

П. Ю. Чеботарев
Р. П. Агаев

МАТРИЧНАЯ ТЕОРЕМА О ЛЕСАХ И ЛАПЛАСОВСКИЕ МАТРИЦЫ ОРГРАФОВ

 **LAP**
LAMBERT
Academic Publishing

В ряде задач управления, системного анализа и информатики (таких как управление многоагентными системами, декомпозиция больших систем, кластеризация, агрегирование предпочтений, анализ сетей различной природы, включая Интернет и социальные сети, теория баз данных, теория параллельных вычислений, химическая информатика, наукометрия и др.) графы, моделирующие соответствующие структуры, исследуют посредством анализа сопоставленных им матриц. Характеристики таких матриц — их ранги, спектры, собственные подпространства, собственные проекторы, миноры, обратные и обобщенно-обратные матрицы — доставляют важную информацию не только о соответствующих графах и сетях, но и о характере функционирования моделируемых систем. Всё перечисленное составляет область применения алгебраической теории графов, включающей спектральную теорию графов. Но кроме того, это просто красивая математическая дисциплина, в которой немало интересных задач уже решено, а многие только ждут своего решения. Монография посвящена новому, сложному и при этом одному из самых перспективных разделов алгебраической теории графов — лапласовской теории орграфов. «Стержневой» результат монографии — матричная теорема о лесах.



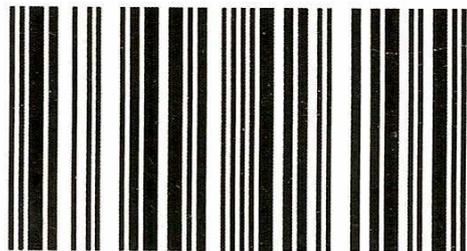
П. Ю. Чеботарев

П.Ю.Чеботарев, д.ф.-м.н., в.н.с. Института проблем управления РАН, специалист по алгебраической теории графов, теории принятия решений, теории голосований.



Р.П.Агаев, к.т.н., с.н.с. Института проблем управления РАН и доцент РГГУ, специалист по алгебраической теории графов.

Подготовлена к защите докторская диссертация.



978-3-8454-2610-5

**П. Ю. Чеботарев
Р. П. Агаев**

**МАТРИЧНАЯ ТЕОРЕМА О ЛЕСАХ И ЛАПЛАСОВСКИЕ
МАТРИЦЫ ОРГРАФОВ**

**П. Ю. Чеботарев
Р. П. Агаев**

**МАТРИЧНАЯ ТЕОРЕМА О ЛЕСАХ
И ЛАПЛАСОВСКИЕ МАТРИЦЫ
ОРГРАФОВ**

LAP LAMBERT Academic Publishing

Impressum/Imprint (nur für Deutschland/only for Germany)

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Alle in diesem Buch genannten Marken und Produktnamen unterliegen warenzeichen-, marken- oder patentrechtlichem Schutz bzw. sind Warenzeichen oder eingetragene Warenzeichen der jeweiligen Inhaber. Die Wiedergabe von Marken, Produktnamen, Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen u.s.w. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Coverbild: www.ingimage.com

Verlag: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG
Dudweiler Landstr. 99, 66123 Saarbrücken, Deutschland
Telefon +49 681 3720-310, Telefax +49 681 3720-3109
Email: info@lap-publishing.com

Herstellung in Deutschland:
Schaltungsdienst Lange o.H.G., Berlin
Books on Demand GmbH, Norderstedt
Reha GmbH, Saarbrücken
Amazon Distribution GmbH, Leipzig
ISBN: 978-3-8454-2610-5

Только для России и стран СНГ

Библиографическая информация, изданная Немецкой Национальной Библиотекой. Немецкая Национальная Библиотека включает данную публикацию в Немецкий Книжный Каталог; с подробными библиографическими данными можно ознакомиться в Интернете по адресу <http://dnb.d-nb.de>.

Любые названия марок и брендов, упомянутые в этой книге, принадлежат торговой марке, бренду или запатентованы и являются брендами соответствующих правообладателей. Использование названий брендов, названий товаров, торговых марок, описаний товаров, общих имён, и т.д. даже без точного упоминания в этой работе не является основанием того, что данные названия можно считать незарегистрированными под каким-либо брендом и не защищены законом о брендах и их можно использовать всем без ограничений.

Изображение на обложке предоставлено: www.ingimage.com

Издатель: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG
Dudweiler Landstr. 99, 66123 Saarbrücken, Germany
Телефон +49 681 3720-310, Факс +49 681 3720-3109
Email: info@lap-publishing.com

Напечатано в России
ISBN: 978-3-8454-2610-5

АВТОРСКОЕ ПРАВО ©2011 принадлежат автору и LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG и лицензиарам
Все права защищены. Saarbrücken 2011

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Матричная теорема о лесах	13
1.1. Необходимые определения и простые факты	13
1.1.1. Общие понятия теории графов	13
1.1.2. Структура орграфа	15
1.1.3. Деревья и леса	16
1.1.4. Лапласовская матрица и матрица Кирхгофа	17
1.2. Матричная теорема о деревьях и связанные с ней исследования	19
1.2.1. Некоторые направления в исследовании лапласовских матриц графов	19
1.2.2. Матричные теоремы о деревьях для неориентированных и ориентиро- ванных графов	20
1.3. Матричная теорема о лесах	21
1.4. Доказательства матричной теоремы о лесах	22
1.4.1. Первое доказательство	23
1.4.2. Второе доказательство	26
Глава 2. О нахождении собственного проектора и компонент матрицы	31
2.1. Введение	31
2.1.1. О приложениях обобщенно обратной матрицы по Дразину, собственно- го проектора и компонент матрицы	31
2.1.2. Определения	32
2.1.3. Вспомогательные утверждения	32
2.1.4. О задачах, решаемых в данной главе	33
2.2. Характеризации собственного проектора	33
2.3. Вычисление собственного проектора A с помощью аннулирующего многочлена для A^u	35
2.4. Нахождение компонент матрицы и ее минимального многочлена	37
2.5. Собственный проектор и компоненты матрицы, собственные значения ко- торой известны	38
Глава 3. Исследование матрицы максимальных исходящих лесов орграфа	41
3.1. Введение	41
3.2. Простейшие свойства остовных исходящих лесов	42
3.3. Максимальные исходящие леса, базы и недоминируемые узлы	45

3.4.	Конструктивное описание максимальных исходящих лесов	47
3.5.	Матричные теоремы о лесах в параметрической форме	48
3.6.	Матрица максимальных исходящих лесов	49
3.7.	Цепи Маркова, связанные с оргграфом, и матричная теорема о деревьях для цепей Маркова	58
3.8.	Матрицы лесов и задача структурирования оргграфа	62
Глава 4. Остовные леса оргграфа и связанные с ними матрицы		67
4.1.	Введение	67
4.2.	Некоторые свойства исходящих и входящих лесов	68
4.3.	Матрицы исходящих лесов и переходные вероятности цепей Маркова	69
4.4.	Выражение матриц лесов через матрицу Кирхгофа и его следствия. Матричная теорема о росте лесов	71
4.5.	О некоторых линейных операторах, связанных с оргграфом	78
4.6.	Псевдообратная и групповая обратная матрицы для матрицы Кирхгофа	82
4.7.	Об области Гершгорина и аннулирующем многочлене матрицы Кирхгофа	86
Глава 5. Исследование лапласовского спектра оргграфов		89
5.1.	Введение	89
5.2.	Некоторые свойства лапласовского спектра неориентированного графа	92
5.3.	О связях лапласовских и стохастических матриц	95
5.4.	Связь спектров лапласовских и стохастических матриц	96
5.5.	Область, содержащая лапласовские спектры	100
5.6.	Многоугольник лапласовских собственных значений	101
5.7.	Об асимптотических свойствах лапласовских спектров	103
5.8.	Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц оргграфов	104
5.8.1.	Децентрализованное управление многоагентными системами	104
5.8.2.	Непрерывная модель распределенного согласования характеристик	105
5.8.3.	Сходимость процесса согласования	106
5.8.4.	Ранг лапласовской матрицы и критерий сходимости процесса согласования	107
5.8.5.	Итерационная модель распределенного согласования характеристик	108
5.8.6.	О других задачах децентрализованного управления	110
Глава 6. Какие оргграфы с кольцевой структурой существенно цикличны?		115
6.1.	Введение	115
6.2.	Вспомогательные леммы	118
6.3.	Существенно циклические оргграфы кольцевой структуры	119

6.3.1. Орграфы Γ_n^1 с n дугами и Γ_n^2 с $2n$ дугами	120
6.3.2. Орграфы Γ_n' с $2n - 1$ дугами	120
6.3.3. Орграфы Γ_n'' с $2n - 2$ дугами	121
6.3.4. Орграфы Γ_n с m ($n < m < 2n - 2$) дугами	127
6.4. Существенная цикличность взвешенных орграфов	131
6.5. Подсчет числа остовных деревьев и нахождение спектра цикла	136
6.5.1. О числе остовных деревьев в орграфах с кольцевой структурой	136
6.5.2. О выводе формулы для спектра неориентированного цикла	137

Глава 7. Меры связанности вершин графов, их свойства и характеристические условия 139

7.1. О приложениях структурных индексов графов	139
7.1.1. Транспортные сети	139
7.1.2. Химическая информатика, наукометрия, семантические сети	140
7.1.3. Социальные сети	142
7.1.4. Структурные индексы графов в социометрии	143
7.2. Нормативные свойства показателей связанности	145
7.3. Исследование простейших показателей связанности вершин графов	147
7.3.1. Путевая достижимость	147
7.3.2. Надежность связи как мера связанности вершин	149
7.3.3. Величина максимального потока (минимального разреза) как мера связанности вершин	151
7.3.4. Маршрутная достижимость	151
7.3.5. Метризуемость близости	155
7.4. К формализации понятия близости: функции Σ -близости	156
7.5. Достижимость, двойственная классическому расстоянию на графе	162

Глава 8. Меры связанности вершин графов, построенные с помощью матричной теоремы о лесах 167

8.1. Свойства относительной лесной доступности для мультиграфов	167
8.2. Свойства относительной лесной доступности для мультиорграфов	173
8.3. Составляющие относительной лесной доступности	176
8.4. Достижимость по «густым» лесам, связанная с обобщенным обращением лапласовской матрицы графа	178
8.5. Об особенностях показателей близости вершин графов	183
8.6. Продолжение исследования показателей близости, связанных с классификацией лесов, для орграфа	187
8.6.1. Вес максимальных исходящих лесов как показатель близости вершин орграфа	187

8.6.2. Относительная лесная доступность: параметрический случай	189
8.6.3. Достижимость по «густым» лесам	193
8.7. Относительная лесная доступность и производные структурные индексы в задачах социометрии	196
8.8. Особенности показателей близости на примере фрагмента транспортной сети	197
8.9. Несколько замечаний	199
Глава 9. Свойства лесной метрики графа	201
9.1. Введение	201
9.2. Изменение приведенного лесного расстояния между вершинами при усилении их связи	203
9.3. Соотношение лесных расстояний для пары графов, отличающихся одним ребром	205
9.4. Интерпретация лесной метрики графа	208
9.5. О связи лесной метрики и резисторной метрики графа	209
9.6. О логарифмических лесных расстояниях	212
Глава 10. Метод проекции в задаче о консенсусе и регуляризованный предел степеней стохастической матрицы	215
10.1. Введение	215
10.2. Основные термины и обозначения	216
10.3. Результаты из алгебраической теории графов, используемые в этой главе	218
10.4. Об условиях, гарантирующих достижение согласия в модели Де Гроота .	219
10.5. Характеризация области сходимости процедуры Де Гроота	221
10.6. Метод ортогональной проекции	224
10.7. Нахождение ортогонального проектора	226
10.8. На что влияют небазовые агенты?	227
10.9. Неортогональное проектирование на область сходимости	228
10.10. Метод ортогональной проекции в случае, когда все агенты — базовые . .	230
10.11. Об интерпретации метода ортогональной проекции	235
10.12. Снова о небазовых агентах	236
10.13. Регуляризованный предел стохастической матрицы	237
Заключение	239
Список литературы	241

Введение

В ряде задач управления, системного анализа и информатики (таких как управление многоагентными системами, декомпозиция больших систем, кластеризация, агрегирование предпочтений, анализ сетей различной природы, включая Интернет и социальные сети, теория баз данных, теория параллельных вычислений, химическая информатика, наукометрия и др.) графы, моделирующие соответствующие структуры, исследуют посредством анализа сопоставленных им матриц. Характеристики таких матриц — их ранги, спектры, собственные подпространства, собственные проекторы, миноры, коэффициенты характеристических многочленов, обратные и обобщенно-обратные матрицы — доставляют важную информацию не только о соответствующих графах и сетях, но и о характере функционирования моделируемых систем. Благодаря методам теории матриц эта важная информация может быть получена без обращения к трудоемким переборным алгоритмам.

Всё перечисленное составляет область применения алгебраической теории графов [99, 199, 325], включающей спектральную теорию графов [56, 162, 167, 168]. Но кроме того, это просто красивая математическая дисциплина, в которой немало интересных задач уже решено, а многие только ждут своего решения.

Монография посвящена новому, сложному и при этом одному из самых перспективных разделов алгебраической теории графов — лапласовской теории орграфов. «Стержневой» результат монографии — матричная теорема о лесах.

Совместное исследование графов и матриц

Алгебраическая теория графов занимается анализом взаимосвязи свойств графов и соответствующих им алгебраических структур, включая матрицы, и берет свое начало со знаменитой матричной теоремы о деревьях, полученной в середине XIX века в разных вариантах Кирхгофом [232, 233], Сильвестром [372] и Борхардтом [108].

Два наиболее разработанных направления в «матричной» теории графов связаны с исследованием матрицы смежности графа и его лапласовской¹ матрицы, по существу, отличающейся от матрицы смежности своей главной диагональю. Первое направление наиболее полезно при анализе маршрутно-циклической структуры графов, второе — при анализе их древесной (лесной) структуры. Первое направление развилось раньше [56], но в 90-е годы XX века стало ясно, что лапласовская алгебраическая теория графов не менее (если не более) фундаментальна. Следует отметить, что уже в 60–70-е гг. существенные продвижения в ней были получены работавшим тогда в московском Институте проблем

¹Своим названием она обязана процессу дискретизации оператора Лапласа, приводящему к матрицам такого вида.

управления Александром Кельмансом [34–36, 229] и чешским математиком Мирославом Фидлером [181, 185] (позже они не потеряли интереса к этой теме: [183, 184, 228]); необходимо упомянуть также раннюю работу [79].

К настоящему времени лапласовская теория неориентированных графов хорошо разработана. Еще в 90-е годы вышли обзоры Р. Грона и Р. Мерриса [203–205, 291, 292, 295] и Б. Мохара [303–305], а также монография Фэн Чунг [162], в которых были представлены оригинальные результаты этих авторов и систематизирован большой объем накопленных наукой знаний о связях графов и лапласовских матриц; см. также [100, 199].

Лапласовская теория *ориентированных* графов находится в начале своего развития. Она интересна и сложна как математическая теория, но существует и сильный практический стимул к ее развитию — ее многочисленные приложения.

А. Берман, автор классического руководства по теории матриц [95], в работе [96] называет разработку этой теории одним из важнейших перспективных направлений в науке, связывающей графы и матрицы.

Приложения лапласовской теории орграфов

Укажем некоторые области математики, системного анализа и управления, в которых ощущается сильная потребность в результатах лапласовской теории орграфов.

1. Лапласовские матрицы взвешенных орграфов и функции от них применяются в *теории цепей Маркова*.

2. *Децентрализованное управление многоагентными системами*. Линейный оператор согласования характеристик (достижения консенсуса), входящий в большинство дифференциальных и дискретных моделей распределенного управления, представляется лапласовской матрицей, соответствующей орграфу коммуникаций между агентами. При этом свойства траекторий (сходимость, устойчивость и др.) полностью или частично определяются спектром и собственными подпространствами данной лапласовской матрицы.

3. *Химическая информатика*. Задачи идентификации сложных органических молекул и поиска связей между их структурными инвариантами и физико-химическими свойствами веществ требуют анализа графов, представляющих молекулы, методами теории матриц. Лапласовские матрицы используются в этой области уже более четверти века.

4. *Построение алгебраических индексов графов*. Во многих приложениях необходимо сопоставлять вершинам графов, парам и наборам вершин, ребрам, а также графам в целом значения числовых характеристик, выражающих те или иные структурные свойства. Приведем несколько примеров. В задачах анализа социальных сетей *элементу* сети ставят в соответствие значения центральности/периферийности, совокупной силы связи с другими элементами, баланса входящих и исходящих связей и др.; *пару элементов* характеризуют показателями силы, длины, направления связей между ними, индексами сходства их профилей взаимодействия и «ролей» в сети; *дуги и пути* характеризуют пропускной способ-

ностью по отношению к информации и управляющим воздействиям, влиянием разрыва на степень связности сети; *сеть в целом* оценивают показателями связности, сплоченности, однородности, взаимности связей и т. д. Потребность в «оцифровке» возникает и при анализе/синтезе транспортных, компьютерных, финансовых, обменных, организационных, игровых, семантических, биологических и других сетей, а также баз данных. Еще один класс задач, требующий специальной оцифровки вершин графов, — агрегирование экспертных оценок, оценка силы участников «турниров», представленных произвольными оргграфами. Далее следует упомянуть весьма популярную в последнее десятилетие задачу ранжирования интернет-страниц, найденных поисковой машиной по пользовательскому запросу (PageRank problem): ранжирование производится с использованием оргграфа ссылок страниц друг на друга. Задачи того же рода нужно решать при разработке алгоритмов распределенных компьютерных рекомендательных систем, где каждый пользователь, указав свои литературные, музыкальные, кинематографические и т. п. предпочтения, получает рекомендации — что еще почитать (послушать, посмотреть), сформированные на основе предпочтений пользователей со сходными вкусами. Отметим, наконец, задачи прогнозирования новых связей в графах.

Судя по результатам исследований последних лет, наиболее перспективные подходы к построению алгебраических индексов графов связаны с использованием лапласовских матриц.

5. *Кластер-анализ*. Один из основных подходов к кластеризации на графах связан с нахождением спектров и собственных подпространств их лапласовских матриц. Этот подход используется и для распознавания образов.

6. *Объект-объектная стратегия в анализе данных*. В анализе данных довольно распространенным приемом стал переход от матриц «объект–признак» к матрицам «объект–объект» и «признак–признак». Этот переход часто производят посредством построения несимметричных взвешенных отношений (выражающих превосходство, доминирование, покрытие и т. д.), что естественно приводит к ориентированным графам. Для их анализа могут быть использованы методы лапласовской теории оргграфов.

О цели работы

Лапласовские матрицы ориентированных графов и соотношения их свойств и свойств оргграфов изучены пока недостаточно; работ по этой теме опубликовано немного. Отчасти это связано со сложностью исследования комплексных спектров несимметричных лапласовских матриц. В то же время, как отмечено выше, потребность в таких исследованиях весьма велика.

Цель настоящей работы — частично восполнить этот пробел. В основном она включает теоретические результаты, опубликованные в разные годы. Приложения, которым в монографии уделяется наибольшее внимание, — построение структурных индексов графов

и сетей и управление многоагентными системами.

Основной предмет исследования — взаимосвязи между структурными свойствами ориентированных и неориентированных графов, свойствами определяемых ими матриц и особенностями функционирования систем, моделируемых графами и орграфами.

Общая задача — разработать основы лапласовской теории ориентированных графов и ее применений. Анализ лапласовских матриц неизбежно приводит к исследованию «лесной» структуры орграфов. В связи с этим при разработке указанной теории постепенно осознается необходимость решения следующих конкретных задач:

- Исследование лапласовского спектра орграфа;
- Исследование множества остовных² лесов (ор)графа;
- Установление соотношений между матрицами лесов с одной стороны и лапласовской матрицей, ее собственным проектором, матрицами, обобщенно обратными к ней, и другими матрицами орграфа — с другой;
- Разработка методов анализа (ор)графов с помощью классификации остовных лесов и с использованием матриц лесов, построение «лесных метрик» графов;
- Разработка основ применения полученных результатов к построению структурных индексов графов и управлению многоагентными системами.

О некоторых результатах

Перечислим некоторые из полученных результатов.

- Доказана матричная теорема о лесах, обобщающая классическую матричную теорему о деревьях. На ее основе построено новое семейство структурных индексов графов. Введен класс лесных метрик графа и изучены его свойства; установлены связи между лесными метриками и резисторной метрикой графа.
- Получены выражения для собственных проекторов, компонент и псевдообратной по Дразину квадратной матрицы с использованием аннулирующего многочлена для любой степени A^u матрицы A , где u мажорирует индекс A .
- Изучена лесная структура графов и орграфов и алгебраические свойства матриц, представляющих остовные леса. Доказано, что матрица максимальных входящих лесов орграфа является собственным проектором его лапласовской матрицы. Следствие этого факта — матричная теорема о деревьях для цепей Маркова. Матрицы лесов проинтерпретированы в терминах вероятностей многошаговых переходов цепей Маркова. Получены явные выражения и топологические интерпретации для псевдообратных по Дразину и Муру-Пенроузу лапласовских матриц графов и орграфов.

² *Остовным* называют подграф, множество вершин которого совпадает с множеством вершин графа; лес — граф без циклов.

- Доказана «матричная теорема о росте лесов».
- Локализована область спектров лапласовских матриц орграфов. Получена теорема о равенстве размерности ядра лапласовской матрицы и лесной размерности орграфа. Результаты анализа лапласовских спектров орграфов применены к исследованию моделей согласования характеристик в децентрализованном управлении многоагентными системами.
- Введено понятие существенной цикличности орграфов. Получено необходимое и достаточное условие существенной цикличности для орграфов с кольцевой структурой. Получены первые результаты о существенной цикличности взвешенных орграфов.
- Разработан нормативный подход к анализу мер близости вершин графов и орграфов. Введено понятие функций Σ -близости и установлена их двойственность метрикам.
- Разработан метод проекции для согласования мнений агентов в случае, когда их матрица влияний, входящая в модель Де Гроота, — правильная, но не обязательно регулярная. Исследованы свойства метода и получена интерпретация итоговых весов агентов в терминах остовных исходящих лесов в орграфе влияний. Показано, что итоговая матрица метода ортогональной проекции может трактоваться как регуляризованный предел степеней стохастической матрицы.

Результаты работы могут быть использованы (и уже используются) для дальнейшего развития теории и в приложениях теории графов: при анализе социальных, семантических, транспортных и компьютерных сетей, в химической информатике, наукометрии, агрегировании предпочтений, но особенно — в задачах управления многоагентными системами и при построении структурных индексов графов. Применение некоторых результатов в задачах агрегирования предпочтений (в монографии эта тема подробно не рассматривается) разработано в [44–46, 57–62, 146, 149–151, 154].

Краткое содержание монографии

В главе 1 дан обзор направления в алгебраической теории графов, связанного с матричной теоремой о деревьях, сформулирована матричная теорема о лесах и приведены два ее доказательства.

В главе 2 получены выражения для собственного проектора (главного идемпотента) произвольной вырожденной матрицы A , ее компонент, минимального многочлена и псевдообратной по Дразину A^D через любой ненулевой аннулирующий многочлен для A^u , где $u \geq \text{ind } A$.

В главе 3 изучены свойства максимальных исходящих лесов взвешенного орграфа и соответствующей им матрицы. Доказано, что матрица максимальных входящих лесов является собственным проектором лапласовской матрицы орграфа. Получена теорема о

равенстве размерности орграфа по входящим лесам и размерности ядра его лапласовской матрицы. Рассмотрены *цепи Маркова, связанные со взвешенным орграфом*, и показано, что простым следствием доказанных в главе утверждений является *матричная теорема о деревьях для цепей Маркова* (в англоязычной литературе — Markov chain tree theorem). Описано применение матрицы максимальных лесов орграфа в задаче выявления его структуры.

В главе 4 изучается множество всех остовных исходящих лесов орграфа и связанные с ним матрицы. Показано, что нормированная матрица исходящих лесов орграфа является матрицей переходных вероятностей в геометрической модели наблюдения за цепью Маркова. Псевдообратная \tilde{L}^+ и групповая обратная $\tilde{L}^\#$ матрицы для матрицы Кирхгофа \tilde{L} выражены через матрицу максимальных исходящих лесов орграфа. Матрицы исходящих лесов с заданным числом дуг представлены многочленами от матрицы Кирхгофа; с помощью этого представления дано новое доказательство матричной теоремы о лесах и некоторых других известных тождеств. Доказана *матричная теорема о росте лесов*. Для матрицы Кирхгофа указан аннулирующий многочлен, степень которого определяется размерностью орграфа по исходящим лесам.

В главе 5 изучается спектр несимметричных лапласовских матриц, а также соотношение спектров лапласовских и стохастических матриц. Показано, что нормированные лапласовские матрицы \tilde{L} являются полусходящимися. Установлено, что кратность собственного значения 1 нормированной лапласовской матрицы на единицу меньше размерности по входящим лесам дополнительного орграфа. Спектры матриц \tilde{L} принадлежат пересечению двух кругов с центрами в точках $1/n$ и $1 - 1/n$ и радиусом $1 - 1/n$. Кроме того, область, их содержащая, входит в пересечение двух определенных в данной главе угловых областей с вершинами 0 и 1 и полосы $|\operatorname{Im}(z)| \leq \frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}$ (в пределе — полоса $|\operatorname{Im}(z)| < \frac{1}{\pi}$). Построен многоугольник, все точки которого являются собственными значениями нормированных лапласовских матриц порядка n . Рассмотрено применение результатов глав 3–5 к анализу моделей согласования характеристик в многоагентных системах.

В главе 6 вводится понятие существенно циклического орграфа: это орграф, лапласовский спектр которого не является чисто действительным. Не решенная в общей постановке задача характеристики существенно циклических орграфов полностью решена в классе невзвешенных орграфов с кольцевой структурой — орграфов, состоящих из двух «встречных» гамильтоновых циклов, в одном из которых удалено произвольное число дуг. Согласно полученному критерию орграфы с кольцевой структурой и фиксированным числом вершин являются существенно циклическими за исключением (с точности до изоморфизма) трех орграфов: орграфа, из циклов которого не удалено ни одной дуги, орграфа, где из одного цикла удалена одна дуга, и орграфа, где из одного из циклов удалены две «наиболее далекие» друг от друга дуги. В случае взвешенных орграфов дана характеристика существенной циклическости при числе вершин, равном трем: необходимым и достаточным условием здесь является выполнение строгого неравенства треугольника

для квадратных корней из разностей весов дуг. Для взвешенных орграфов с бóльшим числом вершин структурный критерий существенной цикличности пока не получен, но некоторые достаточные условия также включают неравенство треугольника. Математический аппарат главы 6 основан на использовании многочленов Чебышева. Ее побочным результатом является теорема о действительности корней многочленов, на единицу отличающихся от произведений многочленов Чебышева второго рода.

В главе 7 рассматриваются приложения *структурных индексов графов* и вводятся нормативные условия, характеризующие показатели близости вершин графов и орграфов. Доказаны теоремы о свойствах ряда естественных показателей близости — путевой достижимости, маршрутной достижимости, максимального потока/минимального разреза, надежности связи, показателя, двойственного классическому расстоянию на графе. Эти свойства должны учитываться при выборе мер близости в прикладных задачах, некоторые из которых также обсуждаются в данной главе. Рассмотрено неравенство треугольника для функций близости — аналог классического неравенства треугольника для метрик. Введено понятие функций Σ -близости; установлено, что в определенном смысле эти функции двойственны метрикам.

В главе 8 исследованы свойства *относительной достижимости по лесам* — меры близости вершин графов, введенной с помощью матричной теоремы о лесах. Рассматриваются применения этого показателя, а также связанные с ним структурные индексы графов. Получена теоретико-графовая интерпретация матрицы, обобщенно обратной к лапласовской матрице взвешенного мультиграфа.

В главе 9 изучаются *лесные метрики графов* — класс расстояний, определенный с помощью матричной теоремы о лесах. Получены и проинтерпретированы соотношения, выражающие приращения *лесного расстояния* и *относительной достижимости по лесам* между вершинами взвешенного мультиграфа при его элементарных трансформациях. Дана интерпретация лесного расстояния между вершинами в терминах вероятности случайного выбора «фрагментации» графа, разделяющей эти вершины. Установлены две взаимосвязи между лесной метрикой и широко используемой в приложениях резисторной метрикой мультиграфа. Кратко представлены результаты исследования логарифмической лесной метрики.

В главе 10 предложен и изучен метод ортогональной проекции для согласования характеристик агентов (в многоагентной системе) в случае, когда их матрица влияний, входящая в модель Де Гроота, — правильная, но не обязательно регулярная. Этот метод на первом этапе отображает пространство начальных мнений на специальное подпространство — область сходимости процедуры Де Гроота, любой вектор которого дальнейшей итеративной коррекцией приводится к консенсусу. Исследованы свойства метода и получена интерпретация итоговых весов агентов в терминах остовных исходящих деревьев в орграфе влияний. Установлено, что итоговая матрица метода ортогональной проекции может рассматриваться как регуляризованный предел степеней стохастической матрицы.

В монографии использованы материалы докторской диссертации П.Ю. Чеботарева «Методы лапласовской теории орграфов в структурном анализе систем», защищенной в декабре 2008 г. В монографию не включены две главы из диссертации, посвященные сравнительно автономной теме — агрегированию неполных предпочтений. Монография представляет также ряд новых результатов. К ним относятся, в частности, все утверждения глав 6 и 10 и раздела 9.6.

Работа над монографией частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 09-07-00371-а) и Программой Президиума РАН «Математическая теория управления».

Глава 1

Матричная теорема о лесах

В данной главе вводятся основные определения и даны доказательства матричной теоремы о лесах. Наиболее ранние публикации, где она приводится, — [148, 153]. Направление, к которому относится эта теорема, называется алгебраической теорией графов и берет начало с классической матричной теоремы о деревьях, полученной в разных вариантах Кирхгофом [232], Сильвестром [372] и Борхардтом [108]. Матричная теорема о лесах появилась как результат поиска интерпретации оценок сравниваемых объектов в обобщенном методе суммы очков [61, 146], служащем для агрегирования неполных предпочтений. Аналоги этой теоремы были также представлены в работах Рассела Мерриса [293, 294] (для невзвешенных неориентированных графов, с использованием результатов [153] и с доказательством, основанным на теореме Чайкена [133]) и Фэн Чунг [161]. Данная глава написана в основном по материалам работ [67, 142, 148, 152]. Ее результаты использовались в [81, 82, 85, 87, 92, 106, 116, 130, 155, 156, 187, 188, 190–192, 194, 201, 218, 234, 243–247, 249, 250, 265–267, 274, 318, 320, 333, 335, 336, 352, 356, 357, 362, 365, 366, 400, 401, 403, 407, 408, 410, 411, 413] и др.; см. также [97].

1.1. Необходимые определения и простые факты

1.1.1. Общие понятия теории графов

В терминологии теории графов мы следуем в основном [52, 211].

Пусть G — взвешенный мультиграф с множеством вершин $V(G) = \{1, \dots, n\}$ ($n > 1$) и мультимножеством ребер $E(G)$. Ребро — неупорядоченная пара вершин. $E(G)$ — мультимножество, поскольку в мультиграфе допускаются кратные ребра.

Пусть Γ — взвешенный мультиорграф с множеством вершин $V(\Gamma) = \{1, \dots, n\}$ ($n > 1$) и мультимножеством дуг $E(\Gamma)$. Дуга — упорядоченная пара вершин. $E(\Gamma)$ — мультимножество, поскольку в мультиорграфе допускаются кратные дуги.

Ребрам (дугам) соответствуют *веса*. ε_{ij}^p — обозначение веса¹ p -го ребра (дуги) из i в j . Веса — строго положительные действительные числа. «Невзвешенные» мультиграфы могут быть представлены как взвешенные с весами ребер (дуг), равными 1.

Подграф мультиграфа G есть мультиграф, вершины и ребра которого принадлежат множествам вершин и ребер G .

Остовный подграф G — подграф G с тем же множеством вершин, что у G .

¹В некоторых главах вес будет обозначаться через w_{ij}^p ; это будет явно указываться.

Маршрут в мультиграфе G — это чередующаяся последовательность вершин и ребер, которая начинается и заканчивается вершинами и где каждое ребро стоит между двумя инцидентными ему вершинами.

Путь (простая цепь) в мультиграфе G — это маршрут, в котором все вершины (а следовательно, и ребра) различны. Иногда путь будет рассматриваться как подграф G .

Цикл в мультиграфе G — это маршрут, в котором имеется хотя бы одно ребро, все ребра различны, и первая вершина совпадает с последней. Цикл называется *простым*, если в нем первая и последняя вершина образуют единственную пару совпадающих вершин.

Мультиграф — *связный*, если для любой пары его вершин существует маршрут, начинающийся в одной и заканчивающийся в другой вершине.

Компонента мультиграфа G — максимальный (по включению) связный подграф G . Аналогичные понятия вводятся для мультиорграфов.

*Подграф*² мультиорграфа Γ есть мультиорграф, вершины и дуги которого соответственно принадлежат множествам вершин и дуг Γ .

Остовный подграф мультиорграфа Γ — это подграф с множеством вершин $V(\Gamma)$.

Полустепенью захода $\text{id}(w)$ вершины w называют число дуг, входящих в w . *Полустепенью исхода* $\text{od}(w)$ вершины w — число дуг, исходящих из w .

Если $\text{id}(w)=0$, вершину w будем иногда называть *недоминируемой*; если $\text{id}(w) \geq 1$, то w — *доминируемая* вершина.

Вершина — *изолированная*, если в Γ нет инцидентных ей дуг.

Маршрутом в мультиорграфе называется чередующаяся последовательность вершин и дуг $w_0, e_1, w_1, \dots, e_k, w_k$, в которой каждая дуга e_i есть (w_{i-1}, w_i) . Если в последовательности каждая дуга e_i может быть как (w_{i-1}, w_i) , так и (w_i, w_{i-1}) , то последовательность называется *полумаршрутом*.

Путь в мультиорграфе — это маршрут, в котором все вершины различны.

Контур — маршрут, где $w_0 = w_k$, а остальные вершины различны и отличны от w_0 .

Вершина w *достижима* из вершины z , если $w = z$ или в мультиорграфе существует путь из вершины z в вершину w .

Полупуть — это чередующаяся последовательность вершин и дуг $w_0, e_1, w_1, \dots, e_k, w_k$, где каждой дугой e_i может быть как (w_{i-1}, w_i) , так и (w_i, w_{i-1}) и все вершины различны. Аналогично *полуконтур* — это чередующаяся последовательность вершин и дуг $w_0, e_1, w_1, \dots, w_{k-1}, e_k, w_0$, где каждой дугой e_i может быть как (w_{i-1}, w_i) , так и (w_i, w_{i-1}) , и все вершины w_0, \dots, w_{k-1} различны.

Через $\mathcal{E} = (\varepsilon_{ij})$ обозначим матрицу суммарных весов ребер (дуг) для пар вершин:

²В литературе (см., например, [33]) этот объект иногда называют *частью* Γ , а *подграф* Γ' мультиорграфа Γ определяют как часть, множеством вершин которой $V(\Gamma')$ является некоторое подмножество $V(\Gamma)$, а множеством дуг образуют все дуги из $E(\Gamma)$, для которых обе инцидентные вершины принадлежат $V(\Gamma')$. Такой подграф Γ' орграфа Γ будем называть *сужением* Γ на множество $V(\Gamma')$.

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{p=1}^{n_{ij}} \varepsilon_{ij}^p, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

где n_{ij} — число ребер (дуг), соединяющих i и j . Элемент ε_{ij} матрицы \mathcal{E} равен нулю тогда и только тогда, когда из вершины i нет ребер (дуг) в вершину j .

Произведение весов всех ребер (дуг) подграфа H мультиграфа G (мультиорграфа Γ) будем называть *весом H* и обозначать $\varepsilon(H)$. Вес подграфа, не имеющего ребер (дуг), принимается равным 1. Для любого непустого множества подграфов \mathcal{G} его *вес* есть

$$\varepsilon(\mathcal{G}) = \sum_{H \in \mathcal{G}} \varepsilon(H). \quad (1.1)$$

Вес пустого множества полагается равным нулю.

1.1.2. Структура орграфа

Мультиорграф называется *сильно связным* (или *сильным*), если любые две его вершины взаимно достижимы, *односторонне связным*, если из любых двух его вершин хотя бы одна достижима из другой, *слабо связным*, если любые две его различные вершины соединены полумаршрутом.

Сужение Γ на любой класс эквивалентности отношения взаимной достижимости вершин называется *сильной компонентой*, или *бикомпонентой*, или *ориентированным листом* Γ . Аналогично *слабые компоненты* Γ — сужения Γ на классы эквивалентности вершин по отношению связности полупутем. Отношение односторонней достижимости вершин, вообще говоря, не является отношением эквивалентности, так как может не быть транзитивным. Тем не менее, максимальные (по включению множеств вершин) односторонне связные подграфы Γ иногда называют *односторонними компонентами* Γ . В отличие от сильных и слабых компонент они могут перекрываться.

Пусть $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ — все сильные компоненты Γ . *Конденсация* (или *факторграф*, или *листовая композиция*, или *граф Герца*) Γ^* мультиорграфа Γ — это орграф с множеством вершин $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_r\}$, где дуга из Γ_i в Γ_j принадлежит $E(\Gamma^*)$, если в Γ имеется хотя бы одна дуга, идущая из некоторой вершины компоненты Γ_i в вершину компоненты Γ_j . Конденсация любого мультиорграфа Γ не имеет контуров.

Вершинной базой мультиорграфа Γ называют любое минимальное (в смысле включения) множество вершин Γ , из которого достижимы все вершины Γ . Очевидно, что условие минимальности можно эквивалентно заменить условием взаимной недостижимости всех элементов вершинной базы.

Если в мультиорграфе нет контуров, то его вершинная база, очевидно, единственна и состоит из всех недоминируемых вершин [33, 52]. Поэтому те сильные компоненты Γ , которым соответствуют недоминируемые вершины Γ^* , иногда называют *базовыми бикомпонентами* Γ [33]. Множество вершин базовой бикомпоненты мы будем называть *недоминируемым узлом* в Γ .

Определение 1.1. Непустое подмножество вершин $K \subseteq V(\Gamma)$ мультиорграфа Γ — *недоминируемый узел* в Γ , если все вершины, принадлежащие K , взаимно достижимы, и нет дуг (w_j, w_i) , где $w_j \in V(\Gamma) \setminus K$, $w_i \in K$.

«Минимальный» пример недоминируемого узла — одноэлементное множество, содержащее недоминируемую вершину (если таковые имеются в Γ). «Максимальный» пример — множество всех вершин сильного мультиорграфа.

Следующее утверждение [33, 52] описывает все вершинные базы мультиорграфа.

Предложение 1.1. *Множество $W \subseteq V(\Gamma)$ — вершинная база мультиорграфа Γ тогда и только тогда, когда W образовано вершинами, взятыми по одной из каждого недоминируемого узла Γ .*

В работах Т. Шварца (см. [358]) недоминируемые узлы орграфа (бинарного отношения) называются «минимальными P -недоминируемыми множествами». Шварц вводит Обобщенную аксиому оптимального выбора (ГОСНА). Если на конечном множестве задано бинарное отношение (орграф) предпочтения, то *выбором* по аксиоме ГОСНА является объединение минимальных P -недоминируемых множеств данного орграфа³. Этот выбор интерпретируется как множество «лучших» (в смысле ГОСНА) элементов. Обзор правил выбора такого рода был дан в [22].

1.1.3. Деревья и леса

Лес — граф без циклов. *Дерево* — связный лес. Следовательно, любая компонента леса — дерево. *Корневой лес* — лес с одной отмеченной вершиной в каждой компоненте. *Корневое дерево* — дерево с одной отмеченной вершиной, называемой *корнем*. Формально это пара (T, r) , где T — дерево, а r — его вершина.

Орграф называется *ориентированным деревом* (*ориентированным лесом*), если граф, получаемый из него заменой всех дуг на ребра, есть дерево (лес).

Определения *ориентированного корневого дерева* и *ориентированного корневого леса* аналогичны определениям корневого дерева и корневого леса (мы будем иногда опускать слово «ориентированный», говоря о подграфах Γ).

Исходящее дерево есть ориентированное корневое дерево, содержащее направленные пути из корня (его называют также *источником*) во все другие вершины. *Входящее дерево* — ориентированное корневое дерево, содержащее направленные пути из всех вершин, отличных от корня, в корень (который в этом случае называют также *стоком*). В исходящем дереве только для одной вершины w , а именно, для корня, $\text{id}(w) = 0$, а полустепени захода остальных вершин равны 1. Во входящем дереве аналогичным свойством обладают полустепени исхода $\text{od}(w) = 0$. Говорят, что исходящее дерево исходит из своего корня, а входящее дерево входит в свой корень.

³Иногда это объединение называют *сильной базой* орграфа.

Исходящий лес (*входящий лес*) есть ориентированный корневой лес, все слабые компоненты которого — исходящие деревья (входящие деревья)⁴.

Для произвольного мультиорграфа Γ рассмотрим его остовные исходящие леса (очевидно, что таковые существуют для любого Γ). Они будут играть важную роль в дальнейшем изложении.

Определение 1.2. Остовный исходящий лес F мультиорграфа Γ назовем *максимальным исходящим лесом*, если в Γ нет остовного исходящего леса с числом дуг бóльшим, чем в F . Остовный входящий лес F мультиорграфа Γ назовем *максимальным входящим лесом*, если в Γ нет остовного входящего леса с числом дуг бóльшим, чем в F .

Очевидно, что каждый максимальный исходящий лес содержит минимально возможное число слабых компонент (исходящих деревьев), а значит, и корней; это число будем называть *размерностью по исходящим лесам*⁵ мультиорграфа и обозначать через v . Число дуг в любом максимальном исходящем лесе равно, очевидно, $n - v$. Число слабых компонент в любом максимальном *входящем лесе* орграфа назовем *размерностью орграфа по входящим лесам* и обозначим через v' . Очевидно, что для орграфа на n вершинах $v, v' \in \{1, \dots, n\}$.

Если мультиорграф Γ_1 получен из Γ изменением направления всех дуг, то остовным исходящим лесам в Γ естественным образом соответствуют остовные входящие леса в Γ_1 и наоборот. Поэтому размерности Γ по исходящим и входящим лесам равны размерностям Γ_1 по входящим и исходящим лесам соответственно.

Подчеркнем, что в определении 1.2 речь идет о максимальнойности по *количеству* дуг. Понятие максимальнойности по *включению* множеств дуг, Как мы увидим в разделе 3.2, является более слабым.

Через $\mathcal{F}^{\bullet \rightarrow}(\Gamma) = \mathcal{F}^{\bullet \rightarrow}$ и $\mathcal{F}_k^{\bullet \rightarrow}(\Gamma) = \mathcal{F}_k^{\bullet \rightarrow}$ обозначим множества всех остовных исходящих лесов мультиорграфа Γ и множество всех остовных исходящих лесов Γ с k дугами. Аналогично через $\mathcal{F}^{i \bullet \rightarrow j}$ и $\mathcal{F}_k^{i \bullet \rightarrow j}$ обозначим множество всех остовных исходящих лесов, где j принадлежит дереву, исходящему из i , и множество таких остовных исходящих лесов с k дугами. В качестве соответствующих обозначений для входящих лесов примем $\mathcal{F}^{\rightarrow \bullet}(\Gamma) = \mathcal{F}^{\rightarrow \bullet}$, $\mathcal{F}_k^{\rightarrow \bullet}(\Gamma) = \mathcal{F}_k^{\rightarrow \bullet}$, $\mathcal{F}^{i \rightarrow \bullet j}$ и $\mathcal{F}_k^{i \rightarrow \bullet j}$.

1.1.4. Лапласовская матрица и матрица Кирхгофа

Ряд результатов данной книги связан с лапласовскими матрицами и матрицами Кирхгофа, которые могут быть сопоставлены как ориентированным, так и неориентиро-

⁴Исходящий лес можно определить также как орграф, где нет контуров, и для всех вершин w $\text{id}(w) \leq 1$; входящий лес — как орграф, в котором нет контуров, и для всех вершин w $\text{od}(w) \leq 1$.

⁵Это название перекликается с наименованием « W -базы», под которым Фидлер и Седлачек [185] рассматривали остовные исходящие леса.

ванным графам. Впервые систематическое изучение лапласовских матриц графов было предпринято А. Кельмансом в середине 60-х годов [34–36, 229].

Пусть G — неориентированный мультиграф на n вершинах. Его *матрицей смежности* называют $(n \times n)$ -матрицу $A(G) = (n_{ij})$, в которой каждый элемент n_{ij} есть число ребер, инцидентных паре вершин (i, j) . Аналогично *матрицей смежности* мультиорграфа Γ называют $(n \times n)$ -матрицу $A(\Gamma) = (n_{ij})$, где каждый элемент n_{ij} есть число дуг, идущих из i в j .

Определение 1.3. *Матрица Кирхгофа* (лапласовская матрица, матрица проводимостей) взвешенного мультиграфа G есть $(n \times n)$ -матрица $L = L(G) = (\ell_{ij})$ с элементами

$$\ell_{ij} = - \sum_{p=1}^{n_{ij}} \varepsilon_{ij}^p = -\varepsilon_{ij}, \quad j \neq i, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (1.2)$$

$$\ell_{ii} = - \sum_{j \neq i} \ell_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.3)$$

где n_{ij} — количество ребер вида (i, j) .

Для ориентированных графов понятия матрицы Кирхгофа и лапласовской матрицы различаются. Пусть Γ — мультиорграф с множеством вершин $V(\Gamma) = \{1, \dots, n\}$, ε_{ij}^p — вес его p -й дуги из i в j .

Определение 1.4. *Матрица Кирхгофа* [49] взвешенного мультиорграфа Γ — это $(n \times n)$ -матрица $\tilde{L} = \tilde{L}(\Gamma) = (\tilde{\ell}_{ij})$ с элементами

$$\tilde{\ell}_{ij} = - \sum_{p=1}^{n_{ji}} \varepsilon_{ji}^p = -\varepsilon_{ji}, \quad j \neq i, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$\tilde{\ell}_{ii} = - \sum_{j \neq i} \tilde{\ell}_{ij}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где n_{ji} — количество дуг вида (j, i) .

Чтобы получить определение *лапласовской матрицы* взвешенного мультиорграфа, достаточно в приведенном выше определении изменить порядок индексов в выражении, определяющем недиагональные элементы.

Определение 1.5. *Лапласовская матрица* [142] взвешенного мультиорграфа Γ есть $(n \times n)$ -матрица $L = L(\Gamma) = (\ell_{ij})$ с элементам

$$\ell_{ij} = - \sum_{p=1}^{n_{ij}} \varepsilon_{ij}^p = -\varepsilon_{ij}, \quad j \neq i, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$\ell_{ii} = - \sum_{j \neq i} \ell_{ij}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где n_{ij} — количество дуг вида (i, j) .

Таким образом, элемент (i, j) лапласовской матрицы при $i \neq j$ есть сумма весов дуг, идущих из i в j , тогда как в матрице Кирхгофа это суммарный вес дуг, идущих из j в i . При этом $\tilde{\ell}_{ii}$ есть суммарный вес дуг, *входящих* в i , а ℓ_{ii} есть суммарный вес дуг, *выходящих* из i . Определение 1.5 — прямое обобщение определения 1.3 на случай ориентированных графов.

1.2. Матричная теорема о деревьях и связанные с ней исследования

1.2.1. Некоторые направления в исследовании лапласовских матриц графов

Согласно матричной теореме о деревьях, полученной в середине XIX века Г. Кирхгофом [232] (перевод на английский см. в [233]; история вопроса изложена в [309]) алгебраическое дополнение любого элемента матрицы $L(G)$ (см. определение 1.3 выше) равно числу остовных деревьев мультиграфа G . Более общий вариант этой теоремы, относящийся к ориентированным графам, был сформулирован Сильвестром [372] и доказан Борчардтом [108] и Таттом [384] (для случая взвешенных мультиорграфов; см. [49]). Позже было получено множество вариантов матричной теоремы о деревьях и тесно связанных с ней результатов. Так, Бапат и Константайн [84] предложили вариант для графов, в которых каждому ребру сопоставлен цвет. Меррис [290] получил «рёберную версию» матричной теоремы о деревьях; Мун [311] обобщил ее. Форман [186] рассмотрел теорему Кирхгофа в контексте векторных полей; перечисление аналогов этой замечательной теоремы можно продолжить.

В рамках другого направления исследований изучались характеристический многочлен и спектр лапласовской матрицы. С этими работами можно познакомиться по [203, 205, 304]. Необходимо упомянуть А. Кельманса, в 60–70-е годы сотрудника Института проблем управления, который в 1965–1967 гг. опубликовал серию результатов о лапласовском характеристическом многочлене и спектре графов (см. [36, 229] и ссылки в этих работах), некоторые из которых были позже переоткрыты другими авторами.

