем формальную интерпретацию «закона 80 / 20». Предположим, что z – характеристика эффективности человека, а рассматриваемое распределение определяет количество людей с разной эффективностью в коллективе. Определим $\tilde{z}$ такое, что Prob $\{z \leq \tilde{z}\} = 0.8$:

$$\tilde{z} = (0.2)^{\frac{1}{\alpha}} z_0.$$

Далее определим суммарную эффективность «элиты»:

$$\int_{\tilde{z}}^{+\infty} z p(z_0, \alpha) dz = (0.2)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \frac{\alpha}{\alpha - 1} z_0,$$

которая должна составлять 80 % от эффективности всего коллектива, очевидно E z

$$(0.2)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \frac{\alpha}{\alpha - 1} z_0 = 0.8 \frac{\alpha}{\alpha - 1} z_0. \quad (6)$$

Получаем, что показатель степени α, при котором распределение Парето описывает закон Парето, должен быть равен 1.161. Аналогичным образом можно определить, что при $\alpha = 2$ – 20 % коллектива будут обладать 45 % общей эффективности и т.д.

Описав свойства распределения Парето, перейдем к решению задачи стимулирования в условиях внутренней неопределенности о типах агентов, описываемых распределением Парето.

4. Решение задачи

Итак, в модели предполагается, что тип агента распределен по Парето – центру не известен точный тип агента, но известна область его возможных значений $\Omega = [r_0, +\infty)$ и параметры распределения Парето

$$p(r) = \frac{\alpha}{r_0}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1+\alpha}, \ \alpha > 1.$$

Используя приведенный в [2] метод решения подобных задач, получим, что при выполнении следующих трех условий, обеспечивающих неманипулируемость механизма (выгодность для агента сообщения достоверной информации):

$$\frac{d\sigma}{dr}(r) - y^{\gamma-1}\sigma^{-\gamma}\frac{dy}{dr}(r) = 0\,, \quad (7)$$

$$-y^{\gamma-1}\sigma^{-\gamma}\frac{dy}{dr}(r) \le 0\,, \quad (8)$$

$$\forall r \in \Omega, \quad \frac{d\sigma}{dr}(r) \ge 0, \frac{dy}{dr}(r) \ge 0\,. \quad (9)$$

механизм, являющийся решением рассматриваемой задачи, будет определяться из следующих соотношений:

$$\int_{r_0}^{\infty}[H(y(r)) - \frac{1}{\gamma}(y(r))^{\gamma}r^{1-\gamma} - \int_{r_0}^{r}\frac{1}{\gamma}(y(r))^{\gamma}r^{\gamma}d\tau]p(r)dr \underset{y(r)}{\to} \max\,,$$

$$\sigma(r) = \frac{1}{\gamma}(y(r))^{\gamma}r^{1-\gamma} + \int_{r_0}^{r}\frac{1}{\gamma}(y(r))^{\gamma}r^{\gamma}d\tau\,.$$

Для H(y) = y решение $\hat{\pi}(r) = (\hat{y}(r), \hat{\sigma}(r))$ будет иметь следующий вид: $\forall\ r \in \Omega$

$$\hat{y}(r) = r[1 + \frac{1}{\alpha(\gamma-1)}]^{\frac{1}{1-\gamma}}, \quad (10)$$

$$\hat{\sigma}(r) = (\gamma-1)^{-1}[1 + \frac{1}{\alpha(\gamma-1)}]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}(r - r_0\gamma^{-1})\,. \quad (11)$$

<u>Утверждение 1.</u> Если функция дохода центра H(y) = y и функция затрат агента – функция Кобба-Дугласа, то решение задачи стимулирования в условиях неполной информированности центра о типе агента, описываемом распределением Парето, дается выражениями (10) и (11), причем данный механизм стимулирования является неманипулируемым.

В частности, для $\gamma = 2$ из (10) и (11) получаем:

$$\hat{y}(r) = r\frac{\alpha}{\alpha+1}, \ \forall r \in \Omega\,; \quad (12)$$

$$\hat{\sigma}(r) = \frac{\alpha^2}{2(\alpha+1)^2}(2r - r_0), \ \forall r \in \Omega\,. \quad (13)$$

Для $\gamma = 2$ (наиболее часто рассматриваемой в литературе по экономико-математическому моделированию функции затрат – квадратичных затрат) нетрудно получить в явном виде выражение для ожидаемого выигрыша центра при использовании оптимального механизма: $E\,\Phi\,(\hat{\pi}(r)) = \frac{\alpha^2}{2(\alpha^2-1)}r_0$. В частотности, для параметра α =1,161, при котором выполняется закон Парето, $E\,\Phi\,(\hat{\pi}(r)) = 1.94r_0$. Если α = 2, то $E\,\Phi\,(\hat{\pi}(r)) = \frac{2}{3}r_0$. Оценить эффективность полученного механизма можно, сравнив ожидаемую полезность с той, которая получается при полной информированности центра о типе агента, и тип агента равен среднему типу агента из нашей задачи – $\tilde{r}$ =E r. Из (5) $\tilde{r} = \frac{\alpha}{\alpha - 1} r_0$. Известно, что прибыль центра для рассматриваемой задачи в условиях полной информированности о типе центра составляет $\frac{\tilde{r}}{2}$. Следовательно, для параметра $\alpha = 1{,}161$, при котором выполняется закон Парето, эффективность полученного механизма стимулирования составит 54 %, для $\alpha = 2$ эффективность составит 66 %.

5. Заключение

Таким образом, в настоящей работе проиллюстрирована возможность использования распределения Парето для моделирования индивидуальных различий в эффективности деятельности сотрудников. В математических терминах сформулирован «закон Парето». Построен оптимальный механизм стимулирования в двухуровневой организационной системе, в условиях неполной информированности руководящего органа об эффективности подчиненных.

Литература

1. Заложнев Д.А., Новиков Д.А. Модели тарифно-премиальных систем оплаты труда. М.: ИПУ РАН, 2006. – 68 с.

2. Коргин Н.А. Механизмы обмена в активных системах. М.: ИПУ РАН, 2003. – 126 с.

3. Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). М.: ИПУ РАН, 1998. – 216 с.

4. Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. М.: МПСИ, 2005. – 584 с.

5. Mas-Collel A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic theory. N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995. – 981 p.

6. Pareto V. Cours d’Economique Politique. Vol. 2. 1897.