

## ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ СТРУКТУР, ОПИСЫВАЕМЫХ ГРАФАМИ (основы графодинамики). II

М. А. АЙЗЕРМАН, Л. А. ГУСЕВ, И. М. СМИРНОВА,  
С. В. ПЕТРОВ

(Москва)

Делается попытка разработки языка для анализа динамики структур, описываемых графами.

В первой части работы [1] для изучения процесса изменения во времени структуры, описываемой графом (типа «дерево» или «лес»), было предложено описывать граф с пронумерованными вершинами функцией «подчинения» (П-функцией)  $\varphi(n)$ , где  $n$  — номер вершины, а  $\varphi(n)$  — номер «ее начальника». С целью описания «жизни структуры», т. е. законов изменения графа во времени, были введены в рассмотрение унарные операции над П-функциями. В этой части работы вводятся в рассмотрение бинарные и  $r$ -арные операции над П-функциями (раздел 1) и рассматриваются примеры уравнений и систем уравнений графодинамики (разделы 2 и 3).

### 1. Бинарные и более сложные операции

Приступим к описанию бинарных операций, в которых участвуют две П-функции:  $\varphi(n)$  и  $\pi(n)$ . На такого рода операции так же, как на  $r$ -арные и сложные операции, вводимые далее, полностью распространяется основное доопределение, введенное в части I работы. В силу этого доопределения из П-функций в результате операции получается также П-функция.

Операция арифметического осреднения определяется следующим образом:

$$(1) \quad \psi(n) = [(\varphi(n) + \pi(n))/2],$$

где  $[a]$  означает целую часть  $a$ .

На рис. 1 показан пример, когда  $\varphi$  и  $\pi$  «предельно разнесены»:  $\varphi$  имеет цепочечную (рис. 1, а), а  $\pi$  — веерную (рис. 1, б) структуру. Операция выстраивает из них бинарное дерево (рис. 1, в). «Осредняющий» характер операции четко виден также из примера на рис. 2, где  $\varphi$  и  $\pi$  построены одинаково, но имеют «разносторонние перекосы» (рис. 2, а и б); в результате возникает дерево без перекосов (рис. 2, в).

Операция геометрического осреднения определяется следующим образом:

$$(2) \quad \psi(n) = [\sqrt{\varphi(n)\pi(n)}].$$

На рис. 3 показано действие этой операции, примененной к тем же двум графам, которые были использованы в примере на рис. 1 — цепочечной и веерной структуры. В результате возникает иерархическая структура, в которой число «подчиненных данного начальника» имеет тенденцию увеличиваться при смещении вдоль структуры сверху вниз.

Операции «экстремизации» описываются выражениями вида

$$(3) \quad \psi_1(n) = \max(\varphi(n), \pi(n))$$

или

$$(4) \quad \psi_2(n) = \min(\varphi(n), \pi(n)).$$

Эти операции по двум деревьям выстраивают одно со следующей общей тенденцией: если одно из них «вытянуто по высоте», т. е. имеет много уровней при относительно небольшом числе вершин, а второе «вытянуто

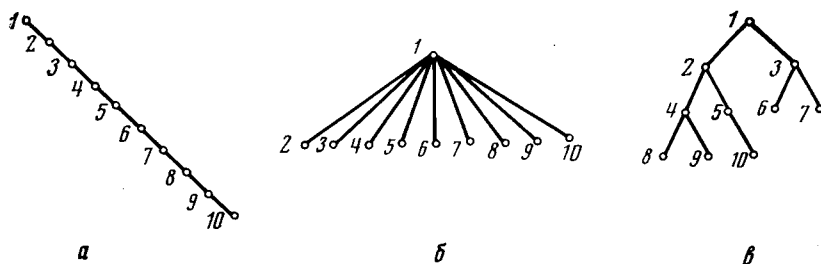


Рис. 1

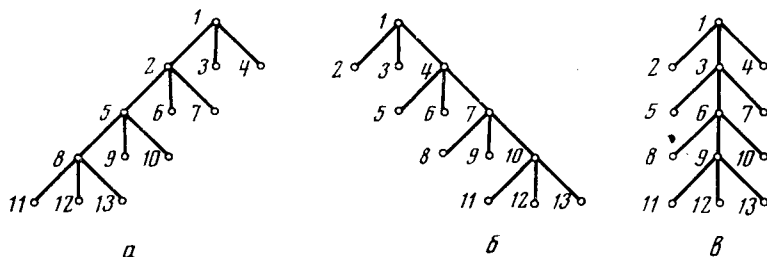


Рис. 2

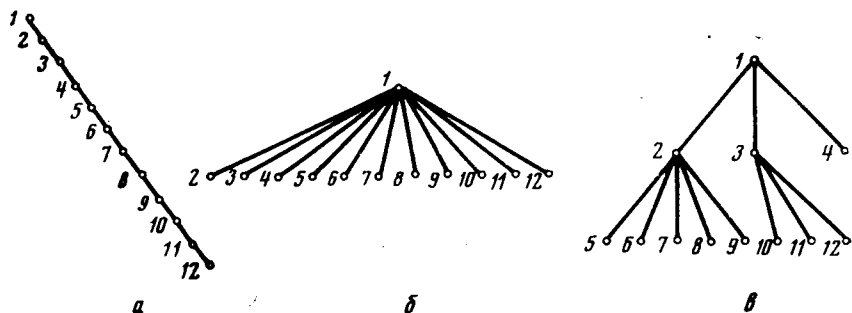


Рис. 3

в ширину», т. е. имеет много элементов на каждом из относительно небольшого числа уровней, то (3) строит дерево, «вытянутое по высоте», а (4) — «вытянутое по ширине».

Так же, как и над двумя  $\Pi$ -функциями, можно ввести операции над  $r$   $\Pi$ -функциями. В качестве примера такой операции рассмотрим операцию арифметического осреднения, распространенную на  $r$  аргументов

$$(5) \quad \psi(n) = \left[ \sum_1^r \varphi_i(n) / r \right].$$

Предполагается, что  $\Pi$ -функция  $\psi(n)$  определена на целых числах  $1, \dots, N$ , где  $N$  — число вершин в том графе  $\varphi_i(n)$ , у которого это число минимально. Операция (5) нигде не нарушает условия  $1^\circ-2^\circ$  (см. часть I). Действие операции (5) продемонстрировано на рис. 4, на котором  $\psi(n)$  (рис. 4,  $\delta$ ) строится по четырем графам  $\varphi_i(n)$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ), изображенным на рис. 4,  $a-г$ .