В [229] Кельманс и Челноков показали, что коэффициенты лапласовского характеристического многочлена могут быть выражены через количества остовных лесов мультиграфа G с фиксированным числом компонент. Этот результат используется в одном из доказательств матричной теоремы о лесах, приведенных далее в этой главе. Другой близкий результат был независимо получен Кроуэллом [165] и Фидлером и Седлачком [185], переоткрыт в [134], заново доказан в [177] и обобщен в [71, 133, 158, 310].

Рассмотрим матрицу $W(G) = I + L(G) = -Z(-1, G)$, где $Z(\lambda, G) = \lambda I - L(G)$ — лапласовская характеристическая матрица мультиграфа G , I — единичная матрица. Суть

матричной теоремы о лесах, о которой речь пойдет ниже, состоит в том, что определитель (всегда ненулевой) матрицы $W(G)$ и обратная к ней матрица могут быть использованы для подсчета остовных корневых лесов мультиграфа G (напомним, что корневой лес — граф, слабыми компонентами которого являются корневые деревья). Данный результат является естественным «продолжением» матричной теоремы о деревьях, согласно которой миноры матрицы $L(G)$ могут быть использованы для подсчета остовных деревьев.

Существует определенный параллелизм между теоремами о деревьях и результатами, касающимися характеристической матрицы, построенной по матрице смежности графа (см. [56, Разделы 1.9.1 и 1.9.5] или цитированные там оригинальные работы Кастлейна [225] и Понстейна [329], а также [359]). О перечислении лесов см. [53, 176, 309]. Лиу и Чоу [264] получили довольно сложное выражение для количества k -компонентных остовных лесов графа через главные миноры лапласовской матрицы. Мирволд [317] дала более простое теоретико-графовое доказательство одной из версий их результата и предложила полиномиальный алгоритм для подсчета количества k -компонентных остовных лесов. Идеи ее доказательства сходны с идеями некоторых доказательств Кельманса и Челнокова [229].

1.2.2. Матричные теоремы о деревьях для неориентированных и ориентированных графов

В этом разделе будут приведены формулировки классических матричных теорем о деревьях в версии У. Татта (см. [49]), обобщившего их на класс взвешенных мультиграфов.

Обозначим через L^{ij} алгебраическое дополнение элемента ℓ_{ij} в $L(G)$, где $L(G)$ — лапласовская матрица взвешенного мультиграфа G . Пусть $\mathcal{T}(G) = \mathcal{T}$ — множество всех остовных деревьев G .

Теорема 1.1 (матричная теорема о деревьях для взвешенных мультиграфов). *Для любого взвешенного мультиграфа G и для любых $i, j \in V(G)$ имеет место $L^{ij} = \varepsilon(\mathcal{T})$.*

Здесь $\varepsilon(\mathcal{T})$ — вес множества \mathcal{T} (см. (1.1)). Татт доказал также аналогичный результат для взвешенных мультиорграфов. Пусть $\mathcal{T}^{i \bullet \rightarrow}$ — множество остовных исходящих деревьев мультиорграфа Γ , исходящих из i , а \tilde{L}^{ij} — алгебраическое дополнение элемента $\tilde{\ell}_{ij}$ в \tilde{L} .

Теорема 1.2 (матричная теорема об исходящих деревьях). *Для любого взвешенного мультиорграфа Γ и для любых $i, j \in V(\Gamma)$ имеет место $\tilde{L}^{ij} = \varepsilon(\mathcal{T}^{i \bullet \rightarrow})$.*

Элементы различных строк \tilde{L} могут иметь разные алгебраические дополнения, но алгебраические дополнения всех элементов одной строки равны. Согласно теореме 1.2 каждое из них равно весу остовных деревьев Γ , исходящих из i . Для простоты Татт формулирует эти теоремы только для алгебраических дополнений L^{ii} , \tilde{L}^{ii} диагональных эле-

ментов. «Ориентированная» матричная теорема о деревьях с произвольными \tilde{L}^{ij} приведена в [53]. Если веса всех ребер (дуг) равны 1, то теоремы 1.1 и 1.2 говорят о *количествах* соответствующих остовных деревьев.

Для алгебраических дополнений элементов *лапласовской* матрицы взвешенного мультиорграфа справедлив результат, вполне аналогичный теореме 1.2: достаточно лишь заменить в ней исходящие деревья на входящие. Пусть $\mathcal{T}^{i\bullet\leftarrow}$ — множество остовных входящих деревьев мультиорграфа Γ , входящих в i , а L^{ij} — алгебраическое дополнение элемента ℓ_{ij} в L .

Теорема 1.3 (матричная теорема о входящих деревьях). *Для любого взвешенного мультиорграфа Γ и для любых $i, j \in V(\Gamma)$ имеет место $L^{ij} = \varepsilon(\mathcal{T}^{i\bullet\leftarrow})$.*

1.3. Матричная теорема о лесах

Матричная теорема о лесах формулируется для мультиграфов и мультиорграфов.

Рассмотрим матрицы

$$W(G) = I + L(G), \quad (1.4)$$

$$\tilde{W}(\Gamma) = I + \tilde{L}(\Gamma), \quad (1.5)$$

$$W(\Gamma) = I + L(\Gamma), \quad (1.6)$$

где I — единичная матрица, G — мультиграф, Γ — мультиорграф. $W^{ij}(G)$, $\tilde{W}^{ij}(\Gamma)$ и $W^{ij}(\Gamma)$ будут обозначать алгебраические дополнения (i, j) -элементов $W(G)$, $\tilde{W}(\Gamma)$ и $W(\Gamma)$.

Пусть $\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}$ — множество всех остовных корневых лесов мультиграфа G , а $\mathcal{F}^{ij}(G) = \mathcal{F}^{ij}$ — множество тех остовных корневых лесов в G , в которых i и j принадлежат одному дереву с корнем i . Пусть $W = W(G)$, $W^{ij} = W^{ij}(G)$.

Лемма 1.1 (матричная лемма о лесах для мультиграфов). *Для любого взвешенного мультиграфа G*

- 1) $\det W = \varepsilon(\mathcal{F})$;
- 2) для любых $i, j \in V(G)$ имеет место $W^{ij} = \varepsilon(\mathcal{F}^{ij})$.

Поскольку матрица W взвешенного мультиграфа симметрична, пункт 2) леммы 1.1 остается справедливым при замене \mathcal{F}^{ij} на \mathcal{F}^{ji} .

Напомним обозначения, введенные в разделе 1.1.3: $\mathcal{F}^{\bullet\rightarrow}(\Gamma) = \mathcal{F}^{\bullet\rightarrow}$ — множество всех остовных исходящих лесов мультиорграфа Γ , $\mathcal{F}^{i\bullet\rightarrow j}(\Gamma) = \mathcal{F}^{i\bullet\rightarrow j}$ — множество тех остовных исходящих лесов в Γ , в которых i и j принадлежат одному дереву, исходящему из i ; $\mathcal{F}^{\rightarrow\bullet} = \mathcal{F}^{\bullet\leftarrow}$, $\mathcal{F}_k^{\rightarrow\bullet}$, $\mathcal{F}^{i\rightarrow\bullet j} = \mathcal{F}^{j\bullet\leftarrow i}$ и $\mathcal{F}_k^{i\rightarrow\bullet j}$ — аналогичные обозначения для входящих лесов. При этом обозначение $i \rightarrow \bullet j$ (и эквивалентное ему $j \bullet \leftarrow i$) относится к лесам, где i и j принадлежат одному дереву, входящему в j . Пусть $W = W(\Gamma)$, $\tilde{W}^{ij} = \tilde{W}^{ij}(\Gamma)$ и $W^{ij} = W^{ij}(\Gamma)$. Пусть $W^* = \text{adj } W = (W^{ij})^T$ — присоединенная матрица для матрицы W .

Лемма 1.2 (матричная лемма о лесах для мультиорграфов). *Для любого взвешенного мультиорграфа Γ*

$$1) \det W = \varepsilon(\mathcal{F}^{\bullet\leftarrow}), \det \tilde{W} = \varepsilon(\mathcal{F}^{\bullet\rightarrow});$$

$$2) \text{ для всех } i, j \in V(\Gamma) \text{ имеет место } W^{ij} = \varepsilon(\mathcal{F}^{i\leftarrow j}), \tilde{W}^{ij} = \varepsilon(\mathcal{F}^{i\rightarrow j}).$$

В случае существования матриц W^{-1} и \tilde{W}^{-1} (ниже будет показано, что они существуют для любых мультиграфов и мультиорграфов) введем обозначения

$$Q = (q_{ij}) = W^{-1} = (I + L)^{-1} \quad (1.7)$$

(как для мультиграфа, так и для мультиорграфа) и

$$\tilde{Q} = (\tilde{q}_{ij}) = \tilde{W}^{-1} = (I + \tilde{L})^{-1}. \quad (1.8)$$

Тогда

$$Q = (\det W)^{-1} W^*, \quad (1.9)$$

$$\tilde{Q} = (\det \tilde{W})^{-1} \tilde{W}^*, \quad (1.10)$$

где $W^* = (W^{ij})^T$ и $\tilde{W}^* = (\tilde{W}^{ij})^T$ — присоединенные матрицы для W и \tilde{W} . Матричная теорема о лесах [67, 153] является следствием лемм 1.1 и 1.2.

Теорема 1.4 (матричная теорема о лесах).

1. *Для любого взвешенного мультиграфа существует матрица $Q = W^{-1}$ и*

$$q_{ij} = \varepsilon(\mathcal{F}^{ji}) / \varepsilon(\mathcal{F}) = \varepsilon(\mathcal{F}^{ij}) / \varepsilon(\mathcal{F}), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

2. *Для любого взвешенного мультиорграфа существуют матрицы $Q = W^{-1}$, $\tilde{Q} = \tilde{W}^{-1}$ и*

$$q_{ij} = \varepsilon(\mathcal{F}^{i\rightarrow j}) / \varepsilon(\mathcal{F}^{\rightarrow\bullet}), \quad \tilde{q}_{ij} = \varepsilon(\mathcal{F}^{j\rightarrow i}) / \varepsilon(\mathcal{F}^{\bullet\rightarrow}), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

При единичных весах всех ребер (дуг) веса множеств остовных лесов в леммах 1.1 и 1.2 и в теореме 1.4 равны количествам этих лесов.

Матричная теорема о лесах позволяет рассматривать $Q = W^{-1}$ и $\tilde{Q} = \tilde{W}^{-1}$ как матрицы «относительных доступностей по лесам» (или «относительных лесных доступностей»; кратко — *доступностей*) вершин G (или Γ). Эти величины могут использоваться в качестве меры близости (чем «дальше» i от j , тем меньше q_{ij} и \tilde{q}_{ij}) вершин, что подтверждается их свойствами, которые будут рассмотрены в главе 8.

1.4. Доказательства матричной теоремы о лесах

В этом разделе приводятся два доказательства матричной теоремы о лесах — теоремы 1.4. Поскольку утверждение этой теоремы [67, 153] выводится из лемм 1.1 и 1.2, достаточно доказать эти леммы.

1.4.1. Первое доказательство

Это доказательство будет получено последовательным применением результатов работ [36, 165, 185, 229, 286]. При этом будет попутно построена интерпретация элементов обратной характеристической матрицы для матрицы Кирхгофа мультиорграфа и прослежена взаимосвязь матричной теоремы о лесах с рядом других результатов алгебраической теории графов.

Введем обозначения и докажем несколько лемм, представляющих самостоятельный интерес. Пусть

$p(\lambda)$ — характеристический многочлен матрицы $-\tilde{L} = -\tilde{L}(\Gamma)$;

$\tilde{W}_\lambda = \lambda I + \tilde{L}$, где λ — действительное число;

$E = E(\Gamma)$ — множество дуг Γ ;

$\varphi \subseteq V$, где $V = V(\Gamma) = \{1, \dots, n\}$ — множество вершин Γ ;

$\tilde{L}_{-\varphi}(\Gamma) = \tilde{L}_{-\varphi}$ — матрица, полученная из \tilde{L} вычеркиванием строк и столбцов соответствующих вершинам φ ; мы будем использовать аналогичное выражение $U_{-\psi}$ для произвольной $n \times n$ матрицы U и $\psi \subseteq \{1, \dots, n\}$;

Γ_φ — взвешенный мультиорграф, полученный из Γ склеиванием всех вершин φ ;

φ^* — вершина Γ_φ , являющаяся результатом склеивания; каждая дуга, инцидентная одной вершине φ в Γ , имеет соответствующую дугу, инцидентную φ^* в Γ_φ ;

Γ -дерево — остовное исходящее дерево мультиорграфа Γ ;

Γ -лес — остовный исходящий лес мультиорграфа Γ ;

$\mathcal{T}_\varphi^{\bullet \rightarrow}$ — множество Γ_φ -деревьев исходящих из φ^* ; если $\varphi = \emptyset$, то $\mathcal{T}_\varphi^{\bullet \rightarrow} = \emptyset$;

$\mathcal{F}_\varphi^{\bullet \rightarrow}$ — множество Γ -лесов с $|\varphi|$ компонентами, исходящих из вершин φ ;

$\mathcal{F}_\varphi^{j \bullet \rightarrow i} = \mathcal{F}^{j \bullet \rightarrow i} \cap \mathcal{F}_\varphi^{\bullet \rightarrow}$ (если $j \notin \varphi$, то $\mathcal{F}_\varphi^{j \bullet \rightarrow i} = \emptyset$);

Лемма 1.3. Пусть Γ_1 и Γ_2 — взвешенные мультиорграфы с одинаковыми множествами вершин. Предположим, что множество дуг Γ_2 может быть получено из множества дуг Γ_1 заменой некоторой дуги (i, j) (с весом ε_{ij}) на две дуги из i в j с весами ε'_{ij} и ε''_{ij} , такими что $\varepsilon'_{ij} + \varepsilon''_{ij} = \varepsilon_{ij}$. Тогда

- 1) $\tilde{W}(\Gamma_1) = \tilde{W}(\Gamma_2)$;

- 2) для любых вершин α и β , значение $\varepsilon(\mathcal{F}^{\alpha \bullet \rightarrow \beta})$ одинаково для Γ_1 и Γ_2 .

Доказательство. Пункт 1 очевиден. Пункт 2 выполняется, т. к. любому $F \in \mathcal{F}^{\alpha \bullet \rightarrow \beta}(\Gamma_1)$ соответствуют два леса в $\mathcal{F}^{\alpha \bullet \rightarrow \beta}(\Gamma_2)$ с таким же суммарным весом. \square

В силу леммы 1.3 достаточно доказать лемму 1.2 только для взвешенных *орграфов*. Поэтому будем предполагать, что в Γ нет множественных дуг.

Следующие 3 леммы есть «направленные» и «взвешенные» обобщения ряда утверждений из работ Кельманса [36] и Кельманса и Челнокова [229].

Лемма 1.4. Пусть $\varphi \subseteq V$. Тогда $\det \tilde{L}_{-\varphi} = \varepsilon(\mathcal{T}_\varphi^{\bullet \rightarrow})$.

Доказательство. Если $\varphi = \emptyset$, то левая и правая части равенства равны нулю. При $\varphi \neq \emptyset$ через $\tilde{L}_{-\{\varphi^*\}}(\Gamma_\varphi) = \tilde{L}_{-\varphi^*}(\Gamma_\varphi)$ обозначим матрицу, полученную из $\tilde{L}(\Gamma_\varphi)$ вычеркиванием строки и столбца, соответствующих φ^* . Требуемое равенство справедливо, поскольку $\tilde{L}_{-\varphi} = \tilde{L}_{-\varphi^*}(\Gamma_\varphi)$ и $\det \tilde{L}_{-\varphi^*}(\Gamma_\varphi) = \varepsilon(\mathcal{T}_{\varphi^*}^{\bullet \rightarrow})$ (в силу матричной теоремы о деревьях для взвешенных мультиорграфов). \square

Лемма 1.5 ([165, 185]; сравни [84, 186]). Пусть $\varphi \subseteq V$. Тогда $\det \tilde{L}_{-\varphi} = \varepsilon(\mathcal{F}_\varphi^{\bullet \rightarrow})$.

Доказательство. В силу леммы 1.4 достаточно доказать равенство $\varepsilon(\mathcal{F}_\varphi^{\bullet \rightarrow}) = \varepsilon(\mathcal{T}_{\varphi^*}^{\bullet \rightarrow})$, которое справедливо для любого $\varphi \neq \emptyset$, так как склеивание вершин φ переводит любой Γ -лес, принадлежащий $\mathcal{F}_\varphi^{\bullet \rightarrow}$, в Γ_φ -дерево исходящее из φ^* , и это соответствие взаимно-однозначно. Если $\varphi = \emptyset$, получаем нуль в обеих частях равенства. \square

Пусть $p(\lambda) = \det(\lambda I + \tilde{L}) = \sum_{k=0}^n c_k \lambda^k$ — характеристический многочлен матрицы $-\tilde{L}$.

Лемма 1.6. $c_k = \sum_{\substack{\varphi \subseteq V \\ |\varphi|=k}} \varepsilon(\mathcal{F}_\varphi^{\bullet \rightarrow})$, $k = 0, \dots, n$.

Доказательство. Это равенство следует из леммы 1.5 и того факта, что c_k равно сумме степеней k главных миноров матрицы \tilde{L} . \square

Доказательство п.1 леммы 1.2. Используя лемму 1.6, получаем

$$\det \tilde{W} = \det(I + \tilde{L}) = p(1) = \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{\varphi \subseteq V \\ |\varphi|=k}} \varepsilon(\mathcal{F}_\varphi^{\bullet \rightarrow}) = \sum_{\varphi \subseteq V} \varepsilon(\mathcal{F}_\varphi^{\bullet \rightarrow}) = \varepsilon(\mathcal{F}^{\bullet \rightarrow}). \quad \square$$

Пусть $\tilde{W}_\lambda = \lambda I + \tilde{L}$, и

$$\tilde{W}_\lambda^{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \lambda^k, \quad \text{где } i, j \in V, \quad (1.11)$$

есть алгебраическое дополнение элемента (i, j) матрицы \tilde{W}_λ .

Лемма 1.7.

$$b_k = \sum_{\substack{\varphi \subseteq V \setminus \{i, j\} \\ |\varphi|=k}} \varepsilon(\mathcal{F}_{\varphi \cup \{i\}}^{i \bullet \rightarrow j}), \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (1.12)$$

Доказательство. Из введенных выше определений следует

$$b_k = \sum_{\substack{\varphi \subseteq V \setminus \{i, j\} \\ |\varphi|=k}} \tilde{L}_{-\varphi}^{ij}, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad (1.13)$$

где $\tilde{L}_{-\varphi}^{ij}$ — алгебраическое дополнение в матрице $\tilde{L}_{-\varphi}$ элемента, имеющего в матрице \tilde{L} индексы i, j .

Случай 1. $i \neq j$. Чтобы получить выражение для $\tilde{L}_{-\varphi}^{ij}$, воспользуемся теоремой Мэйби [286], которую можно сформулировать следующим образом. Для любой матрицы $U = (u_{ij})$ размерности $n \times n$ любое алгебраическое дополнение U^{ij} при $i \neq j$ допускает представление

$$U^{ij} = \sum_k \varepsilon(P_k^{i \rightarrow j}) \det U_{-\psi_k}, \quad (1.14)$$

где $P_k^{i \rightarrow j}$ — k -ый маршрут из i в j в произвольном взвешенном орграфе $\Gamma(U)$, имеющем множество вершин $\{1, \dots, n\}$ и связанном с U следующим образом:

- если $i \neq j$ и $u_{ij} \neq 0$, то (j, i) принадлежит множеству дуг $E(\Gamma(U))$ и имеет вес $(-u_{ij})$;
- если $i \neq j$ и $u_{ij} = 0$, то дуга (j, i) имеет нулевой вес или $(j, i) \notin E(\Gamma(U))$.

В (1.14) ψ_k обозначает множество вершин маршрута $P_k^{i \rightarrow j}$.

Заметим, что матрица \tilde{L} и взвешенный орграф Γ удовлетворяют сформулированным условиям теоремы Мэйби (вспомним, что по предположению Γ не имеет множественных дуг). Поэтому они выполняются также для $\tilde{L}_{-\varphi}$ и для сужения орграфа Γ на подмножество вершин $V \setminus \varphi$. Следовательно, согласно (1.14) и лемме 1.5,

$$\tilde{L}_{-\varphi}^{ij} = \sum_k \varepsilon(P_k^{i \rightarrow j}) \det \tilde{L}_{-(\varphi \cup \psi_k)} = \sum_k \varepsilon(P_k^{i \rightarrow j}) \varepsilon(\mathcal{F}_{\varphi \cup \psi_k}^{\bullet \rightarrow}). \quad (1.15)$$

Заметим, что если $F \in \mathcal{F}_{\varphi \cup \psi_k}^{\bullet \rightarrow}$, то объединение $P_k^{i \rightarrow j}$ и F принадлежит $\mathcal{F}_{\varphi \cup \{i\}}^{i \bullet \rightarrow j}$. С другой стороны, любой лес $F' \in \mathcal{F}_{\varphi \cup \{i\}}^{i \bullet \rightarrow j}$ может быть единственным образом разложен в объединение некоторых $P_k^{i \rightarrow j}$ и $F \in \mathcal{F}_{\varphi \cup \psi_k}^{\bullet \rightarrow}$. Поэтому из (1.15) следует

$$\tilde{L}_{-\varphi}^{ij} = \varepsilon(\mathcal{F}_{\varphi \cup \{i\}}^{i \bullet \rightarrow j}). \quad (1.16)$$

Случай 2. $i = j$. Из леммы 1.5 следует $\tilde{L}_{-\varphi}^{ij} = \tilde{L}_{-(\varphi \cup \{i\})} = \varepsilon(\mathcal{F}_{\varphi \cup \{i\}})$. Так как $\mathcal{F}_{\varphi \cup \{i\}} = \mathcal{F}_{\varphi \cup \{i\}}^{i \bullet \rightarrow i}$, снова получаем (1.16).

В заключение, из (1.16) и (1.13) следует (1.12). \square

Доказательство п.2 леммы 1.2. Положим $\lambda = 1$ в (1.11) и воспользуемся леммой 1.7:

$$\begin{aligned} \tilde{W}^{ij} &= \tilde{W}_1^{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} b_k = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\substack{\varphi \subseteq V \setminus \{i, j\} \\ |\varphi|=k}} \varepsilon(\mathcal{F}_{\varphi \cup \{i\}}^{i \bullet \rightarrow j}) \\ &= \sum_{\varphi \subseteq V \setminus \{i, j\}} \varepsilon(\mathcal{F}_{\varphi \cup \{i\}}^{i \bullet \rightarrow j}) = \varepsilon(\mathcal{F}^{i \bullet \rightarrow j}). \end{aligned} \quad \square$$

Докажем аналогичные утверждения для матрицы W и входящих лесов. По взвешенному мультиорграфу Γ построим взвешенный мультиорграф Γ' , обратив все дуги Γ при сохранении весов. По доказанному

$$\tilde{W}^{ij}(\Gamma') = \varepsilon(\mathcal{F}^{i \bullet \rightarrow j}(\Gamma')), \quad (1.17)$$

$$\det \tilde{W}(\Gamma') = \varepsilon(\mathcal{F}^{\bullet \rightarrow}(\Gamma')). \quad (1.18)$$

Заметим, что $W(\Gamma) = \tilde{W}(\Gamma')$. С использованием (1.17) получаем, что при $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$W^{ij} = \tilde{W}_{ij}(\Gamma') = \varepsilon(\mathcal{F}^{i \bullet \rightarrow j}(\Gamma')) = \varepsilon(\mathcal{F}^{i \bullet \leftarrow j}(\Gamma)) = \varepsilon(\mathcal{F}^{i \bullet \leftarrow j}).$$

Аналогично, пользуясь (1.18), имеем

$$\det W = \det W(\Gamma) = \det \tilde{W}(\Gamma') = \varepsilon(\mathcal{F}^{\bullet \rightarrow}(\Gamma')) = \varepsilon(\mathcal{F}^{\bullet \leftarrow}(\Gamma)) = \varepsilon(\mathcal{F}^{\bullet \leftarrow}).$$

Лемма 1.2 доказана. \square

Лемма 1.1 сводится к лемме 1.2 сопоставлением произвольному мультиграфу G мультиорграфа Γ посредством замены каждого ребра парой встречных дуг с тем же весом (у каждой дуги). При этом матрицы W (и значит, Q) для G и Γ совпадают, и нужный результат следует из того, что существует естественное взаимно-однозначное соответствие между остовными корневыми лесами в G и остовными исходящими (входящими) лесами в Γ . Тем самым матричная теорема о лесах, выводющаяся из лемм 1.1 и 1.2, доказана.

1.4.2. Второе доказательство

Доказательство леммы 1.2 может быть получено с использованием замечательной теоремы Чайкена [133] — «матричной теоремы о деревьях для всех миноров», в несколько менее общей форме полученной Ченом [158, с. 313, задачи 4.14 и 4.16] и позже обобщенной Муном [310] и Абдесселамом [71]. Для этого, как отмечалось в [67], в первой формуле на [133, с. 328] следует положить $U = W = \emptyset$, а затем $U = \{i\}$, $W = \{j\}$. В данном разделе указанный подход будет реализован подробно, как было сделано в [142]. При этом используется известный прием, позволяющий сводить многие новые утверждения о лесах к некоторым известным утверждениям о деревьях или лесах. Этот прием весьма популярен в подобных доказательствах [84, 133, 145, 158, 200, 224, 228, 235, 293, 294, 332].⁶ С ним связано следующее определение.

Определение 1.6. Пусть Γ — взвешенный мультиорграф. Мультиорграф $\hat{\Gamma}$ с множеством вершин $V(\hat{\Gamma}) = V(\Gamma) \cup \{0\}$, множеством дуг $E(\hat{\Gamma}) = E(\Gamma) \cup \{(j, 0) : j \in V(\Gamma)\}$, весами дуг в $E(\hat{\Gamma}) \cap E(\Gamma)$ — такими же, как для Γ и $\varepsilon((j, 0)) = 1$ при $j \in V(\Gamma)$ будем называть *конусом* Γ .⁷

Для произвольной $(n \times n)$ -матрицы A через $A(\overline{\mathcal{I}} | \overline{\mathcal{J}})$, где $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subseteq \{1, \dots, n\}$, будем обозначать подматрицу A , полученную удалением строк, индексируемых элементами множества \mathcal{I} и столбцов, индексируемых элементами \mathcal{J} .

Следующее наблюдение оформим в виде леммы.

Лемма 1.8. Пусть $\hat{\Gamma}$ — конус Γ . Пусть $W = I + L(\Gamma)$, $\hat{L} = L(\hat{\Gamma})$. Тогда для всех $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subseteq V(\Gamma)$ имеет место $W(\overline{\mathcal{I}} | \overline{\mathcal{J}}) = \hat{L}(\overline{\mathcal{I} \cup \{0\}} | \overline{\mathcal{J} \cup \{0\}})$.

⁶Еще один употребительный прием, состоящий в «склеивании» корней всех деревьев леса, преобразующем лес в дерево, использовался в [36, 56, 152, 185, 229, 317].

⁷Это понятие, по-видимому, впервые было использовано в [228].

В силу леммы 1.8, если имеются выражения для всех миноров лапласовских матриц L (например, выражения, полученные с помощью теоремы Чайкена [133]), то это сразу дает выражения для всех миноров матриц $I + L$. Действительно для любого минора матрицы $I + L$, соответствующей произвольному взвешенному мультиорграфу Γ , можно указать равный ему минор лапласовской матрицы, построенной для $\widehat{\Gamma}$. Следующая лемма устанавливает соответствие между лесами в Γ и определенными лесами в $\widehat{\Gamma}$ и будет использована далее.

Лемма 1.9. *Для произвольных $0 \leq k \leq n$ и $\mathcal{I} = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq V(\Gamma)$, $\mathcal{J} = \{j_1, \dots, j_k\} \subseteq V(\Gamma)$ рассмотрим множество входящих лесов $\bigcap_{u=1}^k \mathcal{F}^{i_u \rightarrow \bullet j_u}$ в Γ . Существует сохраняющее вес взаимно-однозначное соответствие между этим множеством и множеством $\widehat{\mathcal{F}}_{\mathcal{I}\mathcal{J}}^{\rightarrow \bullet}$ входящих лесов в $\widehat{\Gamma}$, принадлежащих $\widehat{\mathcal{F}}^{0 \rightarrow \bullet 0} \cap \left(\bigcap_{u=1}^k \widehat{\mathcal{F}}^{i_u \rightarrow \bullet j_u} \right)$ и состоящих из $k+1$ деревьев.*

Доказательство леммы 1.9. Пусть $F \in \bigcap_{u=1}^k \mathcal{F}^{i_u \rightarrow \bullet j_u}$. Чтобы построить соответствующий ему лес в $\widehat{\mathcal{F}}_{\mathcal{I}\mathcal{J}}^{\rightarrow \bullet}$, рассмотрим копию F' леса F в $\widehat{\Gamma}$ и добавим к ней все дуги $(r, 0)$, где r — корни F' , не принадлежащие \mathcal{J} . Получившийся входящий лес состоит из $k+1$ деревьев и принадлежит $\widehat{\mathcal{F}}_{\mathcal{I}\mathcal{J}}^{\rightarrow \bullet}$. Обратно, для любого $\widehat{F} \in \widehat{\mathcal{F}}_{\mathcal{I}\mathcal{J}}^{\rightarrow \bullet}$, рассмотрим его сужение на $V(\Gamma)$ в качестве соответствующего леса в Γ . Очевидно, это соответствие является взаимно-однозначным, и поставленные в соответствие друг другу леса имеют один и тот же вес. \square

Сформулируем теорему Чайкена [133] в версии Муна [310] и наших обозначениях.

Пусть $\mathcal{I} = \{i_1, \dots, i_t\}$ и $\mathcal{J} = \{j_1, \dots, j_t\}$ — два непустых подмножества множества $\{1, \dots, n\}$, рассматриваемого как множество вершин $V(\Gamma)$ взвешенного орграфа Γ и $i_1 < \dots < i_t$, $j_1 < \dots < j_t$. Пусть $\alpha(\mathcal{I}, \mathcal{J}) = (-1)^{\sum_{x=1}^t (i_x + j_x)}$.

Пусть $\mathcal{F}_{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ обозначает множество остовных входящих лесов F в Γ , состоящих из $|\mathcal{I}| = t$ деревьев, таких что каждое дерево входит в некоторую вершину $i_x \in \mathcal{I}$ и, кроме того, содержит некоторую вершину $j_y \in \mathcal{J}$. Для любого леса $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ рассмотрим следующее отображение φ_F множеств индексов, упорядочивающих элементы \mathcal{I} и \mathcal{J} : $\varphi_F(x) = y$ если и только если $i_x \in \mathcal{I}$, $j_y \in \mathcal{J}$ и i_x и j_y принадлежат одному дереву в F . φ_F есть перестановка множества индексов. Пусть $\alpha(\varphi_F)$ — четность этой перестановки.

Теорема 1.5 (Чайкена [133] — в версии Муна [310]). *Пусть $\mathcal{E} = (\varepsilon_{ij})_{n \times n}$ — матрица весов дуг взвешенного орграфа Γ , $L = (\ell_{ij})_{n \times n}$ — его лапласовская матрица. Тогда в обозначениях, введенных выше,*

$$\det L(\overline{\mathcal{I}} | \overline{\mathcal{J}}) = \alpha(\mathcal{I}, \mathcal{J}) \sum_{F \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}\mathcal{J}}} \alpha(\varphi_F) \varepsilon(F).$$

Доказательство леммы 1.2 (матричной леммы о лесах для мультиорграфов).

Проведем сначала доказательство для матрицы W и входящих лесов. Рассмотрим конус $\widehat{\Gamma}$ мультиорграфа Γ . По лемме 1.8, если $W = I + L(\Gamma)$ и $\widehat{L} = L(\widehat{\Gamma})$, то

$$W^{ij} = (-1)^{i+j} \det W(\overline{\{i\}} | \overline{\{j\}}) = (-1)^{i+j} \det \widehat{L}(\overline{\{0, i\}} | \overline{\{0, j\}}). \quad (1.19)$$

Пусть $\widehat{\mathcal{F}}_{(2)}^{0\bullet\leftarrow 0, i\bullet\leftarrow j}$ — множество входящих лесов $F \in \widehat{\mathcal{F}}^{0\bullet\leftarrow 0} \cap \widehat{\mathcal{F}}^{i\bullet\leftarrow j}$, имеющих две компоненты-дерева. Обозначим через $\text{inv}\{0 \rightarrow 0, j \rightarrow i\}$ число инверсий (нарушений монотонности) в двухэлементном соответствии $\{0 \rightarrow 0, j \rightarrow i\}$. Заметим, что эта величина равна нулю, поскольку $0 < i$ и $0 < j$. Перенумеровав вершины $0, 1, \dots, n$ конуса $\widehat{\Gamma}$ в $1, \dots, n+1$ добавлением ко всем номерам 1, имеем $\alpha(\{0, i\}, \{0, j\}) = (-1)^{1+i+1+1+j+1} = (-1)^{i+j}$. Используя теорему 1.5, получаем

$$\det \widehat{L}(\overline{\{0, i\}} | \overline{\{0, j\}}) = (-1)^{i+j} \sum_{F \in \widehat{\mathcal{F}}_{(2)}^{0\bullet\leftarrow 0, i\bullet\leftarrow j}} (-1)^{\text{inv}\{0 \rightarrow 0, j \rightarrow i\}} \varepsilon(F) = (-1)^{i+j} \varepsilon(\widehat{\mathcal{F}}_{(2)}^{0\bullet\leftarrow 0, i\bullet\leftarrow j}). \quad (1.20)$$

Первое равенство здесь получено с учетом того, что $\widehat{\mathcal{F}}_{(2)}^{0\bullet\leftarrow j, i\bullet\leftarrow 0} = \emptyset$.

Из леммы 1.9 следует, что $\varepsilon(\widehat{\mathcal{F}}_{(2)}^{0\bullet\leftarrow 0, i\bullet\leftarrow j}) = \varepsilon(\mathcal{F}^{i\bullet\leftarrow j})$, поэтому из (1.19) и (1.20) получаем

$$W^{ij} = (-1)^{2i+2j} \varepsilon(\mathcal{F}^{i\bullet\leftarrow j}) = \varepsilon(\mathcal{F}^{i\bullet\leftarrow j}).$$

Далее, в силу леммы 1.8, теоремы 1.2 и леммы 1.9, $\det W = \det \widehat{L}(\overline{\{0\}} | \overline{\{0\}}) = \varepsilon(\widehat{\mathcal{F}}_{(1)}^{0\bullet\leftarrow 0}) = \varepsilon(\mathcal{F}^{\bullet\leftarrow})$ (параллели могут быть обнаружены в [224, равенство (37)] и [228, пункты 7.2 и 7.3]). Тем самым утверждения для матрицы W и входящих лесов доказаны.

Для матрицы \widetilde{W} и исходящих лесов аналогичные утверждения доказываются способом, который был использован в конце первого доказательства леммы 1.2.

Лемма 1.2 доказана. \square

Еще одно автономное, т.е. не опирающееся ни на какие сильные теоремы, доказательство леммы 1.1 было получено в [361]. Доказательство, близкое ко второму, приведенному выше, для неориентированного случая представлено в [293].

Заключение к главе 1

В данной главе дан краткий обзор направления в алгебраической теории графов, связанного с матричной теоремой о деревьях, и доказана матричная теорема о лесах. Эта теорема дает средство анализа древесной (точнее, — лесной) структуры графов и орграфов методами теории матриц. Матричная теорема о лесах фигурирует в большинстве глав книги. Так, в главах 3 и 4 будет получен ряд связанных с ней алгебраических соотношений и их теоретико-графовых интерпретаций. В частности, будет показано, что нормированная матрица максимальных исходящих лесов орграфа является собственным проектором

его матрицы Кирхгофа, а нормированная матрица максимальных входящих лесов — собственным проектором его лапласовской матрицы. Из этого факта сразу следует известная матричная теорема о деревьях для цепей Маркова. В главе 2 получен ряд результатов, касающихся собственного проектора и компонент квадратной матрицы.

Глава 2

О нахождении собственного проектора и компонент матрицы

В теории матриц и ее приложениях часто используется собственный проектор квадратной матрицы. В данной главе, написанной по материалам работ [5, 66, 142], показано, что собственный проектор матрицы A может быть вычислен с помощью любого аннулирующего многочлена для A^u , где $u \geq \text{ind } A$. Пользуясь этим, можно найти компоненты и минимальный многочлен матрицы A , а также псевдообратную по Дразину A^D . Результаты этой главы получены применением подходов, первоначально разработанных для анализа лапласовских матриц и представленных в главах 3 и 4, к произвольным вырожденным матрицам. Они использовались, в частности, в [8, 102–104, 142, 275–277, 351, 388].

2.1. Введение

2.1.1. О приложениях обобщенно обратной матрицы по Дразину, собственного проектора и компонент матрицы

Матрицы, обобщенно обратные по Дразину, собственные проекторы и компоненты квадратных матриц, а также их минимальные многочлены находят множество применений в математике, механике, управлении, технике, экономике и т. д. Отметим некоторые из них. Динамика систем многих тел описывается дифференциально-алгебраическими системами уравнений. Их линеаризация приводит к сингулярным системам обыкновенных дифференциальных уравнений, в анализе которых ключевую роль играет нахождение псевдообратных по Дразину для матриц коэффициентов [118]. В [367] этот подход использован для анализа стабилизации в модели движения грузового автомобиля. Собственные проекторы матрицы являются ее главными компонентами; нахождение собственного проектора матрицы, соответствующего собственному значению 0, эквивалентно с вычислительной точки зрения нахождению ее псевдообратной по Дразину и может быть использовано для нахождения псевдообратной по Муру-Пенроузу. Компоненты матриц и определяемые с их помощью функции от матриц используются в анализе динамики твердого тела [40], при исследовании устойчивости движения и интегрировании систем линейных дифференциальных уравнений [23, 39]. Отметим также применения собственного проектора и псевдообратной по Дразину в теории марковских цепей [298], теории графов [142], криптографии [214] и эконометрике [159] (см. также [393]). Во всех этих приложениях возникает проблема нахождения собственного проектора, псевдообратной по Дразину и компонент

матрицы. В настоящей главе показано, что для этих целей может быть использован любой аннулирующий многочлен для A^u , где A — данная матрица, u — целое число, не меньшее ее индекса.

2.1.2. Определения

Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ — квадратная матрица. Через $\mathcal{R}(A)$ и $\mathcal{N}(A)$ будем обозначать образ и ядро A соответственно.

Пусть r — суммарная [алгебраическая] кратность ненулевых собственных значений A , $v = n - r$ — кратность 0 как собственного значения A , $\nu = \text{ind } A$ — индекс матрицы A , т.е. наименьшее $k \in \{0, 1, \dots\}$, при котором $\text{rank}(A^{k+1}) = \text{rank}(A^k)$ [91, 117]. Индекс равен 0 для всех невырожденных матриц, и только для них. Индекс вырожденной матрицы есть индекс ее собственного значения 0; он равен кратности нуля как корня ее минимального многочлена и размеру наибольшей жордановой клетки с нулевой диагональю в ее жордановой форме.

*Собственным проектором*¹ матрицы A , соответствующим собственному значению 0 [353], или, для краткости, просто собственным проектором A [354] называют такой проектор (т.е. идемпотентную матрицу) Z , что $\mathcal{R}(Z) = \mathcal{N}(A^\nu)$ и $\mathcal{N}(Z) = \mathcal{R}(A^\nu)$. Иными словами, Z есть проектор на $\mathcal{N}(A^\nu)$ вдоль $\mathcal{R}(A^\nu)$. Собственный проектор единствен, так как идемпотентная матрица однозначно определяется своим образом и ядром (см., например, [91, с. 50]).

Собственные проекторы используются для разложения матрицы на *компоненты*, что позволяет определить значения $f(A)$ для большого класса функций $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (см. [23, 39, 40]), а также в теории обобщенно обратных матриц и многочисленных приложениях линейной алгебры. Отметим в этой связи, что для любой конечной стационарной цепи Маркова с матрицей переходных вероятностей P предельная матрица средних вероятностей $P^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{t=0}^{k-1} P^t$ есть собственный проектор матрицы $I - P$ [298, 353]. Другой пример: в нашей работе [142] показано, что для любого взвешенного ориентированного графа Γ с лапласовской матрицей L матрица максимальных входящих лесов Γ есть собственный проектор матрицы L .

Глава посвящена новым результатам, касающимся нахождения собственного проектора матрицы, ее компонент и минимального многочлена.

2.1.3. Вспомогательные утверждения

Из того факта, что ν — размер наибольшей жордановой клетки с нулевой диагональю в жордановой форме A , следует

¹Собственный проектор называют также *главным идемпотентом* (см., например, [213]).

$$\nu \leq v. \quad (2.1)$$

При возведении такой жордановой клетки J в степень имеем $\text{rank}(J^k) = \max\{l - k, 0\}$, где l — порядок J . Поэтому

$$\text{rank}(A^i) > \text{rank}(A^{i+1}) \text{ при } 0 \leq i < \nu \text{ и } \text{rank}(A^i) = r \text{ при } i \geq \nu, \quad (2.2)$$

$$\text{ind}(A^k) = \min \{t \in \mathbb{Z} \mid kt \geq \nu\} = \lceil \nu/k \rceil, \quad (2.3)$$

где $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое число, не меньшее x .

Поскольку для любой матрицы $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ $\mathcal{R}(X)$ и $\mathcal{N}(X)$ — подпространства в \mathbb{C}^n и $\dim \mathcal{R}(X) = n - \dim \mathcal{N}(X) = \text{rank } X$, с учетом (2.2) имеем

$$\mathcal{N}(A) \subset \dots \subset \mathcal{N}(A^\nu) = \mathcal{N}(A^{\nu+1}) = \dots, \quad (2.4)$$

$$\mathcal{R}(A) \supset \dots \supset \mathcal{R}(A^\nu) = \mathcal{R}(A^{\nu+1}) = \dots, \quad (2.5)$$

где строгие включения относятся к случаю $\nu > 1$. Из этих соотношений и (2.3) следует

Лемма 2.1. *Собственные проекторы матриц $A, A^2, \dots, A^\nu, \dots$ равны.*

2.1.4. О задачах, решаемых в данной главе

Далее реализован следующий подход. Собственный проектор проще всего находится для матрицы, имеющей индекс 0 (для нее он просто равен нулевой матрице) или 1. Поэтому, имея любую нестрогую верхнюю оценку u для индекса ν вырожденной матрицы A , вместо собственного проектора для A можно искать собственный проектор для матрицы A^u , имеющей индекс 1 в силу (2.3). Действительно, согласно лемме 2.1 собственные проекторы матриц A и A^u совпадают. Пользуясь этим подходом, в следующем разделе мы используем несколько характеристик собственного проектора, чтобы получить простые выражения для собственного проектора матрицы A^u (а следовательно, и A). В разделе 2.3 предложен метод нахождения собственного проектора A (и далее — матрицы, псевдообратной по Дразину, A^D) с помощью любого ненулевого аннулирующего многочлена для A^u , а в разделе 2.4 рассматривается задача вычисления компонент матрицы и ее минимального многочлена. В разделе 2.5 даны явные выражения собственного проектора, а также компонент матрицы A через ее собственные значения.

2.2. Характеризации собственного проектора

Приведем несколько условий, эквивалентных тому, что идемпотентная матрица $Z \in \mathbb{C}^{n \times n}$ есть собственный проектор матрицы $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, имеющей индекс ν . Приведенный ниже перечень содержит ссылки на работы, где эти условия приведены.

- (a) $\mathcal{R}(Z) = \mathcal{N}(A^\nu)$ и $\mathcal{R}(Z^*) = \mathcal{N}((A^*)^\nu)$, где X^* — эрмитово-сопряженная к X [353].

- (b) $A^\nu Z = ZA^\nu = 0$ и $\text{rank } A^\nu + \text{rank } Z = n$ [391, 406].
- (c) $AZ = ZA$ и $A + \alpha Z$ невырождена при всех $\alpha \neq 0$ [242].
- (d) $AZ = ZA$, $A + \alpha Z$ невырождена для некоторого $\alpha \neq 0$, и AZ нильпотентна [242].
- (e) $AZ = ZA$, AZ нильпотентна, и $AU = I - Z = VA$ для некоторых $U, V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ [212].
- (f) $ZC = CZ$ для любой матрицы C , коммутирующей с A , AZ нильпотентна, и $(\det A = 0 \Rightarrow Z \neq 0)$ [241].

Перейдем теперь к конструктивным характеристикам собственного проектора матрицы. В следующих пунктах u — любое целое число, не меньшее ν , и используется лемма 2.1, согласно которой A и A^u имеют один и тот же собственный проектор. Используются также следующие обозначения: A^D — обобщенно обратная (псевдообратная) по Дразину для A , $(A^u)^\#$ — групповая обратная для A^u ,

$$\psi(\lambda) = \sum_{j=v}^n a_{n-j} \lambda^j \quad (2.6)$$

и

$$B(\lambda) = \text{adj}(\lambda I - A) = \sum_{j=0}^{n-1} A_{n-1-j} \lambda^j \quad (2.7)$$

— соответственно *характеристический многочлен* и *присоединенная матрица* для A , $\psi_u(\lambda)$ и $\widehat{\psi}_u(\lambda)$ — соответственно *характеристический* и *минимальный многочлены* для A^u , $d_u(\lambda)$ — их частное:

$$\psi_u(\lambda) = d_u(\lambda) \widehat{\psi}_u(\lambda), \quad (2.8)$$

$B_u(\lambda) = \text{adj}(\lambda I - A^u)$ — *присоединенная матрица* для $\lambda I - A^u$, $C_u(\lambda)$ — *приведенная присоединенная матрица* [23] для $\lambda I - A^u$, т. е. матричный многочлен

$$C_u(\lambda) = \frac{B_u(\lambda)}{d_u(\lambda)} \quad (2.9)$$

(матрица $C_u(\lambda)$ может быть также получена делением матричного многочлена $\widehat{\psi}_u(\lambda)I$ на бином $\lambda I - A^u$). Приведем несколько конструктивных характеристик (то есть выражений для) собственного проектора.

- (g) $Z = I - AA^D = I - A^u(A^u)^\#$ [213, 354].
- (h) $Z = I - (I - A_{n-v}/a_{n-v})^u$ [213]².
- (i) $Z = \frac{C_u(0)}{\rho_u(0)}$, где $\rho_u(\lambda)$ — многочлен, определяемый равенством $\lambda \rho_u(\lambda) = \widehat{\psi}_u(\lambda)$ [23].
- (j) $Z = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda B_u(\lambda) / \psi_u(\lambda)$ (следует из (2.8), (2.9) и (i)).

²Коэффициенты a_i характеристического многочлена (2.6) и матричные коэффициенты A_i присоединенной матрицы (2.7) могут быть одновременно вычислены методом Фаддеева [23, 50].

(k) $Z = \lim_{|\tau| \rightarrow \infty} (I + \tau A^u)^{-1}$, (следует из (j) или теоремы 3.1 в [297]).

(l) $Z = X(Y^*X)^{-1}Y^*$, где X и Y — матрицы, столбцы которых образуют базис в $\mathcal{N}(A^\nu)$ и в $\mathcal{N}((A^*)^\nu)$ соответственно [213, 353] (в силу (2.4), (2.5) ν можно заменить на u).

В следующем разделе строится новая конструктивная характеристизацию собственного проектора. Отметим, что алгоритм, соответствующий этой характеристизации, не предполагает нахождения пределов, приведенной присоединенной матрицы, матричных коэффициентов присоединенной матрицы, псевдообратных матриц или базисов подпространств. Собственный проектор вырожденной матрицы A выражается скалярным многочленом от A^u ; для определения коэффициентов этого многочлена достаточно знать произвольный аннулирующий многочлен для A^u или собственные значения A . Если в качестве аннулирующего многочлена используется характеристический или минимальный многочлен, то полученное выражение эквивалентно выражениям, которые даны выше в пунктах (j) и (i) соответственно.

2.3. Вычисление собственного проектора A с помощью аннулирующего многочлена для A^u

Основной результат данного раздела — теорема 2.1, согласно которой собственный проектор матрицы A может быть найден прямым вычислением с помощью любого аннулирующего многочлена для любой из матриц A^u при $u \geq \nu$. В качестве u всегда можно взять v (см. (2.1)), а в качестве аннулирующего многочлена — характеристический многочлен³, но для сокращения дальнейших вычислений лучше использовать имеющуюся информацию о матрице A , чтобы точнее оценить сверху ν и, возможно, найти аннулирующий многочлен более низкой степени, чем характеристический. Наилучший вариант в этом смысле — использование минимального многочлена для A^ν , однако нахождение минимального многочлена может представлять самостоятельную вычислительную проблему.

При доказательстве теоремы 2.1 будем пользоваться приведенным выше условием (f), необходимым и достаточным для того, чтобы идемпотентная матрица Z была собственным проектором для A . Отметим, однако, что сведение непосредственно к определению собственного проектора или к другим необходимым и достаточным условиям имело бы примерно ту же трудоемкость.

Пусть, как и раньше, $u \geq \nu$ (например, $u = v$ или $u = n$) и $\varphi(\lambda)$ — произвольный ненулевой многочлен, аннулирующий для A^u : $\varphi(A^u) = 0$. Пусть

$$\varphi(\lambda) = \lambda^t(\lambda^q + p_1\lambda^{q-1} + \dots + p_q), \quad \text{где } t, q \in \{0, 1, \dots\}, \quad p_1, \dots, p_q \in \mathbb{C}, \quad p_q \neq 0. \quad (2.10)$$

Положим

³Для вычисления его можно использовать метод Леверье-Фаддеева, метод Крылова или другие вычислительные алгоритмы, см., например, [23, 50].

$$h(\lambda) = p_q^{-1}(\lambda^q + p_1\lambda^{q-1} + \dots + p_q) \quad (2.11)$$

и

$$Z = h(A^u). \quad (2.12)$$

Предложение 2.1. Любая матрица Z вида (2.12) обладает следующими свойствами:

- 1) $ZC = CZ$ для любой матрицы C , коммутирующей с A ;
- 2) Z идемпотентна;
- 3) AZ нильпотентна;
- 4) если A сингулярна, то $Z \neq 0$.

Доказательство предложения 2.1. Свойство 1) выполняется, т. к. Z — многочлен от A .

2) Рассмотрим многочлен $\varphi_0(\lambda) = \lambda h(\lambda) = p_q^{-1}\lambda(\lambda^q + p_1\lambda^{q-1} + \dots + p_q)$. Пусть $\widehat{\psi}(\lambda)$ — минимальный многочлен для A^u . Тогда согласно теореме 3.3.1 из [55] $\widehat{\psi}(\lambda)$ делит $\varphi(\lambda)$ и в силу теоремы 3.3.6 из [55] и (2.3) младшая степень λ в $\widehat{\psi}(\lambda)$ не превосходит 1. Поэтому $\widehat{\psi}(\lambda)$ делит $\varphi_0(\lambda)$, и значит, $\varphi_0(\lambda)$ — аннулирующий многочлен для A^u , т. е.

$$0 = \varphi_0(A^u) = A^u h(A^u) = A^u Z = Z A^u. \quad (2.13)$$

Докажем, что $Z^2 = Z$. Действительно, пользуясь (2.12) и (2.13), получаем $Z^2 = Z h(A^u) = Z(A^u g(A^u) + I) = Z$, где $h(\lambda)$ представлено в виде $\lambda g(\lambda) + 1$, $g(\lambda)$ — многочлен от λ .

3) Если $u = 0$, то в силу (2.13) $Z = 0$, значит, AZ нильпотентна с индексом нильпотентности 1. Если $u > 0$, то в силу пунктов 1) и 2), а также (2.13) имеем $(AZ)^u = A^u Z^u = A^u Z = 0$, и AZ нильпотентна с индексом нильпотентности не выше u .

4) Если A сингулярна, то согласно теореме 4.6(с) из [91] младшая степень λ в минимальном многочлене $\widehat{\psi}(\lambda)$ равна индексу A^u , т. е. больше нуля. Поэтому $\widehat{\psi}(\lambda)$ не делит $h(\lambda)$ и, значит, многочлен $h(\lambda)$ не является аннулирующим для A^u , поэтому $0 \neq h(A^u) = Z$. \square

Из условия (f), приведенного выше, и предложения 2.1 вытекает

Теорема 2.1. Пусть $u \geq v$. Тогда для любого ненулевого многочлена $\varphi(\lambda)$, аннулирующего для матрицы A^u , матрица Z , определяемая формулой (2.12), является собственным проектором матрицы A .

Собственный проектор матрицы связан с ее псевдообратной по Дразину A^D (см. (g) в разделе 2.2). Если известен собственный проектор, то матрица A^D может быть найдена по формуле [241]⁴

$$A^D = (A + \alpha Z)^{-1}(I - Z), \quad \alpha \neq 0. \quad (2.14)$$

Далее, если $\text{ind}(A) = 1$, то групповая обратная $A^\# = A^D$ удовлетворяет равенству

⁴Формула (2.14) при $\alpha = 1$ получена в [354].

$$A^\# = (A + Z)^{-1} - Z$$

(см., например, [298, 299]). Пользуясь этим, а также легко проверяемой формулой $A^D = A^{\nu-1}(A^\nu)^\#$ и тем, что $\text{ind}(A^\nu) = 1$, можно получить еще одно выражение для A^D :

$$A^D = A^{\nu-1}(A^\nu)^\# = A^{\nu-1}((A^\nu + Z)^{-1} - Z). \quad (2.15)$$

Отметим, что через собственный проектор матрицы A можно выразить также матрицу псевдообратную к A по Муру-Пенроузу (см., например, [90, с. 686–687]).

2.4. Нахождение компонент матрицы и ее минимального многочлена

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}$ — различные собственные значения A . Через ν_k будем обозначать индекс собственного значения λ_k ($k = 1, \dots, s$), т. е. размер наибольшей жордановой клетки, соответствующей λ_k , равный степени множителя $(\lambda - \lambda_k)$ в минимальном многочлене A . *Собственным проектором A , соответствующим λ_k* , называют собственный проектор матрицы $A - \lambda_k I$.

Отыскав $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, можно использовать теорему 2.1 для нахождения соответствующих им собственных проекторов. Обратимся теперь к теории функций от матрицы [23, 39], согласно которой для любой функции $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, имеющей в каждой точке λ_k ($k = 1, \dots, s$) конечные производные $f^{(j)}(\lambda_k)$ порядков $j = 0, \dots, \nu_k$, $f(A)$ определяется следующим образом:

$$f(A) := \sum_{k=1}^s \sum_{j=0}^{\nu_k-1} f^{(j)}(\lambda_k) Z_{kj},$$

где производная порядка 0 — значение функции, а матрицы Z_{kj} — так называемые *компоненты A* . Компонента Z_{k0} есть собственный проектор A , соответствующий λ_k ($k = 1, \dots, s$), а остальные компоненты получаются последовательным домножением Z_{k0} на $A - \lambda_k I$ и на числовые коэффициенты:

$$Z_{kj} = (j!)^{-1} (A - \lambda_k I)^j Z_{k0} \quad (2.16)$$

(см. теорему 5.5.2 в [39]).

Все компоненты являются линейно независимыми (см., например, § 5.3 в [23]), поэтому среди них нет нулевых. Вместе с тем для каждого $k = 1, \dots, s$ $(A - \lambda_k I)^{\nu_k} Z_{k0} = 0$. Это следует из условия (b), приведенного в разделе 2.2, и того факта, что Z_{k0} — собственный проектор матрицы $A - \lambda_k I$, а ν_k — ее индекс. Получаем «критерий остановки» при вычислениях по формуле (2.16): после нахождения компоненты Z_{k0} с помощью теоремы 2.1 компоненты Z_{kj} ($j > 0$) находим последовательным домножением Z_{k0} на $A - \lambda_k I$ и соответствующие числовые коэффициенты согласно (2.16) до тех пор, пока не получим 0. Найденное число компонент будет равно ν_k .

Теперь знание λ_k и ν_k позволяет построить минимальный многочлен матрицы A : $\widehat{\psi}(\lambda) = \prod_{k=1}^s (\lambda - \lambda_k)^{\nu_k}$. Таким образом, начав с нахождения собственных значений A и аннулирующих многочленов для $(A - \lambda_k I)^u$, $u \geq \text{ind}(A - \lambda_k I)$, $k = 1, \dots, s$, далее можно найти собственные проекторы, соответствующие всем собственным значениям, а также компоненты A , индексы собственных значений и минимальный многочлен для A .

Отметим стандартную вычислительную проблему, возникающую при численной реализации этого метода. Составной частью метода является проверка, получена ли нулевая матрица при очередном домножении $(A - \lambda_k I)^j Z_{k0}$ на $A - \lambda_k I$. Если вычисления проводятся приближенно, то необходим критерий признания полученной матрицы с «маленькими» элементами нулевой. Подобные проблемы решаются нахождением соответствующих оценок и характерны для всех алгоритмов вычисления ранга матрицы или индексов ее собственных значений, так как эти целые величины меняются ступенчато при непрерывных изменениях элементов матрицы.

2.5. Собственный проектор и компоненты матрицы, собственные значения которой известны

Легко проверить непосредственно, что если $J(a)$ — жорданова клетка с собственным значением $a \neq 0$, то $\text{ind}(J(a) - aI) = \text{ind}(J^p(a) - a^p I)$, $p = 2, 3, \dots$ (см., например, задачу 16 к разделу 3.2 в [55]). Отсюда вытекает

Лемма 2.2. Пусть $\lambda_i \neq 0$ — собственное значение A . Тогда его индекс равен индексу собственного значения λ_i^p матрицы A^p ($p = 2, 3, \dots$).

Следующее выражение [66] для собственного проектора матрицы и ее компонент полезно в случае, когда известны не коэффициенты ее аннулирующего многочлена, а множество всех ее различных собственных значений.

Теорема 2.2. Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, Z — собственный проектор матрицы A , $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ — ее различные собственные значения, ν_1, \dots, ν_s — их индексы. Пусть u_1, \dots, u_s — целые числа такие, что $u_i \geq \nu_i$ ($i = 1, \dots, s$); $u \geq \text{ind } A$. Тогда

$$Z = \prod_{i: \lambda_i \neq 0} \left(I - (A/\lambda_i)^u \right)^{u_i}, \quad (2.17)$$

$$Z_{kj} = \prod_{i \neq k} \left(I - \left(\frac{A - \lambda_k I}{\lambda_i - \lambda_k} \right)^{u_k} \right)^{u_i} (j!)^{-1} (A - \lambda_k I)^j, \quad (2.18)$$

где Z_{kj} — компонента A порядка j , соответствующая λ_k , $k = 1, \dots, s$, $j = 0, \dots, \nu_k - 1$.

При $j = 0$ формула (2.18) дает выражения для собственных проекторов A , соответствующих ее собственным значениям.

Доказательство теоремы 2.2. Многочлен $\lambda \xi(\lambda) \equiv \lambda \prod_{i: \lambda_i \neq 0} (\lambda - \lambda_i^u)^{u_i}$ является аннулирующим для A^u . Действительно, он делится на минимальный многочлен для A^u , поскольку λ_i^u — собственные значения A^u , их индексы не превосходят чисел u_i в силу леммы 2.2, причем $\text{ind } A^u \leq 1$ согласно (2.3). Для доказательства (2.17) достаточно взять в качестве $h(\lambda)$ (см. (2.11)) многочлен $\xi(\lambda)$, поделенный на его свободный член $p = \prod_{i: \lambda_i \neq 0} (-\lambda_i^u)^{u_i}$, применить теорему 2.1 и сделать необходимые тождественные преобразования.

Применяя (2.17) к матрице $A - \lambda_k I$, индекс которой по определению не превосходит u_k , а различные собственные значения $\lambda_i - \lambda_k$ имеют индексы ν_i ($i = 1, \dots, s$), не превосходящие соответственно чисел u_1, \dots, u_s , получаем выражение (2.18) при $j = 0$. Теперь выражения (2.18) для компонент A более высокого порядка следуют из (2.16). \square

Теорема 2.2 обобщает формулу (5.4.3) в [39] (см. также [253, раздел 9.5]), верную в случае $\nu_1 = \dots = \nu_s = 1$.

Заключительные замечания к главе 2

В главе 2 приведен ряд необходимых и достаточных условий, задающих собственный проектор (главный идемпотент) квадратной матрицы. Доказана теорема, позволяющая находить собственный проектор матрицы A (и далее — псевдообратную по Дразину A^D) с помощью любого ненулевого аннулирующего многочлена для матрицы A^u , где $u \geq \text{ind } A$. С помощью этой теоремы могут быть также найдены компоненты матрицы и ее минимальный многочлен. Понятие собственного проектора будет играть центральную роль в главе 3, поскольку, как будет доказано, нормированная матрица максимальных исходящих лесов орграфа является собственным проектором его матрицы Кирхгофа.

Глава 3

Исследование матрицы максимальных исходящих лесов орграфа

При изучении лапласовских матриц постоянно возникает необходимость анализировать «лесную» структуру соответствующих графов.

В этой главе мы исследуем свойства максимальных исходящих лесов орграфа (в общем случае — взвешенного) и соответствующей им матрицы. Доказано, что нормированная матрица максимальных исходящих лесов орграфа является собственным проектором его матрицы Кирхгофа. Получена теорема о равенстве размерности ядра матрицы Кирхгофа и лесной размерности орграфа. Рассмотрены цепи Маркова, *связанные со взвешенным орграфом*, и показано, что из полученных результатов легко выводится *матричная теорема о деревьях для цепей Маркова* (в англоязычной литературе — Markov chain tree theorem), согласно которой матрица средних предельных вероятностей для любой цепи Маркова, связанной с орграфом, совпадает с нормированной матрицей максимальных исходящих лесов этого орграфа. Обсуждается применение исследуемой матрицы и транспонированной к ней *матрицы предельных достижимостей* в задаче выявления структуры орграфа. Другие применения — в задачах измерения близости вершин взвешенного орграфа и агрегирования предпочтений — изложены соответственно в разделе 8.6.1 и [154]. Основные результаты главы опубликованы в [3, 135, 142, 147]. Некоторые из них были переоткрыты в [131, 221, 315, 324, 342, 394, 395]. Результаты использовались, в частности, в [7, 8, 10, 27, 51, 65, 119–121, 123–125, 127, 138, 189, 227, 280–284, 287–289, 322–324, 349].

3.1. Введение

Важность исследования максимальных исходящих лесов орграфа обусловлена тем, что это понятие — прямое обобщение понятия остовного исходящего дерева, одного из центральных в теории ориентированных графов. В случае, когда остовные исходящие деревья орграфа существуют, они и являются максимальными исходящими лесами; в дополнительном случае максимальные исходящие леса наследуют многие их важные свойства. Эти свойства изучаются в данной главе, которая имеет следующую структуру. В разделах 3.2 и 3.3 исследуются свойства остовных исходящих лесов, в разделе 3.4 дан укрупненный алгоритм их построения, в разделе 3.5 приведены матричные теоремы о лесах, и в разделе 3.6 изучаются матрицы максимальных исходящих лесов. Далее в разделе 3.7 пока-

зано, что нормированная матрица максимальных исходящих лесов совпадает с предельной матрицей средних переходных вероятностей цепи Маркова, *связанной* с данным взвешенным оргграфом (получено новое доказательство матричной теоремы о деревьях для цепей Маркова). Раздел 3.8 посвящен применениям матрицы максимальных исходящих лесов в задачах выявления структуры оргграфа.

3.2. Простейшие свойства остовных исходящих лесов

Лемма 3.1. *Пусть F — исходящий лес.*

1. *Если оргграф F' получен из F удалением дуги, то F' — также исходящий лес.*
2. *Пусть оргграф F' получен из F добавлением дуги (z, w) . Тогда F' — исходящий лес в том и только том случае, если в F вершина w недоминируема и z недостижима из w .*

Этими свойствами, определяющими структуру множества исходящих лесов, мы будем пользоваться при доказательстве леммы 3.2 и последующих утверждений. Напомним (раздел 1.1.3), что через v обозначаем размерность оргграфа по исходящим лесам, тогда $n - v$ — число дуг в любом максимальном исходящем лесе. $\mathcal{F}^{\bullet \rightarrow}(\Gamma) = \mathcal{F}^{\bullet \rightarrow}$ — множество всех остовных исходящих лесов Γ с k дугами.

Лемма 3.2. *Если w — доминируемая вершина Γ , то при любом $k \in \{1, \dots, n - v\}$ множество $\mathcal{F}_k^{\bullet \rightarrow}$ содержит остовный исходящий лес F , в котором вершина w доминируема.*

Доказательство леммы 3.2. От противного: пусть при некотором $k \in \{1, \dots, n - v\}$ ни в одном лесе $F \in \mathcal{F}_k^{\bullet \rightarrow}$ нет дуг вида (z, w) . Рассмотрим произвольный $F \in \mathcal{F}_k^{\bullet \rightarrow}$ и любую вершину z , такую что $(z, w) \in E(\Gamma)$. Если z достижима из w в F , то удалим из F произвольную дугу из соответствующего пути (тогда z становится недостижимой из w) и добавим дугу (z, w) . Полученный оргграф принадлежит $\mathcal{F}_k^{\bullet \rightarrow}$ в противоречие с допущением. Если же z недостижима из w в F , удалим из F произвольную дугу и добавим дугу (z, w) . Снова полученный лес принадлежит $\mathcal{F}_k^{\bullet \rightarrow}$, и допущение неверно. \square

Более сильное утверждение, — что для любого k и любой дуги $(z, w) \in E(\Gamma)$ в множестве $\mathcal{F}_k^{\bullet \rightarrow}$ есть лес, содержащий (z, w) , — неверно. Действительно, рассмотрим оргграф, показанный на рис. 3.1а. Он имеет размерность по исходящим лесам, равную 1, и его единственный максимальный исходящий лес F (дерево!) показан на рис. 3.1б. Дуга $(4, 2)$ не входит в этот лес. Отсюда следует также, что не для любого остовного исходящего леса F' существует максимальный исходящий лес F , такой что $E(F') \subseteq E(F)$. Например, множества дуг остовных исходящих лесов на рис. 3.1в, г не входят в $E(F)$.

Таким образом, максимальность леса по количеству дуг сильнее, чем максимальность по включению множеств дуг (так, исходящие леса на рис. 3.1в, г максимальны

лишь в смысле второго определения). Отсюда следует в частности, что множества дуг остовных исходящих лесов орграфа не являются независимыми множествами матроида.

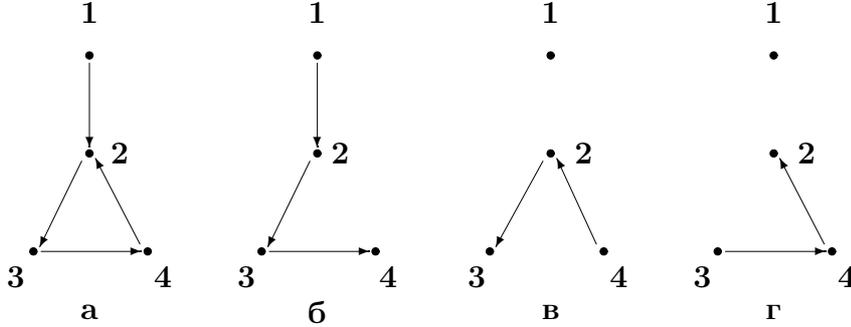


Рис. 3.1.

Предложение 3.1. 1. Любая недоминируемая вершина орграфа Γ является корнем в любом остовном исходящем лесе. 2. Если орграф не содержит контуров, то никакая доминируемая вершина не может быть корнем в максимальном исходящем лесе.

Доказательство предложения 3.1. 1. Если вершина недоминируема в Γ , то она недоминируема (и, значит, является корнем!) в любом остовном исходящем лесе.

2. Пусть, напротив, орграф не содержит контуров, но некоторая доминируемая вершина j является корнем в максимальном исходящем лесе. Тогда, добавив произвольную дугу, входящую в j , получим лес. Отсюда следует, что до добавления дуги лес не был максимальным в противоречие с допущением. \square

Лемма 3.3. 1. Вес $\varepsilon(\mathcal{F}_k^{t \bullet \rightarrow t})$ множества $\mathcal{F}_k^{t \bullet \rightarrow t}$ одинаков для всех недоминируемых вершин t орграфа Γ и равен $\varepsilon(\mathcal{F}_k^{\bullet \rightarrow})$. 2. Для любого $k \in \{1, \dots, n - v\}$ имеет место $\varepsilon(\mathcal{F}_k^{t \bullet \rightarrow t}) > \varepsilon(\mathcal{F}_k^{w \bullet \rightarrow w})$, если t — недоминируемая вершина в Γ , а w — доминируемая вершина.

Доказательство леммы 3.3. 1. Из пункта 1 предложения 3.1 следует $\mathcal{F}_k^{t \bullet \rightarrow t} = \mathcal{F}_k^{\bullet \rightarrow}$, поэтому $\varepsilon(\mathcal{F}_k^{\bullet \rightarrow}) = \varepsilon(\mathcal{F}_k^{t \bullet \rightarrow t})$. 2. В силу леммы 3.2 множеству $\mathcal{F}_k^{\bullet \rightarrow}$ принадлежит хотя бы один лес F_k , который содержит входящую в w дугу и, значит, этот лес входит в $\mathcal{F}_k^{\bullet \rightarrow} \setminus \mathcal{F}_k^{w \bullet \rightarrow w}$. Поскольку $\mathcal{F}_k^{t \bullet \rightarrow t} = \mathcal{F}_k^{\bullet \rightarrow}$ и $\varepsilon_{ij} > 0$ для всех $(i, j) \in E(\Gamma)$, получаем $\varepsilon(\mathcal{F}_k^{t \bullet \rightarrow t}) > \varepsilon(\mathcal{F}_k^{w \bullet \rightarrow w})$. \square

В следующих утверждениях i, j и k — произвольные вершины Γ .

Лемма 3.4. Если в Γ существует путь из i в j , а в максимальном исходящем лесе F орграфа Γ нет путей из i в j , то в F имеется дуга (k, j) при некотором $k \neq i$ или i достижима из j в F .

Доказательство леммы 3.4. Пусть в Γ существует путь из i в j , а в максимальном исходящем лесе F орграфа Γ таких путей нет. Вершины i и j в F принадлежат или а) одному и тому же дереву, или же б) разным деревьям. В случае а) или j является корнем дерева, и тогда i достижима из j , или в дереве есть дуга вида (k, j) при $k \neq i$, что и требовалось доказать. Покажем, что в случае б) вершина j не может быть корнем в F . Показав это, получим, что в F есть дуга (k, j) при $k \neq i$, и лемма будет доказана. Допустим противное и рассмотрим произвольный путь в Γ из i в j (по условию такой путь существует): $(i_0, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_s, j)$, где $i_0 = i$. По предположению i_0 недостижима из j в F . Пусть $t \in \{0, \dots, s\}$ — такое наибольшее число, что i_t недостижима из j в F . Удалив из F все дуги, входящие в вершины i_{t+1}, \dots, i_s (число этих дуг равно $s-t$), получим остовный исходящий лес, где i_{t+1}, \dots, i_s, j являются корнями. Теперь, добавив к этому лесу $s-t+1$ дуг $(i_t, i_{t+1}), \dots, (i_s, j)$, получим орграф, где по определению числа t нет полуконтуров и полустепени захода вершин не превышают 1. В этом остовном исходящем лесе больше дуг, чем в максимальном лесе F . Полученное противоречие завершает доказательство. \square

Из леммы 3.4 следует

Предложение 3.2. *Если в максимальном исходящем лесе F орграфа Γ вершины i и j принадлежат разным деревьям и j является корнем дерева, то в Γ нет путей из i в j .*

Если в лемме 3.4 посылку заменить на ее локальный аналог, утверждению можно придать форму критерия:

Лемма 3.5. *В максимальном исходящем лесе F орграфа Γ отсутствует дуга (i, j) , содержащаяся в Γ , тогда и только тогда, когда в F имеется дуга (k, j) при некотором $k \neq i$ или i достижима из j в F .*

Доказательство леммы 3.5. Пусть $(i, j) \in E(\Gamma) \setminus E(F)$. Вершины i и j в лесе F принадлежат или а) одному и тому же дереву, или же б) разным деревьям. В случае а) доказательство такое же, как для леммы 3.4. Рассмотрим случай б). В силу максимальной лесе F вершина j в F не может быть корнем дерева (иначе добавление дуги (i, j) породило бы лес с большим числом дуг). Значит, из некоторой вершины $k \neq i$ в вершину j входит дуга (k, j) .

Обратно, покажем, что если в F имеется дуга (k, j) при $k \neq i$ или i достижима из j в F , то (i, j) не входит в F . Действительно, допустив, что — входит, в первом случае мы имели бы $\text{id}(j) \geq 2$, а во втором образовался бы контур, но и то и другое противоречит определению лесе. \square

3.3. Максимальные исходящие леса, базы и недоминируемые узлы

Пусть $\tilde{K} = \bigcup_{i=1}^u K_i$, где K_1, \dots, K_u — все недоминируемые узлы орграфа Γ , а K_i^+ — множество всех вершин, достижимых из K_i и недостижимых из других недоминируемых узлов. Если $k \in \tilde{K}$, то через $K(k)$ будем обозначать недоминируемый узел, содержащий k . Для любого недоминируемого узла K орграфа Γ обозначим через Γ_K сужение Γ на K и через Γ_{-K} — подграф с множеством вершин $V(\Gamma)$ и множеством дуг $E(\Gamma) \setminus E(\Gamma_K)$. Зафиксировав K , через \mathcal{T} будем обозначать множество всех остовных исходящих деревьев орграфа Γ_K , а через \mathcal{P} — множество всех максимальных исходящих лесов орграфа Γ_{-K} . Через \mathcal{T}^k ($k \in K$) обозначим подмножество \mathcal{T} , состоящее из деревьев, исходящих из k , а через $\mathcal{P}^{K \rightarrow i}$ ($i \in V(\Gamma)$) — множество всех максимальных исходящих лесов орграфа Γ_{-K} , в которых i достижима из некоторой вершины, принадлежащей K .

Предложение 3.3. *Множество $W \subseteq V(\Gamma)$ является множеством корней максимального исходящего леса в Γ тогда и только тогда, когда W — вершинная база в Γ .*

Доказательство предложения 3.3. Пусть W — множество корней произвольного максимального исходящего леса в Γ . Тогда все вершины Γ достижимы из W по определению максимального исходящего леса, и элементы W взаимно недостижимы в силу предложения 3.2. Поэтому W — вершинная база Γ . Обратно, пусть W — вершинная база Γ . Покажем, что W — множество корней некоторого максимального исходящего леса в Γ . Следующее утверждение получено в [185]; для полноты изложения мы приведем здесь его доказательство.

Лемма 3.6. *Для любого сильного орграфа Γ и любой его вершины j существует остовное дерево в Γ , исходящее из j .*

Доказательство леммы 3.6. Построим нужное дерево последовательным добавлением дуг. Пусть F_0 — подграф Γ , такой что $V(F_0) = \{j\}$, $E(F_0) = \emptyset$. Пусть определен подграф F_k , и (z, i) — произвольная дуга в Γ , такая что $z \in V(F_k)$ и $i \in V(\Gamma) \setminus V(F_k)$. Определим F_{k+1} , положив $V(F_{k+1}) = V(F_k) \cup \{i\}$ и $E(F_{k+1}) = E(F_k) \cup \{(z, i)\}$. Очевидно, что каждый подграф F_k является деревом, исходящим из j , и что процесс не прервется, пока не будет построено остовное дерево, исходящее из j . Действительно, если бы процесс прервался на некотором F_k при $k < n - 1$, это значило бы, что в Γ нет путей из $V(F_k)$ в $V(\Gamma) \setminus V(F_k)$, и Γ не был бы сильным. \square

Для завершения доказательства предложения 3.3 заметим, что согласно предложению 1.1 множество W образовано вершинами, взятыми по одной из каждого недоминируемого узла Γ . Пользуясь леммой 3.6, из каждой такой вершины построим остовное исходящее дерево в содержащем ее недоминируемом узле. Объединив множества дуг этих

деревьев с множеством $E(F) \setminus (\tilde{K} \times \tilde{K})$, где F — произвольный максимальный исходящий лес в Γ , получим множество дуг искомого максимального леса. Действительно, построенный орграф — исходящий лес с множеством корней W , причем количество дуг в нем не меньше, чем в F . \square

Таким образом, множества корней максимальных исходящих лесов характеризуются предложением 1.1. Следующие три утверждения выводятся из предложений 1.1 и 3.3.

Предложение 3.4. *Для любого максимального исходящего леса F орграфа Γ и любого недоминируемого узла K_i сужение F на K_i^+ есть исходящее дерево.*

Доказательство предложения 3.4. Согласно предложению 3.3 в K_i^+ есть лишь один корень леса F . Следовательно, сужение F на K_i^+ есть дерево, исходящее из этого корня, так как вершины из K_i^+ недостижимы из других корней F . \square

Предложение 3.5. *Размерность орграфа по исходящим лесам равна количеству его недоминируемых узлов: $v = u$.*

Предложение 3.6. *Размерность по исходящим лесам сильного орграфа равна 1.*

Для доказательства предложения 3.6 достаточно заметить, что единственным недоминируемым узлом сильного орграфа Γ является $V(\Gamma)$.

Поскольку любая слабая компонента орграфа разбивается на сильные, среди которых есть хотя бы один недоминируемый узел, размерность орграфа по исходящим лесам нестрого заключена между числом слабых и числом сильных компонент. Число односторонних компонент также не меньше числа слабых компонент (в каждой слабой содержится хотя бы одна односторонняя), но может быть и меньше, и больше, и равно числу сильных компонент; это число может даже превосходить количество вершин в Γ (пример — двудольный орграф Γ , где $V(\Gamma) = \{i_1, i_2, i_3, j_1, j_2, j_3\}$, $E(\Gamma) = \{(i_k, j_t) \mid k, t = 1, 2, 3\}$). Наконец, каждая односторонняя компонента либо не пересекается с множеством \tilde{K} , либо содержит ровно один недоминируемый узел. Поэтому размерность орграфа по исходящим лесам не превосходит числа его односторонних компонент. Получаем следующее утверждение.

Предложение 3.7. *Размерность орграфа по исходящим лесам не меньше числа слабых компонент и не больше минимума из числа сильных компонент и числа односторонних компонент этого орграфа.*

Зафиксируем произвольный недоминируемый узел K орграфа Γ и рассмотрим множества $\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{T}^k, \mathcal{P}^{k \bullet \rightarrow i}$ ($k \in K, i \in V(\Gamma)$), определенные выше. Пусть $\mathcal{T} \odot \mathcal{P} = \{T \cup F \mid T \in \mathcal{T}, F \in \mathcal{P}\}$, где $T \cup F$ есть орграф с множеством вершин $V(T) \cup V(F) = V(\Gamma)$ и множеством дуг $E(T) \cup E(F)$. Аналогично $\mathcal{T}^k \odot \mathcal{P}^{k \bullet \rightarrow i} = \{T \cup F \mid T \in \mathcal{T}^k, F \in \mathcal{P}^{k \bullet \rightarrow i}\}$.

Предложение 3.8. Пусть K — произвольный недоминируемый узел орграфа Γ , и множества \mathcal{T} , \mathcal{P} , \mathcal{T}^j и $\mathcal{P}^{K \bullet \rightarrow i}$ ($j \in K$, $i \in V(\Gamma)$) построены по K . Тогда

1. $\mathcal{F}_{n-v}^{\bullet \rightarrow i} = \mathcal{T} \odot \mathcal{P}$ и $\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v}^{\bullet \rightarrow i}) = \varepsilon(\mathcal{T}) \varepsilon(\mathcal{P})$;
2. для любых $j \in K$ и $i \in V(\Gamma)$

$$\mathcal{F}_{n-v}^{j \bullet \rightarrow i} = \mathcal{T}^j \odot \mathcal{P}^{K \bullet \rightarrow i} \quad \text{и} \quad \varepsilon(\mathcal{F}_{n-v}^{j \bullet \rightarrow i}) = \varepsilon(\mathcal{T}^j) \varepsilon(\mathcal{P}^{K \bullet \rightarrow i}). \quad (3.1)$$

Доказательство предложения 3.8. Докажем пункт 2 (пункт 1 доказывается аналогично). Рассмотрим произвольный лес $F \in \mathcal{P}^{K \bullet \rightarrow i}$. Из определения недоминируемого узла следует, что все вершины, принадлежащие множеству K , являются корнями в F . В каждом дереве T из множества \mathcal{T}^j в любую вершину, кроме корня, входит ровно одна дуга. Поэтому $F' = T \cup F$ есть остовный исходящий лес в Γ , причем с максимальным числом дуг, так как максимальными являются и T , и F , значит, $F' \in \mathcal{F}_{n-v}^{j \bullet \rightarrow i}$. Следовательно, $\mathcal{T}^j \odot \mathcal{P}^{K \bullet \rightarrow i} \subseteq \mathcal{F}_{n-v}^{j \bullet \rightarrow i}$. Теперь рассмотрим произвольный лес F' из множества $\mathcal{F}_{n-v}^{j \bullet \rightarrow i}$. По предложению 3.4 сужение F' на K есть остовное исходящее дерево в K с корнем j . Обозначим его T^j . Покажем, что лес, образованный оставшимися дугами F' , принадлежит множеству $\mathcal{P}^{K \bullet \rightarrow i}$. Действительно, в нем вершина i достижима из K , и если этот лес не максимален, то, объединив дерево T^j с произвольным лесом из \mathcal{P} , получим лес, число дуг которого больше, чем в F' , что противоречит максимальнойности F' . Таким образом, $F' \in \mathcal{T}^j \odot \mathcal{P}^{K \bullet \rightarrow i}$ и, значит, $\mathcal{F}_{n-v}^{j \bullet \rightarrow i} \subseteq \mathcal{T}^j \odot \mathcal{P}^{K \bullet \rightarrow i}$. Из доказанного вытекают требуемые утверждения. \square

3.4. Конструктивное описание максимальных исходящих лесов

Приведем укрупненный алгоритм построения всех максимальных исходящих лесов Γ .

1. Находим все недоминируемые узлы K_1, \dots, K_v орграфа Γ , а также множества K_1^+, \dots, K_v^+ , где K_i^+ есть объединение K_i и множества всех вершин, достижимых из K_i , но недостижимых из остальных недоминируемых узлов.

2. В каждом множестве вершин K_i^+ строим произвольное остовное исходящее дерево (корень его, разумеется, принадлежит K_i).

3. Находим сильные компоненты в сужении Γ на $V(\Gamma) \setminus \bigcup_{i=1}^v K_i^+$. Пусть T_1, \dots, T_s — множества вершин этих сильных компонент.

4. Для каждого множества T_i проводим одну или любое большее число дуг, присутствующих в Γ , начинающихся вне T_i и входящих в *разные* вершины T_i .

5. В каждом T_i строим произвольный остовный лес, корнями которого являются те и только те вершины, в которые проведены дуги извне (в п. 4).

6. Результатом является остовный подграф, множество дуг которого состоит из всех дуг, построенных в пп. 2, 4 и 5.

Пункт 5 может быть сведен к построению дерева, т. е. заменен пунктом 5а.

5а. «Склеиваем» все вершины T_i , в которые проведены дуги извне, и из получившейся вершины t_i^* строим произвольное исходящее дерево в оставшейся части T_i . Снова разделяем вершину t_i^* на образовавшие ее вершины, заменяя дуги, проведенные из t_i^* , произвольными соответствующими дугами из этих вершин.

Предложение 3.9. 1. Множества подграфов, описываемых в пунктах 5 и 5а, совпадают. 2. Множество подграфов, получаемых с помощью укрупненного алгоритма 1–6, совпадает с множеством максимальных исходящих лесов мультиорграфа Γ .

Доказательство предложения 3.9. Пункт 1 следует из того, что любой исходящий лес «склеиванием» всех корней преобразуется в исходящее дерево; при этом процедура «разделения» корня, описанная в п. 5а, порождает лес, исходящий из вершин, на которые «разделен» корень дерева. Пункт 2. Все подграфы, определяемые алгоритмом 1–6, есть максимальные исходящие леса, так как по построению степени захода всех вершин, за исключением v корней деревьев, лежащих в K_1^+, \dots, K_v^+ , равны 1, и в выстраиваемом орграфе нет контуров, поскольку их нет в Γ^* . Наконец, так определяются все максимальные исходящие леса в Γ , так как сужение максимального исходящего леса на K_i^+ ($i = 1, \dots, v$) есть исходящее дерево (предложение 3.4), а сужение на T_i ($i = 1, \dots, s$) — исходящий лес, множество корней которого образуют вершины, в которые входят дуги извне. \square

3.5. Матричные теоремы о лесах в параметрической форме

Теорема 3.1 (параметрическая версия матричной теоремы о лесах для мультиграфов [69]). Для любого взвешенного мультиграфа G с положительными весами ребер и любого $\tau > 0$ существует матрица $Q(\tau) = (q_{ij}(\tau)) = (I + \tau L(G))^{-1}$, причем

$$q_{ij}(\tau) = \frac{\sum_{k=0}^{n-v} \tau^k \varepsilon(\mathcal{F}_k^{ij})}{\sum_{k=0}^{n-v} \tau^k \varepsilon(\mathcal{F}_k)}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

где \mathcal{F}_k — множество всех k -реберных остовных корневых лесов в G , \mathcal{F}_k^{ij} — множество тех k -реберных остовных корневых лесов в G , где j принадлежит корневному дереву с корнем i , v — число компонент в G .

Доказательство теоремы 3.1. Равенство (3.2) следует из матричной леммы о лесах (лемма 1.1), примененной к взвешенному мультиграфу G' , отличающемуся от G только весами ребер: для всех $i, j = 1, \dots, n$, $p = 1, \dots, n_{ij}$, $(\varepsilon_{ij}^p)' = \tau \varepsilon_{ij}^p$. \square

Аналогичная теорема верна и для мультиорграфов [3].

Теорема 3.1'. Для любого взвешенного мультиорграфа Γ с положительными весами дуг и любого $\tau > 0$ существует матрица $\tilde{Q}(\tau) = (\tilde{q}_{ij}(\tau)) = (I + \tau\tilde{L}(\Gamma))^{-1}$, причем

$$\tilde{q}_{ij}(\tau) = \frac{\sum_{k=0}^{n-v} \tau^k \varepsilon(\mathcal{F}_k^{j \bullet \rightarrow i})}{\sum_{k=0}^{n-v} \tau^k \varepsilon(\mathcal{F}_k^{\bullet \rightarrow})}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (3.3)$$

где $\mathcal{F}_k^{\bullet \rightarrow}$ — множество всех остовных исходящих лесов в Γ , содержащих k дуг, $\mathcal{F}_k^{j \bullet \rightarrow i}$ — множество тех остовных исходящих лесов в Γ с k дугами, где j — корень исходящего дерева, содержащего вершину i , v — размерность по исходящим лесам Γ .

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.1. Равенство (3.3) следует из матричной леммы о лесах (лемма 1.2), примененной к взвешенному мультиорграфу Γ' , отличающемуся от Γ только весами дуг: для всех $i, j = 1, \dots, n$ в Γ' $\varepsilon'_{ij} = \tau \varepsilon_{ij}$.

Теорему 3.1' перепишем в матричной форме:

Теорема 3.1''. Для любого взвешенного мультиорграфа Γ с положительными весами дуг и любого $\tau > 0$ существует матрица $\tilde{Q}(\tau) = (I + \tau\tilde{L}(\Gamma))^{-1}$, причем

$$\tilde{Q}(\tau) = \frac{1}{s(\tau)} \left(\tau^0 \tilde{Q}_0 + \tau^1 \tilde{Q}_1 + \dots + \tau^{n-v} \tilde{Q}_{n-v} \right),$$

где

$$s(\tau) = \sum_{k=0}^{n-v} \tau^k \varepsilon(\mathcal{F}_k^{\bullet \rightarrow}), \quad \tilde{Q}_k = (\tilde{q}_{ij}^k), \quad \tilde{q}_{ij}^k = \varepsilon(\mathcal{F}_k^{j \bullet \rightarrow i}), \quad k = 0, \dots, n-v, \quad i, j = 1, \dots, n; \quad (3.4)$$

$\mathcal{F}_k^{\bullet \rightarrow}$ и $\mathcal{F}_k^{j \bullet \rightarrow i}$ — те же, что в теореме 3.1'.

В случае неориентированных графов все элементы матрицы максимальных корневых лесов Q_{n-v} одинаковы внутри каждой компоненты G . В ориентированном случае матрица \tilde{Q}_{n-v} обладает интересными и нетривиальными свойствами, которые определяются свойствами максимальных исходящих лесов. Эта матрица изучается в следующих трех разделах.

3.6. Матрица максимальных исходящих лесов

Согласно (3.4) $\tilde{Q}_{n-v} = (\tilde{q}_{ij}^{n-v})$, где $\tilde{q}_{ij}^{n-v} = \varepsilon(\mathcal{F}_{n-v}^{j \bullet \rightarrow i})$, т. е. элемент \tilde{q}_{ij}^{n-v} матрицы \tilde{Q}_{n-v} есть вес множества всех *максимальных* исходящих лесов орграфа Γ , в которых вершина i принадлежит дереву с корнем j . Поэтому будем называть \tilde{Q}_{n-v} *матрицей максимальных исходящих лесов* орграфа Γ .

Теорема 3.2. Пусть Γ — произвольный орграф, K — недоминируемый узел в Γ . Тогда выполняются следующие утверждения.

1. Для любого $i \in V(\Gamma)$ $\sum_{j=1}^n \tilde{q}_{ij}^{n-v} = \varepsilon(\mathcal{F}_{n-v}^{\bullet \rightarrow i})$.
2. $\tilde{q}_{ij}^{n-v} \neq 0 \Leftrightarrow (j \in \tilde{K} \text{ и } i \text{ достижима из } j \text{ в } \Gamma)$.
3. Пусть $j \in K$. Для любого $i \in V(\Gamma)$ имеет место $\tilde{q}_{ij}^{n-v} = \varepsilon(\mathcal{T}^j)\varepsilon(\mathcal{P}^{K \bullet \rightarrow i})$. При этом если $i \in K^+$, то $\tilde{q}_{ij}^{n-v} = \tilde{q}_{jj}^{n-v} = \varepsilon(\mathcal{T}^j)\varepsilon(\mathcal{P})$.
4. $\sum_{j \in K} \tilde{q}_{jj}^{n-v} = \varepsilon(\mathcal{F}_{n-v}^{\bullet \rightarrow})$. В частности, если j — недоминируемая вершина, то $\tilde{q}_{jj}^{n-v} = \varepsilon(\mathcal{F}_{n-v}^{\bullet \rightarrow})$.
5. Если $j_1, j_2 \in K$, то $\tilde{q}_{ij_2}^{n-v} = (\varepsilon(\mathcal{T}^{j_2})/\varepsilon(\mathcal{T}^{j_1}))\tilde{q}_{ij_1}^{n-v}$, т. е. j_1 -й и j_2 -й столбцы \tilde{Q}_{n-v} пропорциональны.

Доказательство теоремы 3.2. 1. По определению матрицы \tilde{Q}_{n-v} имеем

$\sum_{j=1}^n \tilde{q}_{ij}^{n-v} = \sum_{j=1}^n \varepsilon(\mathcal{F}_{n-v}^{j \bullet \rightarrow i})$. Поскольку при $j_1 \neq j_2$ $\mathcal{F}_{n-v}^{j_1 \bullet \rightarrow i} \cap \mathcal{F}_{n-v}^{j_2 \bullet \rightarrow i} = \emptyset$ и $\bigcup_{j=1}^n \mathcal{F}_{n-v}^{j \bullet \rightarrow i} = \mathcal{F}_{n-v}^{\bullet \rightarrow i}$, получаем

$$\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v}^{\bullet \rightarrow i}) = \varepsilon\left(\bigcup_{j=1}^n \mathcal{F}_{n-v}^{j \bullet \rightarrow i}\right) = \sum_{j=1}^n \varepsilon(\mathcal{F}_{n-v}^{j \bullet \rightarrow i}).$$

2. Пусть $\tilde{q}_{ij}^{n-v} = \varepsilon(\mathcal{F}_{n-v}^{j \bullet \rightarrow i}) \neq 0$. Тогда i достижима из j в Γ и, согласно предложению 3.3, $j \in \tilde{K}$. Докажем обратное утверждение. Пусть $j \in \tilde{K}$ и i достижима из j в Γ . В силу предложения 3.3 j является корнем некоторого максимального исходящего леса в Γ . Обозначим этот лес через F . Пусть в F i недостижима из j . Согласно лемме 3.4 i не может быть корнем в F . Пусть $(j, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_s, i)$ образуют путь из j в i в Γ . Из $E(F)$ удалим все дуги, входящие в вершины i_1, \dots, i_s, i (их не более $s+1$) и добавим дуги $(j, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_s, i)$. Полученный лес F' также является максимальным исходящим лесом, кроме того, j — корень дерева, содержащего i , значит, $\tilde{q}_{ij}^{n-v} \neq 0$. Пункт 2 доказан.

Первое утверждение п. 3 следует из предложения 3.8, второе — из предложения 3.4.

Пункт 4 имеет место, так как по предложению 3.3 множества $\mathcal{F}_{n-v}^{j \bullet \rightarrow j}$ ($j \in K$) образуют разбиение множества $\mathcal{F}_{n-v}^{\bullet \rightarrow}$.

Пункт 5. Согласно пункту 3, если $j_1, j_2 \in K$ и вершина i достижима из K , то

$$\frac{\tilde{q}_{ij_2}^{n-v}}{\tilde{q}_{ij_1}^{n-v}} = \frac{\varepsilon(\mathcal{T}^{j_2})\varepsilon(\mathcal{P}^{K \bullet \rightarrow i})}{\varepsilon(\mathcal{T}^{j_1})\varepsilon(\mathcal{P}^{K \bullet \rightarrow i})} = \frac{\varepsilon(\mathcal{T}^{j_2})}{\varepsilon(\mathcal{T}^{j_1})}.$$

Если же вершина i не достижима из K , то $\tilde{q}_{ij_1}^{n-v} = \tilde{q}_{ij_2}^{n-v} = 0$. Тем самым требуемое равенство, а с ним и теорема 3.2, доказаны. \square

Следует отметить, что если орграф Γ имеет размерность по исходящим лесам, равную 1, т. е. содержит остовное исходящее дерево, то в матрице $\tilde{Q}_{n-v} = \tilde{Q}_{n-1}$ имеем $\tilde{q}_{ki}^{n-1} = \tilde{q}_{ji}^{n-1}$ для всех $i, j, k \in V(\Gamma)$. Действительно, в этом случае для любого $j \in V(\Gamma)$

\tilde{q}_{ji}^{n-1} есть вес $\varepsilon(\mathcal{T}^i)$ множества всех исходящих из i остовных деревьев. Поэтому, в силу матричной теоремы о деревьях, \tilde{Q}_{n-1} совпадает в данном случае с присоединенной матрицей матрицы \tilde{L} .

Определение 3.1. *Нормированной матрицей максимальных исходящих лесов орграфа назовем матрицу $\bar{J} = (\bar{J}_{ij}) = \tilde{Q}_{n-v}/\sigma_{n-v}$, где $\sigma_{n-v} = \varepsilon(\mathcal{F}_{n-v}^{\bullet \rightarrow})$.*

Матрица \bar{J} представляет значительный интерес. Прежде всего сформулируем для нее аналог теоремы 3.2.

Теорема 3.2'. *Пусть Γ — произвольный орграф, K — недоминируемый узел в Γ . Выполняются следующие утверждения.*

1. \bar{J} — строчно-стохастическая матрица: $\bar{J}_{ij} \geq 0$, $\sum_{k=1}^n \bar{J}_{ik} = 1$, $i, j = 1, \dots, n$.
2. $\bar{J}_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow (j \in \tilde{K} \text{ и } i \text{ достижима из } j \text{ в } \Gamma)$.
3. Пусть $j \in K$. Для любого $i \in V(\Gamma)$ $\bar{J}_{ij} = \varepsilon(\mathcal{T}^j) \varepsilon(\mathcal{P}^{K \bullet \rightarrow i}) / \sigma_{n-v}$. При этом если $i \in K^+$, то $\bar{J}_{ij} = \bar{J}_{jj} = \varepsilon(\mathcal{T}^j) / \varepsilon(\mathcal{T})$.
4. $\sum_{j \in K} \bar{J}_{jj} = 1$. В частности, если j — недоминируемая вершина, то $\bar{J}_{jj} = 1$.
5. Если $j_1, j_2 \in K$, то $\bar{J}_{j_2} = (\varepsilon(\mathcal{T}^{j_2}) / \varepsilon(\mathcal{T}^{j_1})) \bar{J}_{j_1}$, т. е. j_1 -й и j_2 -й столбцы матрицы \bar{J} пропорциональны.

Теорема 3.2' — следствие теоремы 3.2. Для доказательства последнего утверждения пункта 3 следует дополнительно воспользоваться пунктом 1 предложения 3.8.

Следствие 1 (из пункта 3 теоремы 3.2' и предложения 3.4). *1. Нормированная матрица $\bar{J}_K = (\bar{J}_{ij}^K)$ суженного орграфа Γ_K совпадает с главной подматрицей матрицы \bar{J} , соответствующей недоминируемому узлу K .*

2. Если $i \in K^+$, $j \in K^+ \setminus K$, то изменение веса дуги (i, j) сохраняет матрицу \bar{J} .

В следующей теореме собраны утверждения о сравнении элементов матрицы \bar{J} .

Теорема 3.3. *Для любого орграфа Γ и всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$ имеет место следующее.*

1. $\bar{J}_{ii} \geq \bar{J}_{ji}$.
2. Если $\bar{J}_{ii} > \bar{J}_{ji}$, то $i \in \tilde{K}$ и $j \notin K^+(i)$, где $K(i)$ — недоминируемый узел, включающий i , и, значит, Γ не содержит путей из j в i .
3. Если $\bar{J}_{ii} > \bar{J}_{ji} > 0$, то $j \notin \tilde{K}$, и значит, j не является корнем ни в одном максимальном исходящем лесе орграфа Γ .
4. Если $\bar{J}_{ij} > 0$, то $\bar{J}_{ii} = \bar{J}_{ji}$.