В разделе 3 части I этой работы и выше в этом разделе перечислялись лишь некоторые операции, которым может быть дано содержательное описание в том смысле, что в общих терминах может быть описан эффект действия операции над графом (деревом или лесом), мало зависящий от

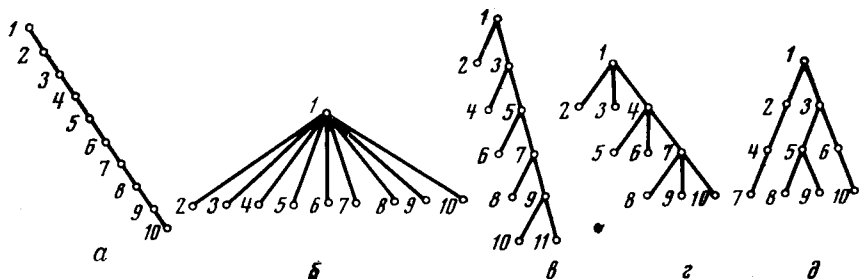


Рис. 4

его исходной структуры. Разумеется, могут быть введены в рассмотрение и другие операции такого рода. Значение таких операций определяется тем, что с их помощью могут быть получены более сложные операции для описания графодинамических процессов. Такая возможность возникает потому, что в некоторых случаях можно указать последовательность применения операторов (типа «функция от функции»), которая осуществляет в совокупности такое преобразование.

В качестве первого примера рассмотрим случай, когда несвязное множество вершин надо преобразовать в структуру, у которой число подчиненных имеет тенденцию увеличиваться по мере перехода от более высоких к более низким уровням иерархии. Такую операцию легко осуществлять, если сначала собрать рассыпанные точки в двоичное дерево, а затем преобразовать его в требуемое. Такая совокупность операций может быть записана так:

$$(6) \quad \psi(n) = [\sqrt{\xi(n)}],$$

где  $\xi(n) = [n(\varphi(n)+1)/2]$ .

В качестве второго примера введем в рассмотрение операцию «взвешенное среднее»:

$$(7) \quad \psi(n) = \left[ \frac{k_1\varphi_1(n) + \dots + k_2\varphi_2(n)}{k_1 + \dots + k_2} \right],$$

где все  $k_i$  — положительные числа.

Вспомнивая результат действия операции (5) и унарной операции «укрупнение» (формула (7) из части I работы), легко установить «осредняющий» смысл этой операции.

Могут быть приведены и иные примеры, когда требуемое преобразование графов осуществляется построением «оператора над оператором», т. е. последовательным применением операторов из некоторого, ранее введенного и на содержательном уровне изученного набора.

В заключение раздела сделаем следующее замечание, касающееся возможного обобщения операций над  $\Pi$ -функциями.

При постановке задачи о введении операций над  $\Pi$ -функциями возникает следующее затруднение (см. часть I работы): результатом операции

над  $\Pi$ -функцией (или несколькими  $\Pi$ -функциями) может быть не  $\Pi$ -функция. Это затруднение было обойдено введением основного доопределения: если  $A(\varphi_1(n), \dots, \varphi_k(n)) \geq n$ , то принимаем  $A(\varphi_1(n), \dots, \varphi_k(n)) = n-1$ .

Это доопределение в значительной мере предопределяло содержательную трактовку ряда операций. Вместе с тем оно ограничивало набор операций, которые имело смысл вводить в рассмотрение, операциями, результат которых растет не «слишком быстро» с ростом  $n$ . Действительно, если операция приводит к быстро растущим функциям, то в силу основного доопределения все такие операции различаются лишь при очень малых  $n$  и все они переводят любой граф в «цепочку».

Для того чтобы расширить класс рассматриваемых операций, например ввести в рассмотрение произведение, возведение в степень и т. д., может быть предложена следующая конструкция.

Рассмотрим преобразование  $P$ , переводящее первый квадрант плоскости  $(n, \varphi)$  в «угол»  $0 \leq \varphi < n$  и удовлетворяющее двум условиям:

- 1) оно переводит однозначную функцию в однозначную и
- 2) оно имеет обратное преобразование.

В качестве примера рассмотрим следующее преобразование, зависящее от функции-параметра:

$$(8) \quad n' = n, \quad \varphi' = n(n-1)\varphi/f - \varphi + n\varphi,$$

и соответствующее обратное преобразование

$$(9) \quad n = n', \quad \varphi = f\varphi' / (n-1)(n-\varphi').$$

Это преобразование переводит функцию  $\varphi(n) = f(n)$  в луч  $\varphi'(n) = n-1$ , участки, где  $\varphi(n) > f(n)$ , в  $n-1 < \varphi'(n) < n$ , а те участки, где  $\varphi(n) < f(n)$ , в  $\varphi(n) < n-1$ . Таким образом, в результате преобразования любая функция (после дискретизации) превращается в  $\Pi$ -функцию. Теперь можно воспользоваться преобразованием  $P$  для определения класса операций над  $\Pi$ -функциями. Это достигается следующим образом. Для любой операции  $A$  результат ее действия над одной или несколькими  $\Pi$ -функциями определяется так: для унарных операций

$$\bar{A}\varphi = P(AP^{-1}\varphi),$$

а для бинарных операций

$$\varphi \bar{A} \psi = P(P^{-1}\varphi AP^{-1}\psi).$$

Для дальнейшего, при использовании унарных операций, существенным оказывается не то, используется ли какая-либо из введенных ранее конкретных операций или иная операция, возникающая в результате описанной конструкции, а важны некоторые общие свойства этих операций.

Назовем унарную операцию  $F(\varphi(n))$  монотонной (строго монотонной), если  $F(k)$  как функция  $k$  монотонна (строго монотонна).

Назовем унарную операцию  $F(\varphi(n))$  однонаправленной, если для любого  $n$  выполняется  $F(\varphi(n)) \geq \varphi(n)$  или для любого  $n$   $F(\varphi(n)) \leq \varphi(n)$ . Операция  $F(\varphi(n))$  строго однонаправлена, если неравенство обращается в равенство только на границе области  $G$ .

## 2. Общие соображения об уравнениях графодинамики

Уравнения 1-го порядка.

Теперь, когда граф формализован в виде значений целочисленной  $\Pi$ -функции и введены имеющие содержательную графовую трактовку операции над этими функциями, уравнения графодинамики, определяющие графовые траектории, могут быть поняты как итерационные процедуры, записанные в терминах таких функций и операций. Так, например,

уравнения графодинамики могут быть представлены в виде

$$(10) \quad \varphi^{t+1}(n) = F(\varphi^t(n)),$$

где  $F$  — какая-либо унарная операция (содержащая или не содержащая переменный параметр  $p(n)$ ), либо в виде

$$(11) \quad \varphi^{t+1}(n) = F(\varphi^t(n), \pi(n)),$$

где  $F$  — какая-либо бинарная операция над  $\varphi$  и  $\pi$ ;  $\Pi$ -функция  $\pi(n)$ , которая постоянна, т. е. не зависит от  $t$ , выступает в роли графа-параметра.