Доказательство теоремы 3.3. 1. $\bar{J}_{ii} \geq \bar{J}_{ji}$, поскольку любая вершина i достижима из нее самой.

2. Если $\bar{J}_{ii} > \bar{J}_{ji}$, то существует максимальный исходящий лес $F \in \mathcal{F}_{n-v}^{i \bullet \rightarrow i} \setminus \mathcal{F}_{n-v}^{i \bullet \rightarrow j}$, в котором i — корень и нет пути из i в j . По предложению 3.3 $i \in \tilde{K}$, и по пункту 3 теоремы 3.2' $j \notin K^+(i)$. В Γ из j нет путей в i , так как в противном случае $j \in K(i)$ по определению $K(i)$.

3. Из $\bar{J}_{ii} > \bar{J}_{ji}$, согласно пункту 2, следует $i \in \tilde{K}, j \notin K^+(i)$. Поскольку $\bar{J}_{ji} > 0$, из i есть путь j , и значит, $j \in \tilde{K}$. Тогда по предложению 3.3 j не является корнем ни в каком максимальном исходящем лесе.

4. Если $\bar{J}_{ij} > 0$, то из j есть путь в i , и по пункту 2 $\bar{J}_{ii} > \bar{J}_{ji}$ невозможно. Тогда в силу пункта 1 $\bar{J}_{ii} = \bar{J}_{ji}$. \square

Теорема 3.4. Матрица \bar{J} идемпотентна: $\bar{J}^2 = \bar{J}$.

Доказательство теоремы 3.4. Пусть $(\bar{J}_{ij}^{(2)}) = \bar{J}^2$. Для любых $i, j \in V(\Gamma)$ имеем

$$\bar{J}_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^n \bar{J}_{ik} \bar{J}_{kj}. \quad (3.5)$$

Предположим сначала, что $\bar{J}_{ij}^{(2)} \neq 0$.

При $\bar{J}_{jj} > \bar{J}_{kj} \neq 0$, согласно пункту 3 теоремы 3.3, k не является корнем ни в одном максимальном исходящем лесе и $\bar{J}_{ik} = 0$, поэтому $\bar{J}_{ik} \bar{J}_{kj} = 0$. Поскольку для всех $k \in V(\Gamma)$ имеет место $\bar{J}_{jj} \geq \bar{J}_{kj}$ (по пункту 1 теоремы 3.3), во всех ненулевых слагаемых в правой части (3.5) $\bar{J}_{kj} = \bar{J}_{jj} > 0$, следовательно,

$$\bar{J}_{ij}^{(2)} = \bar{J}_{jj} \sum_{k \in K'} \bar{J}_{ik}, \quad (3.6)$$

где K' — множество вершин $k \in V(\Gamma)$, для которых $\bar{J}_{ik} \bar{J}_{kj} \neq 0$. Заметим, что $\bar{J}_{ik} \neq 0$ и $\bar{J}_{kj} \neq 0$ выполняются вместе тогда и только тогда, когда $j \in \tilde{K}, k \in K(j)$ и i достижима из $K(j)$ (см. пункт 2 теоремы 3.2'). Поэтому $K' = K(j)$. Используя (3.6) и пункт 3 теоремы 3.2', получаем

$$\bar{J}_{ij}^{(2)} = \frac{\varepsilon(\mathcal{T}^j)}{\varepsilon(\mathcal{T})} \sum_{k \in K(j)} \frac{\varepsilon(\mathcal{T}^k) \varepsilon(\mathcal{T}^{K(j) \bullet \rightarrow i})}{\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v}^{i \bullet \rightarrow})} = \frac{\bar{J}_{ij}}{\varepsilon(\mathcal{T})} \sum_{k \in K(j)} \varepsilon(\mathcal{T}^k) = \bar{J}_{ij}.$$

Пусть теперь $\bar{J}_{ij}^{(2)} = 0$. Тогда, согласно (3.5), $j \notin \tilde{K}$ либо $j \in \tilde{K}$, но i недостижима из $K(j)$. В обоих случаях $\bar{J}_{ij} = 0$. Теорема доказана. Сравни следствие 3 из теоремы 4.3. \square

Напомним, что $\tilde{L} = \tilde{L}(\Gamma) = (\tilde{\ell}_{ij})$ — обозначение матрицы Кирхгофа для орграфа Γ .

Теорема 3.5. $\tilde{L} \bar{J} = \bar{J} \tilde{L} = 0$.

Доказательство теоремы 3.5¹. Докажем, что $\tilde{L}\tilde{Q}_{n-v} = \tilde{Q}_{n-v}\tilde{L} = 0$ (утверждение, эквивалентное требуемому). Пусть $S = (s_{jk}) = \tilde{L}\tilde{Q}_{n-v}$. Покажем, что $S = 0$. По определению $s_{jk} = \sum_{i=1}^n \tilde{\ell}_{ji}\tilde{q}_{ik}^{n-v} = s_1 + s_2$, где $s_1 = \sum_{i \neq j} \tilde{\ell}_{ji}\tilde{q}_{ik}^{n-v}$, $s_2 = \tilde{\ell}_{jj}\tilde{q}_{jk}^{n-v}$. Число $(-s_1)$ равно весу мультимножества \mathcal{G}^{s_1} взвешенных 2-орграфов², любой элемент³ которого получается добавлением дуги (i, j) , имеющейся в Γ , к некоторому лесу из множества $\mathcal{F}_{n-v}^{k \bullet \rightarrow i}$ ($i = 1, \dots, n$). В результате добавления получаем, вообще говоря, 2-орграф, так как дуга (i, j) могла уже содержаться в данном лесе. \mathcal{G}^{s_1} — мультимножество, так как указанное представление такого 2-орграфа H не обязательно единственно. В этом случае $n_1(H)$ — число различных представлений. Вес \mathcal{G}^{s_1} есть

$$\varepsilon(\mathcal{G}^{s_1}) = \sum_{H \in \mathcal{G}^{s_1}} n_1(H) \varepsilon(H).$$

Аналогично число s_2 есть вес мультимножества \mathcal{G}^{s_2} взвешенных 2-орграфов, состоящего из пар $(H, n_2(H))$, $n_2(H) \geq 1$, элементы которого получаются добавлением всевозможных дуг (i, j) , имеющихся в Γ , к лесам из множества $\mathcal{F}_{n-v}^{k \bullet \rightarrow j}$. Докажем равенство мультимножеств \mathcal{G}^{s_1} и \mathcal{G}^{s_2} , что и завершит доказательство тождества $\tilde{L}\tilde{Q}_{n-v} = 0$.

Покажем, что $H \in \mathcal{G}^{s_1}$ тогда и только тогда, когда $H \in \mathcal{G}^{s_2}$, причем для любого H имеет место $n_1(H) = n_2(H)$.

Пусть H — взвешенный орграф и $u, w \in V(H)$. Обозначим через $H + (u, w)$ 2-орграф с множеством вершин $V(H)$ и мультимножеством дуг, полученным из $E(H)$ увеличением на 1 числа вхождений дуги (u, w) . Аналогично, если H — 2-орграф и $u, w \in V(H)$, обозначим через $H' = H - (u, w)$ 2-орграф, отличающийся от H лишь числом вхождений дуги (u, w) : $n'((u, w)) = \max(n((u, w)) - 1, 0)$.

Пусть $H \in \mathcal{G}^{s_1}$. По определению \mathcal{G}^{s_1} имеем $H = F_{n-v}^{k \bullet \rightarrow i} + (i, j)$, где $F_{n-v}^{k \bullet \rightarrow i} \in \mathcal{F}_{n-v}^{k \bullet \rightarrow i}$ при некотором i . Возможны случаи: 1) j в $F_{n-v}^{k \bullet \rightarrow i}$ принадлежит дереву с корнем k ; 2) j не принадлежит дереву с корнем k .

В случае 1) $F_{n-v}^{k \bullet \rightarrow i} \in \mathcal{F}_{n-v}^{k \bullet \rightarrow j}$, и значит, $H = F_{n-v}^{k \bullet \rightarrow i} + (i, j) \in \mathcal{G}^{s_2}$. В случае 2) в $F_{n-v}^{k \bullet \rightarrow i}$ нет дуги (i, j) и i недостижима из j . Следовательно, по лемме 3.5 $(t, j) \in E(F_{n-v}^{k \bullet \rightarrow i})$ при некотором $t \neq i$. Тогда получаем $H - (t, j) = (F_{n-v}^{k \bullet \rightarrow i} + (i, j)) - (t, j) \in \mathcal{F}_{n-v}^{k \bullet \rightarrow j}$, и следовательно, $H = (H - (t, j)) + (t, j) \in \mathcal{G}^{s_2}$.

Пусть теперь $H \in \mathcal{G}^{s_2}$. Тогда $H = F_{n-v}^{k \bullet \rightarrow j} + (i, j)$ при некоторых $F_{n-v}^{k \bullet \rightarrow j} \in \mathcal{F}_{n-v}^{k \bullet \rightarrow j}$ и $i \in V(\Gamma)$, $i \neq j$. Покажем, что $H \in \mathcal{G}^{s_1}$. Возможны случаи: 1) i принадлежит в $F_{n-v}^{k \bullet \rightarrow j}$

¹Другое доказательство теоремы 3.5 дано в главе 4 (см. следствия 2 из теоремы 4.3); см. также [142, предложение 9].

²Под 2-орграфом здесь понимается мультиорграф с кратностями дуг, не превосходящими 2. Вес 2-орграфа есть произведение весов всех его дуг.

³Мультимножество \mathcal{G}^{s_1} состоит из пар $(H, n_1(H))$, где H — 2-орграф, $n_1(H)$ — число вхождений H в \mathcal{G}^{s_1} . Элементом такого мультимножества будем для простоты называть не только пару $(H, n_1(H))$, но и 2-орграф H , если $n_1(H) \geq 1$; именно таков смысл обозначения $H \in \mathcal{G}$, где \mathcal{G} — мультимножество.

дереву с корнем k ; 2) i не принадлежит дереву с корнем k . В случае 1) $F_{n-v}^{k \bullet \rightarrow j} \in \mathcal{F}_{n-v}^{k \bullet \rightarrow i}$, и значит, $H \in \mathcal{G}^{s_1}$. В случае 2) в $F_{n-v}^{k \bullet \rightarrow j}$ нет дуги (i, j) , и i недостижима из j . Следовательно, по лемме 3.5, $(t, j) \in E(F_{n-v}^{k \bullet \rightarrow j})$ при некоторой вершине $t \neq i$, принадлежащей в $F_{n-v}^{k \bullet \rightarrow j}$ дереву с корнем k . Тогда $H - (t, j) = (F_{n-v}^{k \bullet \rightarrow j} + (i, j)) - (t, j) \in \mathcal{F}_{n-v}^{k \bullet \rightarrow t}$, и значит, $H = H - (t, j) + (t, j) \in \mathcal{G}^{s_1}$.

Докажем теперь, что для любого H имеет место $n_1(H) = n_2(H)$. Прежде всего, $n_1(H) \leq 2$ и $n_2(H) \leq 2$. Действительно, по определению \mathcal{G}^{s_1} и \mathcal{G}^{s_2} , в противном случае в j входило бы не менее трех дуг, и тогда мультиграф $H - (i, j)_1$, где $(i, j)_1$ — любая из этих дуг, не был бы лесом. Докажем, наконец, что $n_1(H) = 2$ тогда и только тогда, когда $n_2(H) = 2$. Действительно, $n_1(H) = 2$ означает, что найдутся $i_1, i_2 \in V(\Gamma)$, такие что $i_1 \neq i_2$, $E(H)$ содержит дуги (i_1, j) и (i_2, j) и $H - (i_1, j) \in \mathcal{F}_{n-v}^{k \bullet \rightarrow i_1}$, $H - (i_2, j) \in \mathcal{F}_{n-v}^{k \bullet \rightarrow i_2}$. Но это *равносильно* (обоснование приводится ниже) тому, что найдутся неравные $i_1, i_2 \in V(\Gamma)$, такие что $\{(i_1, j), (i_2, j)\} \subseteq E(H)$ и $\{H - (i_1, j), H - (i_2, j)\} \subseteq \mathcal{F}_{n-v}^{k \bullet \rightarrow j}$, что, в свою очередь, эквивалентно $n_2(H) = 2$. Для доказательства равносильности, отмеченной курсивом в предыдущей фразе, сформулируем следующее утверждение, эквивалентное как левому, так и правому члену равносильности:

$$H - (i_1, j) \in \mathcal{F}_{n-v}^{k \bullet \rightarrow i_2}, \quad H - (i_2, j) \in \mathcal{F}_{n-v}^{k \bullet \rightarrow i_1}. \quad (3.7)$$

Для вывода его из левого члена равносильности заметим, что если, напротив, $H - (i_1, j) \notin \mathcal{F}_{n-v}^{k \bullet \rightarrow i_2}$, то в H дуга (i_1, j) входит в путь, ведущий из k в i_2 , и значит, i_2 достижима из j в $H - (i_1, j)$, а это противоречит наличию в лесе $H - (i_1, j)$ дуги (i_2, j) . Аналогично $H - (i_2, j) \in \mathcal{F}_{n-v}^{k \bullet \rightarrow i_1}$. Далее, из (3.7) напрямую следует правая часть равносильности. Для вывода (3.7) из правого члена равносильности заметим, что лесу $H - (i_1, j)$ принадлежит единственная входящая в j дуга (i_2, j) и, раз j достижима из k в этом лесе, значит, и i_2 достижима из k , поэтому $H - (i_1, j) \in \mathcal{F}_{n-v}^{k \bullet \rightarrow i_2}$. Аналогично $H - (i_2, j) \in \mathcal{F}_{n-v}^{k \bullet \rightarrow i_1}$. Наконец, из $H - (i_1, j) \in \mathcal{F}_{n-v}^{k \bullet \rightarrow i_2}$ следует, что в H вершина i_2 достижима из k , и значит, $H - (i_2, j) \in \mathcal{F}_{n-v}^{k \bullet \rightarrow i_2}$. Аналогично $H - (i_1, j) \in \mathcal{F}_{n-v}^{k \bullet \rightarrow i_1}$. Тем самым из (3.7) выведена левая часть равносильности. Тожество $\tilde{L}\tilde{Q}_{n-v} = 0$ доказано.

Тожество $\tilde{Q}_{n-v}\tilde{L} = 0$ эквивалентно справедливости следующего равенства для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\tilde{q}_{ij}^{n-v} \tilde{\ell}_{jj} = - \sum_{k \neq j} \tilde{q}_{ik}^{n-v} \tilde{\ell}_{kj}. \quad (3.8)$$

Левая часть (3.8) равна весу мультимножества орграфов, полученных добавлением всевозможных дуг (t, j) ко всем максимальным исходящим лесам, в которых i принадлежит дереву с корнем j . Это мультимножество обозначим через \mathcal{G}^1 . Легко видеть, что в \mathcal{G}^1 нет кратных элементов. Действительно, каждый элемент \mathcal{G}^1 получен из некоторого леса $F_{n-v}^{j \rightarrow i}$ добавлением дуги (t, j) ; и лес $F_{n-v}^{j \rightarrow i}$, и дуга (t, j) восстанавливаются по такому орграфу однозначно.

Правая часть равенства (3.8) равна весу мультимножества \mathcal{G}^2 орграфов, полученных добавлением всевозможных дуг $(j, k) \in E(\Gamma)$ ($k \neq j$) ко всем максимальным исходящим лесам, в которых i принадлежит дереву с корнем k . Покажем, что в \mathcal{G}^2 также нет кратных элементов. Пусть, напротив, для некоторого элемента $H \in \mathcal{G}^2$ кратность его вхождения в \mathcal{G}^2 превосходит 1. Тогда две «копии» H , полученные добавлением дуг (j, k_1) и (j, k_2) ($k_1 \neq k_2$) к некоторым лесам $F_{n-v}^{k_1 \bullet \rightarrow i}$ и $F_{n-v}^{k_2 \bullet \rightarrow i}$ соответственно, совпадают:

$$H = F_{n-v}^{k_1 \bullet \rightarrow i} + (j, k_1) = F_{n-v}^{k_2 \bullet \rightarrow i} + (j, k_2).$$

При этом предположении $k_1, k_2 \in \tilde{K}$ и $(j, k_1), (j, k_2) \in E(\Gamma)$, значит, $j \in \tilde{K}$ и $k_1, k_2 \in K(j)$. Тогда по пункту 3 теоремы 3.2 $\tilde{q}_{k_1 k_1}^{n-v} = \tilde{q}_{j k_1}^{n-v}$, поэтому вершина j достижима из k_1 в $F_{n-v}^{k_1 \bullet \rightarrow i}$. Следовательно, j достижима из k_1 и в $F_{n-v}^{k_1 \bullet \rightarrow i} - (j, k_2)$, откуда получаем, что в $F_{n-v}^{k_2 \bullet \rightarrow i} = (F_{n-v}^{k_1 \bullet \rightarrow i} - (j, k_2)) + (j, k_1)$ вершины j и k_1 входят в контур, а это противоречит определению дерева. Следовательно, в \mathcal{G}^2 нет кратных элементов.

Докажем совпадение \mathcal{G}^1 и \mathcal{G}^2 . Пусть $H = F_{n-v}^{j \rightarrow i} + (t, j) \in \mathcal{G}^1$. По лемме 3.4 вершина t достижима из вершины j в $F_{n-v}^{j \bullet \rightarrow i}$. В H рассмотрим вершину z , такую что с дуги (j, z) начинается единственный путь из j в t . Удалив в H дугу (j, z) , получим, очевидно, максимальный исходящий лес, причем принадлежащий множеству $\mathcal{F}_{n-v}^{z \bullet \rightarrow i}$. Действительно, если в $F_{n-v}^{j \bullet \rightarrow i}$ путь из j в i содержит z , то после удаления (j, z) путь из z в i сохраняется. Если же в $F_{n-v}^{j \bullet \rightarrow i}$ путь из j в i не содержит z , то после удаления (j, z) этот путь сохраняется, причем вместе с дугой (t, j) и путем из z в t образует путь из z в i в $H - (j, z)$. После добавления дуги (j, z) к максимальному исходящему лесу $H^1 - (j, z)$ получим орграф, принадлежащий множеству \mathcal{G}^2 .

Пусть $H = F_{n-v}^{k \bullet \rightarrow i} + (j, k) \in \mathcal{G}^2$. Удалив в H последнюю дугу (t, j) пути из k в j (который существует по лемме 3.5), получим лес $F_{n-v}^{j \bullet \rightarrow i}$. После добавления дуги (t, j) получим орграф, принадлежащий мультимножеству \mathcal{G}^1 . Теорема 3.5 доказана. \square

Имеет место своего рода «дополнительность» матриц \tilde{L} и \bar{J} , сводящаяся к уже доказанным результатам и результатам, которые будут получены ниже. Прежде всего представим следующую теорему, опубликованную в 2000 г. (предложение 11 в [3]).

Теорема 3.6 (о равенстве размерности ядра \tilde{L} и лесной размерности орграфа).

$$\text{rank } \tilde{L} = n - v, \quad \text{rank } \bar{J} = v.$$

Название теоремы 3.6 связано с тем, что в силу равенства $\text{rank } \tilde{L} = n - v$ размерность ядра \tilde{L} равна v . Эта теорема используется во многих работах по управлению многоагентными системами (см. следствие 5.3 в разделе 5.8.4). Ее частный случай, соответствующий $v = 1$, был получен также в [221, 252, 263, 315, 324, 347]. Этот специальный случай и его доказательство в [142] были предметом нашей переписки с одним из авторов статьи [322] в 2003 г.; в переписке с другим ее автором мы обсуждали работу [74] (англоязычную версию [3]) еще в 2001 г. Тем не менее, представляя соответствующий результат в [322, 324],

ссылок на [74] или [142] они не включили, а в [322] формулировка содержала ошибку. Последнее обстоятельство послужило причиной публикации нами заметки [138].

Доказательство теоремы 3.6. Пусть множество вершин $V(\Gamma)$ занумеровано таким образом, что первые номера принадлежат вершинам из множества K_1 , следующие — вершинам из K_2 и т. д.; последние номера принадлежат вершинам из множества $R(\Gamma)$. Тогда обе матрицы \tilde{L} и \bar{J} являются нижними блочно-треугольными матрицами с $v + 1$ блоками. Каждый блок \tilde{L}_i , $i = 1, \dots, v$, матрицы \tilde{L} совпадает с матрицей Кирхгофа подграфа Γ_i , являющегося сужением Γ на K_i . Поскольку Γ_i — сильный орграф, согласно матричной теореме о деревьях (теорема 1.1) и лемме 3.6 все миноры $(|K_i| - 1)$ -го порядка матрицы \tilde{L}_i положительны. Поэтому ранг каждого i -го диагонального блока матрицы \tilde{L} равен $|K_i| - 1$. Покажем, что ранг последнего блока равен его размеру.

Введем следующие обозначения. Для любого $\varphi \subset V(\Gamma)$ $\tilde{L}_{-\varphi}$ — матрица, полученная из \tilde{L} вычеркиванием строк и столбцов, соответствующих вершинам φ ; $\Gamma_{(\varphi)}$ — мультиорграф, полученный из Γ «склеиванием» всех вершин из φ в одну вершину, которую будем обозначать через φ^* . При этом каждая дуга в Γ , инцидентная ровно одной вершине из φ , индуцирует дугу в $\Gamma_{(\varphi)}$, инцидентную φ^* . $\mathcal{F}_{\varphi}^{\bullet \rightarrow}$ — множество всех лесов с $|\varphi|$ корнями, исходящих из всех вершин множества φ в Γ . Воспользуемся леммой 1.5 (стр. 24), согласно которой $\det \tilde{L}_{-\varphi} = \varepsilon(\mathcal{F}_{\varphi}^{\bullet \rightarrow})$. Поскольку вес множества исходящих лесов $\mathcal{F}_{\varphi}^{\bullet \rightarrow}$ равен весу множества $\mathcal{T}_{(\varphi^*)}$ деревьев, исходящих из φ^* в $\Gamma_{(\varphi)}$, имеет место $\det \tilde{L}_{-\varphi} = \varepsilon(\mathcal{T}_{(\varphi^*)})$.

Пусть теперь $\varphi = \tilde{K}$. Тогда $\mathcal{T}_{(\varphi^*)} \neq \emptyset$ и $\det \tilde{L}_{-\varphi} \neq 0$. Поэтому ранг последнего блока \tilde{L} равен его размеру, а ранг \tilde{L} равен $n - v$.

Согласно пункту 2 теоремы 3.2' $(v + 1)$ -й блок \bar{J} — нулевой. Во всех других блоках в силу пункта 5 теоремы 3.2' столбцы \bar{J} пропорциональны, т. е. ранг каждого блока равен единице. Поэтому ранг \bar{J} равен v . \square

Пусть $\mathcal{R}(A)$ и $\mathcal{N}(A)$ — соответственно образ и ядро линейного преобразования, соответствующего матрице A .

Замечание 3.1. В силу теоремы 3.6 размерности подпространств $\mathcal{R}(\tilde{L}^*)$ и $\mathcal{R}(\bar{J})$ соответственно равны $n - v$ и v . Отсюда следует, что $\mathcal{R}(\tilde{L}^*) \cap \mathcal{R}(\bar{J}) = \{\mathbf{0}\}$ и что \mathbb{R}^n раскладывается в *прямую сумму* $\mathcal{R}(\tilde{L}^*)$ и $\mathcal{R}(\bar{J})$ (см., например, [24]):

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{R}(\tilde{L}^*) \dot{+} \mathcal{R}(\bar{J}),$$

т. е. каждый вектор $u \in \mathbb{R}^n$ единственным образом представим суммой $u = u_1 + u_2$, где $u_1 \in \mathcal{R}(\tilde{L}^*)$, $u_2 \in \mathcal{R}(\bar{J})$.

Получим теперь явное выражение для матрицы \bar{J} .

Теорема 3.7. Для любого взвешенного мультиорграфа Γ

$$\bar{J} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} (I + \tau \tilde{L})^{-1}. \quad (3.9)$$

Доказательство теоремы 3.7. Поделив в формуле теоремы 1'' числитель $\sum_{k=0}^{n-v} \tau^k \tilde{Q}_k$ и знаменатель $s(\tau)$ на τ^{n-v} , перейдя к пределу при $\tau \rightarrow \infty$ и используя определение матрицы \bar{J} , получаем требуемое. \square

Теорема 3.8. Для любого взвешенного мультиорграфа

1. Матрица $\tilde{L} + \bar{J}^*$ невырождена;
2. $\text{rank } \tilde{L} = n - \text{rank } \bar{J} = n - v$;
3. $\mathcal{N}(\tilde{L}) = \mathcal{R}(\bar{J})$ и $\mathcal{R}(\tilde{L}) = \mathcal{N}(\bar{J})$;
4. $\mathcal{R}(\tilde{L}) \cap \mathcal{R}(\bar{J}) = \{\mathbf{0}\}$;
5. $\text{ind } \tilde{L} = 1$;
6. \bar{J} — собственный проектор матрицы \tilde{L} .

Отметим, что п. 3 обобщает предложение 20.1 из [100], где рассмотрен случай $v = 1$. Некоторые области применения этого результата описаны в [98, 100, 101, 154, 312, 313].

Следствие 1 из теоремы 3.8. Собственным проектором лапласовской матрицы L произвольного взвешенного мультиорграфа является нормированная матрица его максимальных входящих лесов.

Данное следствие выводится из п. 6 теоремы 3.8 рассмотрением мультиорграфа, отличающегося от данного направлениями всех дуг.

Доказательство теоремы 3.8. В силу теоремы 3.6 (стр. 55) $\text{rank } \tilde{L} = n - v$ и $\text{rank } \bar{J}^* = v$. По замечанию 3.1 $\mathcal{R}(\tilde{L}^*) \cap \mathcal{R}(\bar{J}) = \{\mathbf{0}\}$. Аналогично $\mathcal{R}(\tilde{L}) \cap \mathcal{R}(\bar{J}^*) = \{\mathbf{0}\}$. Поэтому в силу теоремы 11 из [278] \tilde{L} и \bar{J}^* аддитивны по рангу, т. е. $\text{rank}(\tilde{L} + \bar{J}^*) = \text{rank } \tilde{L} + \text{rank } \bar{J}^* = n - v + v = n$, и матрица $\tilde{L} + \bar{J}^*$ невырождена. Теперь из $\tilde{L}\bar{J} = \bar{J}\tilde{L} = 0$ (теорема 3.5) следует $\mathcal{N}(\tilde{L}) = \mathcal{R}(\bar{J})$ и $\mathcal{N}(\bar{J}) = \mathcal{R}(\tilde{L})$. Далее, по предложению 10 в [142], $\text{rank}(\tilde{L} + \bar{J}) = n$, следовательно, \tilde{L} и \bar{J} также аддитивны по рангу, и по теореме 11 из [278] $\mathcal{R}(\tilde{L}) \cap \mathcal{R}(\bar{J}) = \{\mathbf{0}\}$. Поскольку $\mathcal{R}(\bar{J}) = \mathcal{N}(\tilde{L})$, получаем $\mathcal{R}(\tilde{L}) \cap \mathcal{N}(\tilde{L}) = \{\mathbf{0}\}$, что в силу [91, с. 165] влечет $\text{ind } \tilde{L} = 1$. Из этого факта, доказанного пункта 3 и $\bar{J}^2 = \bar{J}$ (теорема 3.4) по определению собственного проектора (стр. 32) следует, что \bar{J} — собственный проектор матрицы \tilde{L} . Последнее может быть также получено из теоремы 3.7 и теоремы 3.1 в [297]. \square

Ряд других соотношений, включающих матрицу \bar{J} , и свойств \bar{J} доказан в [142].

Стохастичность и идемпотентность, установленные для \bar{J} , характерны для матриц предельных вероятностей цепей Маркова. Обладают эти матрицы и другими доказанными выше в отношении матрицы \bar{J} свойствами, включая теорему 3.5. Данное сходство не случайно. Действительно, матрица \bar{J} определяет асимптотическое поведение определенных цепей Маркова, связанных со взвешенным орграфом Γ . Эти результаты приведены в следующем разделе.

3.7. Цепи Маркова, связанные с орграфом, и матричная теорема о деревьях для цепей Маркова

Определение 3.2. Будем говорить, что стационарная цепь Маркова с множеством состояний $\{1, \dots, n\}$ и матрицей переходных вероятностей⁴ P связана со взвешенным орграфом Γ , если существует $\alpha \neq 0$, такое что

$$P = I - \alpha \tilde{L}(\Gamma). \quad (3.10)$$

Будем отождествлять состояния данной цепи с соответствующими вершинами Γ . Согласно определению 3.2, если цепь Маркова связана с Γ , то вероятность перехода из i в j пропорциональна весу дуги (j, i) в Γ . Таким образом, если вес дуги (j, i) интерпретируется как степень доминирования (величина превосходства j над i , степень предпочтительности j при сравнении с i , выигрыш j у i и т. п.), то этот вес определяет вероятность перехода от *доминируемого* объекта к *доминирующему*: направление движения — «от худшего к лучшему», т. е. против стрелки в орграфе.

Легко убедиться, что объединение недоминируемых узлов Γ есть множество *существенных состояний* (по терминологии Колмогорова) любой цепи, связанной с Γ . Объединение остальных сильных компонент Γ есть множество *несущественных состояний* такой цепи.

Согласно формуле (3.10) вероятность перехода из i в i (этот «переход» можно также трактовать как отсутствие перехода) равна $1 - \alpha \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ji}$.

Говоря о цепи Маркова, будем подразумевать конечную стационарную цепь Маркова, опуская определения «конечная» и «стационарная».

Существуют два основных подхода к построению цепи Маркова по графу. При первом, более традиционном подходе, использовавшемся, например, в [172, глава 3], [107, глава 9], [360], переходные вероятности⁵, вообще говоря, не пропорциональны весам дуг Γ , и при симметричной матрице \tilde{L} матрица P может быть несимметричной. В подходе, реализованном в определении 3.2, а также в [258, 259] и некоторых других работах, вероятности переходов между несовпадающими состояниями пропорциональны весам соответствующих дуг в орграфе, и для неориентированного графа (или орграфа с симметричной матрицей \tilde{L}) матрица вероятностей всегда симметрична.

Укажем ограничение на α , при котором матрица (3.10) действительно определяет цепь Маркова.

Предложение 3.10. Матрица P , определяемая формулой (3.10), есть матрица переходных вероятностей цепи Маркова (и, значит, эта цепь связана со взвешенным орграфом Γ в смысле определения 3.2) тогда и только тогда, когда $0 < \alpha < (\max_{1 \leq i \leq n} \tilde{\ell}_{ii})^{-1}$.

⁴Кратко — «с переходной матрицей P ».

⁵Вероятности переходов при этом подходе определяются так: $p_{ij} = \varepsilon_{ij} / \sum_{k=1}^n \varepsilon_{ik}$.

Предложение 3.10 следует из определения \tilde{L} (стр. 18) и дает критерий стохастичности матрицы $P = I - \alpha \tilde{L}(\Gamma)$.

Замечание 3.2. Рассмотрим матричную норму $\|\cdot\|_\infty$ на множестве всех $n \times n$ матриц Кирхгофа \tilde{L} :

$$\|\tilde{L}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \tilde{\ell}_{ij} = 2 \max_{1 \leq i \leq n} \tilde{\ell}_{ii}.$$

Эта матричная норма называется *максимальной строчной нормой* [55].

Функция $\|\tilde{L}\|_\omega = \max_{1 \leq i \leq n} \tilde{\ell}_{ii}$, входящая в предложение 3.10, не является матричной нормой, так как для нее нарушается *кольцевое свойство* $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$. Чтобы убедиться в этом, достаточно в качестве A и B рассмотреть матрицу Кирхгофа для орграфа на двух вершинах с двумя симметричными дугами, имеющими единичные веса. Другие аксиомы матричной нормы (неотрицательность, положительность, абсолютная однородность и неравенство треугольника) для функции $\|\cdot\|_\omega$ выполняются. В силу этого данная функция является *обобщенной матричной нормой* [55].

Предложение 3.11. Для любого взвешенного мультиорграфа Γ $\left(\sum_{k,t=1}^n \varepsilon_{kt}\right)^{-1} \tilde{Q}_1$ есть⁶ матрица переходных вероятностей цепи Маркова, связанной с Γ .

Доказательство предложения 3.11. Положим $\alpha = \left(\sum_{k,t=1}^n \varepsilon_{kt}\right)^{-1}$ и $P = (p_{ij}) = I - \alpha \tilde{L}(\Gamma)$.

Тогда

$$p_{ij} = \begin{cases} \varepsilon_{ji} \left(\sum_{k,t=1}^n \varepsilon_{kt}\right)^{-1}, & j \neq i, \\ \left(\sum_{k,t=1}^n \varepsilon_{kt} - \sum_{k=1}^n \varepsilon_{ki}\right) \left(\sum_{k,t=1}^n \varepsilon_{kt}\right)^{-1}, & j = i, \end{cases}$$

что при всех $i, j \in V(\Gamma)$ совпадает с (i, j) -элементом матрицы $\left(\sum_{k,t=1}^n \varepsilon_{kt}\right)^{-1} \tilde{Q}_1$. Теперь нужное утверждение следует из очевидного неравенства $\alpha_1 < \left(\max_{1 \leq i \leq n} \tilde{\ell}_{ii}\right)^{-1}$ и предложения 3.10. \square

Легко видеть, что для любой цепи Маркова существует взвешенный орграф, с которым она связана⁷. Точнее, имеется семейство таких орграфов Γ : их матрицы Кирхгофа определяются как

$$\tilde{L}(\Gamma) = \alpha^{-1}(I - P) \tag{3.11}$$

при всевозможных $\alpha > 0$. Матрицы весов дуг этих орграфов пропорциональны.

⁶Здесь \tilde{Q}_1 есть матрица остовных исходящих лесов с одной дугой мультиорграфа Γ , определенная в теореме 3.1'' на стр. 49.

⁷При альтернативном способе определения цепи Маркова по графу, реализованном в [107, 172], это утверждение неверно.

Как известно, последовательность P, P^2, P^3, \dots сходится не для всякой цепи — не сходится она для *периодических* цепей. Рассмотрим, как это обычно делают, предел по Чезаро этой последовательности.

Определение 3.3. *Предельная матрица средних вероятностей* (в англоязычной литературе — *long run transition matrix* и т. п.) цепи Маркова — это матрица

$$P^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{t=0}^{k-1} P^t, \quad (3.12)$$

если такой предел существует.

Если последовательность $\{P^t\}$ сходится, то ее предел есть P^∞ . В противном случае (для периодических цепей) рассматривают матрицу

$$\bar{P} = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} P^{(j)}, \quad (3.13)$$

где m — период цепи, $P^{(0)}, \dots, P^{(m-1)}$ — предельные матрицы сходящихся подпоследовательностей последовательности $\{P^t\}$:

$$P^{(j)} = \lim_{k \rightarrow \infty} P^{km+j}, \quad j = 0, \dots, m-1. \quad (3.14)$$

При этом случай $m = 1$ соответствует сходящейся последовательности $\{P^t\}$.

Следующие два предложения — часть классической теории цепей Маркова.

Предложение 3.12. *Для любой цепи Маркова существует предельная матрица средних вероятностей P^∞ , причем $P^\infty = \bar{P}$.*

Введем обозначение

$$P(k) = (p_{ij}(k))_{n \times n} = \frac{1}{k} \sum_{t=0}^{k-1} P^t, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

Укажем тип эксперимента, в котором матрицы $P(k)$ и P^∞ являются матрицами вероятностей переходов. Понятие «момент времени» в следующем предложении равносильно понятию номера шага цепи Маркова.

Предложение 3.13. 1. *Каждый элемент $p_{ij}(k)$ матрицы $P(k)$ есть вероятность того, что цепь Маркова находится в состоянии j в случайный момент времени, равномерно распределенный на множестве $\{0, 1, \dots, k-1\}$, при условии, что начальным состоянием было i .*

2. *При неограниченном увеличении k указанная в пункте 1 вероятность стремится к элементу p_{ij}^∞ матрицы P^∞ .*

Пункт 2 предложения 3.13 относится к эксперименту, в котором возможное количество переходов цепи Маркова от начального состояния до момента наблюдения *априори* не ограничено. Такой эксперимент можно рассматривать как «приближение» к нереализуемому равномерному распределению на счетном множестве моментов времени.

Обратимся теперь к *матричной теореме о деревьях для цепей Маркова* (одно из названий в англоязычной литературе — *Markov chain tree theorem*).

Теорема 3.9 (матричная теорема о деревьях для цепей Маркова). *Для любой цепи Маркова, связанной со взвешенным орграфом Γ , предельная матрица средних вероятностей P^∞ равна $\bar{J}(\Gamma)$.*

История этой фундаментальной теоремы поучительна. Впервые она была получена, по-видимому, А.Д.Вентцелем и М.И.Фрейдлиным в работе 1970 года [20]. Одновременно работа вышла по-английски [392], но интернациональное сообщество теорему тогда не заметило. В 1979 г. теорема вошла в книгу [21], через пять лет изданную и по-английски [193]. Но к моменту выхода перевода теорему переоткрыли и начали применять для оценки вероятностей сотрудники Массачусетского технологического института Лейтон и Райвест [257, 258]. Через три года их статья на данную тему вышла и в журнале [259]. Только после этого теорему заметили и стали включать в руководства по теории цепей Маркова.

Покажем, что матричная теорема о деревьях для цепей Маркова легко может быть доказана с помощью теоремы 3.8. Воспользуемся результатом Ротблума. В середине 70-х годов XX века он показал ([353, стр. 194], [355, теорема 7.а.3]), что P^∞ есть собственный проектор матрицы P , соответствующий собственному значению 1, то есть собственный проектор матрицы⁸ $I - P$. Но по определению 3.2 матрица $I - P$ пропорциональна с ненулевым коэффициентом α матрице Кирхгофа \tilde{L} любого взвешенного орграфа, с которым связана данная цепь Маркова. Следовательно, P^∞ есть также собственный проектор \tilde{L} . Но согласно п. 6 теоремы 3.8 собственным проектором \tilde{L} является \bar{J} , откуда $P^\infty = \bar{J}$, и матричная теорема о деревьях для цепей Маркова доказана. Другие доказательства приведены в [3, 78, 135].

Теорема 3.9 дает способ комбинаторного («конечного») вычисления матрицы P^∞ (а значит, и стационарных распределений цепи, если они существуют) для *любой* цепи Маркова. Этот способ состоит в нахождении и классификации максимальных исходящих лесов в Γ , т. е. в вычислении матрицы \bar{J} (см. раздел 3.4).

В силу следующего утверждения этот способ применим к *произвольной* цепи Маркова.

⁸Этот факт следует также из результата Карла Майера [298, теорема 2.2]. Действительно, согласно этой теореме $P^\infty = I - (I - P)(I - P)^\#$, где $(I - P)^\#$ — *групповая обратная матрица* для $I - P$, и правая часть равенства есть собственный проектор матрицы $I - P$ (см. характеристику (g) в разделе 2.2).

Следствие 1 из теоремы 3.9. Для любой цепи Маркова предельная матрица средних вероятностей P^∞ равна матрице \bar{J} максимальных исходящих лесов любого взвешенного орграфа, с которым эта цепь связана в смысле определения 3.2, т. е. любого взвешенного орграфа Γ с матрицей Кирхгофа $\tilde{L}(\Gamma) = \alpha^{-1}(I - P)$, где $\alpha > 0$, P — переходная матрица цепи Маркова.

Замечание 3.3. Пользуясь теоремой 3.9, следствием 1 из нее и предложением 3.12, во всех утверждениях этого раздела можно заменить матрицы P^∞ и \bar{P} на \bar{J} . Тогда теоремы 3.4 и 3.5 о свойствах матрицы v_j могут быть легко доказаны как свойства предельной матрицы средних вероятностей P^∞ цепи Маркова. Тем самым обращение к цепям Маркова проясняет смысл ряда результатов, полученных в алгебраической теории графов. Рассмотрение этих взаимосвязей будет продолжено в разделе 4.3.

3.8. Матрицы лесов и задача структурирования орграфа

Как было отмечено в разделе 1.1, объединение $\tilde{K} = \bigcup_{i=1}^v K_i$ недоминируемых узлов орграфа рассматривается, в соответствии с одним из рациональных принципов выбора, как естественное множество вариантов, выбираемых на основании бинарного отношения (орграфа) предпочтений [358]. Вообще говоря, нахождение недоминируемых узлов и вершин, достижимых из каждого узла, есть первая задача структурирования орграфа. Согласно пункту 2 теоремы 3.2' знание \bar{J} позволяет немедленно решить эту задачу. Действительно, \tilde{K} совпадает с множеством номеров ненулевых столбцов \bar{J} , а множество номеров ненулевых элементов такого столбца совпадает с множеством вершин, достижимых из соответствующего узла. В частности, вершины $j \in \tilde{K}$ и $i \in \tilde{K}$ принадлежат одному и тому же недоминируемому узлу тогда и только тогда, когда $\bar{J}_{ij} \neq 0$.

Перенумеровав вершины (первые номера присвоив вершинам из K_1 , следующие — вершинам из K_2 , последние — вершинам из $V(\Gamma) \setminus \tilde{K}$), получаем матрицу \bar{J}' вида

$$\bar{J}' = \begin{bmatrix} \bar{J}'_1 & 0 \\ \bar{J}'_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

где квадратная подматрица \bar{J}'_1 — блочно-диагональная (диагональные блоки соответствуют недоминируемым узлам, и все их элементы строго положительны), а по матрице \bar{J}'_2 можно судить, из каких недоминируемых узлов достижимы вершины, принадлежащие $V(\Gamma) \setminus \tilde{K}$.

Чтобы найти расположение ненулевых элементов матрицы \bar{J} с помощью приближенных вычислений, можно воспользоваться следующим утверждением.

Предложение 3.14. Пусть Γ — орграф, все дуги которого имеют единичный вес. Тогда элементы матрицы $(I + \varepsilon^2(\mathcal{F})\tilde{L}(\Gamma))^{-1}$, превосходящие $\varepsilon^{-1}(\mathcal{F})$, стоят на тех же позициях, что ненулевые элементы \bar{J} .

Доказательство предложения 3.14. Согласно теореме 3.7

$$\bar{J} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} (I + \tau \tilde{L})^{-1}.$$

Найдем такое τ , которое позволит, вычислив матрицу $(I + \tau \tilde{L})^{-1}$, понять, какие элементы \bar{J} являются нулевыми, какие — ненулевыми.

Подставив обозначения

$$A(\tau) = \frac{1}{s(\tau)} \sum_{k=0}^{n-v-1} \tau^k \tilde{Q}_k, \quad C(\tau) = \frac{1}{s(\tau)} \tau^{n-v} \tilde{Q}_{n-v}$$

в формулу (3.3), получаем

$$\tilde{Q}(\tau) = A(\tau) + C(\tau).$$

При $\tau \rightarrow \infty$ имеем $A(\tau) \rightarrow 0$, $\tilde{Q}(\tau) \rightarrow \tilde{Q}_{n-v}/\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v}^{\bullet \rightarrow})$, $C(\tau) \rightarrow \tilde{Q}_{n-v}/\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v}^{\bullet \rightarrow})$.

Пусть $\mathcal{F}^{\bullet \rightarrow}$ — множество всех остовных исходящих лесов орграфа Γ . По лемме 1.2 (стр. 22) $\varepsilon(\mathcal{F}^{\bullet \rightarrow}) = \det(I + \tilde{L})$.

Положим

$$\tau = \varepsilon^2(\mathcal{F}^{\bullet \rightarrow}) > 1.$$

Тогда для любого элемента $a_{ij}(\tau)$ матрицы $A(\tau)$ выполняется

$$a_{ij}(\tau) < \frac{\tau^{n-v-1} \varepsilon(\mathcal{F}^{\bullet \rightarrow})}{\tau^{n-v}} = \frac{1}{\varepsilon(\mathcal{F}^{\bullet \rightarrow})}, \quad (3.17)$$

а для любого ненулевого элемента $c_{ij}(\tau)$ матрицы $C(\tau)$ имеем

$$c_{ij}(\tau) > \frac{\tau^{n-v}}{\tau^{n-v} \varepsilon(\mathcal{F}^{\bullet \rightarrow})} = \frac{1}{\varepsilon(\mathcal{F}^{\bullet \rightarrow})}. \quad (3.18)$$

Следовательно, всем элементам матрицы $\tilde{Q}(\tau)$, меньшим $\varepsilon^{-1}(\mathcal{F}^{\bullet \rightarrow})$, и только им соответствуют нулевые элементы матрицы \bar{J} . \square

Предложение 3.14 сформулировано для орграфов с единичными весами дуг, но оно полезно для любых орграфов, поскольку структура связности орграфа не зависит от весов.

Таким образом, найти ненулевые элементы матрицы \bar{J} можно следующим образом.

1. Вычислить $\tilde{Q}(\tau) = (I + \tau \tilde{L})^{-1}$ при $\tau = \varepsilon^2(\mathcal{F})$.

2. Заменить нулями все элементы матрицы $\tilde{Q}(\tau)$, меньшие, чем $\varepsilon^{-1}(\mathcal{F})$. Остальные элементы \bar{J} положительны.

Если первый пункт этого алгоритма используется для приближенного вычисления матрицы \bar{J} , то точность приближения можно оценить по величине отброшенных элементов или по величине $\varepsilon^{-1}(\mathcal{F})$, если их нет.

Матрицей достижимостей орграфа называют матрицу (r_{ij}) с элементами

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j \text{ достижима из } i, \\ 0, & \text{если } j \text{ недостижима из } i. \end{cases}$$

Предложение 3.15. Матрица достижимостей орграфа может быть получена из матрицы $\tilde{Q}^T(\tau)$ при любом $\tau > 0$ заменой всех ее ненулевых элементов на 1. Поскольку результат не зависит от весов дуг, все они могут быть взяты равными 1.

Это предложение — следствие теоремы 3.1'.

Алгебраический способ выявления сильных компонент орграфа сводится к нахождению одинаковых строк или столбцов матрицы достижимостей (их равенство эквивалентно принадлежности вершин одной и той же сильной компоненте) [33] или к вычислению матрицы взаимных достижимостей орграфа — адамаровского (поэлементного) произведения матрицы достижимостей на результат ее транспонирования.

Стандартный способ нахождения матрицы достижимостей орграфа — вычисление $(I + A)^{n-1}$, где A — матрица смежности, с заменой ненулевых элементов единицами или последовательное вычисление степеней $(I + A)^k$ до стабилизации структуры нулей, также с заменой ненулевых элементов единицами [33].

Пример. Найдем матрицу \bar{J} для орграфа Γ , показанного на рис. 3.2, и используем ее для выявления структуры орграфа.

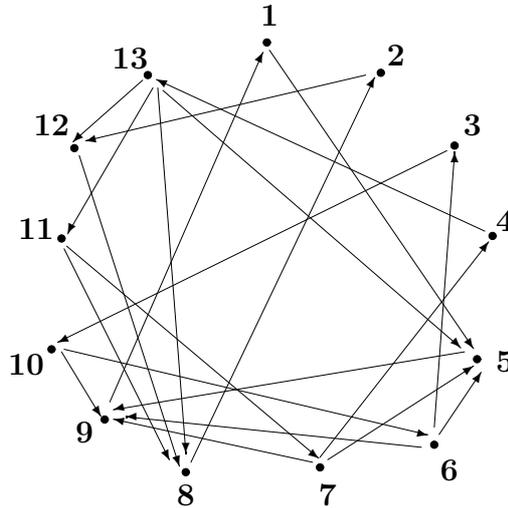


Рис. 3.2.

Пусть дуги Γ имеют веса $\varepsilon(2, 12) = 1,33$; $\varepsilon(8, 2) = 1,5$; $\varepsilon(13, 8) = 0,9$; $\varepsilon(11, 8) = 1,1$; $\varepsilon(7, 4) = 0,95$; $\varepsilon(7, 5) = 1,3$; $\varepsilon(7, 9) = 1,4$; $\varepsilon(5, 9) = 1,6$; $\varepsilon(6, 9) = 1,25$; $\varepsilon(6, 3) = 1,7$; $\varepsilon(3, 10) = 1,67$; $\varepsilon(4, 13) = 1,2$; $\varepsilon(13, 5) = 1,2$; веса остальных дуг равны 1.

Поскольку ищется матрица \bar{J} , а не только ее структура нулей, вычисления проведем для взвешенного орграфа, не заменяя веса дуг на 1.

Находим приближенно матрицу \bar{J} с помощью теоремы 3.7:

$$\bar{J} \approx \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ \left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0,1432 & 0,1267 & 0 & 0,2434 & 0,1203 & 0 & 0 & 0,1458 & 0,1203 & 0 & 0,1003 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2709 & 0 & 0 & 0,2573 & 0 & 0 & 0 & 0,2573 & 0 & 0,2144 \\ 0 & 0 & 0,2690 & 0 & 0 & 0,4572 & 0 & 0 & 0 & 0,2738 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2709 & 0 & 0 & 0,2573 & 0 & 0 & 0 & 0,2573 & 0 & 0,2144 \\ 0 & 0 & 0,0916 & 0,1786 & 0 & 0,1557 & 0,1697 & 0 & 0 & 0,0932 & 0,1697 & 0 & 0,1414 \\ 0 & 0 & 0,2690 & 0 & 0 & 0,4572 & 0 & 0 & 0 & 0,2738 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2709 & 0 & 0 & 0,2573 & 0 & 0 & 0 & 0,2573 & 0 & 0,2144 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2709 & 0 & 0 & 0,2573 & 0 & 0 & 0 & 0,2573 & 0 & 0,2144 \\ 0 & 0 & 0,1432 & 0,1267 & 0 & 0,2434 & 0,1203 & 0 & 0 & 0,1458 & 0,1203 & 0 & 0,1003 \\ 0 & 0 & 0,2690 & 0 & 0 & 0,4572 & 0 & 0 & 0 & 0,2738 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2709 & 0 & 0 & 0,2573 & 0 & 0 & 0 & 0,2573 & 0 & 0,2144 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2709 & 0 & 0 & 0,2573 & 0 & 0 & 0 & 0,2573 & 0 & 0,2144 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2709 & 0 & 0 & 0,2573 & 0 & 0 & 0 & 0,2573 & 0 & 0,2144 \end{array} \right] \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \end{array} \end{array}$$

В матрице \bar{J} ненулевые столбцы, соответствующие вершинам из недоминируемых узлов Γ , разобьем на подмножества (одновременно переставляя соответствующие строки) по расположению ненулевых элементов. Тем самым выделяются два недоминируемых узла: $\{3, 6, 10\}$ и $\{4, 7, 11, 13\}$.

Из расположения ненулевых элементов в строках, соответствующих остальным вершинам, заключаем, что вершины сильной компоненты $\{1, 5, 9\}$ достижимы из обоих недоминируемых узлов, а вершины $\{2, 8, 12\}$ — только из узла $\{4, 7, 11, 13\}$. Получаем блочную матрицу вида (3.16):

$$\bar{J}' \approx \begin{array}{cccccccccccc} & 3 & 6 & 10 & 4 & 7 & 11 & 13 & 2 & 8 & 12 & 1 & 5 & 9 \\ \left[\begin{array}{cccccccccccc} 0,2690 & 0,4572 & 0,2738 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2690 & 0,4572 & 0,2738 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2690 & 0,4572 & 0,2738 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2709 & 0,2573 & 0,2573 & 0,2144 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2709 & 0,2573 & 0,2573 & 0,2144 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2709 & 0,2573 & 0,2573 & 0,2144 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2709 & 0,2573 & 0,2573 & 0,2144 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2709 & 0,2573 & 0,2573 & 0,2144 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1432 & 0,2434 & 0,1458 & 0,1267 & 0,1203 & 0,1203 & 0,1003 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0916 & 0,1557 & 0,0932 & 0,1786 & 0,1697 & 0,1697 & 0,1414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1432 & 0,2434 & 0,1458 & 0,1267 & 0,1203 & 0,1203 & 0,1003 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} 3 \\ 6 \\ 10 \\ 4 \\ 7 \\ 11 \\ 13 \\ 2 \\ 8 \\ 12 \\ 1 \\ 5 \\ 9 \end{array} \end{array}$$

Теперь оргграф Γ может быть представлен в «структурном» виде, который показан на рис. 3.3.

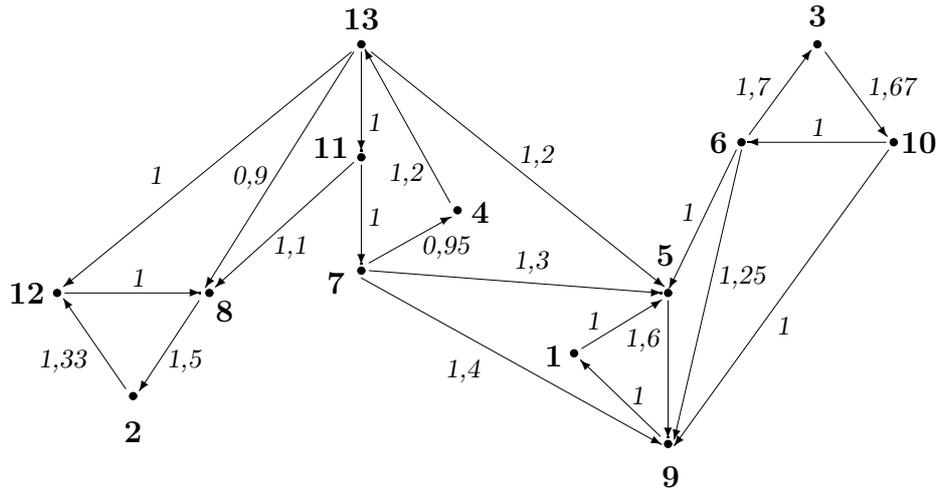


Рис. 3.3.

Заключение к главе 3

Проведен анализ множества остовных исходящих лесов орграфа и матрицы \bar{J} , соответствующей максимальным исходящим лесам. Показано, что простым следствием полученных результатов является матричная теорема о деревьях для цепей Маркова, согласно которой матрица \bar{J} совпадает с матрицей P^∞ предельных средних вероятностей цепей Маркова, связанных с орграфом. В силу этой теоремы матрицу \bar{J}^T можно рассматривать как *матрицу предельных достижимостей в орграфе*. Описаны применения матриц, связанных с исходящими лесами, в задачах выявления структуры орграфа.

Глава 4

Остовные леса орграфа и связанные с ними матрицы

В этой главе изучаются остовные исходящие леса орграфа и связанные с ними матрицы. Показано, что нормированная матрица исходящих лесов орграфа является матрицей переходных вероятностей в специальной модели наблюдения за цепью Маркова. Получены выражения псевдообратной матрицы, а также групповой обратной матрицы для матрицы Кирхгофа через матрицу максимальных исходящих лесов орграфа. Матрицы исходящих лесов с заданным числом дуг и нормированные матрицы исходящих лесов представлены многочленами простого вида от матрицы Кирхгофа; с помощью этого представления дано новое доказательство матричной теоремы о лесах и некоторых других результатов алгебраической теории орграфов. Получена «матричная теорема о росте лесов». Для матрицы Кирхгофа указан аннулирующий многочлен, степень которого определяется размерностью орграфа по исходящим лесам. Глава написана в основном по материалам работ [4, 137, 142]. Результаты использованы, в частности, в [8, 27, 71, 96, 132, 190, 238, 271, 272, 322, 323, 376, 402].

4.1. Введение

Ориентированные графы — наиболее универсальный инструмент моделирования *структур связей*. Не случайно первая серьезная монография по теории ориентированных графов [211] так и называлась: «Структурные модели: введение в теорию направленных графов». С помощью орграфов моделируют процессы, существенным элементом описания которых является направление. Примерами таких процессов являются физическое перемещение, обслуживание, управление, распространение влияний, ресурсов, идей, инноваций, заболеваний. Если процесс может одновременно начинаться из нескольких вершин, а результатом его является вовлечение новых вершин, то такой процесс может быть смоделирован остовным исходящим лесом в орграфе. Перечисление всех остовных исходящих лесов орграфа позволяет определить «роли» вершин в процессах указанного типа: в одних вершинах процесс чаще начинается, в других — продолжается, в третьих — завершается. Если на таких процессах задана мера, определяемая исходным орграфом (который может быть взвешенным), то «ролевой профиль» каждой вершины может быть оценен численно. Тогда точный ответ может быть дан и на следующий вопрос: как часто процесс достигает вершины i , начавшись из вершины j . Не удивительно, что остовные исходящие леса орграфа оказываются тесно связанными с цепями Маркова, которые определяются данным орграфом.

Исследование исходящих лесов орграфов было начато в [165, 185], но в целом в литературе им уделялось гораздо меньше внимания, чем остовным исходящим деревьям

(которые существуют лишь для довольно узкого класса орграфов). Отметим в этой связи работы [84, 133, 176, 229, 264, 293, 294, 317, 374], в большинстве из которых речь идет о неориентированных графах. В [3, 147] изучались максимальные исходящие леса орграфа, т. е. остовные исходящие леса, имеющие максимальное число дуг (см. главу 3). Согласно матричной теореме о деревьях для цепей Маркова (раздел 3.7) нормированная матрица таких лесов совпадает с предельной матрицей средних вероятностей цепей Маркова, связанных с данным орграфом. Ряд результатов об остовных лесах ориентированных и неориентированных мультиграфов получен также в [67, 69, 142].

В данной главе изучаются нормированные матрицы остовных исходящих лесов орграфа (другие названия этих матриц — матрицы относительных лесных доступностей, матрицы достижимостей по лесам) и матрицы лесов с различным числом дуг.

4.2. Некоторые свойства исходящих и входящих лесов

В основном используемые в данной главе термины и обозначения введены в разделе 1.1. Некоторые другие необходимые понятия будут вводиться по мере необходимости. Мультиорграфы будем иногда для краткости называть орграфами, подразумевая при этом возможность кратных дуг.

Прежде всего покажем, что размерности v и v' по исходящим и входящим лесам для орграфа с непустым множеством вершин не связаны никакой прямой зависимостью. Исключение составляет лишь случай, когда одна из этих размерностей равна числу вершин.

Предложение 4.1. 1. Пусть $k, k' \in \{1, \dots, n-1\}$. Тогда существует орграф на n вершинах, для которого $v = k$ и $v' = k'$. 2. Для любого орграфа Γ на n вершинах $v = n \Leftrightarrow v' = n \Leftrightarrow E(\Gamma) = \emptyset$.

Доказательство предложения 4.1. 1. Пусть сначала $k \leq k' < n$. Определим Γ следующим образом. Из вершины 1 построим исходящую звезду с $k' - k$ концевыми вершинами и исходящую цепь, включающую, кроме источника, $n - k' \geq 1$ вершин, не входящих в звезду. Последние $k - 1$ вершин оставим изолированными. Тогда, очевидно, $v = 1 + (k - 1) = k$ и $v' = 1 + (k' - k) + (k - 1) = k'$.

Если $k' \leq k < n$, аналогично для вершины 1 строим входящую в нее звезду с $k - k'$ концевыми вершинами и входящую в нее цепь, включающую, кроме стока, $n - k \geq 1$ вершин, не входящих в звезду. Последние $k' - 1$ вершин оставляем изолированными. Так же, как в первом случае, получаем $v = k$ и $v' = k'$. Утверждение 2 очевидно. \square

Далее мы будем говорить в основном об исходящих лесах, но все результаты могут быть переформулированы для входящих лесов. Простейшие свойства остовных исходящих лесов орграфа изучались в главе 3. В данной главе будут использоваться определения 1.1 (стр. 16) и 3.1 (стр. 51), обозначения, введенные на стр. 45, предложение 3.2 (стр. 44), а также теоремы 3.1 (стр. 48), 3.2', 3.4, 3.5 и 3.7 (стр. 57).

Через $\mathcal{F}(\Gamma) = \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_k(\Gamma) = \mathcal{F}_k$ обозначаем множества всех остовных исходящих лесов Γ и множество остовных исходящих лесов Γ с k дугами, а через $\mathcal{F}_k^{i \rightarrow j}$ — множество остовных исходящих лесов с k дугами, где j принадлежит дереву, исходящему из i .

Определение 4.1. Матрицу \tilde{Q}_k ($k = 0, \dots, n - v$) назовем *матрицей остовных исходящих лесов с k дугами* орграфа Γ .

Теорема 3.1' дает представление матриц $(I + \tau \tilde{L})^{-1}$ через матрицы остовных исходящих лесов с всевозможными количествами дуг.

Определение 4.2. *Нормированными матрицами исходящих лесов орграфа* назовем матрицы $\tilde{Q}(\tau) = (I + \tau \tilde{L})^{-1}$, $\tau > 0$.

В [67] и в конце раздела 1.3 матрицы $\tilde{Q}(\tau) = (I + \tau \tilde{L})^{-1}$ были названы матрицами относительных лесных доступностей орграфа. Ниже будет получено выражение этих матриц в виде многочленов от матрицы \tilde{L} (следствие из теоремы 4.5).

4.3. Матрицы исходящих лесов и переходные вероятности цепей Маркова

В разделе 3.7 обсуждалась матричная теорема о деревьях для цепей Маркова, согласно которой матрица P^∞ предельных (по Чезаро) переходных вероятностей произвольной цепи Маркова совпадает с нормированной матрицей \bar{J} максимальных исходящих лесов орграфа, с которым связана данная цепь Маркова. Дадим теперь марковскую интерпретацию для нормированных матриц исходящих лесов орграфа $\tilde{Q}(\tau)$ при всех $\tau > 0$.

Прежде всего, напомним определение 3.2 (стр. 58), согласно которому стационарная цепь Маркова с множеством состояний $\{1, \dots, n\}$ и матрицей переходных вероятностей P связана с взвешенным орграфом Γ , если существует $\alpha \neq 0$, такое что

$$P = I - \alpha \tilde{L}(\Gamma). \quad (4.1)$$

Пусть Γ — произвольный взвешенный орграф. Рассмотрим следующую модель наблюдения за произвольной цепью Маркова, связанной с Γ .

Геометрическая модель выбора случайного момента наблюдения. *Проводятся испытания Бернулли с вероятностью успеха q ($0 < q < 1$) в моменты времени $t = 0, 1, 2, \dots$. Момент первого успеха становится моментом наблюдения.*

Данная модель задает распределение $p(k)$ вероятностей случайной величины «момент наблюдения» на множестве $\{0, 1, 2, \dots\}$. Это распределение является геометрическим (что и определяет название модели) с параметром q :

$$p(k) = q(1 - q)^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

Рассмотрим переходы данной цепи Маркова за случайное число шагов: от начального состояния, в котором цепь находится в момент $t = 0$, к состоянию в момент наблюдения, подчиняющийся геометрической модели с параметром q .

Пусть $\tilde{P}(\alpha, q) = (\tilde{p}_{ij}(\alpha, q))$ — матрица безусловных вероятностей переходов данной цепи Маркова за случайное число шагов: от начального момента до момента наблюдения.

Теорема 4.1. *Для любого взвешенного орграфа, любого параметра $\tau > 0$ и любой связанной с орграфом цепи Маркова имеет место*

$$\tilde{Q}(\tau) = \tilde{P}(\alpha, q),$$

где

$$q = (\tau/\alpha + 1)^{-1}. \quad (4.3)$$

Доказательство теоремы 4.1. Поскольку спектральный радиус матрицы P равен 1, имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} ((1 - q)P)^k = (I - (1 - q)P)^{-1}.$$

Пользуясь формулой полной вероятности, формулами (4.1) и (4.2) и обозначением (4.3), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\alpha, q) &= \sum_{k=0}^{\infty} p(k)P^k = \sum_{k=0}^{\infty} q(1 - q)^k P^k = q(I - (1 - q)P)^{-1} = \\ &= q(I - (1 - q)(I - \alpha\tilde{L}))^{-1} = q(qI + (1 - q)\alpha\tilde{L})^{-1} = \\ &= \left(I + \frac{(1 - q)\alpha}{q}\tilde{L}\right)^{-1} = (I + \tau\tilde{L})^{-1} = \tilde{Q}(\tau). \quad \square \end{aligned} \quad (4.4)$$

Теорема 4.1 есть интерпретация матрицы $\tilde{Q}(\tau)$ относительных лесных доступностей произвольного орграфа в терминах переходных вероятностей соответствующей цепи Маркова. Обратное, для любой цепи Маркова переходные вероятности в геометрической модели выбора момента наблюдения могут быть интерпретированы в терминах исходящих лесов соответствующего орграфа. Обсуждение этой модели можно найти в [137]. Приведем следствие, устанавливающее произвольность цепи Маркова, допускающей данную интерпретацию «итоговых» вероятностей.

Следствие 1 из теоремы 4.1. *Для любой цепи Маркова, любой вероятности $q \in]0, 1[$ успеха в геометрической модели выбора случайного момента наблюдения и любого орграфа, с которым связана данная цепь, имеет место $\tilde{P}(\alpha, q) = \tilde{Q}(\tau)$, где $\tau = (q^{-1} - 1)\alpha$.*

Следствие 2 из теоремы 4.1.

$$\lim_{q \rightarrow +0} \tilde{P}(\alpha, q) = \bar{J} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{p=0}^{k-1} P^k. \quad (4.5)$$

Согласно данному следствию при исчезающе малой вероятности успеха переходные вероятности в геометрической модели наблюдения за цепью Маркова выражаются матрицей \bar{J} максимальных исходящих лесов любого взвешенного орграфа, с которым связана данная цепь.

4.4. Выражение матриц лесов через матрицу Кирхгофа и его следствия. Матричная теорема о росте лесов

Основной результат этого раздела — выражение матриц \tilde{Q}_k , соответствующих остовным исходящим лесам с k дугами, в виде многочленов от матрицы Кирхгофа \tilde{L} (теорема 4.3). Он позволяет получить новые доказательства для теорем 3.1'–3.4 и выразить матрицу $\tilde{Q}(\tau) = (I + \tau\tilde{L})^{-1}$ как многочлен от \tilde{L} (теорема 4.5).

Теорема 4.2 дает простой способ вычисления матриц \tilde{Q}_k и \bar{J} .

Обозначим через σ_k вес множества всех остовных исходящих лесов в Γ с k дугами: $\sigma_k = \varepsilon(\mathcal{F}_k^{\bullet \rightarrow})$, $k = 0, \dots, n - v$.

Предложение 4.2. *Для любого взвешенного орграфа имеет место*

$$\tilde{Q}_{k+1} = \sigma_{k+1} I - \tilde{L} \tilde{Q}_k, \quad k = 0, \dots, n - v. \quad (4.6)$$

Доказательство предложения 4.2. В главе 3 использовалось понятие взвешенного 2-орграфа: под 2-орграфом понимался мультиорграф с кратностями дуг, не превосходящими 2. Вес 2-орграфа есть произведение весов всех его дуг. Для взвешенного орграфа H и его вершин $u, w \in V(H)$ обозначим через $H + (u, w)$ 2-орграф с множеством вершин $V(H)$ и мультимножеством дуг, полученным из $E(H)$ увеличением на 1 числа вхождений дуги (u, w) . Аналогично, если H — 2-орграф и $u, w \in V(H)$, обозначаем через $H' = H - (u, w)$ 2-орграф, отличающийся от H лишь числом вхождений дуги (u, w) : $n'((u, w)) = \max(n((u, w)) - 1, 0)$.

Введем следующие обозначения. Пусть $\mathcal{F}_k^{j \bullet \rightarrow s} + (l, i) = \{F_k^{j \bullet \rightarrow s} + (l, i) \mid F_k^{j \bullet \rightarrow s} \in \mathcal{F}_k^{j \bullet \rightarrow s}\}$. Для всех $i \neq j$ обозначим через $\mathcal{F}_{k,i}^{j \bullet \rightarrow s}$ множество всех лесов с k дугами, в которых i является корнем, а вершина s принадлежит дереву с корнем j . Очевидно, в таких орграфах при $i \neq j$ вершина s не достижима из i . Через $\mathcal{F}_{k,\bar{i}}^{j \bullet \rightarrow s}$ обозначим множество всех лесов с k дугами, в которых i не является корнем, а вершина s принадлежит дереву с корнем j . Аналогично определим матрицы $(q_{s\bar{j},\bar{i}}^k)$ и $(q_{s\bar{j},i}^k)$ с элементами

$$\begin{aligned} q_{sj,\bar{i}}^k &= \varepsilon(\mathcal{F}_{k,\bar{i}}^{j\bullet\rightarrow s}); \\ q_{sj,i}^k &= \varepsilon(\mathcal{F}_{k,i}^{j\bullet\rightarrow s}), \quad s, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Обозначим через q_{ij}^k вес множества всех исходящих лесов, в которых вершина i недостижима из j . Для всех $i, j \in V(\Gamma)$ имеет место $q_{jj}^k = q_{ij}^k + q_{i\bar{j}}^k$. Далее при доказательстве потребуются следующая лемма.

Лемма 4.1. *Для любого взвешенного орграфа и всех $i, j = 1, \dots, n$ имеет место:*

- 1) если $s \neq p, i \neq j$ и $(s, i), (p, i) \in E(\Gamma)$, то $(\mathcal{F}_{k,i}^{j\bullet\rightarrow s} + (s, i)) \cap (\mathcal{F}_{k,i}^{j\bullet\rightarrow p} + (p, i)) = \emptyset$;
- 2) $\bigcup_{(s,i) \in E(\Gamma)} (\mathcal{F}_{k,i}^{j\bullet\rightarrow s} + (s, i)) = \mathcal{F}_{k+1}^{j\bullet\rightarrow i}$.

Доказательство леммы 4.1. Первая часть леммы следует из определения исходящего леса. Докажем вторую часть. Пусть $(s, i) \in E(\Gamma)$ и $\mathcal{F}_{k,i}^{j\bullet\rightarrow s} \neq \emptyset$. Тогда в каждом лесе $F_k \in \mathcal{F}_{k,i}^{j\bullet\rightarrow s}$ вершина s недостижима из i . После добавления к F_k дуги (s, i) получим исходящий лес с $k+1$ дугами, в котором i достижима из j , т. е. $F_k + (s, i) \in \mathcal{F}_{k+1}^{j\bullet\rightarrow i}$.

Пусть теперь $F_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}^{j\bullet\rightarrow i}$. В F_{k+1} в вершину i входит единственная дуга; обозначим ее через (p, i) . Поскольку $F_{k+1} - (p, i) \in \mathcal{F}_{k,i}^{j\bullet\rightarrow p}$, имеет место $F_{k+1} \in \mathcal{F}_{k,i}^{j\bullet\rightarrow p} + (p, i) \subseteq \bigcup_{(s,i) \in E(\Gamma)} (\mathcal{F}_{k,i}^{j\bullet\rightarrow s} + (s, i))$. \square

Следствие 1 из леммы 4.1. *Для любого взвешенного орграфа и всех $i, j = 1, \dots, n$ и $k = 0, \dots, n - v$ имеет место*

$$q_{ij}^{k+1} = \varepsilon(\mathcal{F}_{k+1}^{j\bullet\rightarrow i}) = \varepsilon\left(\bigcup_{(s,i) \in E(\Gamma)} (\mathcal{F}_{k,i}^{j\bullet\rightarrow s} + (s, i))\right) = \sum_{(s,i) \in E(\Gamma)} \varepsilon(\mathcal{F}_{k,i}^{j\bullet\rightarrow s} + (s, i)) = \sum_{(s,i) \in E(\Gamma)} \varepsilon_{si} q_{sj,i}^k.$$

Продолжим доказательство предложения 4.2. Обозначим матрицу $\tilde{L}\tilde{Q}_k$ через (a_{ij}^k) . Тогда при $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} a_{ii}^k &= \sum_{s=1}^n \tilde{\ell}_{is} q_{si}^k = \sum_{s \neq i} \tilde{\ell}_{is} q_{si}^k + \tilde{\ell}_{ii} q_{ii}^k = \sum_{s \neq i} \tilde{\ell}_{is} q_{si}^k - \sum_{s \neq i} \tilde{\ell}_{is} q_{ii}^k = \sum_{s=1}^n \varepsilon_{si} (q_{ii}^k - q_{si}^k) = \\ &= \sum_{s=1}^n \varepsilon_{si} (q_{s\bar{i}}^k + q_{si}^k - q_{si}^k) = \sum_{s=1}^n \varepsilon_{si} q_{s\bar{i}}^k = \sigma_{k+1} - q_{ii}^{k+1} \geq 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Доказано утверждение предложения 4.2 для диагональных элементов $\tilde{L}\tilde{Q}_k$.

При $j \neq i$ имеем

$$\begin{aligned} a_{ij}^k &= \sum_{s=1}^n \tilde{\ell}_{is} q_{sj}^k = \sum_{s \neq i} \tilde{\ell}_{is} q_{sj}^k - \sum_{s \neq i} \tilde{\ell}_{is} q_{ij}^k = \sum_{s=1}^n \varepsilon_{si} q_{ij}^k - \sum_{s=1}^n \varepsilon_{si} q_{sj}^k = \\ &= \sum_{s=1}^n \varepsilon_{si} q_{ij}^k - \sum_{s=1}^n \varepsilon_{si} (q_{sj,\bar{i}}^k + q_{sj,i}^k) = \sum_{s=1}^n \varepsilon_{si} q_{ij}^k - \sum_{s=1}^n \varepsilon_{si} q_{sj,\bar{i}}^k - \sum_{s=1}^n \varepsilon_{si} q_{sj,i}^k = \\ &= \varepsilon(\mathcal{G}_1) - \varepsilon(\mathcal{G}_2) - \sum_{s=1}^n \varepsilon_{si} q_{sj,i}^k, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где $\varepsilon(\mathcal{G}_1) = \sum_{s=1}^n \varepsilon_{si} q_{ij}^k$, $\varepsilon(\mathcal{G}_2) = \sum_{s=1}^n \varepsilon_{si} q_{sj,i}^k$, \mathcal{G}_1 — мультимножество 2-подграфов, получающихся добавлением всех дуг (s, i) , имеющихся в Γ , к всевозможным лесам из $\mathcal{F}_k^{j \bullet \rightarrow i}$, \mathcal{G}_2 — мультимножество 2-подграфов, получающихся добавлением всех дуг (s, i) , имеющихся в Γ , к всевозможным лесам из $\mathcal{F}_k^{j \bullet \rightarrow s}$. Мультимножество \mathcal{G}_1 состоит из пар $(H, n_1(H))$, где $n_1(H)$ — число вхождений H в \mathcal{G}_1 , а \mathcal{G}_2 состоит из пар вида $(H, n_2(H))$, где $n_2(H)$ — число вхождений H в \mathcal{G}_2 . Запись $H \in \mathcal{G}_1$ имеет здесь смысл $n_1(H) > 0$.

Докажем, что $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2$. В каждом орграфе $H \in \mathcal{G}_1$ в вершину i входят две дуги: (s, i) и (p, i) , где $(p, i) \in E(F_k^{j \bullet \rightarrow i})$, так как $j \neq i$. Рассмотрим орграф $H - (p, i)$. Он представляет собой лес, в котором i не является корнем, а j — корень дерева, содержащего p . Тогда $H - (p, i) \in \mathcal{F}_k^{j \bullet \rightarrow p}$ и $H \in \mathcal{F}_k^{j \bullet \rightarrow p} + (p, i) \subseteq \mathcal{G}_2$. Обратно, пусть $H = F_k^{j \bullet \rightarrow s} + (s, i) \in \mathcal{G}_2$. Рассмотрим орграф $H - (p, i)$, где $(p, i) \in E(F_k^{j \bullet \rightarrow s})$. Имеем $H - (p, i) \in \mathcal{F}_k^{j \bullet \rightarrow i}$, поэтому $H = F_k^{j \bullet \rightarrow i} + (p, i) \in \mathcal{G}_1$. Для мультимножеств \mathcal{G}_1 и \mathcal{G}_2 кратности всех элементов $n_1(H)$ и $n_2(H)$ не превосходят двух. В противном случае орграф $H - (s, i)$ не был бы лесом. Докажем, что для каждого H $n_1(H) = 2$ тогда и только тогда, когда $n_2(H) = 2$. Пусть $H \in \mathcal{G}_1$ и $n_1(H) = 2$. Тогда существуют такие вершины $s_1, s_2 \in V(\Gamma)$, что $s_1 \neq s_2$, $E(H)$ содержит дуги (s_1, i) и (s_2, i) , и $\{H - (s_1, i), H - (s_2, i)\} \subseteq \mathcal{F}_k^{j \bullet \rightarrow i}$. Поскольку в $H - (s_2, i)$ вершина s_1 достижима из j , в H также s_1 достижима из j . Значит, и в $H - (s_1, i)$ вершина s_1 достижима из j . Аналогично в $H - (s_2, i)$ вершина s_2 достижима из j . Получаем $H - (s_1, i) \subseteq \mathcal{F}_k^{j \bullet \rightarrow s_1}$ и $H - (s_2, i) \subseteq \mathcal{F}_k^{j \bullet \rightarrow s_2}$, следовательно, $n_2(H) = 2$.

Предположим, что $H \in \mathcal{G}_2$ и $n_2(H) = 2$. Тогда для двух различных вершин s_1 и s_2 существуют $F_k^{j \bullet \rightarrow s_1} \in \mathcal{F}_k^{j \bullet \rightarrow s_1}$ и $F_k^{j \bullet \rightarrow s_2} \in \mathcal{F}_k^{j \bullet \rightarrow s_2}$, такие что $H = F_k^{j \bullet \rightarrow s_1} + (s_1, i) = F_k^{j \bullet \rightarrow s_2} + (s_2, i)$. Заметим, что (А) $F_k^{j \bullet \rightarrow s_1}$ содержит дугу (s_2, i) , поэтому в нем s_2 недостижима из i . Тогда (В) в $F_k^{j \bullet \rightarrow s_1}$ вершина s_2 достижима из j , так как иначе в $H = F_k^{j \bullet \rightarrow s_1} + (s_1, i)$ вершина s_2 была бы также достижима из j , а это неверно. В силу (А) и (В) $F_k^{j \bullet \rightarrow s_1} \in \mathcal{F}_k^{j \bullet \rightarrow i}$, аналогично $F_k^{j \bullet \rightarrow s_2} \in \mathcal{F}_k^{j \bullet \rightarrow i}$. Отсюда следует $n_1(H) = 2$.

В силу (4.8) и следствия из леммы 4.1 при $j \neq i$ имеем

$$a_{ij}^k = - \sum_{s \neq i} \varepsilon_{si} q_{sj,i}^k = -q_{ij}^{k+1} \leq 0. \quad (4.9)$$

Предложение 4.2 доказано полностью. \square

Поскольку вес пустого множества равен нулю, $\tilde{Q}_{n-v+1} = 0$ и $\sigma_{n-v+1} = 0$.

Взяв след матриц в обеих частях (4.6) и пользуясь тем, что

$$\text{tr } \tilde{Q}_{k+1} = (n - k - 1)\sigma_{k+1}, \quad k = 0, \dots, n - v \quad (4.10)$$

(поскольку остовный исходящий лес с $k + 1$ дугами имеет $n - k - 1$ корней), выводим

Предложение 4.3. Для любого взвешенного орграфа

$$\sigma_{k+1} = \frac{\text{tr}(\tilde{L}\tilde{Q}_k)}{k + 1}, \quad k = 0, \dots, n - v. \quad (4.11)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}^k = \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n \tilde{\ell}_{is} q_{sj}^k = \sum_{s=1}^n \tilde{\ell}_{is} \sum_{j=1}^n q_{sj}^k = \sum_{s=1}^n \tilde{\ell}_{is} \sigma_k = 0. \quad \square$$

Доказательство следствия 1 из теоремы 4.3. Домножая обе части (4.13) на матрицу, коммутирующую с \tilde{L} , и пользуясь дистрибутивностью и ассоциативностью умножения матриц, получаем требуемое утверждение. \square

Из предложения 4.2 и леммы 4.2 вытекает

Предложение 4.4. Матрицы $\tilde{L}\tilde{Q}_k$ являются матрицами Кирхгофа некоторых орграфов.

Следствие 2 из теоремы 4.3. Для любого взвешенного орграфа $\tilde{L}\tilde{Q}_{n-v} = \tilde{Q}_{n-v}\tilde{L} = 0$.

Доказательство следствия 2 из теоремы 4.3. Рассмотрим выражение (4.7) при $k = n - v$. В силу предложения 3.2 для всех $(s, i) \in E(\Gamma)$ имеет место $\varepsilon_{si} q_{si}^{n-v} = 0$, т. е. $a_{ii}^{n-v} = 0$ при всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Таким образом, из $a_{ii}^{n-v} = 0$, неравенства (4.9), леммы 4.2 и следствия 1 из теоремы 4.3 выводится следствие 2. \square

В силу определения 3.1 данное следствие эквивалентно теореме 3.5. Тем самым получено новое доказательство этой теоремы.

Рассмотрим теперь матрицы

$$\bar{J}_k = \sigma_k^{-1} \tilde{Q}_k, \quad k = 1, \dots, n - v. \quad (4.15)$$

Имеем $\bar{J}_0 = I$, $\bar{J}_{n-v} = \bar{J}$. Используя последнее следствие, получаем

Следствие 3 из теоремы 4.3. При любом $k \in \{1, \dots, n - v\}$ $\bar{J}_k \bar{J} = \bar{J} \bar{J}_k = \bar{J}$. В частности, $\bar{J}_{n-v} \bar{J} = \bar{J}^2 = \bar{J}$. Кроме того, $\tilde{Q}(\tau) \bar{J} = \bar{J} \tilde{Q}(\tau) = \bar{J}$ при любом $\tau > 0$.

Доказательство следствия 3 из теоремы 4.3. Домножив обе части равенства (4.13) справа на \bar{J} и пользуясь тождеством $\tilde{L} \bar{J} = 0$ (следствие 2 из теоремы 4.3), получаем $\tilde{Q}_k \bar{J} = \sigma_k \bar{J}$. В силу коммутативности имеем $\bar{J} \bar{J}_k = \bar{J}_k \bar{J} = \bar{J}$. Используя теорему 3.1', получаем также $\tilde{Q}(\tau) \bar{J} = \bar{J} \tilde{Q}(\tau) = \bar{J}$ при любом $\tau > 0$. \square

Данное следствие дает новое доказательство теоремы 3.4.

В силу предложения 4.2 и следствия 1 из теоремы 4.3 матрицы \bar{J}_k связаны соотношением

$$\bar{J}_{k+1} = I - \frac{\sigma_k}{\sigma_{k+1}} \bar{J}_k \tilde{L}, \quad k = 0, \dots, n - v - 1, \quad (4.16)$$

и по лемме 4.2 каждая из них имеет единичные строчные суммы. Элементы матриц \bar{J}_k неотрицательны по определению, следовательно, выполняется

Предложение 4.5. Для любого взвешенного орграфа Γ матрицы \bar{J}_k ($k = 0, \dots, n - v$) являются строчно-стохастическими.

Используя (4.16) и предложение 4.3, получаем следующий аналог теоремы 4.2.

Теорема 4.4 (матричная теорема о росте лесов).

$$\bar{J}_k = I - k \frac{\tilde{L} \bar{J}_{k-1}}{\text{tr}(\tilde{L} \bar{J}_{k-1})}, \quad \text{где } k = 1, \dots, n-v, \quad \bar{J}_0 = I \quad \text{и} \quad \tilde{L} \bar{J}_{n-v} = 0. \quad (4.17)$$

Название теоремы 4.4 связано с тем, что матрица \bar{J}_k представляет леса, отличающиеся одной «выросшей» дугой от лесов, представляемых \bar{J}_{k-1} .

Дополнив предложение 4.2 очевидным равенством $\tilde{Q}_0 = I = \sigma_0 I$, получаем

$$\begin{cases} \tilde{Q}_0 = \sigma_0 I, \\ \tilde{Q}_1 + \tilde{L} \tilde{Q}_0 = \sigma_1 I, \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{Q}_{n-v} + \tilde{L} \tilde{Q}_{n-v-1} = \sigma_{n-v} I. \end{cases} \quad (4.18)$$

Сложим равенства (4.18) и, пользуясь следствием 2 из теоремы 4.3, вместо \tilde{Q}_{n-v} подставим $(I + \tilde{L}) \tilde{Q}_{n-v}$:

$$(I + \tilde{L}) \tilde{Q}_0 + (I + \tilde{L}) \tilde{Q}_1 + \dots + (I + \tilde{L}) \tilde{Q}_{n-v} = \left(\sum_{k=0}^{n-v} \sigma_k \right) I.$$

Поскольку матрица $I + \tilde{L}$ невырождена (теорема 3.1'), обе части этого равенства можно домножить слева на $(I + \tilde{L})^{-1}$ и, используя обозначение $s = \varepsilon(\mathcal{F}^{\bullet \rightarrow}) = \sum_{k=0}^{n-v} \sigma_k$, получаем

$$\sum_{k=0}^{n-v} \tilde{Q}_k = s(I + \tilde{L})^{-1}, \quad (4.19)$$

поэтому выполняется

Следствие 2 из предложения 4.2. *Для любого взвешенного орграфа*

$$\tilde{Q} = (I + \tilde{L})^{-1} = s^{-1} \sum_{k=0}^{n-v} \tilde{Q}_k.$$

Данное утверждение совпадает с матричной теоремой о лесах для орграфов (п. 2 теоремы 1.4) и с теоремой 3.1', если в ней положить $\tau = 1$. Тем самым получено еще одно доказательство матричной теоремы о лесах.

Теорема 4.3 позволяет также представить матрицы остовных исходящих лесов $\tilde{Q}(\tau) = (I + \tau \tilde{L})^{-1} = s^{-1} \sum_{k=0}^{n-v} \tau^k \tilde{Q}_k$ и, в частности, матрицу $\tilde{Q} = \tilde{Q}(1) = (I + \tilde{L})^{-1}$ в виде многочленов от матрицы Кирхгофа \tilde{L} .

Теорема 4.5. *Для любого взвешенного орграфа*

$$\tilde{Q} = (I + \tilde{L})^{-1} = s^{-1} \sum_{i=0}^{n-v} s_{n-v-i} (-\tilde{L})^i, \quad (4.20)$$

где $s_k = \sum_{j=0}^k \sigma_j$ — вес множества исходящих лесов в Γ с числом дуг, не превосходящим k ($k = 0, \dots, n-v$).

Доказательство теоремы 4.5. Подставив выражение (4.13) в (4.19), получаем

$$\begin{aligned} s(I + \tilde{L})^{-1} &= \sum_{k=0}^{n-v} \sum_{i=0}^k \sigma_{k-i} (-\tilde{L})^i = \sum_{i=0}^{n-v} \sum_{k=i}^{n-v} \sigma_{k-i} (-\tilde{L})^i = \\ &= \sum_{i=0}^{n-v} \sum_{j=0}^{n-v-i} \sigma_j (-\tilde{L})^i = \sum_{i=0}^{n-v} s_{n-v-i} (-\tilde{L})^i. \quad \square \end{aligned}$$

Следствие 1 из теоремы 4.5. *Для любого взвешенного орграфа и любого $\tau > 0$*

$$\tilde{Q}(\tau) = (I + \tau\tilde{L})^{-1} = s^{-1}(\tau) \sum_{i=0}^{n-v} s_{n-v-i}(\tau) (-\tau\tilde{L})^i, \quad (4.21)$$

где $s_k(\tau) = \sum_{j=0}^k \tau^j \sigma_j$ ($k = 0, \dots, n-v$).

Доказательство следствия 1 из теоремы 4.5. Заметим, что орграф, получающийся из Γ умножением на τ весов всех ребер, имеет матрицу Кирхгофа $\tau\tilde{L}$ и вес множества остовных исходящих лесов с j дугами $\tau^j \sigma_j$. Поэтому требуемое утверждение следует из теоремы 4.5. \square

Напомним, что $s(I + \tilde{L})^{-1}$ есть присоединенная матрица (транспонированная матрица алгебраических дополнений) для $(I + \tilde{L})$, а $s(\tau)(I + \tau\tilde{L})^{-1}$ — для $(I + \tau\tilde{L})$. Из теоремы 4.5 и следствия 1 из нее получаем представление этих матриц в виде многочленов от \tilde{L} :

$$\begin{aligned} s(I + \tilde{L})^{-1} &= \sum_{i=0}^{n-v} s_{n-v-i} (-\tilde{L})^i, \\ s(\tau)(I + \tau\tilde{L})^{-1} &= \sum_{i=0}^{n-v} s_{n-v-i}(\tau) (-\tau\tilde{L})^i. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Замечание 4.1. Поскольку $\tilde{L}\tilde{Q}_k$ является матрицей Кирхгофа некоторого орграфа (предложение 4.4), все ее главные миноры неотрицательны (в силу теоремы 6 из [185]). Поэтому все матрицы $\tilde{L}\tilde{Q}_k$ есть вырожденные M -матрицы (см., например, пункт (A1) теоремы 4.6 в [95]). Другое доказательство этого утверждения может быть получено из неотрицательности действительных частей собственных значений (см. предложение 4.8 ниже) и неположительности недиагональных элементов (пункт (F12) теоремы 4.6 в [95]). Из

представления $\sigma_{k+1} I - \tilde{Q}_{k+1} = \tilde{L}\tilde{Q}_k$ вырожденной M -матрицы $\tilde{L}\tilde{Q}_k$ следует $\sigma_{k+1} = \rho(\tilde{Q}_{k+1})$, т. е. σ_{k+1} является спектральным радиусом матрицы \tilde{Q}_{k+1} ($k = 0, \dots, n-v-1$). Это следует также из предложения 4.5 (см. (4.15)).

4.5. О некоторых линейных операторах, связанных с орграфом

В [3] и главе 3 отмечалось, что линейная оболочка строк матрицы \tilde{J}^T образует в \mathbb{R}^n подпространство \tilde{J}_R^c размерности v , а линейная оболочка \tilde{L}_R строк матрицы \tilde{L} образует подпространство размерности $n-v$. Далее, $\tilde{L}_R \cap \tilde{J}_R^c = \{\mathbf{0}\}$ и, поскольку сумма размерностей подпространств \tilde{L}_R и \tilde{J}_R^c равна n , пространство \mathbb{R}^n разлагается в прямую сумму \tilde{L}_R и \tilde{J}_R^c :

$$\mathbb{R}^n = \tilde{L}_R \dot{+} \tilde{J}_R^c. \quad (4.23)$$

Пусть $\tilde{\mathbf{L}}$, $\tilde{\mathbf{J}}^T$ и $\tilde{\mathbf{J}}$ — операторы из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n , определяемые соотношениями $\tilde{\mathbf{L}}(\mathbf{x}) = \tilde{L}\mathbf{x}$, $\tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{x}) = \tilde{J}^T \mathbf{x}$ и $\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x}) = \tilde{J}\mathbf{x}$. Размерность образа оператора $\tilde{\mathbf{J}}^T$ равна рангу матрицы \tilde{J}^T , т. е. v ; размерность образа оператора $\tilde{\mathbf{L}}$ равна $n-v$. Поэтому из теоремы 3.5 следует $\tilde{L}_R = \ker \tilde{\mathbf{J}}^T = \text{Im}(\tilde{\mathbf{L}})$ и $\tilde{J}_R^c = \ker \tilde{\mathbf{L}} = \text{Im}(\tilde{\mathbf{J}}^T)$.

В соответствии с (4.23) каждый вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ единственным образом представляется суммой векторов \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 , таких что $\mathbf{u}_1 \in \tilde{L}_R$, $\mathbf{u}_2 \in \tilde{J}_R^c$. В силу $\tilde{L}_R \cap \tilde{J}_R^c = \{\mathbf{0}\}$ для любого $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ имеет место $(\tilde{\mathbf{L}} + \tilde{\mathbf{J}}^T)\mathbf{u} = (\tilde{\mathbf{L}} + \tilde{\mathbf{J}}^T)\mathbf{u}_1 + (\tilde{\mathbf{L}} + \tilde{\mathbf{J}}^T)\mathbf{u}_2 = \tilde{\mathbf{L}}\mathbf{u}_1 + \tilde{\mathbf{J}}^T\mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0}$. Таким образом размерность образа оператора $\mathbf{Z} = \tilde{\mathbf{L}} + \tilde{\mathbf{J}}^T$ равна n (или, эквивалентно, размерность ядра оператора $\mathbf{Z} = \tilde{\mathbf{L}} + \tilde{\mathbf{J}}^T$ равна нулю). Таким образом, имеет место

Теорема 4.6. *Для любого взвешенного орграфа Γ матрица $Z = \tilde{L} + \tilde{J}^T$ невырождена.*

Замечание 4.2. Образ и ядро линейного оператора \mathbf{A} имеют общий вектор, отличный от нулевого, тогда и только тогда, когда \mathbf{A} имеет присоединенные векторы¹, отвечающие собственному значению 0. Поэтому, операторы $\tilde{\mathbf{L}}$ и $\tilde{\mathbf{J}}^T$ не имеют присоединенных векторов, отвечающих собственному значению $\lambda = 0$. Если $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ есть k различных собственных значений оператора \mathbf{A} в \mathbb{R}^n , то (см. [24]) пространство \mathbb{R}^n можно разложить в прямую сумму k инвариантных подпространств $N_{\lambda_1}^{(p_1)}, \dots, N_{\lambda_k}^{(p_k)}$:

¹Вектор \mathbf{x} является присоединенным вектором [24] 1-го порядка оператора \mathbf{A} , отвечающим собственному значению λ , если $\mathbf{y} = (A - \lambda I)\mathbf{x}$ есть собственный вектор, отвечающий собственному значению λ . Аналогично, \mathbf{x} — присоединенный вектор k -го порядка, отвечающий собственному значению λ , если $\mathbf{y} = (A - \lambda I)\mathbf{x}$ — присоединенный вектор $(k-1)$ -го порядка, отвечающий λ . Через $N_{\lambda_i}^{(1)}$ обозначают множество всех собственных векторов, отвечающих собственному значению λ_i , к которым добавлен нулевой вектор, и при $k = 1, \dots, p_i$ через $N_{\lambda_i}^{(k+1)}$ — подпространство, получаемое из $N_{\lambda_i}^{(k)}$ добавлением присоединенных векторов k -го порядка, отвечающих λ_i [24]. Здесь p_i — минимальное число, удовлетворяющее условию $N_{\lambda_i}^{(p_i)} = N_{\lambda_i}^{(p_i+1)}$.

$$\begin{cases} b_1 \tilde{\ell}_{11} + \dots + b_n \tilde{\ell}_{n1} & = 0 \\ b_1 \tilde{\ell}_{12} + \dots + b_n \tilde{\ell}_{n2} & = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ b_1 \tilde{\ell}_{1n-1} + \dots + b_n \tilde{\ell}_{nn-1} & = 0 \\ b_1 + \dots + b_n & = 0. \end{cases} \quad (4.25)$$

Пусть M — транспонированная матрица коэффициентов этой системы линейных однородных уравнений. Разложим $\det M$ по последнему столбцу M , состоящему из единиц. В силу матричной теоремы о деревьях для орграфа, если существует остовное дерево, исходящее из вершины i , то алгебраическое дополнение элемента $\tilde{\ell}_{in}$ матрицы \tilde{L} , которое совпадает с алгебраическим дополнением i -го элемента (равного 1) последнего столбца матрицы M , больше нуля, а в противном случае оно равно нулю. По условию максимальный исходящий лес орграфа Γ является исходящим деревом, поэтому хотя бы для одного элемента последнего столбца M алгебраическое дополнение положительно. Следовательно, определитель M , полученный разложением по столбцу из единиц, также положителен. Отсюда следует, что ранг матрицы M равен n . Значит, система уравнений (4.25) имеет лишь нулевое решение: $b_1 = \dots = b_n = 0$. Полученное противоречие доказывает лемму 4.3. \square

Пусть V_1, \dots, V_p — множества вершин слабых компонент Γ . Предположим без ограничения общности, что первыми занумерованы вершины из V_1 , затем — вершины из V_2 и т. д.² Тогда в силу теоремы 3.2' матрица $\tilde{L} + \bar{J}$ является блочно-диагональной с p блоками, что записывается следующим образом [55]:

$$\tilde{L} + \bar{J} = \bigoplus \sum_{s=1}^p A_{ss}, \quad (4.26)$$

где A_{ss} — матрица, соответствующая s -й слабой компоненте. Блочно-диагональная матрица $\tilde{L} + \bar{J}$ невырождена в том и только том случае, если каждая матрица A_{ss} невырождена, причем

$$\det(\tilde{L} + \bar{J}) = \prod_{s=1}^p \det A_{ss}. \quad (4.27)$$

Пусть Γ_s — сужение Γ на V_s ($s \in \{1, \dots, p\}$); матрицы, построенные для орграфа Γ_s , будем обозначать через $\tilde{L}^{(s)}$, $\tilde{Q}_{n-v}^{(s)}$ и $\bar{J}^{(s)}$. Тогда

$$A_{ss} = \tilde{L}^{(s)} + \bar{J}^{(s)}. \quad (4.28)$$

Действительно, $\tilde{L}^{(s)}$ совпадает с s -м блоком \tilde{L} , а s -ый блок \tilde{Q}_{n-v} в силу пункта 5 теоремы 3.2' пропорционален $\tilde{Q}_{n-v}^{(s)}$ (коэффициент пропорциональности — общий вес лесов в Γ_{-V_s}), откуда s -й блок \bar{J} совпадает с $\bar{J}^{(s)}$.

²При иной нумерации соответствующая перестановка строк и столбцов не изменит ранга матрицы $\tilde{L} + \bar{J}$.

Для доказательства следствия 1 из теоремы 4.7 заметим теперь, что при $\alpha \neq 0$ матрица $\tilde{L} + \alpha \bar{J}$, как и $\tilde{L} + \bar{J}$, является нижней блочно-треугольной матрицей с $v + 1$ блоками. В силу пункта 2 теоремы 3.2' ее $v + 1$ -й диагональный блок совпадает с соответствующим блоком $\tilde{L} + \bar{J}$. Пользуясь леммой 4.4, получаем, что остальные ее диагональные блоки также невырождены. \square

Из $\bar{J}^2 = \bar{J}$ (теорема 3.4) следует, что любой ненулевой столбец матрицы \bar{J} является собственным вектором оператора \bar{J} , соответствующим собственному значению 1. Значит, для любого вектора $\mathbf{u} \in \bar{J}_R$, где \bar{J}_R — линейная оболочка вектор-столбцов матрицы \bar{J} , имеет место $\bar{J}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$. Поскольку ранг оператора \bar{J} равен размерности его образа и одновременно — размерности подпространства \bar{J}_R , \bar{J}_R есть в точности образ \bar{J} , а также его инвариантное подпространство.