В более сложных случаях оператор  $F$  в правой части уравнения (11) может зависеть не от одного графа-параметра  $\pi(n)$  (скалярный параметр), а от нескольких (векторный параметр). Более того, в роли параметра  $\pi(n)$  могут выступать графы, принадлежащие графовой траектории в предшествующие моменты времени, так что возникают уравнения вида

$$(12) \quad \varphi^{t+1}(n) = F(\varphi^t(n), \varphi^{t-1}(n), \dots, \varphi^{t-r+1}(n)).$$

В этих уравнениях оператор  $F$  может зависеть также от одного или нескольких постоянных параметров. Наконец,  $\pi(n)$  могут быть переменными параметрами, изменение которых само задается рекуррентными соотношениями, и тогда для описания графодинамических процессов возникают системы уравнений вида

$$(13) \quad \varphi^{t+1}(n) = F_{\varphi}(\varphi^t(n), \psi^t(n)), \quad \psi^{t+1}(n) = F_{\psi}(\varphi^t(n), \psi^t(n))$$

или более сложные системы, если операторы  $F_{\varphi}$  и  $F_{\psi}$  зависят от постоянных графов-параметров или от графов, появившихся в предшествующие моменты времени.

Разумеется, помимо операторов должны быть заданы также «начальные условия», т. е. для уравнений (10) или (11) — начальный граф  $\varphi^0(n)$ , а для уравнений (12) или систем (13) — набор начальных (или исходных) графов.

Таким образом возникают графовые уравнения первого порядка (10) или (11), графовые уравнения более высоких порядков (типа (12)) и системы графовых уравнений типа (13) и более сложные.

Рассмотрим более подробно графовые уравнения первого порядка.

*Унарный оператор.* Рассмотрим уравнение (10) в предположении, что  $F$  — унарная операция, не содержащая переменный параметр  $p(n)$ . В соответствии с определением, введенным в разделе 1 части I, равновесным называется граф, соответствующий такой функции  $\varphi^*(n)$ , что

$$(14) \quad \varphi^*(n) = F(\varphi^*(n)).$$

Решения функционального уравнения (14) определяют равновесные графы в задаче (10).

*Теорема 1.* Если  $F$  — монотонно возрастающая операция, то решение уравнения (14) всегда существует и однозначно определяется заданием  $\varphi^0(n)$ .

*Теорема 2.* Если  $F$  — однонаправленная операция, то решение уравнения (14) всегда существует, оно однозначно определяется заданием  $\varphi^0(n)$ . Если же  $F$  — строго однонаправленная операция, то возможны лишь следующие два решения уравнения (14):

а)  $\varphi^*(n) \equiv 0, \quad (n=1, 2, \dots, N),$

б)  $\varphi^*(n) = n-1 \quad (n=1, 2, \dots, N).$

Доказательство теорем 1 и 2 приведено в приложении. В связи с тем, что число различных графов с  $N$  вершинами конечно, существование решения уравнения (14) равносильно отсутствию циклов в соответствующей графовой траектории, и поэтому условия существования решения, приведенные в теоремах 1 и 2, являются и условиями отсутствия циклов. Условия теорем являются лишь достаточными; в силу некоторых особенностей,

связанных с целочисленностью функций и операций, возможны случаи, когда условия теорем нарушаются, но тем не менее циклы отсутствуют и решение уравнения (14) существует.

Заметим, что все введенные в части I унарные операции однонаправлены. Поэтому в силу теоремы 2 для всех этих операций решение уравнения (14) существует.

Будем говорить, что процесс установления равновесия  $\varphi^*(n)$  является глобально сходящимся к равновесию, если  $\varphi^*(n)$  не зависит от начального

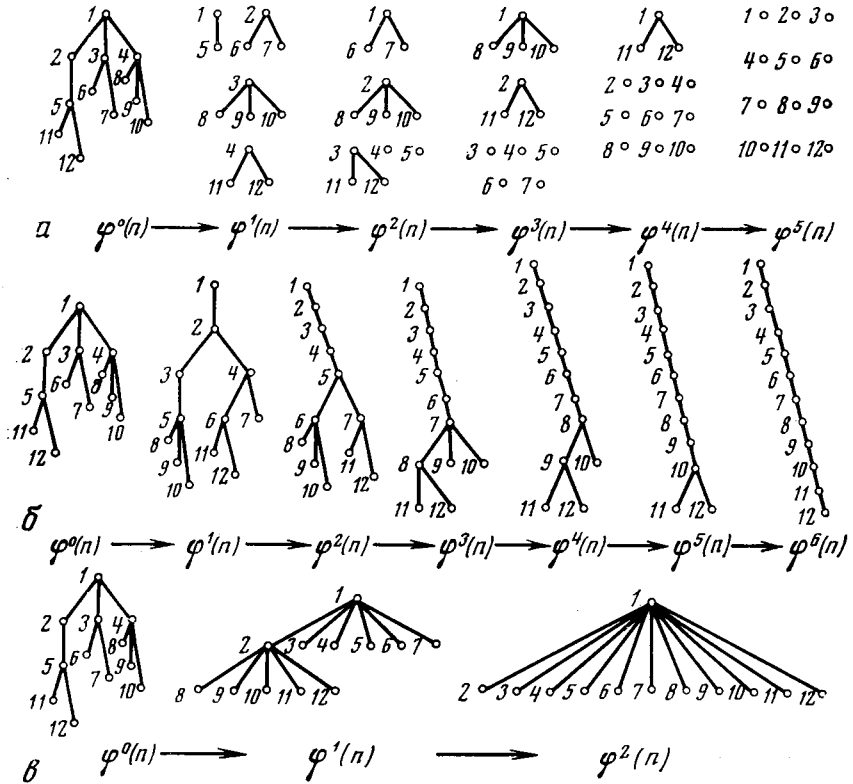


Рис. 5

графа  $\varphi^0(n)$ . Нетрудно видеть, что условие строгой однонаправленности является также условием глобальной сходимости к равновесию.

Введем понятие расстояния между графами. В качестве расстояния  $\rho(\varphi, \psi)$  между двумя графами, заданными П-функциями  $\varphi(n)$  и  $\psi(n)$ , примем

$$(15) \quad \rho(\varphi, \psi) = \sum_1^N (\varphi(n) - \psi(n))^2 / N^2.$$

**Теорема 3.** Если в уравнении (10)  $F$  — однонаправленная операция, то процесс, описанный этим уравнением, сходится к равновесию монотонно по  $\rho$ .