4.6. Псевдообратная и групповая обратная матрицы для матрицы Кирхгофа

Получим выражения псевдообратной матрицы и групповой обратной матрицы для матрицы Кирхгофа \tilde{L} . Напомним, что *псевдообратной (обобщенно обратной по Муру–Пенроузу) матрицей* для произвольной прямоугольной матрицы A называется матрица X , удовлетворяющая условиям:

- 1) $AXA = A$,
- 2) $XAX = X$,
- 3) $(AX)^* = AX$,
- 4) $(XA)^* = XA$,

где $(AX)^*$ и $(XA)^*$ — матрицы, сопряженные к AX и XA .

Псевдообратная матрица для любой матрицы существует и единственна. Ее часто обозначают через A^+ . Если A обратима, то A^+ совпадает с обратной матрицей A^{-1} .

Псевдообратные матрицы представляют большой теоретический и практический интерес. Последний связан, в частности, с тем, что через матрицу A^+ выражается нормальное псевдорешение системы уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, а именно, $\mathbf{x}_n = A^+\mathbf{b}$. Нормальным псевдорешением называют вектор наименьшей длины, доставляющий минимум длине вектора $A\mathbf{x} - \mathbf{b}$. Применительно к лапласовским матрицам такие решения рассматриваются, в частности, в задачах агрегирования предпочтений (оценивания объектов по результатам парных сравнений) [154], получения пространственных представлений для систем, моделируемых графами [209], в задачах кластеризации вершин графов, при анализе социальных сетей.

Важное значение имеют также групповые обратные матрицы (*group inverses*, см. [91]). Матрица X называется *групповой обратной матрицей* для квадратной матрицы A , если она удовлетворяет условиям 1) и 2), приведенным выше, а также условию

5) $AX = XA$.

Групповую обратную матрицу для матрицы A обозначают через $A^\#$. Эта матрица существует не для любой квадратной матрицы, но если существует, то единственна. При этом не всегда $A^+ = A^\#$.

Если матрица \tilde{L} симметрична (в частности, это так для неориентированных графов), то, как показано в [69], матрица $(\tilde{L} + \alpha \bar{J})^{-1} - \alpha^{-1} \bar{J}$ (при любом $\alpha > 0$) является псевдообратной и групповой обратной матрицей для \tilde{L} . Утверждение относительно групповой обратной верно для любых орграфов. Оно может быть сформулировано в виде следующей теоремы.

Теорема 4.8. 1. Для любого взвешенного орграфа при любом $\alpha \neq 0$ имеет место

$$\tilde{L}^\# = (\tilde{L} + \alpha \bar{J})^{-1} - \alpha^{-1} \bar{J}. \quad (4.29)$$

2. $\tilde{L}^\# \tilde{L} = \tilde{L} \tilde{L}^\# = I - \bar{J}$.

Доказательство теоремы 4.8. По теоремам 3.4 и 3.5 $(\tilde{L} + \bar{J}) \bar{J} = \bar{J}$. Домножив это равенство слева и справа на матрицу $(\tilde{L} + \bar{J})^{-1}$ (которая существует по теореме 4.7), получаем

$$(\tilde{L} + \bar{J})^{-1} \bar{J} = \bar{J}. \quad (4.30)$$

Аналогично

$$\bar{J}(\tilde{L} + \bar{J})^{-1} = \bar{J}. \quad (4.31)$$

Введем обозначение $\hat{Q} = (\tilde{L} + \bar{J})^{-1} - \bar{J}$. Пользуясь (4.30) и теоремами 3.4 и 3.5, получаем

$$\hat{Q} \tilde{L} = (\tilde{L} + \bar{J})^{-1} \tilde{L} - \bar{J} \tilde{L} = (\tilde{L} + \bar{J})^{-1} (\tilde{L} + \bar{J} - \bar{J}) = I - (\tilde{L} + \bar{J})^{-1} \bar{J} = I - \bar{J}. \quad (4.32)$$

Аналогично,

$$\tilde{L} \hat{Q} = I - \bar{J}. \quad (4.33)$$

Далее,

$$\hat{Q} \bar{J} = (\tilde{L} + \bar{J})^{-1} \bar{J} - \bar{J}^2 = 0.$$

Следовательно, при любом $\alpha \neq 0$

$$(\hat{Q} + \alpha^{-1} \bar{J})(\tilde{L} + \alpha \bar{J}) = I - \bar{J} + \bar{J} = I.$$

Отсюда $\hat{Q} + \alpha^{-1} \bar{J} = (\tilde{L} + \alpha \bar{J})^{-1}$ и

$$\hat{Q} = (\tilde{L} + \alpha \bar{J})^{-1} - \alpha^{-1} \bar{J} \quad (4.34)$$

при любом $\alpha \neq 0$.

Доказано, что $\tilde{L} \hat{Q} = \hat{Q} \tilde{L} = I - \bar{J}$, значит, для матрицы $\hat{Q} = (\tilde{L} + \alpha \bar{J})^{-1} - \alpha^{-1} \bar{J}$ выполняется условие 5) из определения групповой обратной матрицы. Докажем выполнение условий 1) и 2). Пользуясь теоремами 3.4 и 3.5 и тождествами (4.31), (4.32), (4.33), (4.34), имеем

$$\begin{aligned}\tilde{L}\hat{Q}\tilde{L} &= \tilde{L}(I - \bar{J}) = \tilde{L}, \\ \hat{Q}\tilde{L}\hat{Q} &= (I - \bar{J})\hat{Q} = \hat{Q} - \bar{J}\hat{Q} = \hat{Q} - \bar{J}(\tilde{L} + \bar{J})^{-1} + \bar{J}^2 = \hat{Q} - \bar{J} + \bar{J} = \hat{Q},\end{aligned}$$

что завершает доказательство теоремы. \square

Как и в неориентированном случае, матрица $\tilde{L}^\# = (\tilde{\ell}_{ij}^\#)$ может быть получена предельным переходом.

Предложение 4.6. *Для любого взвешенного орграфа*

$$\tilde{L}^\# = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \left(\tilde{Q}(\tau) - \bar{J} \right).$$

Доказательство предложения 4.6. Пользуясь теоремами 3.4, 3.5, 3.7 и тождествами $(I + \tau\tilde{L})^{-1}\bar{J} = \bar{J}$ (следствие 3 из теоремы 4.3) и (4.30), получаем

$$\begin{aligned}& \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \left((I + \tau\tilde{L})^{-1} - \bar{J} \right) + \bar{J} \right) (\tilde{L} + \bar{J}) = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \left((I + \tau\tilde{L})^{-1}\tilde{L} + (I + \tau\tilde{L})^{-1}\bar{J} - \bar{J}\tilde{L} - \bar{J}^2 \right) + \bar{J}\tilde{L} + \bar{J}^2 = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau(I + \tau\tilde{L})^{-1}\tilde{L} + \bar{J} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} (I + \tau\tilde{L})^{-1}(I + \tau\tilde{L} - I) + \bar{J} = \\ &= I - \lim_{\tau \rightarrow \infty} (I + \tau\tilde{L})^{-1} + \bar{J} = I.\end{aligned}$$

Домножив первое и последнее выражения справа на $(\tilde{L} + \bar{J})^{-1}$ и воспользовавшись теоремой 4.8, получаем нужное равенство. \square

Выразим матрицу $\tilde{L}^\#$ через нормированные матрицы исходящих лесов \bar{J}_{n-v-1} и $\bar{J}_{n-v} = \bar{J}$ (см. (4.15)). Следующее предложение является аналогом теоремы 3 в [69] (теоремы 8.7 на с. 181 данной книги).

Предложение 4.7. *Для любого взвешенного орграфа имеет место*

$$\tilde{L}^\# = \frac{\sigma_{n-v-1}}{\sigma_{n-v}} (\bar{J}_{n-v-1} - \bar{J}).$$

Доказательство предложения 4.7. Используя предложение 4.6 и теорему 3.1', при произвольных $i, j \in V(\Gamma)$ найдем предел

$$\begin{aligned}\tilde{\ell}_{ij}^\# &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \left(q_{ij}(\tau) - \bar{J}_{ij} \right) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \left(\frac{\sum_{k=0}^{n-v} \tau^k \varepsilon(\mathcal{F}_k^{j \rightarrow i})}{\sum_{k=0}^{n-v} \tau^k \sigma_k} - \bar{J}_{ij} \right) = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-v} \tau^{k+1} \varepsilon(\mathcal{F}_k^{j \bullet \rightarrow i}) - \sum_{k=0}^{n-v} \tau^{k+1} \sigma_k \bar{J}_{ij}}{\sum_{k=0}^{n-v} \tau^k \sigma_k} =\end{aligned}$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-v-1} \tau^{k+1} \varepsilon(\mathcal{F}_k^{j \bullet \rightarrow i}) + \tau^{n-v+1} \varepsilon(\mathcal{F}_{n-v}^{j \bullet \rightarrow i}) - \sum_{k=0}^{n-v-1} \tau^{k+1} \sigma_k \bar{J}_{ij} - \tau^{n-v+1} \sigma_{n-v} \bar{J}_{ij}}{\sum_{k=0}^{n-v} \tau^k \sigma_k}.$$

По определению матрицы \bar{J} имеем $\tau^{n-v+1} \varepsilon(\mathcal{F}_{n-v}^{j \bullet \rightarrow i}) - \tau^{n-v+1} \sigma_{n-v} \bar{J}_{ij} = 0$. Пользуясь тем, что $\sigma_{n-v} \neq 0$, получаем

$$\tilde{\varrho}_{ij}^{\#} = \frac{\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v-1}^{j \bullet \rightarrow i}) - \sigma_{n-v-1} \bar{J}_{ij}}{\sigma_{n-v}}.$$

Отсюда следует требуемое утверждение. \square

Из-за несимметричности матрицы $I - \bar{J} = \tilde{L}^{\#} \tilde{L} = \tilde{L} \tilde{L}^{\#}$ в случае произвольных орграфов матрица $\tilde{L}^{\#}$, вообще говоря, не является псевдообратной для \tilde{L} . Чтобы получить явное выражение матрицы \tilde{L}^+ , обратимся к матрице $Z = \tilde{L} + \bar{J}^*$, которая, согласно теореме 4.6, невырождена. Используя тождество $\tilde{L} \bar{J} = 0$ (теорема 3.5), получаем

$$(Z^*)^{-1} Z^{-1} = (ZZ^*)^{-1} = (\bar{J}^* \bar{J} + \tilde{L} \tilde{L}^*)^{-1}.$$

Лемма 4.5. *Для любого взвешенного орграфа матрица $(ZZ^*)^{-1}$ коммутирует с матрицами $\tilde{L} \tilde{L}^*$ и $\bar{J}^* \bar{J}$.*

Доказательство леммы 4.5. В силу тождества $\bar{J} \tilde{L} = 0$ (теорема 3.5) матрицы $\tilde{L} \tilde{L}^*$ и $ZZ^* = \bar{J}^* \bar{J} + \tilde{L} \tilde{L}^*$ коммутируют: $\tilde{L} \tilde{L}^* (\bar{J}^* \bar{J} + \tilde{L} \tilde{L}^*) = (\bar{J}^* \bar{J} + \tilde{L} \tilde{L}^*) \tilde{L} \tilde{L}^* = (\tilde{L} \tilde{L}^*)^2$. Домножив обе части первого равенства слева и справа на $(ZZ^*)^{-1} = (\bar{J}^* \bar{J} + \tilde{L} \tilde{L}^*)^{-1}$, получаем требуемое соотношение $(\bar{J}^* \bar{J} + \tilde{L} \tilde{L}^*)^{-1} \tilde{L} \tilde{L}^* = \tilde{L} \tilde{L}^* (\bar{J}^* \bar{J} + \tilde{L} \tilde{L}^*)^{-1}$. Второе утверждение доказывается аналогично. \square

Матрицы $\tilde{L} \tilde{L}^*$, $\bar{J}^* \bar{J}$ и $(ZZ^*)^{-1}$ симметричны. Произведение двух симметричных матриц симметрично тогда и только тогда, когда они коммутируют [55]. Поэтому имеет место

Следствие 1 из леммы 4.5. *Для любого взвешенного орграфа матрицы $\tilde{L} \tilde{L}^* (ZZ^*)^{-1}$ и $\bar{J}^* \bar{J} (ZZ^*)^{-1}$ симметричны.*

Эти факты используются при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 4.9. *Для любого взвешенного орграфа $\tilde{L}^+ = \tilde{L}^* (ZZ^*)^{-1} = \tilde{L}^* (\bar{J}^* \bar{J} + \tilde{L} \tilde{L}^*)^{-1}$.*

Доказательство теоремы 4.9. Пусть $\tilde{L}^{(+)} = \tilde{L}^* (ZZ^*)^{-1}$. Докажем выполнение четырех условий:

- 1) $\tilde{L} \tilde{L}^{(+)} \tilde{L} = \tilde{L}$,
- 2) $\tilde{L}^{(+)} \tilde{L} \tilde{L}^{(+)} = \tilde{L}^{(+)}$,
- 3) $\tilde{L} \tilde{L}^{(+)}$ симметрична,
- 4) $\tilde{L}^{(+)} \tilde{L}$ симметрична.

Условие 1. Используя лемму 4.5 и тождество $\bar{J} \tilde{L} = 0$ (теорема 3.5), получаем

$$\begin{aligned}\tilde{L}\tilde{L}^{(+)}\tilde{L} &= \tilde{L}\tilde{L}^*(\bar{J}^*\bar{J} + \tilde{L}\tilde{L}^*)^{-1}\tilde{L} = ((\tilde{L}\tilde{L}^* + \bar{J}^*\bar{J}) - \bar{J}^*\bar{J})(\bar{J}^*\bar{J} + \tilde{L}\tilde{L}^*)^{-1}\tilde{L} = \\ &= (I - \bar{J}^*\bar{J}(\bar{J}^*\bar{J} + \tilde{L}\tilde{L}^*)^{-1})\tilde{L} = \tilde{L} - (\bar{J}^*\bar{J} + \tilde{L}\tilde{L}^*)^{-1}\bar{J}^*\bar{J}\tilde{L} = \tilde{L}.\end{aligned}$$

Условие 2. Пользуясь леммой 4.5 и тождеством $\tilde{L}^*\bar{J}^* = 0$, получаем:

$$\begin{aligned}\tilde{L}^{(+)}\tilde{L}\tilde{L}^{(+)} &= \tilde{L}^{(+)}\tilde{L}\tilde{L}^*(\bar{J}^*\bar{J} + \tilde{L}\tilde{L}^*)^{-1} = \tilde{L}^{(+)}((\tilde{L}\tilde{L}^* + \bar{J}^*\bar{J}) - \bar{J}^*\bar{J})(\bar{J}^*\bar{J} + \tilde{L}\tilde{L}^*)^{-1} = \\ &= \tilde{L}^{(+)}(I - \bar{J}^*\bar{J}(\bar{J}^*\bar{J} + \tilde{L}\tilde{L}^*)^{-1}) = \tilde{L}^{(+)} - \tilde{L}^*(\bar{J}^*\bar{J} + \tilde{L}\tilde{L}^*)^{-1}\bar{J}^*\bar{J}(\bar{J}^*\bar{J} + \tilde{L}\tilde{L}^*)^{-1} = \\ &= \tilde{L}^{(+)} - \tilde{L}^*\bar{J}^*\bar{J}(\bar{J}^*\bar{J} + \tilde{L}\tilde{L}^*)^{-2} = \tilde{L}^{(+)}.\end{aligned}$$

Условие 3. Согласно следствию из леммы 4.5 матрица $\tilde{L}\tilde{L}^{(+)} = \tilde{L}\tilde{L}^*(\bar{J}^*\bar{J} + \tilde{L}\tilde{L}^*)^{-1}$ симметрична.

Условие 4. В силу симметричности матрицы $(\bar{J}^*\bar{J} + \tilde{L}\tilde{L}^*)^{-1}$ и теоремы 4.1.3 из [55] матрица $\tilde{L}^{(+)}\tilde{L} = \tilde{L}^*(\bar{J}^*\bar{J} + \tilde{L}\tilde{L}^*)^{-1}\tilde{L}$ также симметрична.

Теорема 4.9 доказана. \square

4.7. Об области Гершгорина и аннулирующем многочлене матрицы Кирхгофа

Согласно теореме Гершгорина (см., например, [55]) собственные значения матрицы A заключены в объединении $G(A)$ n кругов

$$G(A) = \bigcup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq R'_i(A) \right\}, \quad (4.35)$$

где \mathbb{C} — поле комплексных чисел, $R'_i(A) = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, $i = 1, \dots, n$ — строчные почти-нормы матрицы A .

Поскольку для матрицы \tilde{L} имеем $R'_i(\tilde{L}) = \tilde{\ell}_{ii}$, запишем (4.35) в виде

$$G(\tilde{L}) = \bigcup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - \tilde{\ell}_{ii}| \leq \tilde{\ell}_{ii} \right\}. \quad (4.36)$$

Из (4.36) следует

Предложение 4.8. 1) Действительные части собственных значений матрицы \tilde{L} неотрицательны; каждый круг Гершгорина принадлежит правой полуплоскости;
2) пересечение всех кругов Гершгорина $G(\tilde{L})$ содержит начало координат;
3) $G(\tilde{L}) = \left\{ (z + 1) \max_{1 \leq i \leq n} \tilde{\ell}_{ii} \mid |z| \leq 1 \right\}$.

Очевидно, что пересечение всех кругов Гершгорина состоит только из нуля тогда и только тогда, когда орграф содержит недоминируемую вершину. Более детальному изучению спектров лапласовских матриц орграфов посвящена глава 5.

Рассмотрим характеристический многочлен матрицы \tilde{L} :

$$p_{\tilde{L}}(\lambda) = \sum_{i=0}^n (-1)^i E_i(\tilde{L}) \lambda^{n-i},$$

где $E_i(\tilde{L})$ — сумма всех главных миноров порядка i . Согласно теореме 6 из [185] (см. также [165]) для всех $i = 1, \dots, n$ имеет место $E_i(\tilde{L}) = \sigma_i$. Поскольку все главные миноры порядка выше $n - v$ равны нулю, имеет место $p_{\tilde{L}}(\lambda) = (-1)^{n-v} \lambda^v \sum_{i=0}^{n-v} \sigma_i (-\lambda)^{n-v-i} = \lambda^v \sum_{i=0}^{n-v} (-1)^i \sigma_i \lambda^{n-v-i}$.

Предложение 4.9. *Многочлен $p'_{\tilde{L}}(\lambda) = \lambda \sum_{i=0}^{n-v} \sigma_{n-v-i} (-\lambda)^i$ является аннулирующим для \tilde{L} .*

Доказательство предложения 4.9. Согласно теореме 4.3 $\tilde{Q}_{n-v} = \sum_{i=0}^{n-v} \sigma_{n-v-i} (-\tilde{L})^i$. Используя следствие 2 из теоремы 4.3, получаем

$$p'_{\tilde{L}}(\tilde{L}) = \tilde{L} \sum_{i=0}^{n-v} \sigma_{n-v-i} (-\tilde{L})^i = \tilde{L} \tilde{Q}_{n-v} = 0. \quad \square$$

Заключение к главе 4

Нормированные матрицы исходящих лесов орграфа являются стохастическими и определяют переходные вероятности в геометрической модели наблюдения за цепями Маркова, связанными с орграфом. Матрицы лесов представимы многочленами от матрицы Кирхгофа. Псевдообратная матрица \tilde{L}^+ и групповая обратная матрица $\tilde{L}^\#$ для матрицы Кирхгофа \tilde{L} имеют явные выражения через \tilde{L} и нормированную матрицу максимальных исходящих лесов \bar{J} орграфа. Матрицы исходящих и входящих лесов характеризуют взаимную достижимость вершин орграфа. Эти и другие результаты указывают на то, что матрицы лесов являются чрезвычайно полезным инструментом анализа структуры орграфов.

Ряд дополнительных результатов, связывающих матрицы лесов, лапласовские матрицы и матрицы Кирхгофа, цепи Маркова и структуру орграфа, получен в [142].

Глава 5

Исследование лапласовского спектра орграфов

А. Берман, автор классического руководства по теории матриц [95], в работе [96] назвал разработку лапласовской теории орграфов одним из важнейших перспективных направлений в науке, связывающей графы и матрицы.

Напомним, что лапласовская матрица — это матрица $L = (\ell_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, в которой все недиагональные элементы неположительны, а строчные суммы равны нулю. Каждой лапласовской матрице соответствует взвешенный орграф, и его свойства тесно связаны с алгебраическими свойствами лапласовской матрицы. Нормированная лапласовская матрица \check{L} — это лапласовская матрица, в которой $-\frac{1}{n} \leq \ell_{ij} \leq 0$ при всех $i \neq j$. В данной главе изучается спектр лапласовских матриц, а также соотношение спектров лапласовских и стохастических матриц. Доказано, что нормированные лапласовские матрицы являются полусходящимися. Установлено, что алгебраическая кратность нулевого собственного значения матрицы \check{L} равна размерности по входящим лесам соответствующего орграфа, а кратность собственного значения 1 на единицу меньше размерности по входящим лесам дополнительного орграфа. Спектры матриц \check{L} принадлежат пересечению двух кругов с центрами в точках $1/n$ и $1 - 1/n$ и радиусом $1 - 1/n$. Кроме того, область, их содержащая, входит в пересечение двух определенных в данной главе угловых областей с вершинами 0 и 1 и полосы $|\operatorname{Im}(z)| \leq \frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}$ (в пределе — полоса $|\operatorname{Im}(z)| < \frac{1}{\pi}$). Построен многоугольник, все точки которого являются собственными значениями нормированных лапласовских матриц порядка n . Данная глава написана в основном по материалам работ [6, 72]. Некоторые из полученных нами результатов анализа спектров лапласовских матриц орграфов использованы в работах [1, 2, 7, 11, 15–17, 25, 32, 38, 51, 65, 75, 112, 113, 119, 122, 126, 128, 129, 132, 138, 166, 173, 210, 222, 223, 227, 230, 240, 261, 262, 268, 271, 285, 287–289, 296, 316, 330, 338–340, 343, 348, 349, 380, 386, 387, 396–398, 404, 405] и др.

5.1. Введение

Спектральная теория графов — направление на стыке теории графов и линейной алгебры, возникшее в результате использования теории матриц в различных приложениях теории графов. Основным предметом спектральной теории графов является изучение зависимости между спектральными и структурными свойствами графов. Спектральный метод исследования графов нашел применение в комбинаторике, физике, кристаллогра-

фии, органической химии, эпидемиологии, социологии и т. д.

В большом числе работ изучается спектр матрицы смежности графа; этой теме посвящена монография Д. Цветковича, М. Дуба и Х. Захса [56]. Однако в [56, разд. 1.2–1.6 и 1.9] рассматривается и спектр модифицированной матрицы смежности (спектр по Зайделю) $S = J - I - 2A$, где J — матрица из единиц, I — единичная матрица, A — матрица смежности, а также спектр лапласовской матрицы $L = D - A$, где D — диагональная матрица степеней вершин графа.

В настоящей главе изучается спектр несимметричных лапласовских матриц. Спектр матрицы X обозначаем через $\sigma(X)$.

Под *лапласовской матрицей* понимаем здесь квадратную матрицу $L = (\ell_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, удовлетворяющую условиям

$$\ell_{ij} \leq 0, \quad j \neq i, \quad (5.1)$$

$$\sum_{j=1}^n \ell_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.2)$$

Отметим, что если L — симметричная матрица и имеет место $\ell_{ij} \in \{0, -1\}$ при $j \neq i$, то L является *матрицей Лапласа соответствующего неориентированного графа* (см., например, [80]): $\ell_{ij} = -1$ тогда и только тогда, когда граф имеет ребро между вершинами i и j ($j \neq i$); ℓ_{ii} равно степени вершины i . Среди работ, посвященных лапласовским матрицам неориентированных графов, выделим [34, 35, 162, 204, 205, 229, 291, 292, 304]).

Каждой матрице вида (5.1)–(5.2) может быть поставлен в соответствие *взвешенный ориентированный граф* Γ с *положительными весами дуг* такой, что¹

$$\ell_{ij} = \begin{cases} \text{вес дуги } (i, j) \text{ со знаком минус,} & \text{если } j \neq i \text{ и } \Gamma \text{ имеет дугу } (i, j); \\ 0, & \text{если } j \neq i \text{ и } \Gamma \text{ не имеет дуги } (i, j); \end{cases} \quad (5.3)$$

Нетрудно показать [142, с. 258], что каждая лапласовская матрица является вырожденной M -матрицей (об M -матрицах см. [95]). В силу теоремы Гершгорина (см., например, [55]) действительные части всех ненулевых собственных значений L положительны.

Согласно матричной теореме о входящих деревьях [49, 52] (теорема 1.3 на стр. 21) алгебраическое дополнение элемента (i, j) матрицы $L(\Gamma)$ равно сумме весов всех остовных деревьев, входящих в вершину i в Γ , где вес подграфа равен произведению весов всех его дуг. Обобщения этой теоремы получены в [165, 185] и [133, 158].

Граф называется *простым*, если он не содержит петель и кратных ребер. *Вершинная связность* графа — наименьшее число вершин, удаление которых (вместе с инцидентными им ребрами) приводит к несвязному графу. Наименьшее число ребер, удаление которых приводит к несвязному графу, называют *реберной связностью*. *Линейный подграф*

¹Аналогично орграф может быть построен по матрице Кирхгофа (см. раздел 1.1.4).

орграфа — это такой его подграф, в котором у каждой вершины полустепень исхода и полустепень захода равны единице. Очевидно, такой орграф состоит из непересекающихся простых контуров.

По мнению Б. Мохара, автора ряда глубоких работ по спектральной теории графов, лапласовский спектр является более «естественным» и «важным» [303], чем спектр матрицы смежности. Так или иначе, в этих спектрах отражаются несколько разные свойства графов. Для сравнения приведем теоремы о коэффициентах характеристических многочленов матрицы смежности и лапласовской матрицы. Характеризация коэффициентов характеристического многочлена матрицы смежности была получена Коэтесом [163].

Теорема 5.1. Пусть² $P_\Gamma(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$ — характеристический многочлен матрицы смежности невзвешенного орграфа Γ . Тогда

$$a_i = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_i} (-1)^{p(Q)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где \mathcal{Q}_i — множество всех линейных ориентированных подграфов Q орграфа Γ с i вершинами; $p(Q)$ — число компонент орграфа Q , т. е. число контуров, из которых составлен Q .

А. Кельманс [36, теорема 1] дал характеризацию коэффициентов характеристического многочлена лапласовской матрицы неориентированного графа:

Теорема 5.2. Пусть $P_L(\lambda) = |\lambda I - L| = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_n$ — характеристический многочлен лапласовской матрицы невзвешенного неориентированного графа $G(V, E)$. Тогда

$$c_i = (-1)^i \sum_{\mathcal{X} \in V: |\mathcal{X}|=n-i} D(G_{\mathcal{X}}), \quad i = 1, \dots, n,$$

где $G_{\mathcal{X}}$ получается из G отождествлением вершин множества $\mathcal{X} \subset V$ при удалении образующихся петель, $D(G)$ — число деревьев графа G .

В [165, 185] установлено, что минор $L(i_1, \dots, i_k)$ лапласовской матрицы L ориентированного графа, полученный из L вычеркиванием строк и столбцов i_1, \dots, i_k , равен сумме весов всех лесов с корнями i_1, \dots, i_k . Поскольку коэффициент характеристического многочлена при λ^{n-j} равен сумме всех главных миноров порядка j , из результата [165, 185] сразу следует теорема 5.2 о коэффициентах характеристического многочлена лапласовской матрицы.

Теоремы 5.1 и 5.2 позволяют сделать следующий вывод: характеристический многочлен матрицы смежности характеризует циклическую структуру графа (орграфа), а характеристический многочлен лапласовской матрицы — его «древесную» структуру.

²С историей этой и следующей теорем можно познакомиться по [56].

Огромное большинство работ по лапласовским спектрам графов посвящены симметричным матрицам и соответствующим им неориентированным графам. В данной главе эти спектры исследуются в общем случае, т. е. для взвешенных ориентированных графов.

В разделе 5.2 будут изложены некоторые результаты по характеристике структурных свойств неориентированного графа с помощью спектра его лапласовской матрицы. Завершая данный раздел, упомянем два важных приложения лапласовских матриц.

Одна из областей, где необходимо анализировать спектры лапласовских матриц орграфов, — децентрализованное управление многоагентными системами. Этой теме посвящен раздел 5.8, здесь же кратко коснемся другого приложения лапласовских матриц. Оно связано с использованием в химии *топологических структурных индексов*. При топологическом способе описания строения молекул учитывают только типы атомов и характер их взаимосвязи и обычно находят возможным пренебречь метрическими характеристиками молекулы (см. [48]). Структурная формула представляется графом, поэтому для анализа топологических свойств используют аппарат теории графов. Набор чисел, характеризующий структуру молекулярного графа, называют *инвариантным множеством* (ИМ). Инвариантность понимается как независимость от нумераций вершин и ребер графа. Далее находятся значения *топологических индексов* (ТИ) — различных числовых характеристик молекулярных структур. Например, элементы матрицы смежности, лапласовской матрицы или матрицы расстояний (рассматриваемых с точностью до одновременных перестановок строк и столбцов) могут служить ИМ. В *методе потенциалов* [200] для решения задач изоморфизма и автоморфизма молекулярных структур в качестве ИМ используются элементы матрицы $I + L$. В качестве ТИ берут элементы матриц $H = (I + L)^{-1}$, $D^H = (d_{ij}^H)$, где $d_{ij}^H = 0,5(h_{ii} + h_{jj}) - h_{ij}$, а также определители, спектры, элементарные симметрические функции на спектрах (коэффициенты характеристических многочленов) перечисленных матриц и др. Обнаруживается корреляция между значениями ТИ и физико-химическими свойствами соответствующих веществ. Это позволяет до определенной степени предсказывать свойства веществ, исследуя структуру молекул методами алгебраической теории графов. Отметим, что в химической информатике также широко используется резисторная метрика графа [81, 82, 207, 237, 239], которая рассмотрена в главе 9. О применении топологических индексов графов в органической химии см. также раздел 7.1.2.

5.2. Некоторые свойства лапласовского спектра неориентированного графа

В данном разделе осмыслим некоторые результаты исследования лапласовских спектров. В матрице инцидентности неориентированного графа любую из двух единиц в каждом столбце заменим на -1 и полученную матрицу обозначим через B . Нетрудно заметить, что $L = D - A = BB^T$. Из этой формулы следует, что L — положительно полуопределенная матрица, т. е. симметричная матрица с неотрицательными собственными значениями.

В [34] показано, что число компонент неориентированного графа на единицу больше числа нулевых корней многочлена

$$B_r^n = r^{-1}A(r),$$

где $A(-r)$ — характеристический многочлен лапласовской матрицы (которая в [34] называется *матрицей соседства*).

Упомянем еще несколько результатов, принадлежащих А. Кельмансу:

- 1) $\lambda_i \leq \max_{i \neq j} \{d_i + d_j\}$ (теорема 3.2 в [36]);
- 2) если граф простой, то $\lambda_i \leq n$, $i = 1, \dots, n$ (теорема 3.3 в [36]);
- 3) если граф простой, то кратность собственного значения n на единицу меньше числа компонент дополнительного графа [34, 229].

Не будучи знакомыми с работами А. Кельманса, авторы статьи [80] (в качестве препринта появившейся в 1971 г.) переоткрыли перечисленные результаты.

Пусть $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n$ — собственные значения лапласовской матрицы неориентированного графа. В [181] М. Фидлер назвал число $a(G) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_2$ *алгебраической связностью* графа G . Это число отражает некоторые структурные свойства графа. Если, например, G_1 и G_2 — два графа с одним и тем же множеством вершин и непересекающимися множествами ребер, то имеет место $a(G_1 \cup G_2) \geq a(G_1) + a(G_2)$. Если $v(G)$ и $e(G)$ — вершинная и реберная связности графа G , а $q(G)$ — степень графа, т.е. максимальная степень его вершины, то имеют место следующие свойства [181]:

- 1) $a(G) \leq v(G)$;
- 2) $a(G) \geq 2e(G)(1 - \cos \frac{\pi}{n})$;
- 3) $a(G) \geq C_1 e(G) - C_2 q(G)$, где $C_1 = 2(\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2\pi}{n})$, $C_2 = 2 \cos \frac{\pi}{n}(1 - \cos \frac{\pi}{n})$.

Важную роль в характеристизации графа играет собственный вектор y , соответствующий характеристическому корню $a(G)$. В [182] этот вектор назван *характеристической оценкой* графа; нередко его также называют *вектором Фидлера*. Если $G(V, E)$ — связный взвешенный граф и $y = (y_i)$ — его характеристическая оценка, то для каждого $r \geq 0$ подграф, порожденный подмножеством вершин $M(r) = \{i \in V : y_i + r \geq 0\}$, также связный.

Характеристическая оценка связного графа отражает [182] свойства его *сечений*, т.е. минимальных подмножеств ребер, удаление которых порождает несвязные графы.

Если c — такое число, что $0 \leq c < \max y_i$ и $c \neq y_i$ для всех $i \in V$, то множество всех ребер $\{i, k\}$, таких что $y_i < c < y_k$, формирует сечение графа G . Если $V_1 = \{k \in V : y_k > c\}$ и $V_2 = \{k \in V : y_k < c\}$, то (V_1, V_2) является разбиением V , соответствующим сечению, и подграф («банк сечения») с множеством вершин V_2 будет связным. Кроме того, если $y_i \neq 0$ для всех $i \in V$, то множество всех *альтернативных* ребер, т.е. ребер $\{i, k\}$, для которых $y_i y_k < 0$, образует такое сечение графа, каждый банк которого является связным (следствия 3.5 и 3.6 в [182]).

Следующие интересные результаты получены в [88].

Вершина ν называется *характеристической вершиной* графа, если $y_\nu = 0$ и существует вершина w , смежная с ν , для которой $y_w \neq 0$. Ребро $e = \{u, w\}$ называется *характеристическим ребром*, если $y_u y_w < 0$.

Пусть \mathcal{C} — *характеристическое множество*, т. е. совокупность всех характеристических вершин и ребер, а y — вектор Фидлера связного графа G , причем $|\mathcal{C}| \geq 2$. Тогда:

1) любые два характеристических элемента принадлежат одному простому циклу, который не содержит никакого другого характеристического элемента [88, теорема 10];

2) $1 \leq |\mathcal{C}| \leq m - n + 2$, где n и m — количества вершин и ребер графа. В частности, если граф является деревом, то $|\mathcal{C}| = 1$, а при существовании в графе единственного цикла $|\mathcal{C}|$ равно 1 или 2 [88, следствие 13].

В [303] дан обзор работ по лапласовским спектрам графов, причем особое внимание уделено алгебраической связности графа и ее связи с такими инвариантами графа, как реберная связность, изопериметрическое число, максимальное сечение, диаметр, среднее расстояние и т. п.

В [205] исследуются вопросы целочисленности собственных значений лапласовских матриц и изучаются спектры деревьев. В этой работе, в частности, получены следующие результаты.

Пусть $p(G)$ — число висячих вершин, т. е. вершин, у которых степень равна 1, а $q(G)$ — число вершин, инцидентных висячим вершинам в простом графе G . Пусть T — дерево на n вершинах. Тогда:

1) Если $\lambda > 1$ — целое собственное значение $L(T)$, а u — соответствующий ему собственный вектор, то:

а) λ делится на n (теорема 2.1 (i) [205]);

б) $m_T(\lambda) = 1$, где $m_T(\lambda)$ — кратность собственного значения λ (теорема 2.1 (ii));

в) u не имеет компонент, равных нулю (теорема 2.1 (iii)).

2) Если λ — собственное значение матрицы $L(T)$, то $m_T(\lambda) \leq p(T) - 1$ (теорема 2.3).

3) Если e — ребро дерева T_0 , и степени вершин, инцидентных e , не меньше трех, то $\lambda_1 > \lambda_1^0$, где λ_1 — наибольшее лапласовское собственное значение дерева T , полученного из T_0 путем «стягивания» e (отождествления вершин ребра без образования петли), а λ_1^0 — наибольшее собственное значение T_0 (теорема 4.11).

В [204] была исследована связь между вектором степеней вершин и вектором собственных значений лапласовской матрицы. Пусть (d_1, \dots, d_n) и $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — два указанных вектора, упорядоченные по неубыванию элементов. В [204] доказано, что вектор $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ мажорирует вектор (d_1, \dots, d_n) , т. е. для каждого $1 \leq k < n$ имеет место

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \geq \sum_{i=1}^k d_i, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n d_i$$

(второе соотношение выполняется для любой матрицы). В [204] получены также некоторые интересные результаты относительно лапласовских матриц с целочисленным спек-

тром и относительно связей между структурными свойствами графа и лапласовским спектром.

5.3. О связях лапласовских и стохастических матриц

Лапласовские матрицы взвешенных орграфов тесно связаны со стохастическими матрицами. Действительно, легко заметить, что любая лапласовская матрица может быть выражена как $\alpha(I - P)$, где $\alpha > 0$, I — единичная матрица, P — стохастическая матрица. Поэтому неудивительно, что лапласовские матрицы часто встречаются в теории марковских цепей. Так, Н. Дмитриев и Е. Дынкин замечают в [28], что матрицы $\{-L\}$, где $\{L\}$ — лапласовские матрицы, являются матрицами плотностей вероятности переходов для цепей Маркова с непрерывным временем. Они также усиливают упомянутый в разделе 5.2 результат о положительности действительных частей собственных значений лапласовских матриц, доказав, что для каждого собственного значения λ имеет место

$$|\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}. \quad (5.4)$$

Далее изложены новые результаты по локализации собственных значений лапласовской матрицы ориентированного графа. Для удобства сравнения выражений, полученных для разных n , будем рассматривать *нормированные (стандартизованные) лапласовские матрицы*.

Определение 5.1. Лапласовскую матрицу $L = (\ell_{ij})$ будем называть *нормированной (стандартизованной)*, если ее недиагональные элементы удовлетворяют ограничению

$$-\frac{1}{n} \leq \ell_{ij} \leq 0, \quad j \neq i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.5)$$

Для нормированных лапласовских матриц

$$0 \leq \ell_{ii} \leq 1 - \frac{1}{n}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.6)$$

Стандартным обозначением для нормированной лапласовской матрицы будет \check{L} .

Если рассматривается класс \mathcal{G}_b взвешенных орграфов с весами дуг, не превосходящими $b > 0$, и $L(\Gamma)$ — лапласовская матрица взвешенного орграфа Γ на n вершинах, то нормированная лапласовская матрица, связанная с Γ , определяется в классе \mathcal{G}_b как $\check{L}(\Gamma) = (nb)^{-1}L(\Gamma)$.

Из (2.7) и (2.10) в [229] (см. также теорему 1 в [80]) следует, что все собственные значения симметричных лапласовских матриц \check{L} принадлежат $[0, 1]$. Для общего случая из (5.4), (5.6) и теоремы Гершгорина следует следующее предложение.

Предложение 5.1. Область собственных значений нормированной лапласовской матрицы входит в пересечение замкнутого круга с центром в точке $1 - 1/n$ и радиусом $1 - 1/n$ и замкнутой угловой области, содержащей луч³ $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$ и ограниченной двумя лучами, исходящими из точки 0 и проходящими через точки $e^{-(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n})i}$ и $e^{(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n})i}$.

Предложение 5.1 иллюстрируется рисунком 5.1, где $n = 7$.

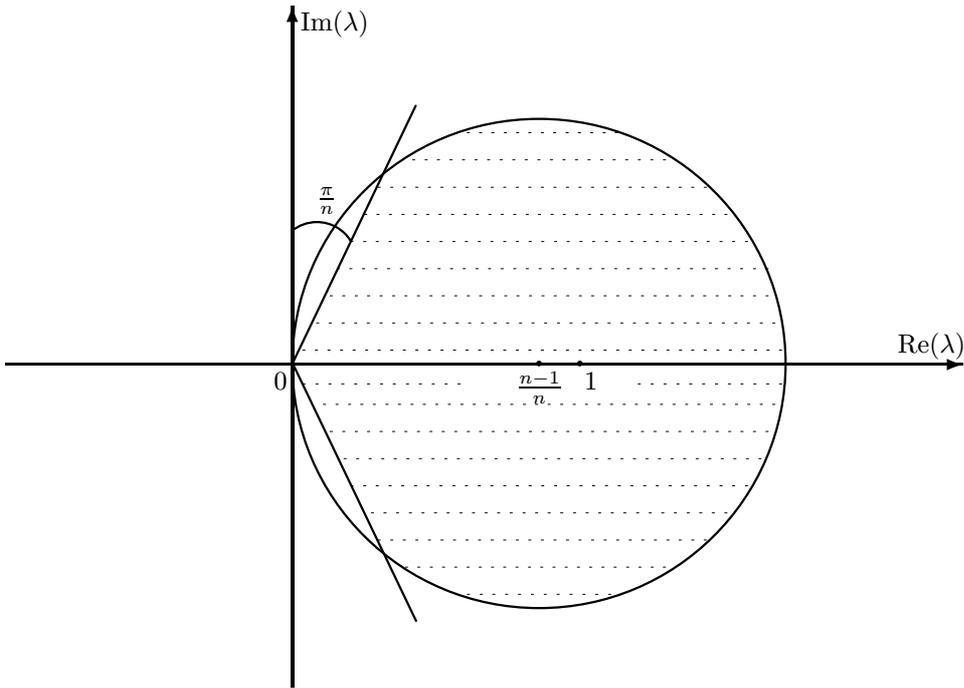


Рис. 5.1. Область, согласно предложению 5.1 содержащая спектр нормированной лапласовской матрицы порядка n (здесь $n = 7$).

В разделе 5.4 будет показано, что собственные значения \check{L} также являются собственными значениями определенной стохастической матрицы, и \check{L} — полусходящаяся; кратности 0 и 1 как собственных значений \check{L} связаны с размерностями по входящим лесам соответствующего орграфа Γ и дополнительного орграфа Γ_c соответственно.

5.4. Связь спектров лапласовских и стохастических матриц

Пусть

$$K = I - \check{J}, \quad (5.7)$$

где $\check{J} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матрица⁴ с элементами $1/n$. Очевидно, $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — нормированная лапласовская матрица полного орграфа с весами всех дуг b (в классе \mathcal{G}_b , определенном в разделе 5.3).

³ $\operatorname{Re}(\lambda)$ и $\operatorname{Im}(\lambda)$ — действительная и мнимая части λ .

⁴Не путать с матрицей \bar{J} , определенной на стр. 51.

Определим матрицы

$$P = \check{L} + \check{J} \quad (5.8)$$

и

$$\check{L}_c = K - \check{L}. \quad (5.9)$$

Поскольку P — неотрицательная матрица с единичными строчными суммами, она — стохастическая. \check{L}_c есть нормированная лапласовская матрица *дополнительного взвешенного орграфа* Γ_c , в котором $(b - w_{ij})$ — вес дуги (i, j) , $j \neq i$, где w_{ij} — вес той же дуги в Γ . Если $w_{ij} = b$, то в Γ_c нет дуги (i, j) и наоборот: если в Γ нет дуги (i, j) , то вес дуги (i, j) в Γ_c равен b . Из (5.7), (5.8) и (5.9) следует

$$P = I - \check{L}_c. \quad (5.10)$$

Теорема 5.3. Пусть \check{L} — нормированная лапласовская матрица, P — стохастическая матрица, определяемая (5.8), \check{L}_c определяется (5.9). Тогда для $\lambda \notin \{0, 1\}$ следующие утверждения эквивалентны:

$$(a) \lambda \in \sigma(\check{L}), \quad (б) \lambda \in \sigma(P), \quad (в) (1 - \lambda) \in \sigma(\check{L}_c),$$

причем эти собственные значения имеют одну и ту же геометрическую кратность. Кроме того, v — собственный вектор \check{L} , соответствующий собственному значению $\lambda \notin \{0, 1\}$, тогда и только тогда, когда вектор⁵

$$x = \left(I - \frac{\check{J}}{1 - \lambda} \right) v \quad (5.11)$$

является собственным вектором P , соответствующим λ , а также собственным вектором матрицы \check{L}_c , соответствующим $1 - \lambda$.

Доказательство теоремы 5.3. Пусть v — собственный вектор \check{L} , соответствующий собственному значению $\lambda \notin \{0, 1\}$. Пользуясь $\check{L}\check{J} = 0$ и $\check{J}^2 = \check{J}$, получаем

$$Px = (\check{L} + \check{J}) \left(I - \frac{\check{J}}{1 - \lambda} \right) v = \check{L}v + \left(\check{J} - \frac{\check{J}}{1 - \lambda} \right) v = \lambda v - \frac{\lambda \check{J}v}{1 - \lambda} = \lambda \left(I - \frac{\check{J}}{1 - \lambda} \right) v = \lambda x.$$

Докажем обратное утверждение: если x — собственный вектор P , отвечающий $\lambda \notin \{0, 1\}$, то

$$v = \left(I - \frac{\check{J}}{\lambda} \right) x. \quad (5.12)$$

Действительно, поскольку $\check{J}^2 = \check{J}$, имеет место

$$\left(I - \frac{\check{J}}{1 - \lambda} \right) \left(I - \frac{\check{J}}{\lambda} \right) = I - \frac{\check{J}}{\lambda} - \frac{\check{J}}{1 - \lambda} + \frac{\check{J}}{\lambda(1 - \lambda)} = I.$$

Используя $\check{L}\check{J} = 0$, получаем

⁵Иногда вместо $\frac{1}{\alpha}A$ пишем $\frac{A}{\alpha}$, где A — матрица, $\alpha \neq 0$ — комплексное число.

$$\check{L}v = \check{L} \left(I - \frac{\check{J}}{\lambda} \right) x = \check{L}x = (P - \check{J})x = \lambda x - \check{J}x = \lambda \left(I - \frac{\check{J}}{\lambda} \right) x = \lambda v.$$

Аналогичное утверждение для \check{L}_c следует из (5.10). Из невырожденности линейного преобразования (5.11) (действительно, (5.12) — обратное к нему) следует, что геометрические кратности этих собственных значений равны. \square

Теорема 5.4. Пусть $f_{\check{L}}(\lambda)$, $f_P(\lambda)$ и $f_{\check{L}_c}(\lambda)$ — характеристические многочлены \check{L} , P и \check{L}_c соответственно. Тогда для всех $\lambda \notin \{0, 1\}$

$$f_P(\lambda) = \frac{\lambda - 1}{\lambda} f_{\check{L}}(\lambda), \quad (5.13)$$

$$f_{\check{L}_c}(\lambda) = (-1)^{n-1} \frac{\lambda}{1 - \lambda} f_{\check{L}}(1 - \lambda). \quad (5.14)$$

Доказательство теоремы 5.4. Пусть $c^{(1)}, \dots, c^{(n)}$ — столбцы характеристической матрицы $\lambda I - \check{L}$ и $\bar{\mathbf{1}} = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})^T$. Тогда согласно (5.8)

$$\begin{aligned} f_P(\lambda) &= \det [c^{(1)} - \bar{\mathbf{1}}, c^{(2)} - \bar{\mathbf{1}}, \dots, c^{(n)} - \bar{\mathbf{1}}] = \\ &= \det [c^{(1)}, c^{(2)}, \dots, c^{(n)}] - \\ &- \det [\bar{\mathbf{1}}, c^{(2)}, \dots, c^{(n)}] - \det [c^{(1)}, \bar{\mathbf{1}}, \dots, c^{(n)}] - \dots - \det [c^{(1)}, c^{(2)}, \dots, \bar{\mathbf{1}}]. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Заметим, что $\det [c^{(1)}, c^{(2)}, \dots, c^{(n)}] = f_{\check{L}}(\lambda)$ и $\bar{\mathbf{1}} = (\lambda n)^{-1}(c^{(1)} + \dots + c^{(n)})$ при $\lambda \neq 0$.

Поэтому

$$\det [\bar{\mathbf{1}}, c^{(2)}, \dots, c^{(n)}] = \det \left[\frac{1}{\lambda n} \left(c^{(1)} + \sum_{k=2}^n c^{(k)} \right), c^{(2)}, \dots, c^{(n)} \right] = \frac{1}{\lambda n} f_{\check{L}}(\lambda). \quad (5.16)$$

Аналогично то же выражение может быть получено для каждого из последних n вычитаемых (5.15). После его подстановки имеем $f_P(\lambda) = f_{\check{L}}(\lambda) - n \frac{1}{\lambda n} f_{\check{L}}(\lambda) = \frac{\lambda - 1}{\lambda} f_{\check{L}}(\lambda)$. Для доказательства (5.14) заметим, что в силу (5.10) для всех $\lambda \neq 1$ $f_{\check{L}_c}(\lambda) = \det(\lambda I - I + P) = (-1)^n \det(I - \lambda I - P) = (-1)^n f_P(1 - \lambda) = (-1)^{n-1} \frac{\lambda}{1 - \lambda} f_{\check{L}}(1 - \lambda)$. \square

Замечание 5.1. Поскольку (5.13) и (5.14) верны для всех λ , кроме 0 и 1, после сокращения в них общих множителей λ и $1 - \lambda$ соответственно, в силу непрерывности, они будут выполняться и для этих значений. Результат, аналогичный (5.14), для симметричных матриц получен Кельмансом [34, свойство 5].