Доказательство теоремы 3 приведено в приложении. Монотонность по  $\rho$  свидетельствует о том, что каждый последующий граф в некотором смысле ближе к конечному, чем предыдущий.

На рис. 5 приведены три примера графовых траекторий, построенных для рекуррентных соотношений вида (10):

$$\varphi^{t+1}(n) = \varphi^t(n) \div 1 \quad (\text{рис. 5, a}),$$

$$\varphi^{t+1}(n) = \varphi^t(n) + 1 \quad (\text{рис. 5, б}),$$

$$\varphi^{t+1}(n) = [\sqrt{\varphi^t(n)}] \quad (\text{рис. 5, в}).$$

Во всех трех случаях использован один и тот же начальный граф  $\varphi^0(n)$ . В случае 5, а этот граф за 5 шагов переходит в набор изолированных вершин, т. е. осуществляется его полная деструктуризация. В случае б за 6 шагов начальный граф перестраивается в цепочку, а в случае в — в веер за 2 шага.

*Операции над аргументом.* В части I работы были введены следующие операции над аргументом П-функции:

$$(16) \quad \psi(n) = \varphi([n/k]) \quad (k=1, 2, 3, \dots),$$

$$(17) \quad \psi(n) = \varphi(kn) \quad (k=1, 2, 3, \dots),$$

$$(18) \quad \psi(n) = \varphi(n-c) \quad (c=1, 2, 3, \dots),$$

$$(19) \quad \psi(n) = \varphi(n+c) \quad (c=1, 2, 3, \dots)$$

и описаны свойства получаемой таким образом функции  $\psi(n)$ . Все четыре операции над аргументом не являются ни монотонными, ни однонаправленными, следовательно, не удовлетворяют условиям теорем 1 и 2. Вместе с тем для них может быть составлено уравнение типа (10), условие равновесия (14) и проведен их анализ. Рассмотрим уравнение (14) отдельно для каждой из перечисленных операций.

Операция (16) из некоторого исходного графа  $\varphi^0(n)$  порождает бесконечную траекторию графов с неограниченным ростом числа вершин. В случае, если будет принято ограничение, не допускающее роста числа вершин (см. часть I работы), траектория приходит за конечное число шагов к «рассыпанному» графу  $\varphi^*(n) = 0$ , который и является равновесным согласно (14).

Операция (17) в уравнении (10) порождает для любого начального графа траекторию, приводящую за конечное число шагов к графу, состоящему из одной вершины.

Операция (18) может расшифроваться как повторенная с раз операция  $\psi(n) = \varphi(n-1)$ . Если число вершин при применении (18) может расти, траектория аналогично случаю (16) бесконечна и решения уравнения (14), т. е. равновесия, не существует. В случае же, когда принято описанное в части I ограничение на рост числа вершин, уравнение (14) имеет единственное решение  $\varphi^*(n) = 0$ .

Если операция (19) определена так, что число вершин при ее применении убывает, то, естественно, траектория, порожденная уравнением (10) с этой операцией в правой части, заканчивается графом, состоящим из единственной вершины  $\varphi^*(1) = 0$ . В случае же, когда принято описанное в части I ограничение, сохраняющее число  $N$ , уравнение (14) имеет несколько решений. Имми являются следующие функции:

1)  $\varphi^*(n) = n-1$ , т. е. равновесным графом будет цепочка,

или

$$2) \quad \varphi^*(n) = \begin{cases} n-1 & \text{при } n \leq n^*, \\ n^* & \text{при } n > n^* (n^* = 1, 2, \dots, N), \end{cases}$$

т. е. равновесным является любой граф типа «цепочка с веером на конце» (см. рис. 5, часть I работы), или

3) любая «в конечном счете периодическая» функция  $\varphi^*(n)$  с периодом  $s$  и любой начальной частью (предпериодом) не длиннее  $s$ . Пример такого решения уравнения (14)  $s=3$  приведен на рис. 6, а. График функции  $\varphi^*(n)$  приведен на рис. 6, б.

В заключение заметим, что в отличие от (18) при принятом ограничении функция  $\varphi(n-c)$  не может быть, вообще говоря, получена как итерация с раз операции  $\psi(n) = \varphi(n-1)$ , что иллюстрируется примером рис. 6, в.

Теперь было бы естественно рассмотреть уравнения первого порядка (типа (10)), правая часть которых содержит параметр  $p(n)$ ; удобнее, однако, рассмотреть сначала уравнения типа (11), содержащие бинарные операции с графом-параметром  $\pi(n)$ , а затем вернуться к унарным операциям, содержащим параметр.

*Бинарный оператор.* Рассмотрим теперь уравнение (11) при предположении, что  $F$  — один из двух введенных выше бинарных операторов:

$$(20) \quad F_1 = [(\varphi(n) + \pi(n))/2],$$

$$(21) \quad F_2 = [\sqrt{\varphi(n)\pi(n)}].$$

Будем считать, что число вершин в графе  $\varphi^0(n)$  не меньше, чем в графе  $\pi(n)$ .

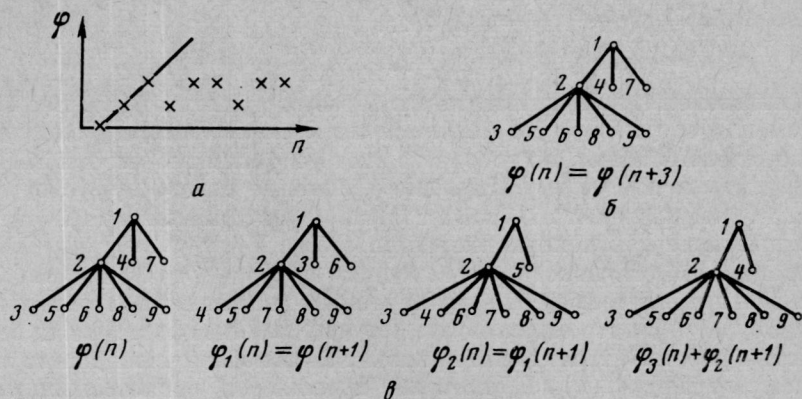


Рис. 6

Как и ранее, равновесный граф определяется из соотношения

$$(22) \quad \varphi^*(n) = F(\varphi^*(n), \pi(n)),$$

где  $F = F_1$  или  $F = F_2$ , а  $\pi(n)$  — фиксированный граф.

Рассмотрим два множества графов  $S_{\pi(n)}^*$  и  $S_{\pi(n)}^{**}$ , которые определяются следующим образом:

$$(23) \quad S_{\pi(n)}^* = \{\varphi(n) \mid \pi(n) - \varphi(n) = 0 \text{ или } 1\},$$

$$S_{\pi(n)}^{**} = \{\varphi(n) \mid \pi(n) - \varphi(n) = 0 \text{ или } 1, \text{ или } 2, \text{ или } \pi(n)\}.$$

Множество  $S_{\pi(n)}^*$  содержит граф  $\pi(n)$ , и все графы, задаваемые функциями, которые при каждом  $n$  не больше чем на 1 меньше  $\pi(n)$ , а  $S_{\pi(n)}^{**}$  содержит все графы, задаваемые функциями, которые при каждом  $n$  либо совпадают с  $\pi(n)$ , либо равны нулю, либо меньше  $\pi(n)$  на 1 или 2.

*Теорема 4.* Решение уравнения (22) при  $F = F_1$  или  $F = F_2$  всегда существует и принадлежит  $S_{\pi(n)}^*$  при  $F = F_1$  и  $S_{\pi(n)}^{**}$  при  $F = F_2$ . Это решение однозначно определяется начальным графом  $\varphi^0(n)$ .

Доказательство теоремы приведено в приложении.

Все графы, принадлежащие множеству  $S_{\pi(n)}^*$ , лишь незначительно отличаются от графа-параметра  $\pi(n)$  и с точностью до этого малого отличия можно говорить, что для уравнения (11) при  $F = F_1$  равновесным является граф  $\pi(n)$ . В случае  $F = F_2$  ситуация более сложная. Если  $\varphi^0(n)$  — дерево (а не лес), то  $\varphi(n) = 0$  только в вершине (при  $n = 1$ ) и для всех  $n$  случаев, когда  $\pi(n) - \varphi(n) = \pi(n)$ , невозможен. В этом случае также равновесный граф совпадает с  $\pi(n)$  или достаточно близок к нему. Иначе обстоит дело, если  $\varphi^0(n)$  — лес. В этом случае равновесный граф может существенно отличаться от  $\pi(n)$ :  $\varphi(n)$  может быть лесом, хотя  $\pi(n)$  — дерево; функция  $\varphi(n)$  отличается в этом случае от  $\pi(n)$  как раз в тех точках, которые являются вершинами деревьев леса.



Теперь можно охарактеризовать свойства графовых траекторий, определяемых уравнением (11).

**Теорема 5.** При любом начальном графе  $\varphi^0(n)$  графовая траектория, определяемая уравнением (11), стремится монотонно по  $\rho$  к некоторому равновесному графу из  $S_{\pi^*}$ , если  $F=F_1$ , или из  $S_{\pi^{**}}$ , если  $F=F_2$ . Если  $F=F_1$ , то число шагов до установления равновесия не превышает  $[\ln N/\ln 2]+1$ , если же  $F=F_2$ , то число шагов не превышает  $[\ln(\ln N/\ln 2)/\ln 2]+1$ , где  $N$  — число вершин в графе  $\varphi^0(n)$ .

Доказательство теоремы содержится в приложении.

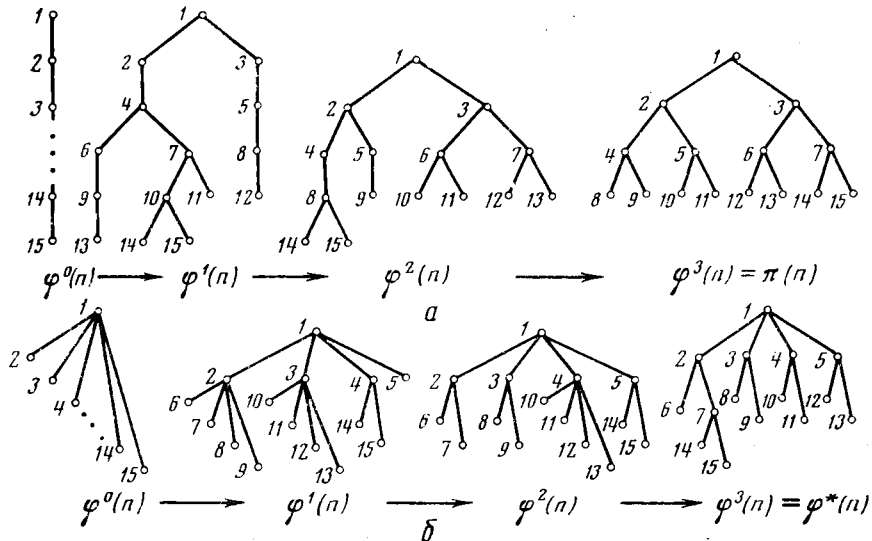


Рис. 7

Из теоремы 5 следует, что при бинарной операции  $F_1$  любой начальный граф переводится за конечное число шагов, и притом монотонно по  $\rho$ , в любой другой заданный граф  $\pi(n)$  (или в близкий к нему). В этом смысле уравнение (11) при  $F=F_1$  описывает возможный процесс монотонного изменения иерархической структуры от любой исходной к любой заданной. На рис. 7 приведен пример графовой траектории, соответствующей уравнению (11) для случая, когда исходным является граф-цепочка (рис. 7, а) либо граф-звезда (рис. 7, б), а графом-параметром  $\pi(n)$  — бинарное дерево. На рис. 8 приведены графовые траектории для тех же исходных графов и того же графа-параметра, но при  $F=F_2$  в уравнении (11).

В заключение сделаем следующее замечание. Если ввести в рассмотрение иной способ дискретизации и определить бинарную (не коммутативную) операцию так:

$$(24) \quad \varphi \boxplus \psi = \begin{cases} [(\varphi(n) + \psi(n))/2] & \text{при } \varphi(n) \geq \psi(n), \\ [(\varphi(n) + \psi(n))/2] + 1 & \text{при } \varphi(n) < \psi(n) \end{cases}$$

или так:

$$(25) \quad \varphi \boxminus \psi = \begin{cases} [\sqrt{\varphi(n)\psi(n)}] & \text{при } \varphi(n) \geq \psi(n), \\ [\sqrt{\varphi(n)\psi(n)}] + 1 & \text{при } \varphi(n) < \psi(n), \end{cases}$$

то уравнение (11) переводит любой начальный граф в  $\psi(n)$  (для операции (24)) и любое начальное дерево в  $\psi(n)$  (для операции (25)).

**Унарные операции, зависящие от параметра.** Рассмотрим теперь уравнения первого порядка, возникающие при применении унарных операций, зависящих от параметра  $\rho(n)$ , т. е.

$$(26) \quad \varphi^{t+1}(n) = \varphi^t(n) + \rho_t(n),$$

где  $p_1(n)$  принимает значение из множества  $\{-1, 0, +1\}$  или

$$(27) \quad \varphi^{i+1}(n) = [p_2(n)\varphi^i(n)],$$

где  $p_2(n) = 1/n$ .