Минимальное число деревьев, входящих в остовный входящий лес орграфа, называется *размерностью по входящим лесам* орграфа (см. раздел 1.1.3). Говорят, что квадратная матрица A *полусходящаяся*, если $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$ существует. Индекс матрицы A , обозначаемый $\text{ind } A$, — наименьшее число $k = 0, 1, \dots, n - 1$, для которого $\text{rank } A^{k+1} = \text{rank } A^k$.

Теорема 5.5. Для каждой нормированной лапласовской матрицы \check{L} и соответствующей стохастической матрицы P , определяемой (5.8), \check{L} и P — полусходящиеся.

Доказательство теоремы 5.5. Пусть $\rho(A)$ — спектральный радиус матрицы A . Квадратная матрица A является полусходящейся тогда и только тогда (см., например, [95, задача 6.4.9]), когда она удовлетворяет условиям:

- (а) $\rho(A) \leq 1$;
- (б) если $\lambda \in \sigma(A)$ и $|\lambda| = 1$, то $\lambda = 1$;
- (в) $\text{rank}(I - A)^2 = \text{rank}(I - A)$, т. е. $\text{ind}(I - A) \in \{0, 1\}$.

Докажем, что P удовлетворяет (а), (б) и (в). Выполнение (а) в форме равенства следует из стохастичности P .

(б) Поскольку все диагональные элементы вырожденной М-матрицы $\check{L}_c = I - P$ меньше 1, $|\lambda| = 1$ влечет $\lambda = 1$ (см., например, [95, с. 153]).

(в) Поскольку матрица $I - P = \check{L}_c$ — лапласовская, ее индекс равен 1 [142, предложение 12], следовательно, P удовлетворяет (в). Таким образом, P — полусходящаяся.

Наконец, из (5.8) и $\check{L}\check{J} = 0$ следует $\check{L} = P - \check{J}$, $\check{L}^2 = \check{L}(P - \check{J}) = \check{L}P = (P - \check{J})P, \dots$, $\check{L}^k = \check{L}(P - \check{J})P^{k-2} = \check{L}P^{k-1} = (P - \check{J})P^{k-1}, \dots$

Поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \check{L}^k = (P - \check{J}) \lim_{k \rightarrow \infty} P^{k-1}, \quad (5.17)$$

и \check{L} — также полусходящаяся. \square

Пусть $m_A(\lambda)$ — алгебраическая кратность собственного значения λ матрицы A , $V_A(\lambda)$ — множество собственных векторов A , соответствующих λ . Собственное значение называют *полупростым*, если его алгебраическая и геометрическая кратности совпадают.

Теорема 5.6. Пусть d и d_c — размерности по входящим лесам орграфа, соответствующего \check{L} , и дополнительного орграфа соответственно. Тогда:

- 1) $m_{\check{L}}(0) = d$, $m_{\check{L}}(1) = d_c - 1$,
- 2) $m_P(0) = d - 1$, $m_P(1) = d_c$,
- 3) $m_{\check{L}_c}(1) = d - 1$, $m_{\check{L}_c}(0) = d_c$,

и эти собственные значения — полупростые;

- 4) Если $v \in V_{\check{L}}(0)$ и $Kv \neq 0$, то $Kv \in V_P(0) = V_{\check{L}_c}(1)$;
если $x \in V_P(1) = V_{\check{L}_c}(0)$ и $Kx \neq 0$, то $Kx \in V_{\check{L}}(1)$.

Следует отметить, что первое утверждение п. 1 теоремы 5.6 дополняет теорему 3.6 «о равенстве размерности ядра \check{L} и лесной размерности орграфа», где речь идет о геометрической кратности.

Доказательство теоремы 5.6. Из $\text{rank } L = n - d$ и $\text{ind } L = 1$ [142, предложение 12] следует, что $m_{\check{L}}(0) = d$, и 0 — полупростое собственное значение \check{L} . По теореме 5.5 \check{L} — полусходящаяся матрица. Таким образом, \check{L} удовлетворяет условию (в) из доказательства теоремы 5.5, откуда следует, что если $1 \in \sigma(\check{L})$, то 1 — полупростое. Действительно, согласно (в) порядок максимальной жордановой клетки, соответствующей 1 в жордановой

форме \check{L} , не превосходит единицы. В силу (5.14) и замечания 5.1 $m_{\check{L}}(1) = m_{\check{L}_c}(0) - 1$. Утверждения относительно \check{L}_c следуют из аналогичных утверждений для \check{L} ; п. 2) и утверждения, относящиеся к матрице P , следуют из (5.10). П.4) выводится цепочкой очевидных преобразований. \square

Для симметричных лапласовских матриц равенства $m_{\check{L}}(0) = d$ и $m_{\check{L}}(1) = d_c - 1$ получены Кельмансом [34]. В этом случае d и d_c есть количества компонент соответствующих графов.

В следующем разделе основное внимание уделяется существенно комплексным (т. е. имеющим ненулевые мнимые части) собственным значениям лапласовских матриц.

5.5. Область, содержащая лапласовские спектры

Теорема 5.7. 1. Все собственные значения нормированных лапласовских матриц порядка n принадлежат:

- пересечению двух замкнутых кругов с центрами в точках $1/n$ и $1 - 1/n$ и радиусом $1 - 1/n$;
- меньшей замкнутой угловой области, ограниченной лучами, исходящими из точки 1 и проходящими через точки $e^{-2\pi i/n}$ и $e^{2\pi i/n}$;
- меньшей замкнутой угловой области, ограниченной лучами, исходящими из точки 0 и проходящими через точки $e^{-(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n})i}$ и $e^{(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n})i}$.

2. Для мнимых частей собственных значений λ нормированных лапласовских матриц порядка n имеет место $|\operatorname{Im}(\lambda)| \leq \frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}$.

Доказательство теоремы 5.7. 1. В дополнение к предложению 5.1 заметим, что область, описанная в предложении 5.1, содержит и спектр матрицы \check{L}_c . Поэтому спектр матрицы $P = I - \check{L}_c$, а значит, согласно теореме 5.3, спектр \check{L} принадлежит кругу с центром в $1/n$ и угловой области с вершиной 1 , указанным в теореме 5.7.

2. Согласно теореме Пика [328], если λ — собственное значение матрицы $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, то $|\operatorname{Im}(\lambda)| \leq g \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}$, где $g = \max_{k,j} |c_{kj}|$ и $C = (c_{kj}) = \frac{1}{2}(X - X^*)$. При $X = \check{L}$ имеем $g = \frac{1}{2n}$ в силу (5.5), и, тем самым, теорема доказана. \square

Замечание 5.2. Из стохастичности $I - \check{L}$ и теоремы 4 в [29] следует, что $\sigma(\check{L})$ содержит собственное значение, имеющее аргумент $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$, тогда и только тогда, когда оргграф является гамильтоновым циклом на n вершинах. При этом в силу той же теоремы собственное значение λ с указанным аргументом единственно и $|\lambda| \leq \frac{2}{n} \sin \frac{\pi}{n}$, $\operatorname{Im}(\lambda) \leq \frac{1}{n} \sin \frac{2\pi}{n}$. Компоненты соответствующего собственного вектора являются вершинами правильного многоугольника. Аналогично $\sigma(\check{L})$ содержит собственное значение, принадлежащее отрезку $[1, e^{\frac{2\pi i}{n}}]$, тогда и только тогда, когда дополнительный граф Γ_c является гамильтоновым

циклом на n вершинах. В этом случае такое собственное значение λ' также единственно и $\text{Im}(\lambda') \leq \frac{1}{n} \sin \frac{2\pi}{n}$.

Теорема 5.7 и замечание 5.2 иллюстрируются рисунком 5.2, где $n = 7$.

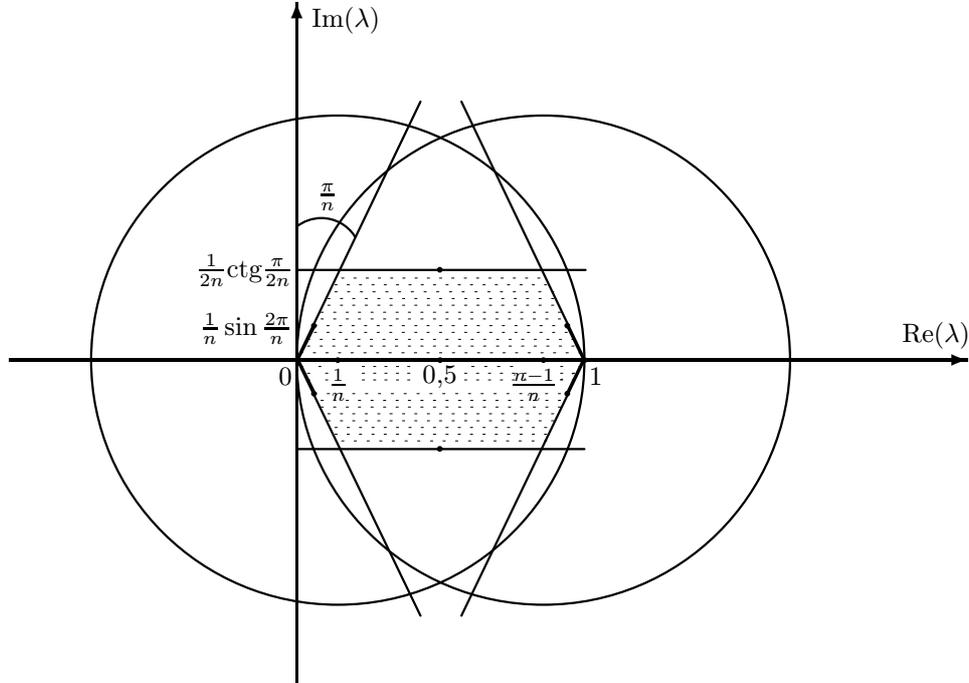


Рис. 5.2. Область, согласно теореме 5.7 содержащая спектр нормированной лапласовской матрицы порядка n (заштрихована); здесь $n = 7$.

Область, заштрихованная на рис. 5.2, для случая $4 \leq n \leq 18$ является шестиугольником. При $n > 18$ ее граница содержит дуги. При $n = 3$ эта область вырождается в ромб с вершинами 0 , $(0,5; (2\sqrt{3})^{-1})$, 1 и $(0,5; -(2\sqrt{3})^{-1})$, а при $n = 2$ — в отрезок $[0, 1]$.

5.6. Многоугольник лапласовских собственных значений

В этом разделе строится многоугольник, состоящий из собственных значений нормированных лапласовских матриц фиксированного порядка n . Пусть $Q = (q_{kj}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — основная циркулянтная матрица перестановки:

$$q_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{если } j - k \in \{1, 1 - n\}, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad k, j = 1, \dots, n.$$

Рассмотрим $n - 1$ матриц

$$L_k = \frac{1}{n} (kI - Q - Q^2 - \dots - Q^k), \quad k = 1, \dots, n - 1. \quad (5.18)$$

Поскольку Q^i ($i = 1, \dots, n - 1$) являются матрицами перестановок с поэлементно различным расположением единиц, матрицы L_k (5.18) имеют недиагональные элементы,

принадлежащие отрезку $[-\frac{1}{n}, 0]$, и нулевые строчные суммы. Тем самым они являются нормированными лапласовскими матрицами.

Поскольку $f_Q(\mu) = \mu^n - 1$ — характеристический многочлен матрицы Q ,

$$\mu = e^{-2\pi i/n} \quad (5.19)$$

является собственным значением Q .

Следовательно, спектр L_k содержит

$$\lambda_k(n) = \frac{1}{n}(k - \mu - \mu^2 - \dots - \mu^k) = \quad (5.20)$$

$$= \frac{1}{n}(k - e^{-2\pi i/n} - \dots - e^{-2k\pi i/n}), \quad (5.21)$$

а также комплексно-сопряженное число $\bar{\lambda}_k$.

Используя тригонометрическое тождество

$$e^{\alpha i} + e^{2\alpha i} + \dots + e^{k\alpha i} = \frac{\sin \frac{k\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} e^{(k+1)\alpha i/2},$$

из (5.21) получаем

$$\lambda_k(n) = n^{-1} \left(k - \frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} e^{-(k+1)\pi i/n} \right) = \frac{k}{n} - \frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{n \sin \frac{\pi}{n}} \left(\cos \frac{(k+1)\pi}{n} - i \sin \frac{(k+1)\pi}{n} \right). \quad (5.22)$$

Обозначим через $S(n)$ выпуклый многоугольник с $2(n-1)$ вершинами:

$$\lambda_0(n) = 0, \lambda_1(n), \dots, \lambda_{n-2}(n), \lambda_{n-1}(n) = 1, \bar{\lambda}_{n-2}(n), \dots, \bar{\lambda}_1(n). \quad (5.23)$$

Теорема 5.8. *Каждая точка многоугольника $S(n)$ является собственным значением некоторой нормированной лапласовской матрицы порядка n .*

Доказательство теоремы 5.8. Как показано выше, все вершины многоугольника $S(n)$ являются собственными значениями нормированных лапласовских матриц L_k . Любая другая точка s многоугольника $S(n)$ (далее рассматриваем только случай $\text{Im}(s) \geq 0$, т.к. спектр действительной матрицы симметричен относительно действительной оси) представима выпуклой комбинацией $f(0, \lambda_k(n), \lambda_{k+1}(n))$ трех его вершин: вершины 0 и двух смежных вершин $\lambda_k(n)$ и $\lambda_{k+1}(n)$, таких что луч $[0, s]$ пересекается с отрезком $[\lambda_k(n), \lambda_{k+1}(n)]$. По определению $\lambda_k(n)$ и $\lambda_{k+1}(n)$ являются значениями многочленов (5.20) от μ (обозначим эти многочлены $p(\cdot)$ и $q(\cdot)$); кроме того, они являются собственными значениями матриц $L_k = p(Q)$ и $L_{k+1} = q(Q)$. Тогда $s = f(0, p(\mu), q(\mu))$, где $f(0, p(\cdot), q(\cdot))$, очевидно, — многочлен. Значит, s — собственное значение матрицы $f(0, p(Q), q(Q))$, которая является нормированной лапласовской матрицей как выпуклая комбинация нормированных лапласовских матриц. \square

Пусть $\check{\mathcal{L}}_n$ — класс нормированных лапласовских матриц порядка n ,

$$h(n) = \sup\{\operatorname{Im}(\lambda) : \lambda - \text{собственное значение } \check{L} \in \check{\mathcal{L}}_n\}. \quad (5.24)$$

Согласно теореме 5.7 для всех $n = 2, 3, \dots$ имеет место $h(n) \leq \frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}$.

Теорема 5.9. *Если n нечетно, то*

$$h(n) = \frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}, \quad (5.25)$$

кроме того, $h(n) = \operatorname{Im}(\lambda_{(n-1)/2}(n))$, где $\lambda_{(n-1)/2}(n)$ определено равенством (5.20).

Для доказательства теоремы достаточно положить $k = (n-1)/2$ в (5.22) и сравнить результат с п. 2 теоремы 5.7.

Отметим, что если $n > 2$ четно, то верхняя граница $\frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}$ не достигается мнимыми частями вершин многоугольника $S(n)$. Более того, с помощью (5.22) устанавливается следующее предложение.

Предложение 5.2. *Если $n > 2$ четно, то*

$$\max_{0 \leq k \leq 2n-1} \operatorname{Im}(\lambda_k(n)) = \operatorname{Im}(\lambda_{n/2}(n)) = \frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} < \frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}.$$

Следствие 5.1. *Если n нечетно, то $h(n)$ равно сумме всех положительных мнимых частей собственных значений матрицы $\frac{1}{n}Q$ (или матрицы $\frac{1}{n}(I - Q) = \check{L}(\Gamma)$, где Γ — гамильтонов цикл на n вершинах).*

Этот факт легко выводится из теоремы 5.9.

Следствие 5.2 из теорем 5.7 и 5.9 и предложения 5.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} h(n) = 1/\pi$.

Это равенство устанавливается с использованием п. 2) теоремы 5.7, замечательного предела $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ при $x \rightarrow 0$ и возрастания функции $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ в малом интервале $]0, \epsilon]$.

Следующее предположение пока не доказано.

Предположение 5.1. *Вне многоугольника $S(n)$, вершины которого задаются формулой (5.23), не существует собственных значений нормированных лапласовских матриц порядка n .*

5.7. Об асимптотических свойствах лапласовских спектров

Теорема 5.10. *Граница многоугольника $S(n)$ с вершинами (5.23) при $n \rightarrow \infty$ сходится к овалу, который образуется участками двух циклоид с параметрическими уравнениями $z(\tau) = x(\tau) + iy(\tau)$ и $z(\tau) = x(\tau) - iy(\tau)$, где $\tau \in [0, 2\pi]$,*

$$x(\tau) = (2\pi)^{-1}(\tau - \sin \tau), \quad (5.26)$$

$$y(\tau) = (2\pi)^{-1}(1 - \cos \tau). \quad (5.27)$$

Доказательство теоремы 5.10. Для каждого $\tau \in [0, 2\pi)$ выберем любую натуральную последовательность $k(n)$, такую что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = \frac{\tau}{2\pi}$. Тогда в силу (5.22)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{k(n)} = \frac{1}{2\pi} \left(\tau - 2 \sin \frac{\tau}{2} \cos \frac{\tau}{2} + 2i \sin^2 \frac{\tau}{2} \right) = \frac{1}{2\pi} (\tau - \sin \tau + i(1 - \cos \tau)).$$

Выделив действительную и мнимую части этого выражения, получаем требуемое. \square

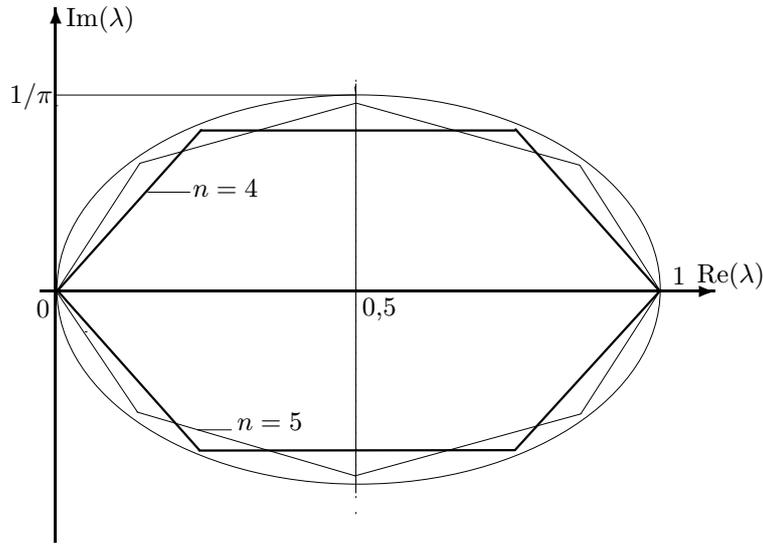


Рис. 5.3. Многоугольник лапласовских собственных значений при $n = 4$ и $n = 5$, и предельная кривая, уравнение которой приводится в теореме 5.10.

На рис. 5.3 показаны многоугольники $S(n)$ при $n = 4$ и $n = 5$, а также предельная кривая, задаваемая формулами (5.26)–(5.27).

5.8. Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов

В этом разделе рассмотрим простейшие модели управления многоагентными системами, при исследовании которых используются результаты, описанные в данной работе и касающиеся спектров лапласовских матриц орграфов и их древесной структуры.

5.8.1. Децентрализованное управление многоагентными системами

При децентрализованном управлении многоагентными системами управляющие воздействия не поступают из центра, а формируются в результате согласований, «переговоров» между агентами.

Так, музыканты Персимфанса, Первого симфонического ансамбля Моссовета, впервые выступившего в Москве 13 февраля 1922 года, исполняли сложнейшие музыкальные произведения без дирижера. При этом струнные сидели, образуя полный круг (частично спиной к зрителям), а духовые располагались в середине круга. Каждый музыкант не только слышал, но и видел других, и происходившее при этом динамическое согласование исполнения партий служило заменой синхронизирующему воздействию дирижера. Самое удивительное — что, по отзывам требовательных ценителей музыки, Персимфансу были свойственны цельность и индивидуальность трактовки произведений, которые, казалось бы, может обеспечить только дирижер.

Теория децентрализованного управления имеет длинную историю. Кроме работ, обсуждаемых в книге [19], из которой взят приведенный выше пример, отметим здесь теорию статистического консенсуса Де Гроота [170], метод последовательного согласования экспертных оценок Дельфи, разработанный RAND Corporation в конце 50-х годов [169], работы по распределенным сетевым вычислениям и распределенному принятию решений [111, 383], а также исследования совместного поведения животных [350]. Примерно с 2003 г. отмечается лавинообразный поток публикаций по децентрализованному управлению, связанный с применением в этой области алгебраической теории графов. Отечественных работ этого направления пока немного (отметим [13, 14]).

Ниже будут представлены некоторые постановки задач децентрализованного управления и методы их решения, использующие результаты, изложенные в настоящей работе. В частности, речь идет о результатах, которые были опубликованы еще до «бума», начавшегося в 2003 г., и позже переоткрывались другими авторами.

5.8.2. Непрерывная модель распределенного согласования характеристик

Рассмотрим базовую дифференциальную модель распределенного согласования характеристик агентов:

$$\dot{x}_i(t) = - \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) (x_i(t) - x_j(t)), \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.28)$$

где n — число агентов, $x_i(t)$ — характеристика i -го агента в момент t , $a_{ij}(t) \geq 0$ — вес, с которым i -й агент учитывает расхождение в значении характеристики с j -ым агентом. В качестве характеристик могут рассматриваться положение в пространстве (если агентам необходимо сблизиться), скорость (если они участвуют в совместном движении), моменты ожидаемого прибытия в пункты назначения (если эти моменты необходимо синхронизировать) и т. д. Данную модель называют также моделью достижения консенсуса.

Обычно при децентрализованном управлении необходимо решать более сложные задачи, чем простое согласование характеристик. Так, если речь идет об управлении комплексом движущихся объектов, то типичная задача — движение по заданной траектории

с сохранением геометрической формы комплекса объектов и стабильной ориентации по отношению к курсу движения. Если при этом необходимо произвести резкий маневр, то при маневре геометрическая форма может быть изменена, но после его окончания она должна быть восстановлена. Изменение и последующее восстановление формы характерны также для ситуаций, когда комплекс движущихся объектов сталкивается с опасностью или встречает препятствие. Следует отметить, что во всех этих случаях согласование характеристик агентов — далеко не единственный, но обязательно присутствующий элемент стратегии управления. Этот элемент — ключевой в том смысле, что именно от него обычно зависят показатели устойчивости системы, ее управляемости и т.д. Поэтому анализ моделей согласования, таких, как модель (5.28), в том или ином виде производится и при исследовании более сложных процессов управления. Именно моделям согласования в этом разделе уделяется наибольшее внимание.

Модели (5.28) ставят в соответствие взвешенный ориентированный *граф коммуникаций агентов* $\Gamma(t)$, вершины которого отождествляются с агентами, а дуга от вершины j к вершине i проводится тогда и только тогда, когда $a_{ij}(t) \neq 0$. Присутствие в $\Gamma(t)$ дуги $j \rightarrow i$ означает активность канала информации от агента j к агенту i . Эту информацию i использует для коррекции своей характеристики; дуге $j \rightarrow i$ присваивается вес a_{ij} .

В матричной форме модель (5.28) приобретает вид

$$\dot{x}(t) = -\tilde{L}(t)x(t), \quad (5.29)$$

где $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$, $\tilde{L}(t) = (\tilde{l}_{ij}(t))$ — матрица Кирхгофа орграфа коммуникаций $\Gamma(t)$, задаваемая условием

$$\tilde{l}_{ij}(t) = \begin{cases} -a_{ij}(t), & j \neq i, \\ \sum_{k \neq i} a_{ik}(t), & j = i. \end{cases}$$

Нередко вместо орграфа $\Gamma(t)$ строят оргграф $\Gamma'(t)$, в котором при $a_{ij}(t) \neq 0$ проводится не дуга $j \rightarrow i$, а дуга $i \rightarrow j$. По отношению к орграфу $\Gamma'(t)$ введенная выше матрица $\tilde{L}(T)$ является лапласовской матрицей. Как отмечалось не раз, алгебраически классы матриц Кирхгофа и лапласовских матриц совпадают; различаются лишь способы сопоставления им орграфов: при обращении всех дуг в орграфе его лапласовская матрица становится матрицей Кирхгофа и наоборот. Мы будем называть $\tilde{L}(T)$ *лапласовской матрицей модели* (5.28).

Будем говорить, что процесс согласования (5.28) *сходится*, если при любых начальных условиях $x(0)$ и любых $i, j = 1, \dots, n$ имеет место $|x_i(t) - x_j(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Разумеется, сходимость процесса (5.28) определяется свойствами матрицы $\tilde{L}(T)$.

5.8.3. Сходимость процесса согласования

Предположим, что лапласовская матрица $\tilde{L}(T)$ не меняется со временем: $\tilde{L}(T) = \tilde{L}$. Нетрудно построить матричное условие сходимости процесса, описываемого системой ли-

нейных дифференциальных уравнений 1-го порядка (5.29).

Ядру \tilde{L} всегда принадлежит вектор $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$. Все ненулевые собственные значения матрицы $-\tilde{L}$, входящей в модель (5.29), имеют строго отрицательные действительные части (см. предложение 4.8 или предложение 9 в [4]). Поэтому если 0 — простое собственное значение \tilde{L} , то $x(t) \rightarrow \bar{x}\mathbf{1}$, где \bar{x} — скалярная постоянная, следовательно $|x_i(t) - x_j(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для всех $i, j = 1, \dots, n$, и процесс сходится. Согласно теореме 5.6 ([72, теорема 4]) нулевое собственное значение \tilde{L} всегда полупростое, т.е. его алгебраическая и геометрическая кратности совпадают. Поэтому, если оно не является простым, то ядро \tilde{L} имеет размерность выше 1, и сходимость нарушается. Таким образом, анализ сходимости процесса (5.29) сводится к выяснению условий, при которых 0 — простое собственное значение матрицы \tilde{L} .

5.8.4. Ранг лапласовской матрицы и критерий сходимости процесса согласования

Вопрос о ранге лапласовской матрицы был изучен в [3] (см. главу 3 книги, а также теорему 5.6). Приведем некоторые результаты:

- Пусть \tilde{L} — матрица Кирхгофа орграфа Γ . Тогда $\text{rank } \tilde{L} = n - v$, где n — число вершин в Γ , v — размерность Γ по исходящим лесам (теорема 3.6 о равенстве размерности ядра \tilde{L} и лесной размерности орграфа);
- Размерность орграфа по исходящим лесам равна числу его базовых бикомпонент (предложение 3.5);
- Размерность сильного орграфа по исходящим лесам равна 1 (предложение 3.6);
- Размерность орграфа по исходящим лесам не меньше числа слабых компонент и не больше минимума из числа сильных компонент и числа односторонних компонент этого орграфа (предложение 3.7).

Нуль является простым собственным значением матрицы \tilde{L} тогда и только тогда, когда $\text{rank } \tilde{L} = n - 1$. Поэтому из приведенных выше утверждений немедленно получаем

Следствие 5.3. Пусть \tilde{L} — матрица Кирхгофа орграфа Γ . Тогда нуль — простое собственное значение \tilde{L} в том и только том случае, если Γ имеет остовное исходящее дерево или, эквивалентно, Γ имеет лишь одну базовую бикомпоненту.

В силу теоремы 3.6 и предложения 3.6 условие следствия 5.3 в частности выполняется для любого сильного орграфа. Позже первое утверждение следствия 5.3 было получено также в [221, 252, 263, 315, 324, 347]. Как показано выше, оно является частным случаем результатов, опубликованных нами в 2000 г. [3]. Более сильный результат — теорема 5.6.

Следствие 5.3 дает критерий сходимости процесса распределенного согласования характеристик (5.29).

Теорема 5.11. *Процесс распределенного согласования (5.29) с не зависящей от времени матрицей $\tilde{L}(t)$ при любом векторе начальных условий $x(0)$ сходится к вектору с одинаковыми компонентами тогда и только тогда, когда соответствующий этому процессу орграф коммуникаций Γ имеет остовное исходящее дерево или, эквивалентно, имеет единственную базовую бикомпоненту.*

Необходимо отметить, что интерес представляет также случай, когда условие сходимости процесса (5.29) выполняется не при любых начальных условиях, а лишь при начальных условиях, локализованных в определенных областях. Исследование этого случая сводится к анализу ядра линейного оператора \tilde{L} .

Согласно теореме 3.8, если \tilde{L} — матрица Кирхгофа орграфа Γ , то собственным проектором матрицы \tilde{L} является матрица \bar{J} — нормированная матрица максимальных исходящих лесов орграфа Γ , которая изучалась в [3, 4, 142] и главе 3. Поскольку 0 — полупростое собственное значение \tilde{L} (теорема 5.6), выполняется

Предложение 5.3. *Если \tilde{L} — матрица Кирхгофа орграфа Γ , то линейные оболочки столбцов и строк матрицы \bar{J} , нормированной матрицы максимальных исходящих лесов орграфа Γ , соответственно совпадают с ядром и левым собственным подпространством \tilde{L} , отвечающим собственному значению 0.*

В силу предложения 5.3 матрица \bar{J} , линейные комбинации столбцов которой образуют ядро \tilde{L} , полезна при анализе дифференциальных моделей распределенного управления. В следующем разделе будет показано, что она находит применение и при исследовании дискретной модели согласования характеристик.

5.8.5. Итерационная модель распределенного согласования характеристик

Рассмотрим конечно-разностный аналог дифференциальной модели (5.28) с постоянными коэффициентами a_{ij} :

$$x_i(k+1) = x_i(k) - \varepsilon \sum_{j=1}^n a_{ij}(k) (x_i(k) - x_j(k)), \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.30)$$

где k — дискретное время, $\varepsilon > 0$ — шаг разностной схемы. В матричной форме модель (5.30) имеет вид

$$x(k+1) = P_\varepsilon x(k), \quad (5.31)$$

где

$$P_\varepsilon = I - \varepsilon \tilde{L}. \quad (5.32)$$

При достаточно малом ε матрица P_ε , изучавшаяся в главах 3–5, — строчно-стохастическая. Это следствие того факта, что \tilde{L} имеет нулевые строчные суммы и неположительные элементы вне главной диагонали. Соответствующее ограничение на ε (предложение 3.10; см. также [3]):

$$0 < \varepsilon \leq \left(\max_i \sum_{j \neq i} a_{ij} \right)^{-1}. \quad (5.33)$$

Непрерывной модели соответствует $P_\varepsilon = \exp(-\varepsilon \tilde{L})$, и (5.32) можно рассматривать как разложение последнего выражения до линейного члена. Матрицу (5.32) иногда называют *перроновской матрицей с параметром ε* орграфа Γ .

Согласно (5.31) при любом натуральном m

$$x(m) = P_\varepsilon^m x(0), \quad (5.34)$$

поэтому характеристики процесса (5.31) определяются свойствами последовательности $\{P_\varepsilon, P_\varepsilon^2, \dots, P_\varepsilon^m, \dots\}$. Из теории цепей Маркова известно, что эта последовательность не всегда сходится (условием ее сходимости является аперриодичность цепи), но всегда существует предел в среднем (по Чезаро):

$$P_\varepsilon^\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m P_\varepsilon^i, \quad (5.35)$$

совпадающий с пределом последовательности $\{P_\varepsilon, P_\varepsilon^2, \dots, P_\varepsilon^m, \dots\}$ в случае ее сходимости. Если же цепь периодична с периодом s , то

$$P_\varepsilon^\infty = \frac{1}{s} (P_\varepsilon^{(1)} + \dots + P_\varepsilon^{(s)}), \quad (5.36)$$

где $P_\varepsilon^{(1)}, \dots, P_\varepsilon^{(s)}$ — пределы сходящихся подпоследовательностей $\{P_\varepsilon^{js+i} \mid j = 1, 2, \dots\}$: $P_\varepsilon^{(i)} = \lim_{j \rightarrow \infty} P_\varepsilon^{js+i}$ (ср. раздел 3.7). Матрицу вида (5.35) называют *предельной матрицей средних вероятностей* (в англоязычной литературе — *long run transition matrix* и т. п.) цепи Маркова.

Из теоремы 3.9 (матричной теоремы о деревьях для цепей Маркова) следует

Предложение 5.4. Пусть строчно-стохастическая матрица P_ε и матрица Кирхгофа \tilde{L} орграфа Γ связаны соотношением (5.32) при $\varepsilon > 0$. Тогда матрица P_ε^∞ , определяемая формулой (5.35), не зависит от значения ε и совпадает с нормированной матрицей максимальных исходящих лесов \bar{J} орграфа Γ .

Таким образом, матрица P_ε^∞ , определяющая асимптотическое поведение процессов согласования (5.30), равна нормированной матрице максимальных исходящих лесов орграфа коммуникаций, задающего этот процесс. Тем самым матрица \bar{J} играет центральную

роль при анализе итерационных процессов согласования характеристик. Действительно, согласно (5.34), чтобы узнать среднее асимптотическое состояние процесса (5.30), достаточно умножить матрицу $P_\varepsilon^\infty = \bar{J}$ на вектор начальных значений параметров $x(0)$. Для нахождения матрицы \bar{J} можно воспользоваться полученным в [4, 142] алгоритмом (см. раздел 4.4, теорему 4.2), включающим $\min\{n - v - 1, 0\}$ операций умножения матриц порядка n .

Рассмотрим вопрос о сходимости процесса (5.30). Поскольку P_ε имеет спектральный радиус 1, нарушить сходимость траекторий может только наличие у P_ε собственного вектора, не пропорционального $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$ и соответствующего собственному значению с модулем 1. Множество инвариантных векторов матрицы P_ε совпадает с ядром матрицы \tilde{L} , поэтому оно одномерно тогда и только тогда, когда выполняется условие теоремы 5.11. Комплексные же собственные значения с модулем 1 могут существовать у P_ε *только тогда*, когда ε находится на правой границе интервала (5.33). Действительно, в противном случае увеличение ε до граничного значения привело бы к появлению собственного значения с модулем, большим 1, что для стохастической матрицы невозможно (см. также [322]).

Таким образом, сходимость в модели (5.30) гарантируется выполнением условия теоремы 5.11 и неравенства (5.33) в строгой форме. Если же ε выходит на правую границу интервала (5.33), и цепь Маркова, определяемая соответствующей матрицей $P_\varepsilon = I - \varepsilon L$, — периодическая, то сходимость нарушается. Заметим, что матрица P , определенная в разделе 5.4, согласно теореме 5.5 всегда полусходящаяся, т. е. последовательность ее степеней сходится. Это связано с тем, что в силу (5.6) все диагональные элементы P не меньше $1/n$.

Как уже отмечалось, более детальное исследование моделей вида (5.29) и (5.31), а также обобщений этих моделей в случаях, когда сходимость не обеспечивается структурой графа коммуникаций, может быть проведено с использованием матрицы $P_\varepsilon^\infty = \bar{J}$, являющейся собственным проектором матрицы \tilde{L} . При этом могут быть использованы теоремы 3.2' и 3.3 и другие результаты главы 3. Для дискретной модели согласования характеристик в значительной мере это сделано в главе 10 (к этой теме относится также статья [9]).

Некоторые из полученных нами результатов, касающихся ядра лапласовской матрицы, были получены также в [132].

5.8.6. О других задачах децентрализованного управления

Модель согласования характеристик (5.29) — простейшая модель децентрализованного управления. В то же время она является базовой: входящий в нее линейный оператор согласования $-\tilde{L}(t)$, как правило, присутствует и в более сложных моделях. Поэтому свойства траекторий для этих моделей также во многом определяются свойствами спектров лапласовских матриц орграфов и, следовательно, древесной структурой графов коммуникаций.

В частности, колебания в процессах согласования определяются наличием в спектре матрицы Кирхгофа собственных значений с ненулевыми мнимыми частями. Поэтому значительный интерес представляет задача характеристики орграфов, имеющих чисто действительный лапласовский спектр. Для *орграфов кольцевой структуры* эта задача решена в [73] (см. главу 6); для некоторых других орграфов этот вопрос был исследован в [261].

Остановимся кратко на некоторых модификациях модели (5.29) и других задачах децентрализованного управления.

Прежде всего нужно отметить, что модель (5.29), вообще говоря, не предполагает постоянства графа коммуникаций $\Gamma(t)$. Снятие этого допущения делает модель более реалистичной. Действительно, во многих приложениях агенты обмениваются информацией, главным образом, с *ближайшими соседями*, а в процессе движения состав множества соседей может меняться. При этом чтобы сохранить возможность анализа, приходится накладывать определенные ограничения на структуру графа коммуникаций. Обычно либо его считают кусочно-постоянным, описывая допустимые *переключения*, либо рассматривают веса α_{ij} модели (5.28) как заданные с определенными допусками. Иногда флуктуации описываются вероятностной моделью. Во всех этих случаях анализ траекторий сводится к решению серии задач с постоянными графами коммуникаций и комбинированию полученных решений. Иногда при этом приходится анализировать свойства бесконечных произведений стохастических матриц, взятых из определенного множества [346].

Далее, модель становится более реалистичной, если ввести в нее запаздывание: вступление в силу управляющих воздействий отделяется от обмена информацией определенным ограниченным интервалом. При этом в моделях типа (5.28) появляются члены вида $x_j(t - \delta_{ij})$, где δ_{ij} — задержка, характерная для пары агентов (i, j) . При задержках, одинаковых для всех пар агентов, наличие этих задержек принципиально не меняет характера траекторий [314]. Более общие случаи рассмотрены в [179].

Во многих случаях осмысленна задача достижения наивысшей возможной скорости сходимости. Определенный опыт решения таких оптимизационных задач уже имеется [399]. Важно отметить, что в случае неориентированных графов задача оптимальной сходимости оказывается связанной [231] с задачей максимизации алгебраической связности графа — второго наименьшего собственного значения лапласовской матрицы модели (см. раздел 5.2). Само значение алгебраической связности при этом становится естественной мерой скорости сходимости алгоритма [324]. Для случая ориентированных графов предлагались различные обобщения алгебраической связности, в том числе вторая наименьшая действительная часть собственных значений лапласовской матрицы [386], второй наименьший модуль ее собственных значений, второе собственное значение симметричной части $(L + L^T)/2$ лапласовской матрицы [322, 397]. Тем не менее, в общем случае по-настоящему сильных результатов в задаче оптимизации скорости сходимости нам пока

неизвестно. Не полностью решена еще даже задача локализации спектров несимметричных лапласовских матриц.

Укажем теперь некоторые обобщения модели (5.29), предполагающие усложнение ее структуры. В качестве модели синхронизации нелинейных осцилляторов, а также для решения ряда других задач рассматривались системы уравнений вида

$$\dot{x}_i = f(x_i) - \gamma \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) (x_i - x_j), \quad i = 1, \dots, n, \quad \gamma > 0. \quad (5.37)$$

В [331] показано, что в случае неориентированного графа коммуникаций Γ процесс синхронизации при этом в существенной мере определяется значением его алгебраической связности.

Интерес представляет также линейная модель согласования 2-го порядка:

$$\ddot{x}_i = - \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) ((x_i - x_j) + \gamma(\dot{x}_i - \dot{x}_j)), \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.38)$$

где $\gamma > 0$ — сила учета разницы скоростей агентов. В [341] показано, что параметр γ играет существенную роль, но для достижения сходимости, как и в базовой модели (теорема 5.11), необходимо наличие остовного исходящего дерева в графе коммуникаций.

Более общие модели 2-го порядка рассматриваются при решении задач движения комплексов объектов (“flocking”), требующих как поддержания геометрической формы группы объектов, так и выполнения совместных маневров с целью обхода препятствий или изменения курса [256, 386]. Здесь наличие остовного исходящего дерева орграфа коммуникаций также является необходимым условием эффективного управления для ряда постановок.

В целом для детального анализа моделей, более сложных, чем базовые модели (5.28), (5.30), необходимо полное знание спектра и собственных подпространств матрицы \tilde{L} . Здесь должны найти свое применение результаты данной главы по локализации спектров лапласовских матриц.

В 2000-е гг. децентрализованное управление многоагентными системами стало одним из самых популярных и быстроразвивающихся разделов теории управления. Несколько десятками групп исследователей опубликованы многие сотни работ, причем, поскольку все группы работают одновременно и изучают близкие модели, содержание этих работ часто пересекается. Для знакомства с данной областью можно порекомендовать обзоры и монографии [296, 322, 344, 345, 349, 397] (дополнительные ссылки приведены в главе 10). Едва ли не центральную роль в исследованиях последних лет играют методы алгебраической теории графов, а именно, анализ соотношения «топологических» свойств графов, представляющих информационное взаимодействие между агентами, и спектральных

свойств соответствующих этим графам лапласовских матриц. Вместе с тем, «лапласовская» теория ориентированных графов⁶ развита еще недостаточно, потребность в новых сильных результатах здесь очень высока. Еще одно положение, с которым согласно большинство исследователей: для перехода этого направления на новый этап развития необходимо дополнение теоретических работ экспериментальными исследованиями⁷ и внедрение полученных результатов. Только на этом этапе станет ясно, насколько разрабатываемые алгоритмы устойчивы к возмущениям и другим отклонениям реального поведения технических систем от идеальных моделей.

Заключение к главе 5

В данной главе (и работах [6, 63, 65, 72], на основе которых она написана) исследовалась область собственных значений лапласовских матриц ориентированных графов. Задача нахождения спектра лапласовской матрицы сведена к нахождению спектра определенной стохастической матрицы. Построен многоугольник, все точки которого являются собственными значениями нормированных лапласовских матриц заданного порядка. В последнем разделе главы показано, как результаты исследования спектров лапласовских матриц применяются при анализе моделей многоагентного децентрализованного управления.

⁶В [386] эта область исследований названа «неожиданной новой математической территорией».

⁷Пока их немного; см., например, [279, 337].

Глава 6

Какие оргграфы с кольцевой структурой существенно цикличны?

Оргграф назовем существенно циклическим, если спектр соответствующей лапласовской матрицы содержит элементы с ненулевой мнимой частью. Из существенной цикличности следует, что оргграф содержит направленный цикл. Однако обратное неверно. Проблема характеристики существенной цикличности оргграфа в терминах его топологии весьма сложна и до сих пор не решена. Решение этой проблемы важно для ряда прикладных областей, в особенности, для децентрализованного управления многоагентными системами. В работе [73] (см. также [1]), по материалу которой написана данная глава, эта задача решена для класса оргграфов кольцевой структуры, которые моделируют довольно распространенный тип коммуникационных сетей. А именно, доказано, что оргграфы кольцевой структуры, за исключением указанных ниже специальных случаев, — существенно циклические. Основным инструментом исследования являются многочлены Чебышева второго рода. Рассмотрены также задачи о существенной цикличности взвешенных оргграфов и о перечислении остовных деревьев определенных оргграфов кольцевой структуры.

6.1. Введение

В отличие от спектра обычного графа, лапласовский спектр оргграфа не всегда действителен. Проблема характеристики существенной цикличности оргграфа в терминах его топологии сложна и пока не решена. Очевидно, что лапласовский спектр ациклического оргграфа (его лапласовская матрица может быть приведена к треугольному виду), а также лапласовский спектр симметричного оргграфа (его лапласовская матрица является положительно полуопределенной) всегда являются действительными.

Далее, спектр лапласовской матрицы L содержит только действительные числа, если при некотором $\varepsilon > 0$ матрица $I - \varepsilon L$ является матрицей переходных вероятностей обратимой марковской цепи.

Результаты главы 5 наводят на мысль, что наличие в лапласовском спектре собственных значений с достаточно большой мнимой частью свидетельствует о присутствии в оргграфе заметного числа направленных циклов, не «компенсированных» контрциклами. С другой стороны, чисто действительный лапласовский спектр может сочетаться с «некомпенсированными» циклами. В целом следует признать, что различение оргграфов с чисто действительным лапласовским спектром и оргграфов, имеющих не-действительные

собственные значения в терминах топологии орграфа — весьма сложная задача. Орграфы второго типа обязательно содержат цикл, и мы называем их *существенно* циклическими. Некоторые предварительные результаты о существенно циклических взвешенных орграфах были получены в [136, 144].

Вышеупомянутая проблема различения орграфов с действительным спектром и с собственными значениями, имеющими ненулевые мнимые части, в терминах графовой топологии имеет важные приложения. В частности, в задачах децентрализованного управления многоагентными системами [65, 252, 322, 344, 386] отсутствие недействительных собственных значений в спектре орграфа коммуникаций гарантирует отсутствие колебаний в простых алгоритмах согласования характеристик между агентами.

Самым рациональным подходом к характеристизации существенно циклических орграфов является рассмотрение вопроса о существенной цикличности для известных классов орграфов. В настоящей работе исследованы *орграфы кольцевой структуры*. Под орграфом этого типа понимается орграф, множество дуг которого состоит из гамильтонова цикла и произвольного набора дуг, принадлежащих обратному гамильтонову циклу. Орграфы такого вида моделируют типичные классы асимметричных коммуникационных сетей. В данной главе представлено необходимое и достаточное условие существенной цикличности орграфа кольцевой структуры. Анализ базируется на использовании многочленов Чебышева второго рода.

Напомним, что лапласовская матрица орграфа Γ с множеством вершин $V(\Gamma) = \{1, \dots, n\}$ и множеством дуг $E(\Gamma)$ — это матрица $L = (\ell_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ для которой при $j \neq i$ $\ell_{ij} = -1$, если $(i, j) \in E(\Gamma)$, в противном случае $\ell_{ij} = 0$; $\ell_{ii} = -\sum_{j \neq i} \ell_{ij}$, $i, j \in V(\Gamma)$. Если орграф Γ взвешенный, т. е. каждая дуга $(i, j) \in E(\Gamma)$ имеет положительный вес w_{ij} , то в лапласовской матрице $L = L(\Gamma) = (\ell_{ij})$ при $j \neq i$ $\ell_{ij} = -w_{ij}$, когда $(i, j) \in E(\Gamma)$ и $\ell_{ij} = 0$ в противном случае; $\ell_{ii} = -\sum_{j \neq i} \ell_{ij}$, $i, j \in V(\Gamma)$. Среди работ, касающихся лапласовских матриц орграфов отметим [3, 4, 67, 69, 72, 132, 142, 185, 394], а также [160], где используется несколько иное определение лапласовской матрицы.

Итак, взвешенный (невзвешенный) орграф Γ назовем существенно циклическим, если его лапласовский спектр содержит недействительные собственные значения. Очевидно, что каждый существенно циклический орграф имеет хотя бы один направленный цикл. Действительно, в противном случае при некоторой нумерации вершин лапласовская матрица имела бы треугольный вид, и лапласовский спектр состоял бы из действительных собственных значений, стоящих на главной диагонали.

Многочлен Чебышева второго рода n -ой степени $P_n(x)$, масштабированный на $] -2, 2[$, определяется следующим образом:

$$P_n(x) = \frac{\sin((n+1) \arccos \frac{x}{2})}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}, \quad \text{где } x \in] -2, 2[. \quad (6.1)$$

Введя вспомогательную переменную $\varphi \in]0, \pi[$ такую, что $x = 2 \cos \varphi$ (т. е. $\varphi = \arccos \frac{x}{2}$), выражение (6.1) запишем в виде

$$P_n(x) = \frac{\sin((n+1)\varphi)}{\sin \varphi}. \quad (6.2)$$

Многочлены $P_n(x)$ имеют следующую явную форму (см., например, теорему 1.12 в [43]):

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{[n/2]} (-1)^i \binom{n-i}{i} x^{n-2i} \quad (6.3)$$

и подчиняются рекуррентному соотношению

$$P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x) \quad (6.4)$$

с начальными условиями $P_0(x) \equiv 1$ и $P_1(x) \equiv x$. Согласно (6.2) корнями $P_n(x)$ являются

$$x_k = 2 \cos \frac{\pi k}{n+1}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (6.5)$$

В частности, если $n = 2m - 1$ и $m > 0$ целое, то

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{2m-1} \left(x - 2 \cos \frac{\pi k}{2m} \right) = x \prod_{k=1}^{m-1} \left(x - 2 \cos \frac{\pi k}{2m} \right) \left(x + 2 \cos \frac{\pi k}{2m} \right) = x \prod_{k=1}^{m-1} \left(x^2 - 4 \cos^2 \frac{\pi k}{2m} \right). \quad (6.6)$$

Рассмотрим трехдиагональную матрицу $M_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$M_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & \mathbf{0} \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ \mathbf{0} & & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

В частности, $M_1 = (1)$, т. е. матрица «растет» из правого нижнего угла. Пусть $Z_n(x)$ — характеристический многочлен матрицы M_n : $Z_n(x) = \det(xI - M_n)$. Разложение $xI - M_n$ по первой строке для всех $n \geq 2$ дает

$$Z_n(x) = (x-2)Z_{n-1}(x) - Z_{n-2}(x) \quad (6.8)$$

при начальных условиях $Z_0(x) \equiv 1$ и $Z_1(x) \equiv x - 1$. Многочлен $Z_n(x)$ постоянно используется в дальнейших рассуждениях.