Рассуждая по аналогии с бинарными операциями, но учитывая особенности функции  $p(n)$ , нетрудно показать, что для уравнения (27) всегда устанавливается равновесие  $\varphi^*(n) \equiv 0$ , т. е. эта операция «рассыпает» граф на изолированные вершины. В случае же уравнения (26) равновесным графом для начального графа  $\varphi^0(n)$  будет граф

$$\varphi^*(n) = \begin{cases} \varphi^0(n) & \text{при тех } n, \text{ где } p(n)=0, \\ 0 & \text{при тех } n, \text{ где } p(n)=-1, \\ n-1 & \text{при тех } n, \text{ где } p(n)=1. \end{cases}$$

Таким образом, уравнение (26) любой начальный граф переводит в граф, для которого точно указаны его локальные отличия от начального.

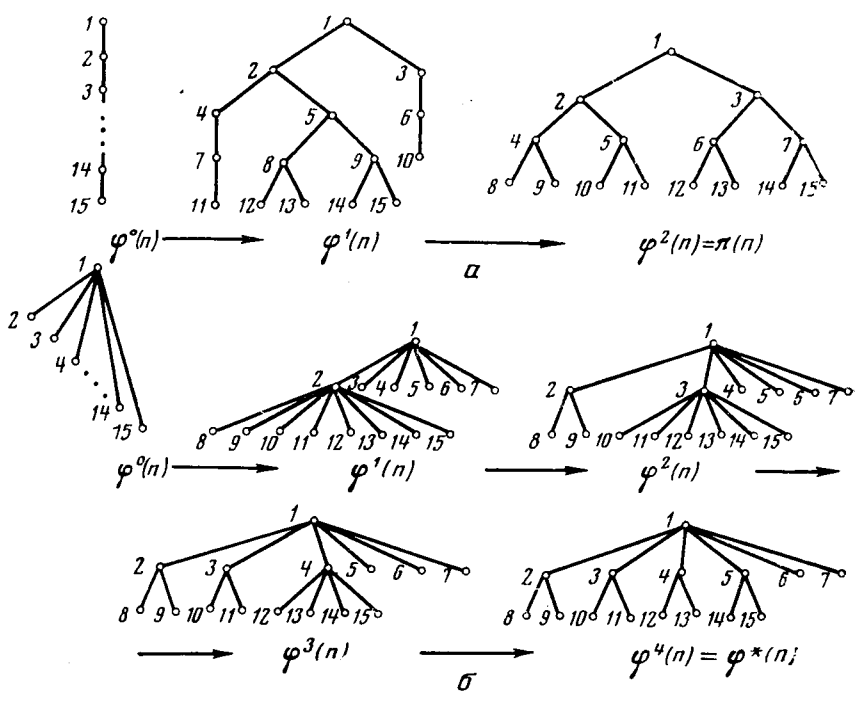


Рис. 8

Эти указания задаются «управлением перестройкой»  $p(n)$ , в которой зафиксировано, какая часть структуры должна остаться неизменной, какие вершины должны выпасть из структуры и стать независимыми от нее и, наконец, какие части структуры должны перестроиться в «строгую субординацию», т. е. в цепочечные структуры. Процесс перестройки заканчивается не больше чем за  $N$  шагов для начального графа  $\varphi^0(n)$  с  $N$  вершинами и происходит монотонно по расстоянию  $\rho$ . Доказательства этих фактов здесь не приводятся, так как они легко строятся по аналогии с доказательством теоремы 4.

На рис. 9 показан пример изменения бинарного дерева при применении уравнения (26) с  $p(n)=1$  на четных и  $p(n)=-1$  на нечетных  $n$ .

### 3. Уравнения высших порядков и системы уравнений

Уравнения порядка, больше первого, требуют присутствия в правой части бинарной или  $r$ -арной операции. Ограничимся рассмотрением примера уравнения второго порядка

$$(28) \quad \varphi^{t+1}(n) = [(\varphi^t(n) + \varphi^{t-1}(n))/2]$$

при заданных  $\varphi^0(n)$  и  $\varphi^{-1}(n)$  и аналогичного уравнения  $r$ -го порядка

$$(29) \quad \varphi^{t+1}(n) = [(\varphi^t(n) + \varphi^{t-1}(n) + \dots + \varphi^{t-r+1}(n))/r]$$

при заданных  $\varphi^0(n), \varphi^{-1}(n), \dots, \varphi^{-r}(n)$ .

Заметим прежде всего, что условию равновесия

$$(30) \quad \varphi^*(n) = [\varphi^*(n) + \varphi^*(n) + \dots + \varphi^*(n)/r]$$

удовлетворяет любой граф  $\varphi^*(n)$  и в этом смысле уравнения такого рода всегда «астатичны». Однако при каждой конкретной последовательности начальных графов устанавливается вполне определенный равновесный граф. Он задается  $\Pi$ -функцией  $\varphi^*(n)$ , значение которой при каждом  $n$  находится просто как предел соответствующей последовательности. Для уравнения (28) равновесным будет граф, задаваемый функцией

$$\varphi^*(n) = \varphi^0(n) + [2(\varphi^{-1}(n) - \varphi^0(n))/3].$$

Процесс установления равновесия заканчивается за конечное число шагов и происходит монотонно по расстоянию  $\rho$ . Таким образом, уравнения (28) и (29) описывают процесс перестройки структуры, причем в заданной начальной последовательности может быть зафиксирована как существующая структура, так и структуры, грубо описывающие промежуточные этапы перестройки. Возникающая графовая траектория переведет граф в равновесный, который будет в некотором смысле учитывать струк-

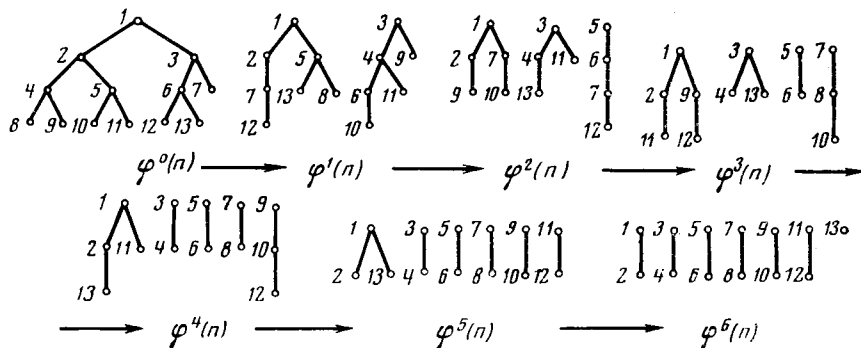


Рис. 9

туры, заданные в начальной последовательности  $\varphi^{-k}(n)$  ( $k=0, 1, \dots, r$ ), причем тем сильнее, чем меньше  $k$ .

При рассмотрении уравнений обсуждался лишь пример, когда правая часть состоит из сравнительно простых операторов. Для того чтобы выписать более сложные уравнения, необходима формализация каких-либо общих принципов или «законов жизни» структуры, определяющих закономерности ее перестройки на каждом шаге итерации. Решение уравнения означает тогда возможность предвидеть результаты действия этих общих законов. Цель данной работы состоит лишь в создании аппарата для такого рода исследований, а не в изучении внутренних законов, свойственных «жизни» тех структур, которые этим аппаратом описываются. Именно поэтому мы в статье не идем далее указания на адекватность сформулиро-

ванной задаче языка одного класса целочисленных функций и демонстрации поддерживающих этот факт примеров.

Это обстоятельство выступает с еще большей остротой при переходе к рассмотрению систем графодинамических уравнений. Ограничимся описанием одной содержательной задачи, приводящей к системе графодинамических уравнений, и ее рассмотрением.

Представим себе, что существуют две независимые структуры, описываемые соответственно функциями  $\varphi(n)$  и  $\psi(n)$ . Предположим далее, что возникает стремление организовать перестройку структуры  $\varphi(n)$  так, чтобы она приближалась к структуре  $\psi(n)$ , но сохраняла существенные свои

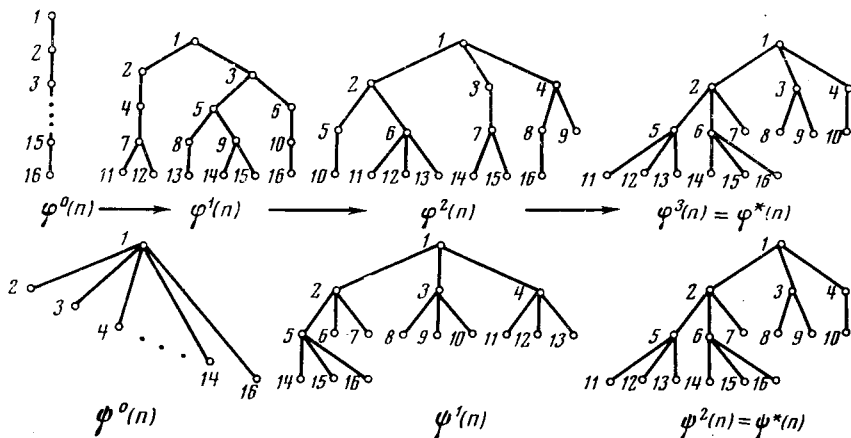


Рис. 10

свойства. Такая перестройка может быть организована, например, процедурой

$$(31) \quad \varphi^{t+1} = [ (k\varphi^t(n) + \psi(n)) / (k+1) ] \quad (k=1, 2, 3, \dots).$$

Если структура  $\psi(n)$  остается постоянной, (31) описывает итерационную структуру перехода структуры  $\varphi(n)$  к  $\psi(n)$ , причем, чем больше число  $k$ , тем меньше изменяется  $\varphi(n)$  за один шаг итерации. Представим себе, однако, что структура  $\psi(n)$  также старается приблизиться к  $\varphi(n)$  и при этом по тому же закону:

$$(32) \quad \psi^{t+1}(n) = [ (k\psi^t(n) + \varphi(n)) / (k+1) ].$$

Тогда такое «взаимное копирование» структур описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \varphi^{t+1}(n) &= [ (k\varphi^t(n) + \psi^t(n)) / (k+1) ], \\ \psi^{t+1}(n) &= [ (k\psi^t(n) + \varphi^t(n)) / (k+1) ] \end{aligned}$$

при заданных «начальных структурах»  $\varphi^0(n)$  и  $\psi^0(n)$ .

Коэффициент  $k$  в этих уравнениях содержательно означает как бы стремление каждой структуры при перестройке сохранить «свое» построение и на каждом шаге лишь несколько сместиться в сторону «подражаемого» построения.

Условие равновесия в этой задаче определяется системой функциональных уравнений

$$(33) \quad \begin{aligned} \varphi^*(n) &= [ (k\varphi^*(n) + \psi^*(n)) / (k+1) ], \\ \psi^*(n) &= [ (k\psi^*(n) + \varphi^*(n)) / (k+1) ]. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что любая пара совпадающих функций

$$\varphi^*(n) = \psi^*(n)$$

удовлетворяет системе (33). Содержательно это означает, что в результате действия системы (32) при любой паре исходных структур они станут одинаковыми, а от  $k$  зависит лишь характер графовых траекторий.

В качестве примеров графовых траекторий, описываемых системой (32), рассмотрим два случая, представленных на рис. 10 и 11. В обоих случаях положено  $k=2$  и принята за начальный граф  $\varphi^0(n)$ -цепочка, а за начальный граф  $\psi^0(n)$  в одном случае — веер (рис. 10), а в другом — набор несвязанных вершин (рис. 11).

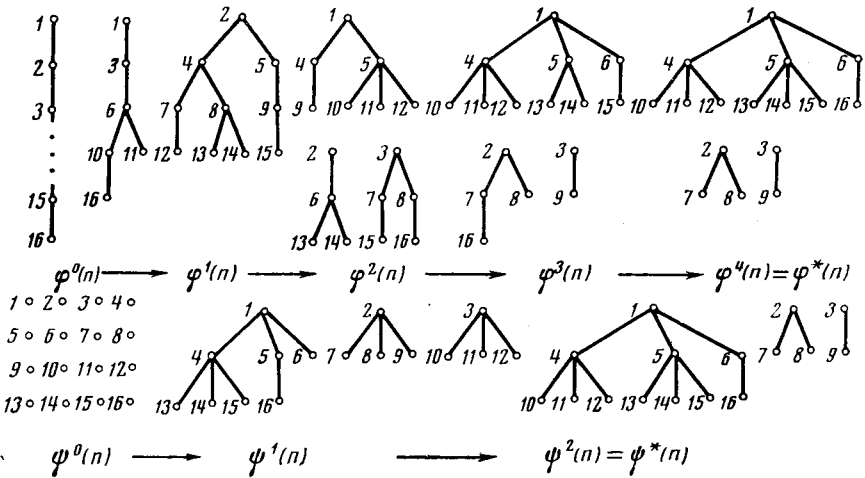


Рис. 11

Ограничиваясь приведенными примерами графовых уравнений, отметим в заключение, что при описании структуры П-функцией новые результаты связываются не с используемым математическим аппаратом — им служит теория целочисленных уравнений, а с содержательной трактовкой как возникающих уравнений, так и их решений. Благодаря этому «жизнь» иерархической структуры становится предметом формального анализа и оказывается возможным предвидеть результаты изменения структуры, если сами изменения задаются локально.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство теоремы 1.* Пусть  $F$  монотонно возрастает. Тогда для каждого значения  $n_0$  возможны три случая.

1.  $F(\varphi^0(n_0)) = \varphi^0(n_0)$ . Ясно, что в этом случае

$$\varphi^0(n_0) = \varphi^1(n_0) = \dots$$

2.  $F(\varphi^0(n_0)) < \varphi^0(n_0)$ . Обозначим  $\varphi^0(n_0) = k_0$ ,  $F(\varphi^0(n_0)) = k_1$ ,  $F(F(\varphi^0(n_0))) = k_2$  и т. д. и докажем, что последовательность  $k_0, k_1, k_2, \dots$  монотонно убывает и для любого  $i$   $k_i \geq 0$ . Заметим, что  $k_1 < k_0$  по условию. Пусть  $k_{i-1} > k_i$ , тогда в силу монотонности  $F(F(k_{i-1})) \geq F(k_i)$ , т. е.  $k_i \geq k_{i+1}$ , что и требовалось доказать.

3.  $F(\varphi^0(n_0)) > \varphi^0(n_0)$ .

Аналогично доказывается, что последовательность  $k_0, k_1, k_2, \dots$  монотонно возрастает, с другой стороны, она ограничена сверху числом  $n_0 - 1$ .

Очевидно, что если в случае 1, 2 или 3  $k_i = k_{i+1}$ , то для всех  $S > i$   $k_s = k_i$ . Поскольку  $0 \leq \varphi(n) \leq n - 1$  и  $\varphi(n)$  есть целое число, а для каждого  $n$  последовательность  $k_0, k_1, k_2, \dots$  монотонна, ясно, что для данной  $\varphi^0(n)$  существует единственная П-функция  $\varphi^*(n)$ , такая, что  $\varphi^*(n) = F(\varphi^*(n))$ .

*Доказательство теоремы 2.* Если  $F$  однонаправлена, то для любого  $n$  либо  $F(\varphi(n)) \geq \varphi(n)$ , либо  $F(\varphi(n)) \leq \varphi(n)$ . Пусть, например,  $F(\varphi(n)) \geq \varphi(n)$  для любого  $n$ , тогда при каждом  $n_0$  последовательность

$$\varphi^0(n_0), F(\varphi^0(n_0)), F(F(\varphi^0(n_0))), \dots$$

монотонно не убывает и ограничена сверху числом  $n^0 - 1$ . Следовательно,  $\varphi^*(n)$  — решение (14) — существует. Если  $F$  строго однонаправлена, то при каждом  $n_0$  имеем монотонно возрастающую последовательность, ограниченную сверху числом  $n_0 - 1$ , которое и есть предел. Аналогично рассматривается случай  $F(\varphi(n)) \leq \varphi(n)$ .

*Доказательство теоремы 3.* Если  $F$  — однонаправленная операция, то  $\varphi^0(n) \leq \varphi^*(n)$  или  $\varphi^0(n) \geq \varphi^*(n)$ , где  $\varphi^*(n)$  — решение уравнения (14) для этого процесса. Из однонаправленности  $F$  следует, что если  $\varphi^0(n) \leq \varphi^*(n)$ , то  $\varphi^0(n) \leq \varphi^i(n) \leq \varphi^*(n)$  и  $\varphi^i(n) \leq \varphi^j(n) \leq \varphi^*(n)$  при  $i \leq j$ . Отсюда непосредственно следует, что

$$\rho(\varphi^i, \varphi^*) \geq \rho(\varphi^{i+1}, \varphi^*).$$

Аналогично при  $\varphi^0(n) \geq \varphi^*(n)$  также

$$\rho(\varphi^i, \varphi^*) \leq \rho(\varphi^{i+1}, \varphi^*).$$

*Доказательство теоремы 4.* Если  $F = F_1$  и  $\varphi^0(n) \geq \pi(n)$ , то решение (14) есть  $\varphi^*(n) = \pi(n)$ . Если же для некоторого  $n_0$   $\varphi^0(n_0) < \pi(n_0)$ , то легко видеть, что  $\varphi^*(n_0) = \pi(n_0) - 1$ , так как, в силу принятого способа дискретизации, берется ближайшее меньшее целое. Если же  $F = F_2$ , то ясно, что при тех  $n$ , при которых  $\varphi^0(n) = 0$ , справедливо  $\varphi^*(n) = 0$ , а в тех точках, где  $\varphi^0(n) \geq \pi(n)$ , справедливо  $\varphi^*(n) = \pi(n)$ . Остается рассмотреть точки, где  $0 < \varphi^0(n) < \pi(n)$ . Если  $\varphi^i(n) = \pi(n) - 1$ , то

$$\varphi^{i+1}(n) = [\sqrt{(\pi(n) - 1)\pi(n)}] = \pi(n) - 1.$$

Если же  $\varphi^i(n) < \pi(n) - 1$ , то, поскольку  $\sqrt{k^2 - 2k} < k - 1$ , получаем  $\varphi^{i+1}(n) \leq \pi(n) - 2$ .

Классы  $S_{\pi^*}$  и  $S_{\pi^{**}}$  состоят из всех функций, принимающих вышеперечисленные значения.

*Доказательство теоремы 5.* Монотонность по  $\rho$  следует из неравенства  $|\varphi^i(n) - \varphi^*(n)| \leq |{}^{i+1}\varphi(n) - \varphi^*(n)|$ . Это неравенство очевидно для последовательностей  $k_{i+1} = k_i + c/2$  и  $k_{i+1} = \sqrt{k_i c}$  при целом  $c$ .

Оценка на число шагов (в случае  $F = F_1$ ) следует из рассмотрения неравенства  $N/2^k < 1$ , поскольку  $\max(\varphi(n) - \pi(n)) \leq N$ .

В случае  $F = F_2$ , если  $\varphi^0(n) = 1$  или  $\pi(n) = 1$ , оценка получается из неравенства

$$N^{2^{-k}} < 2.$$

Легко показать, что если  $\varphi^0(n) > 1$  и  $\pi(n) > 1$ , требуется меньше чем  $k$  шагов.

Поступила в редакцию  
3 июня 1976 г.

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М. А., Гусев Л. А., Смирнова И. М., Петров С. В. Динамический подход к анализу структур, описываемых графами (основы графодинамики). I. Автоматика и телемеханика, № 7, стр. 135—151, 1977.

#### A DYNAMIC APPROACH TO ANALYSIS OF STRUCTURES DESCRIBED BY GRAPHS (GRAPHODYNAMICS FUNDAMENTALS). II

M. A. AIZERMAN, L. A. GUSEV, I. M. SMIRNOVA,  
S. V. PETROV

An attempt is made to develop a language for analysis of dynamics in structures described as graphs.