Далее глава имеет следующую структуру. В разделе 6.2 доказаны три вспомогательные леммы, которые будут использоваться при доказательстве основных утверждений. Одна из них указывает связь между многочленами $Z_n(x)$ и многочленами Чебышева второго рода $P_n(x)$. В разделе 6.3 получено необходимое и достаточное условие существенной

цикличности орграфов кольцевой структуры, т. е. орграфов, состоящих из двух «встречных» гамильтоновых циклов, в одном из которых удалены некоторые дуги. В разделе 6.4 исследуется существенная цикличность простейших простых взвешенных орграфов кольцевой структуры; выясняется, что некоторые условия существенной цикличности включают неравенство треугольника для квадратных корней из разностей весов дуг. В разделе 6.5 с помощью многочленов Чебышева получены явные формулы для количества входящих деревьев в специальных орграфах кольцевой структуры. Приведено также прямое вычисление лапласовского спектра неориентированного цикла; ранее другие авторы лишь доказывали эту формулу, взяв ее как «готовую».

6.2. Вспомогательные леммы

В разделе 6.3 будет показано, что лапласовские характеристические многочлены орграфов кольцевой структуры отличаются на единицу от произведения многочленов $Z_n(x)$. В этом разделе докажем три леммы. Лемма 6.1 связывает $Z_n(x)$ с многочленом Чебышева $P_n(x)$ второго рода, лемма 6.2 дает явный вид $Z_n(x)$ и его корни, а лемма 6.3 характеризует корни многочленов $Z_n(x) \pm 1$.

Лемма 6.1. Для $n = 0, 1, 2, \dots$ $Z_n(x^2) \equiv P_{2n}(x)$.

Доказательство. По индукции: для $n = 0$, согласно определению, $Z_0(x^2) \equiv P_0(x) \equiv 1$. Для $n = 1$ имеем $Z_1(x^2) = x^2 - 1 = P_2(x)$. Предположим, что утверждение верно для $n = m - 1$ и $n = m$. Докажем, что оно верно и для $n = m + 1$. Действительно, согласно (6.4) и (6.8) $Z_{m+1}(x^2) = (x^2 - 2)Z_m(x^2) - Z_{m-1}(x^2) = (x^2 - 2)P_{2m}(x) - P_{2m-2}(x) = x(xP_{2m}(x) - P_{2m-1}(x)) + (xP_{2m-1}(x) - P_{2m-2}(x)) - 2P_{2m}(x) = xP_{2m+1}(x) + P_{2m}(x) - 2P_{2m}(x) = P_{2m+2}(x)$. \square

Лемма 6.2. 1. Многочлен $Z_n(x)$ представляется в форме

$$Z_n(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{2n-i}{i} x^{n-i}. \quad (6.9)$$

2. Множество корней $Z_n(x)$ принадлежит $[0, 4[$ и имеет вид $\left\{ 4 \cos^2 \frac{\pi k}{2n+1} \mid k = 1, \dots, n \right\}$.

Доказательство. В силу леммы 6.1 для проверки пункта 1 достаточно сравнить (6.9) с (6.3); пункт 2 следует из (6.5). \square

Поскольку для $x \geq 0$ $P_{2n}(\sqrt{x}) = Z_n(x)$, (6.1) дает следующее тригонометрическое представление для $Z_n(x)$:

$$Z_n(x) = \frac{\sin((2n+1)\varphi)}{\sin \varphi}, \quad \text{где } x = 4 \cos^2 \varphi, \quad \varphi \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right], \quad x \in [0, 4[. \quad (6.10)$$

Лемма 6.3. *Корнями уравнения*

$$Z_n(x) + (-1)^p = 0, \quad p \in \{0, 1\} \quad (6.11)$$

являются числа $\left\{ 4 \cos^2 \frac{\pi k}{2n+1+(-1)^{k+p}} \mid k = 1, \dots, n \right\}$, *и все они принадлежат* $]0, 4[$.

Доказательство. Согласно (6.10) корни x_i уравнения (6.11) связаны с корнями φ_i уравнения

$$\frac{\sin((2n+1)\varphi)}{\sin \varphi} + (-1)^p = 0 \quad (6.12)$$

следующим образом: $x_i = 4 \cos^2 \varphi_i$. Решим уравнение (6.12) и затем вернемся к (6.11). Заметим, что если

$$(2n+1)\varphi = \pi k - (-1)^{k+p}\varphi, \quad (6.13)$$

где k — целое, то выполняется равенство $\sin((2n+1)\varphi) = (-1)^{p+1} \sin \varphi$, к которому приводится (6.12) при $\varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Из (6.13) получаем

$$\varphi = \frac{\pi k}{2n+1+(-1)^{k+p}}. \quad (6.14)$$

При $k = 1, \dots, n$ (6.14) дает n различных корней уравнения (6.12); все они принадлежат $]0, \frac{\pi}{2}[$. В силу (6.10) соответствующие различные корни уравнения (6.11) принадлежат $]0, 4[$ и образуют множество $\left\{ 4 \cos^2 \frac{\pi k}{2n+1+(-1)^{k+p}} \mid k = 1, \dots, n \right\}$. Поскольку степень (6.11) равна n , это уравнение не имеет других корней. \square

6.3. Существенно циклические орграфы кольцевой структуры

Под орграфом кольцевой структуры мы понимаем орграф, множество дуг которого состоит из гамильтонова цикла и произвольного набора дуг, принадлежащих обратному гамильтонову циклу. А именно, пусть $\Gamma_n^1 = (V_n, E_n^1)$ и $\Gamma_n^2 = (V_n, E_n^2)$ — орграф с множествами вершин и дуг $V_n = \{1, \dots, n\}$, $E_n^1 = \{(1, n), (n, n-1), \dots, (2, 1)\}$ и $E_n^2 = E_n^1 \cup \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n), (n, 1)\}$. Будем говорить, что $\Gamma_n = (V_n, E)$ является *орграфом кольцевой структуры*, если он изоморфен некоторому $\tilde{\Gamma}_n = (V_n, \tilde{E})$ с множеством дуг $E_n^1 \subseteq \tilde{E} \subseteq E_n^2$.

Орграфы Γ_n^1 и Γ_n^2 показаны соответственно на рис. 6.1а и 6.1б.

В этом разделе будет получено необходимое и достаточное условие существенной циклическости орграфов кольцевой структуры и будет найден лапласовский спектр некоторых из них. *Взвешенные* орграфы кольцевой структуры будут рассмотрены в разделе 6.4.

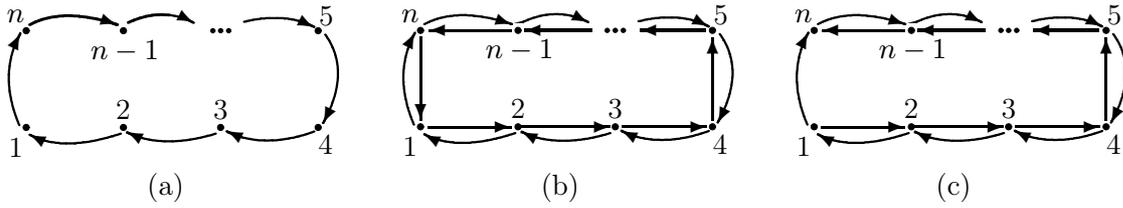


Рис. 6.1. Орграфы (a) Γ_n^1 , (b) Γ_n^2 , (c) Γ'_n .

6.3.1. Орграфы Γ_n^1 с n дугами и Γ_n^2 с $2n$ дугами

Теорема 6.1. 1. Γ_n^1 — существенно циклический; $\left\{ 2 \sin^2 \frac{\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \mid k = 1, \dots, n \right\}$ — его лапласовский спектр.

2. Γ_n^2 не существенно циклический; его лапласовский спектр: $\left\{ 4 \sin^2 \frac{\pi k}{2n} \mid k = 1, \dots, n \right\}$.

Доказательство. 1. Лапласовская матрица Γ_n^1 имеет вид $L_n^1 = I - Q$, где $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — циркулянтная матрица перестановки с элементами $q_{ij} = 1$ при $i - j \in \{1, 1 - n\}$ и $q_{ij} = 0$ в противном случае. $\Delta_Q(\lambda) = \lambda^n - 1$ — характеристический многочлен Q , и его спектр есть $\left\{ e^{-2\pi k i/n} \mid k = 1, \dots, n \right\}$. Поэтому

$$\lambda_k = 1 - e^{-2\pi k i/n} = 1 - \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} = 2 \sin^2 \frac{\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 1, \dots, n$$

— собственные значения матрицы $L_n^1 = I - Q$ (см. также § 2.1 в [56], раздел 4.8.3 в [41] и раздел 4 в [72]).

2. Лапласовская матрица орграфа Γ_n^2 симметрична и совпадает с лапласовской матрицей неориентированного n -цикла. Спектр этой матрицы был найден в [180] и [80] и совпадает с выражением, приведенным в теореме 6.1. Это выражение может быть получено конструктивно: см. раздел 6.5. \square

Приведем альтернативное представление лапласовского спектра Γ_n^1 .

Следствие из теоремы 6.1. Лапласовский спектр Γ_n^1 : $\left\{ 2 \sin \frac{\pi k}{n} e^{\pi i (\frac{1}{2} - \frac{k}{n})} \mid k = 1, \dots, n \right\}$.

6.3.2. Орграфы Γ'_n с $2n - 1$ дугами

Рассмотрим орграф, отличающийся от Γ_n^2 одной дугой. Пусть $\Gamma'_n = (V_n, E'_n)$, где $E'_n = E_n^2 \setminus \{(n, 1)\}$ (см. рис. 6.1c). Лапласовская матрица орграфа Γ'_n ,

$$L'_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ \mathbf{0} & & & & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

отличается от трехдиагональной матрицы M_n (см. (6.7)) лишь элементом $(1, n)$. Теорема 6.2 устанавливает, что лапласовский характеристический многочлен Γ'_n может быть выражен через многочлен Z_n , введенный в разделе 6.1, и что ни Γ'_n , ни Γ_n^2 не являются существенно циклическими.

Теорема 6.2. Пусть L'_n — лапласовская матрица орграфа Γ'_n , у которого множество дуг состоит из дуг гамильтонова цикла $(1, n), (n, n-1), \dots, (2, 1)$ и дуг пути $(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)$. Тогда:

1. Характеристический многочлен матрицы L'_n : $\Delta_{L'_n}(\lambda) = Z_n(\lambda) - (-1)^n$;
2. Орграф Γ'_n не является существенно циклическим; его лапласовский спектр: $\{4 \cos^2 \frac{\pi k}{2n+1-(-1)^{k+n}}, k = 1, \dots, n\}$.

Доказательство. 1. Разложив $\det(\lambda I - L'_n)$ по первой строке и используя (6.8), получаем

$$\Delta_{L'_n}(\lambda) = \det(\lambda I - L'_n) = (\lambda - 2)Z_{n-1}(\lambda) - Z_{n-2}(\lambda) - (-1)^n = Z_n(\lambda) - (-1)^n.$$

2. Согласно лемме 6.3 множество корней $\Delta_{L'_n}(\lambda)$ образовано числами $4 \cos^2 \frac{\pi k}{2n+1-(-1)^{k+n}}$ ($k = 1, \dots, n$), поэтому Γ'_n не является существенно циклическим. \square

6.3.3. Орграфы Γ''_n с $2n - 2$ дугами

Теперь рассмотрим орграфы кольцевой структуры, состоящие из двух гамильтоновых циклов, в одном из которых удалены две произвольных дуги. Орграф Γ''_n этого вида получается из Γ'_n удалением некоторой дуги $(i, i+1)$ ($1 \leq i < n$). Поэтому лапласовская матрица L''_n орграфа Γ''_n получается из L'_n заменой двух элементов в i -ой строке:

$$L''_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ & & & -1 & 1 & 0 & & & \vdots \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & & & -1 & 2 & -1 \\ \mathbf{0} & & & & & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ \vdots \\ n-1 \\ n \end{matrix} \quad (6.15)$$

Исследование вопроса о том, является ли Γ''_n существенно циклическим, приводит к изучению произведений многочленов Чебышева второго рода. Введем следующие обозначения. Пусть

$$x_1^{(m)} = 4 \cos^2 \frac{\pi m}{2m+1} \quad \text{и} \quad x_2^{(m)} = 4 \cos^2 \frac{\pi(m-1)}{2m+1} \quad (\text{при } m > 1) \quad (6.16)$$

— соответственно наименьший и второй по величине корни $Z_m(x)$ (см. лемму 6.2);

$$u_1^{(m)} = 4 \cos^2 \frac{\pi m}{2(m+1)} \quad \text{и} \quad u_2^{(m)} = 4 \cos^2 \frac{\pi(m-1)}{2m} \quad (\text{при } m > 1) \quad (6.17)$$

— соответственно наименьший и второй по величине корни $Z_m(x) + (-1)^m$ (см. лемму 6.3).

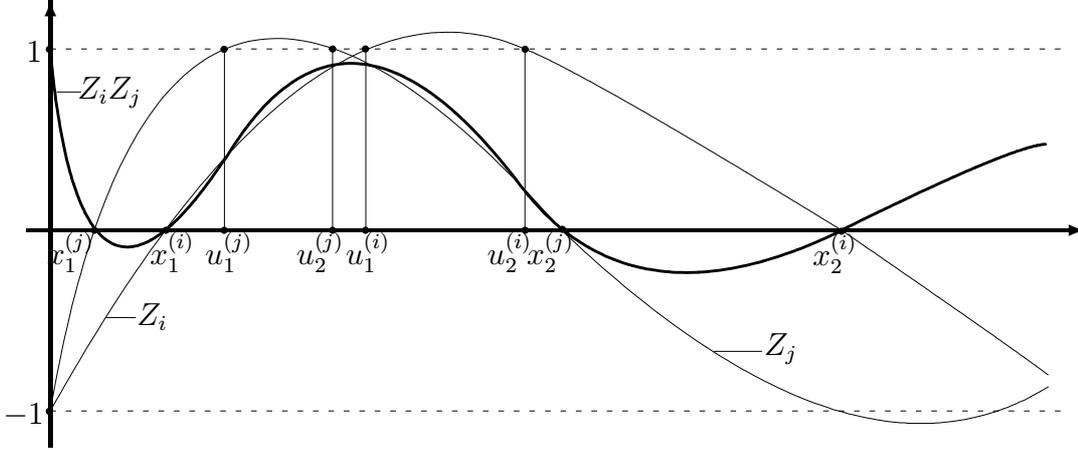


Рис. 6.2. Многочлены $Z_i(x)$, $Z_j(x)$ и $Z_i(x)Z_j(x)$, где i и j — нечетные и $0 < i < j - 1$ (пример).

В следующей лемме устанавливаются некоторые неравенства, включающие корни (6.16)–(6.17) многочленов $Z_m(x)$ и $Z_m(x) + (-1)^m$, а также многочленов, имеющих вид произведения $Z_i(x)Z_j(x)$. Графики $Z_i(x)$, $Z_j(x)$ и $Z_i(x)Z_j(x)$, где i и j нечетны, показаны на рис. 6.2.

Лемма 6.4. Пусть $0 < i < j - 1$.

1. Если $u_1^{(i)} < x_2^{(j)}$, то $\frac{i}{j-1} > \frac{2}{3}$.
2. $u_1^{(i)} > u_2^{(j)}$.
3. Неравенство

$$|Z_i(x)Z_j(x)| < 1 \quad (6.18)$$

выполняется для всех $x \in]0, \max(x_1^{(i)}, u_2^{(j)})]$.

4. Если $u_1^{(i)} < x_2^{(j)}$, то (6.18) выполняется для всех $x \in [u_1^{(i)}, x_2^{(j)}]$.

Лемма 6.4 — один из главных инструментов, используемых при доказательстве теорем этого раздела.

Доказательство. 1. Поскольку на $[0, \frac{\pi}{2}]$ функция $\cos^2 t$ строго убывает, из $u_1^{(i)} < x_2^{(j)}$ следует $\frac{i}{2(i+1)} > \frac{j-1}{2j+1}$. Следовательно выполняется пункт 1 леммы 6.4.

Пункт 2 следует из определений $u_1^{(i)}$ и $u_2^{(j)}$ и неравенства $0 < i < j - 1$.

3. Пусть $x_1^{(i)} \geq u_2^{(j)}$. Покажем, что (6.18) верно для всех $x \in]0, x_1^{(i)}]$. Если $x \in]0, x_1^{(i)}[$, то $\varphi \in]\frac{\pi i}{2i+1}, \frac{\pi}{2}[$, где $\varphi = \arccos \frac{x}{2}$. Пусть $\varphi = \frac{\pi(i+\delta)}{2i+1}$, где $0 < \delta < 1/2$. Имеем

$$|Z_i(x)Z_j(x)| \leq \left| \frac{\sin(2i+1)\varphi}{\sin^2 \varphi} \right| = \left| \frac{\sin \pi \delta}{\sin^2 \frac{\pi(i+\delta)}{2i+1}} \right|. \quad (6.19)$$

Рассмотрим производную от $\sin \delta \pi / \sin^2 \frac{(i+\delta)\pi}{2i+1}$:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sin \delta \pi}{\sin^2 \frac{(i+\delta)\pi}{2i+1}} \right)'_{\delta} &= \frac{\pi \cos(\delta \pi) \sin \frac{(i+\delta)\pi}{2i+1} - \frac{2\pi}{2i+1} \sin(\delta \pi) \cos \frac{(i+\delta)\pi}{2i+1}}{\sin^3 \frac{(i+\delta)\pi}{2i+1}} = \\
&= \frac{\left(\frac{(2i-1)\pi}{2i+1} + \frac{2\pi}{2i+1} \right) \cos(\delta \pi) \sin \frac{(i+\delta)\pi}{2i+1} - \frac{2\pi}{2i+1} \sin(\delta \pi) \cos \frac{(i+\delta)\pi}{2i+1}}{\sin^3 \frac{(i+\delta)\pi}{2i+1}} = \\
&= \frac{\frac{(2i-1)\pi}{2i+1} \cos(\delta \pi) \sin \frac{(i+\delta)\pi}{2i+1} + \frac{2\pi}{2i+1} \sin \frac{i(1-2\delta)\pi}{2i+1}}{\sin^3 \frac{(i+\delta)\pi}{2i+1}}. \tag{6.20}
\end{aligned}$$

Поскольку при $0 \leq \delta < 1/2$ тригонометрические функции в (6.20) положительны, положительна и левая часть, значит $\sin \delta \pi / \sin^2 \frac{(i+\delta)\pi}{2i+1}$ возрастает по δ . При $\delta = 0$ и $\delta = 1/2$ отношение $\sin \delta \pi / \sin^2 \frac{(i+\delta)\pi}{2i+1}$ соответственно равно 0 и 1. Отсюда при $\delta \in [0, \frac{1}{2}[$ имеет место $\sin \delta \pi / \sin^2 \frac{(i+\delta)\pi}{2i+1} < 1$, и согласно (6.19) $|Z_i(x)Z_j(x)| < 1$ выполняется для всех $x \in]0, x_1^{(i)}]$.

Покажем, что $u_2^{(j)} > x_1^{(i)}$ также влечет $|Z_i(x)Z_j(x)| < 1$. Рассмотрим параметризацию $\varphi = \varphi(\delta) = \frac{\pi}{2} \frac{j-\delta}{j}$, при которой $x = x(\delta) = 4 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{j-\delta}{j} \right)$. Имеем $x(0) = 0$, $x\left(\frac{j}{j+1}\right) = u_1^{(j)}$ и $x(1) = u_2^{(j)}$. Для $x \in]0, u_2^{(j)}]$ (т. е. для $\delta \in]0, 1]$) получаем

$$Z_i(x)Z_j(x) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(2i+1)\frac{j-\delta}{j}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}(2j+1)\frac{j-\delta}{j}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{j-\delta}{j}\right)},$$

следовательно,

$$|Z_i(x)Z_j(x)| \leq \frac{|\sin\left(\frac{\pi}{2}(2i+1)\left(1-\frac{\delta}{j}\right)\right)|}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\delta}{j}\right)\right)} = \frac{|\cos\left(\frac{\delta\pi}{2}\frac{2i+1}{j}\right)|}{\cos^2\left(\frac{\delta\pi}{2}\frac{1}{j}\right)}.$$

Если $\cos\left(\frac{\delta\pi}{2}\frac{2i+1}{j}\right) > 0$, то $\frac{\delta\pi}{2}\frac{2i+1}{j} < \frac{\pi}{2}$, таким образом,

$$|Z_i(x)Z_j(x)| \leq \frac{\cos\left(\frac{\delta\pi}{2}\frac{2i+1}{j}\right)}{\cos^2\left(\frac{\delta\pi}{2}\frac{1}{j}\right)} < \frac{\cos\left(\frac{\delta\pi}{2}\frac{2i}{j}\right)}{\cos^2\left(\frac{\delta\pi}{2}\frac{1}{j}\right)} = \frac{\cos^2\left(\frac{\delta\pi}{2}\frac{i}{j}\right) - \sin^2\left(\frac{\delta\pi}{2}\frac{i}{j}\right)}{\cos^2\left(\frac{\delta\pi}{2}\frac{1}{j}\right)} < 1.$$

Если $\cos\left(\frac{\delta\pi}{2}\frac{2i+1}{j}\right) \leq 0$, то $\frac{\pi}{2} \leq \frac{\delta\pi}{2}\frac{2i+1}{j} < \pi$, и поскольку $i+1 < j$, имеем $\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}\frac{2i+1}{j} < \pi$.

Поэтому

$$\begin{aligned}
\frac{|\cos\left(\frac{\delta\pi}{2}\frac{2i+1}{j}\right)|}{\cos^2\left(\frac{\delta\pi}{2}\frac{1}{j}\right)} &\leq \frac{|\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{2i+1}{j}\right)|}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{j}\right)} = \frac{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{2}\frac{2i+1}{j}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{j}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{2(j-i)-1}{j}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{j}\right)} \leq \\
&\leq \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{2}{j}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{j}\right)} = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{j}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{j}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{j}\right)} < 1.
\end{aligned}$$

4. Согласно пункту 1 леммы 6.4, если $u_1^{(i)} < x_2^{(j)}$, то $i > \frac{2j-2}{3}$. С другой стороны, $i+1 < j$, и в силу этих двух неравенств имеет место

$$i + j \geq 8. \tag{6.21}$$

Отрезок $\left\{ \varphi \in \left[\frac{\pi(j-1)}{2j+1}, \frac{\pi i}{2(i+1)} \right] \right\}$ соответствует $x \in [u_1^{(i)}, x_2^{(j)}]$. Пусть $\varphi(\xi) = \frac{\pi(j-1+\xi)}{2j+1}$, где $0 \leq \xi \leq \frac{3i-2j+2}{2i+2}$. Тогда выполняется $\varphi(0) = \frac{\pi(j-1)}{2j+1}$ и $\varphi\left(\frac{3i-2j+2}{2i+2}\right) = \frac{\pi i}{2(i+1)}$.

Для всех $x \in [u_1^{(i)}, x_2^{(j)}]$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned}
|Z_i(x)Z_j(x)| &\leq \frac{|\sin((2j+1)\varphi(\xi))|}{\sin^2 \varphi(\xi)} = \frac{\left| \sin\left((2j+1)\frac{\pi(j-1+\xi)}{2j+1}\right) \right|}{\sin^2 \frac{\pi(j-1+\xi)}{2j+1}} = \\
&= \frac{|\sin(\pi(j-1+\xi))|}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi(\frac{3}{2}-\xi)}{2j+1}\right)} = \frac{|\sin(\pi\xi)|}{\cos^2 \frac{\pi(\frac{3}{2}-\xi)}{2j+1}}. \tag{6.22}
\end{aligned}$$

Поскольку $i < j - 1$, получаем $\xi \leq \frac{3i-2j+2}{2i+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{5i+5-2(i+j)-3}{2i+2}\right) = \frac{1}{2}\left(5 - \frac{2(i+j)+3}{i+1}\right) \leq \frac{1}{2}\left(5 - \frac{2(i+j)+3}{\frac{i+j}{2}}\right) = \frac{i+j-6}{2(i+j)} < \frac{1}{2}$, и (6.22) приводит к

$$|Z_i(x)Z_j(x)| \leq \frac{|\sin(\pi\xi)|}{\cos^2 \frac{\pi(\frac{3}{2}-\xi)}{2j+1}} \leq \frac{|\sin(\pi\frac{i+j-6}{2(i+j)})|}{\cos^2 \frac{3\pi}{i+j}} < \frac{|\cos(\frac{3\pi}{i+j})|}{\cos^2 \frac{3\pi}{2(i+j)}} = \frac{|\cos^2 \frac{3\pi}{2(i+j)} - \sin^2 \frac{3\pi}{2(i+j)}|}{\cos^2 \frac{3\pi}{2(i+j)}} < 1.$$

Последнее неравенство следует из (6.21). Лемма доказана. \square

Во всех последующих утверждениях копии кратных корней многочленов рассматриваются как *различные* корни, тем самым каждый многочлен степени n имеет n *различных* корней.

Лемма 6.5. Пусть $0 < i < j - 1$. Пусть x_1, x_2 и x_3 — три наименьших корня многочлена $f(x) = Z_i(x)Z_j(x)$ и $x_1 < x_2 \leq x_3$. Тогда для всех $x \in]0, x_3]$ имеет место $|f(x)| < 1$.

Доказательство. Рассмотрим четыре случая. (а) $x_1^{(i)} < u_2^{(j)}$ и $u_1^{(i)} < x_2^{(j)}$. Этот случай иллюстрируется рисунком 6.2. В силу пункта 3 леммы 6.4 для всех $x \in]0, u_2^{(j)}]$ верно $|f(x)| < 1$; согласно пункту 4 это неравенство также верно при $x \in [u_1^{(i)}, x_2^{(j)}]$. В силу пункта 2 $u_2^{(j)} < u_1^{(i)}$. На интервале $]u_2^{(j)}, u_1^{(i)}[$ также имеем $|f(x)| < 1$, поскольку на этом интервале выполняется $|Z_i(x)| < 1$ и $|Z_j(x)| < 1$. Таким образом, на $]0, x_2^{(j)}]$ имеет место $|f(x)| < 1$. Поскольку $x_2^{(j)} = x_3$, требуемое утверждение доказано.

(б) $x_1^{(i)} < u_2^{(j)}$ и $u_1^{(i)} \geq x_2^{(j)}$. В этом случае, используя пункт 3 леммы 6.4, на $]0, u_1^{(i)}]$ аналогично получаем $|f(x)| < 1$. Поскольку $0 < x_3 = x_2^{(j)} \leq u_1^{(i)}$, на интервале $]0, x_3]$ имеет место $|f(x)| < 1$.

(в) $x_1^{(i)} \geq u_2^{(j)}$ и $u_1^{(i)} < x_2^{(j)}$. Согласно пунктам 3 и 4 леммы 6.4 на $]0, x_1^{(i)}]$ имеет место $|f(x)| < 1$ и $[u_1^{(i)}, x_2^{(j)}]$. Кроме того, поскольку на интервале $]x_1^{(i)}, u_1^{(i)}[$ верно $|Z_i(x)| < 1$ и $|Z_j(x)| < 1$, в данном случае также справедливо $|f(x)| < 1$. Отсюда следует, что на $]0, x_2^{(j)}]$ выполняется $|f(x)| < 1$, где $x_2^{(j)} = x_3$.

(г) $x_1^{(i)} \geq u_2^{(j)}$ и $u_1^{(i)} \geq x_2^{(j)}$. В этом случае для всех x из $]0, x_1^{(i)}]$ выполняется $|f(x)| < 1$. Если $x_1^{(i)} \geq x_2^{(j)}$, то $x_3 = x_1^{(i)}$, и выполнение требуемого утверждения очевидно. В дополнительном случае $x_3 = x_2^{(j)}$ и на $]x_1^{(i)}, x_2^{(j)}]$ выполняется $|f(x)| < 1$, поскольку на этом интервале справедливо $|Z_i(x)| < 1$ и $|Z_j(x)| < 1$. Итак, на $]0, x_3]$ $|f(x)| < 1$, что и требовалось доказать. \square

Лемма, которую мы сейчас докажем, будет использоваться в последующих доказательствах совместно с леммой 6.5.

Лемма 6.6. Пусть $g(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами и $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ — некоторые его различные корни. Пусть $|g(x)| < 1$ для всех x таких, что $x_1 \leq x \leq x_3$. Тогда каждый из многочленов $g(x) - 1$ и $g(x) + 1$ имеет хотя бы пару не-действительных корней.

Доказательство. Согласно посылке леммы 6.6 ни $g(x) + 1$, ни $g(x) - 1$ не имеют действительного корня x' такого, что $x_1 \leq x' \leq x_3$. С другой стороны, отрезок (возможно, вырождающийся в точку) $[x_1, x_3]$ содержит хотя бы два корня производной $g'(x)$. Следовательно, ни один из многочленов $g(x) + 1$ и $g(x) - 1$ не имеет корня, лежащего нестрого между двумя корнями его производной. Таким образом каждый из этих многочленов имеет хотя бы два не-действительных корня. \square

Следующая теорема устанавливает, какие орграфы типа Γ_n'' являются существенно циклическим. Ее доказательство основано на леммах 6.5 и 6.6, а также лемме 6.7, которая будет доказана ниже.

Теорема 6.3. Пусть L_n'' — лапласовская матрица орграфа Γ_n'' , множество дуг которого состоит из дуг гамильтонова цикла $(1, n), (n, n-1), \dots, (2, 1)$ и дуг направленных путей $(1, 2), (2, 3), \dots, (i-1, i)$ и $(i+1, i+2), \dots, (n-1, n)$, где $1 \leq i < n$. Тогда:

1. $\Delta_{L_n''}(\lambda) = Z_i(\lambda)Z_{n-i}(\lambda) - (-1)^n$ является характеристическим многочленом L_n'' .
2. Если n четно, то Γ_n'' — существенно циклический для всех $i \in \{1, \dots, n-1\}$ кроме $i = \frac{n}{2}$; в последнем случае собственными значениями L_n'' являются $4 \cos^2 \frac{\pi k}{n}$ и $4 \cos^2 \frac{\pi k}{n+2}$, $k = 1, \dots, \frac{n}{2}$.
3. Если n нечетно, то Γ_n'' — существенно циклический для всех $i \in \{1, \dots, n-1\}$ кроме $i = \frac{n-1}{2}$ и $i = \frac{n+1}{2}$; в последних двух случаях собственные значения L_n'' : $4 \cos^2 \frac{\pi k}{n+1}$, $k = 1, \dots, n$.

Каждый орграф типа Γ_n'' , не являющийся существенно циклическим, имеет две вершины с полустепенью захода 1 (а также две вершины с полустепенью исхода 1) на максимальном расстоянии друг от друга. Иначе говоря, такой орграф может быть получен из Γ_n^2 удалением двух самых далеких друг от друга дуг из одного и того же гамильтонова цикла. Эти орграфы показаны на рис. 6.3. На рис. 6.3b только одна из «пунктирных» стрелок является дугой; очевидно, что два получающихся при этом орграфа изоморфны.

На рис. 6.4 показаны графики многочленов $Z_i^2(\lambda)$ и $Z_i(\lambda)Z_{i+1}(\lambda)$, отличающихся на единицу от характеристических многочленов $\Delta_{L_n''}(\lambda)$ тех орграфов Γ_n'' , которые в силу теоремы 6.3 не являются существенно циклическими.

Доказательство теоремы 6.3. 1. Разложив $\Delta_{L_n''}(\lambda) = \det(\lambda I - L_n'')$ по первой строке и используя тождество (6.8) и тот факт, что для двух квадратных матриц P и S имеет место $\det \left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline R & S \end{array} \right) = \det P \det S$, получаем

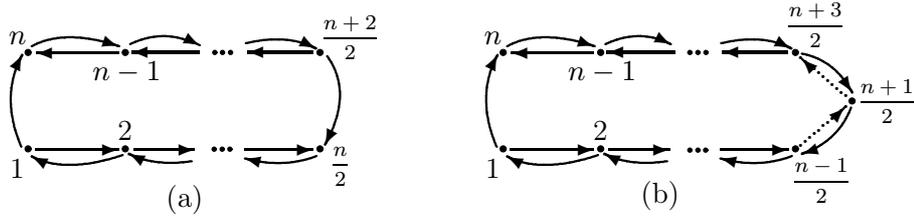


Рис. 6.3. Орграфы Γ''_n , не являющиеся существенно циклическими: (а) n четно; $i = n/2$; (б) n нечетно и либо $i = (n - 1)/2$, либо $i = (n + 1)/2$, т. е. ровно один из двух пунктирных векторов является дугой.

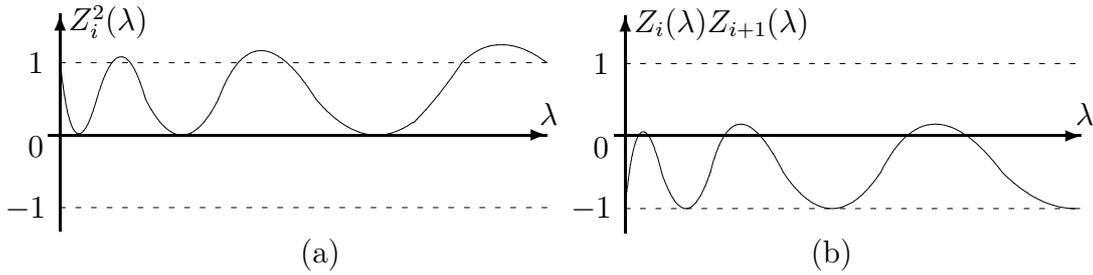


Рис. 6.4. (а) вид многочленов $Z_i^2(\lambda)$; (б) вид многочленов $Z_i(\lambda)Z_{i+1}(\lambda)$.

$$\Delta_{L''_n}(\lambda) = (\lambda - 2)Z_{i-1}(\lambda) Z_{n-i}(\lambda) - Z_{i-2}(\lambda) Z_{n-i}(\lambda) - (-1)^n = Z_i(\lambda)Z_{n-i}(\lambda) - (-1)^n,$$

что доказывает пункт 1 теоремы 6.3. Для доказательства пунктов 2 и 3 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 6.7. 1. Если $i + j$ четно, то уравнение $Z_i(x)Z_j(x) - 1 = 0$ имеет только действительные корни тогда и только тогда, когда $i = j$. В последнем случае этими корнями являются $4 \cos^2 \frac{\pi k}{2j}$, $4 \cos^2 \frac{\pi k}{2j+2}$, $k = 1, \dots, j$.

2. Если $i + j$ нечетно и $i < j$, то уравнение $Z_i(x)Z_j(x) + 1 = 0$ имеет только действительные корни тогда и только тогда, когда $i = j - 1$. В последнем случае имеет место

$$Z_i(x)Z_j(x) + 1 = P_{i+j}^2(\sqrt{x}) \text{ для всех } x \geq 0, \tag{6.23}$$

и корнями уравнения являются $4 \cos^2 \frac{\pi k}{2j}$, $k = 1, \dots, i + j$.

Доказательство леммы 6.7. Сначала докажем достаточное условие действительности корней. Затем установим, что в остальных случаях существует хотя бы одна пара недействительных корней.

1. Если $i = j$, то $Z_i(x)Z_j(x) - 1 = (Z_i(x) - 1)(Z_i(x) + 1)$. Из леммы 6.3 следует, что все корни действительны, принадлежат $[0, 4[$ и представляются в виде $4 \cos^2 \frac{\pi k}{2j}$, $4 \cos^2 \frac{\pi k}{2j+2}$, $k = 1, \dots, j$. Тот же результат может быть получен с помощью леммы 6.1, равенства (6.5) и следующего красивейшего тождества Каталана для многочленов Чебышева (см. [385, равенство (1.1')]): $(P_n(x) - 1)(P_n(x) + 1) = P_{n-1}(x) P_{n+1}(x)$.

2. Пусть $j = i + 1$. Тогда для $x \in [0, 4[$ и $\varphi = \arccos \frac{\sqrt{x}}{2}$, используя (6.10), (6.2) и (6.6), получаем

$$\begin{aligned} Z_i(x)Z_j(x) + 1 &= \frac{\sin((2i+1)\varphi)\sin((2i+3)\varphi)}{\sin^2\varphi} + 1 = \frac{\cos(2\varphi) - \cos((4i+4)\varphi)}{2\sin^2\varphi} + 1 = \\ &= \frac{\sin^2((2i+2)\varphi)}{\sin^2\varphi} = P_{i+j}^2(\sqrt{x}) = x \prod_{k=1}^{j-1} \left(x - 4\cos^2\frac{\pi k}{2j}\right)^2 = \prod_{k=1}^{i+j} \left(x - 4\cos^2\frac{\pi k}{2j}\right). \end{aligned}$$

Этот результат также может быть получен применением тождества Каталана. Таким образом, корнями $Z_i(x)Z_j(x) + 1$ являются $4\cos^2\frac{\pi k}{2j}$, $k = 1, \dots, i+j$; эти действительные числа принадлежат $[0, 4[$.

Теперь докажем, что в остальных случаях каждое из рассмотренных уравнений имеет хотя бы одну пару не-действительных корней.

Пусть $0 < i < j - 1$. Согласно лемме 6.5 для всех $x \in]0, x_3]$ имеет место $|Z_i(x)Z_j(x)| < 1$, где x_1, x_2 и x_3 ($x_1 < x_2 \leq x_3$) — три наименьших корня $Z_i(x)Z_j(x)$. Следовательно, согласно лемме 6.6, каждый из многочленов $Z_i(x)Z_j(x) + 1$ и $Z_i(x)Z_j(x) - 1$ имеет хотя бы одну пару не-действительных корней. Лемма доказана. \square

В силу пункта 1 теоремы 6.3 пункты 2 и 3 следуют соответственно из пунктов 1 и 2 леммы 6.7. \square

6.3.4. Орграфы Γ_n с m ($n < m < 2n - 2$) дугами

Суммируем полученные результаты. Согласно теоремам 6.1–6.3:

- Γ_n^1 — существенно циклические;
- Γ_n'' — существенно циклические за исключением случаев, указанных в теореме 6.3;
- Γ_n' и Γ_n^2 не являются существенно циклическими (см. рис. 6.1 и рис. 6.3).

Следующая теорема отвечает на вопрос о существенной цикличности остальных орграфов кольцевой структуры, в которых в обратном гамильтоновом цикле отсутствует более двух дуг. Согласно этой теореме все такие орграфы являются существенно циклическими.

Теорема 6.4. Пусть Γ_n — орграф на $n > 3$ вершинах, состоящий из двух противоположных гамильтоновых циклов, в одном из которых отсутствуют произвольные i ($2 < i < n$) дуг. Тогда:

1. Характеристический полином лапласовской матрицы L_n орграфа Γ_n имеет вид

$$\Delta_{L_n}(\lambda) = \prod_{k=1}^K Z_{i_k}(\lambda) - (-1)^n, \quad (6.24)$$

где i_1, \dots, i_K есть длины путей в разложении цикла $\{(1, n), (n, n-1), \dots, (2, 1)\}$ на пути, связывающие последовательные вершины с полустепенью захода 1;

2. Γ_n — существенно циклический орграф.

Доказательство. 1. Доказательство аналогично доказательству пункта 1 теоремы 6.3.

2. Сначала докажем следующую лемму, обобщающую лемму 6.5.

Лемма 6.8. Пусть $f(x) = \prod_{k=1}^K Z_{i_k}(x)$, где $K > 2$ и $i_k > 0$, $k = 1, \dots, K$.

1. Пусть x_1, x_2 и x_3 — наименьшие¹ корни $f(x)$ и $x_1 \leq x_2 \leq x_3$. Тогда для всех $x \in]0, x_3]$ имеет место $|f(x)| < 1$.

2. Каждый из многочленов $f(x) - 1$ и $f(x) + 1$ имеет хотя бы одну пару действительных корней.

Доказательство леммы 6.8. 1. Используем индукцию по K . Сначала рассмотрим шаг индукции, а затем вернемся к ее базе. Предположим, что требуемое утверждение верно для всех $2 < K < K_0$. Докажем, что оно верно для $K = K_0$. Рассмотрим любое произведение вида $f(x) = \prod_{k=1}^{K_0} Z_{i_k}(x)$. Без ограничения общности предположим, что

$$i_{K_0} = \min(i_1, \dots, i_{K_0}). \quad (6.25)$$

Тогда

$$f(x) = Z_{i_{K_0}}(x) f_0(x), \quad (6.26)$$

где $f_0(x) = \prod_{k=1}^{K_0-1} Z_{i_k}(x)$. Пусть x_1^0, x_2^0 и x_3^0 — три наименьших корня $f_0(x)$ и $x_1^0 \leq x_2^0 \leq x_3^0$. Согласно допущению индукции имеем²

$$|f_0(x)| \leq 1 \text{ на }]0, x_3^0]. \quad (6.27)$$

Согласно (6.16) наименьший корень $Z_i(x)$ убывает с возрастанием i . Поэтому (6.25) влечет $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$ и $x_3 = \min(x_3^0, x^{(K_0)})$, где $x^{(K_0)}$ — наименьший корень $Z_{i_{K_0}}(x)$. Имея в виду (6.27) и тот факт, что $|Z_{i_{K_0}}(x)| < 1$ на $]0, x^{(K_0)}]$ (что следует из леммы 6.1 и (6.2)), получаем $|f_0(x)| \leq 1$ и $|Z_{i_{K_0}}(x)| < 1$ на $]0, x_3]$. Отсюда, согласно (6.26), $|f(x)| < 1$ на $]0, x_3]$, и индукционный переход доказан.

Вернемся к базе индукции. Пусть $K = 3$ и $f(x) = \prod_{k=1}^3 Z_{i_k}(x)$. Без ограничения общности допустим, что $i_3 \leq i_2 \leq i_1$. Тогда $f(x) = Z_{i_3}(x) f_0(x)$, где $f_0(x) = Z_{i_2}(x) Z_{i_1}(x)$. Пусть x_1^0, x_2^0 и x_3^0 — три наименьших корня $f_0(x)$, причем $x_1^0 \leq x_2^0 \leq x_3^0$. Рассмотрим три случая.

(а) $i_2 < i_1 - 1$. Тогда, согласно лемме 6.5, $|f_0(x)| < 1$ для всех $x \in]0, x_3^0]$. Теперь, применив доказанный индукционный переход, получаем $|f(x)| < 1$ для всех $x \in]0, x_3]$, что и требовалось доказать.

(б) $i_2 = i_1 - 1$. В этом случае, в силу (6.23), $f_0(x) = Z_{i_2}(x) Z_{i_1}(x) = P_{i_2+i_1}^2(\sqrt{x}) - 1$ (см. также рис. 6.4б), и мы имеем на $]0, x_3^0]$ лишь нестрогое неравенство $|f_0(x)| \leq 1$. Но

¹Как и ранее, копии кратных корней многочлена мы рассматриваем как различные корни.

²Здесь неравенство $|f_0(x)| < 1$ приведено в ослабленной форме для последующего пользования шага индукции в случае, когда строгое неравенство не выполняется.

поскольку случай слабого неравенства $|f_0(x)| \leq 1$ был предусмотрен при доказательстве индукционного перехода (см. (6.27)), этот переход обеспечивает $|f(x)| < 1$ на $]0, x_3]$.

(с) $i_2 = i_1$. В этом случае, согласно лемме 6.1, $f_0(x) = Z_{i_2}^2(x) = P_{2i_2}^2(\sqrt{x})$, и $|f_0(x)| > 1$ не исключено при некоторых $x \in]0, x_3^0]$ (см. рис. 6.4а). Пусть $x^{(i_3)}$ — наименьший корень $Z_{i_3}(x)$. Тогда в силу (6.1) для каждого целого $k > 0$ и $x \in]0, 1]$ получаем

$$P_{2k}^2(\sqrt{x}) = \frac{\sin^2\left((2k+1)\arccos\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{1-\frac{x}{4}} \leq \frac{1}{1-\frac{x}{4}} = 1 + \frac{x}{4-x} \leq 1 + \frac{x}{3}. \quad (6.28)$$

Кроме того, поскольку $x^{(i_3)} \leq 1$, имеет место

$$|Z_{i_3}(x)| \leq |Z_1(x)| = 1 - x \quad \text{для всех } x \in]0, x^{(i_3)}]. \quad (6.29)$$

Действительно, $|Z_{i_3}(0)| = |Z_1(0)| = 1$; согласно (6.9) $|Z_{i_3}(x)|'_{x=0} = -\frac{n(n+1)}{2} \leq -1 = |Z_1(x)|'_{x=0}$. Теперь если предположить, что при некотором $x \in]0, x^{(i_3)}]$ имеет место $|Z_{i_3}(x)| > |Z_1(x)|$, то $|Z_{i_3}(x)|$ на интервале $]0, x^{(i_3)}[$ имеет точку перегиба, что невозможно, поскольку $Z_{i_3}(x)$ имеет i_3 действительных корней и $x^{(i_3)}$ — наименьший из них. Значит, верно (6.29).

Используя (6.28) и (6.29), для каждого $x \in]0, x^{(i_3)}]$ имеем

$$|f(x)| = |Z_{i_3}(x) P_{2i_2}^2(\sqrt{x})| < (1-x)(1+x) < 1.$$

Наконец, из $i_3 \leq i_2 = i_1$ следует $x_3 = x^{(i_3)}$, и следовательно, для всех $x \in]0, x_3]$ имеет место $|f(x)| < 1$.

2. Пункт 2 следует из пункта 1 и леммы 6.6. Лемма 6.8 доказана. \square

Теперь пункт 2 теоремы 6.4 следует из (6.24) и пункта 2 леммы 6.8. \square

Следствие из теоремы 6.4. *Если для двух орграфов кольцевой структуры на n вершинах длины путей i_1, \dots, i_K в разложении $\{(1, n), (n, n-1), \dots, (2, 1)\}$ на пути, связывающие последовательные вершины со степенью захода 1, отличаются лишь порядком путей в разложении, то эти орграфы имеют одинаковые лапласовские спектры.*

С использованием полученных результатов необходимое и достаточное условие существенной цикличности орграфа с кольцевой структурой может быть сформулировано следующим образом.

Орграфы кольцевой структуры Γ_n , состоящие из двух противонаправленных гамильтоновых циклов, в одном из которых удалены некоторые дуги, являются существенно циклическими, за исключением (с точности до изоморфизма) трех орграфов:

- Γ_n^2 , где не удалена ни одна дуга (рис. 6.1b);
- Γ_n' , где удалена одна дуга (рис. 6.1c);
- Γ_n'' , где удалены две наиболее далекие³ друг от друга дуги (рис. 6.3).

³Точный смысл понятия «наиболее далекие» — в теореме 6.3.

Следующая теорема о многочленах Чебышева второго рода является побочным продуктом решения поставленной задачи.

Теорема 6.5. Пусть $h(x) = \prod_{k=1}^K P_{2i_k}(x) + (-1)^p$, где $p \in \{0, 1\}$, $P_{2i_k}(x)$ — многочлены Чебышева второго рода масштабированные на интервале $] -2, 2[$ (см. (6.1)), $K \geq 1$ и $i_k > 0$, $k = 1, \dots, K$. Тогда $h(x)$ имеет только действительные корни тогда и только тогда, когда

- (а) $K = 1$; этими корнями являются $\{\pm 2 \cos \frac{\pi k}{2j+1+(-1)^{k+p}} \mid k = 1, \dots, j\}$, где $j = i_1$, или
 (б) $K = 2$, $i_1 = i_2$ и $p = 1$; этими корнями являются $\{\pm 2 \cos \frac{\pi k}{2j}; \pm 2 \cos \frac{\pi k}{2j+2} \mid k = 1, \dots, j\}$, где $j = i_1$, или
 (с) $K = 2$, $|i_1 - i_2| = 1$ и $p = 0$; этими корнями являются⁴ $\{\pm 2 \cos \frac{\pi k}{2j} \mid k = 1, \dots, 2j - 1\}$, где $j = \max(i_1, i_2)$.

Доказательство. Согласно лемме 6.1 $h(x) = \prod_{k=1}^K Z_{i_k}(x^2) + (-1)^p$. В случае (а), в силу леммы 6.3, $h(x)$ имеет только действительные корни.

Пусть $K = 2$.

Если $|i_1 - i_2| > 1$, то из лемм 6.5 и 6.6 следует, что $h(x)$ имеет хотя бы пару недействительных корней.

Если $i_1 = i_2$ и $p = 1$ (случай (б)), то согласно пункту 1 леммы 6.7 $h(x)$ имеет только действительные корни.

Если $i_1 = i_2$ и $p = 0$, то $h(x) = Z_{i_1}^2(x^2) + 1$ не имеет действительных корней.

Если $|i_1 - i_2| = 1$ и $p = 0$ (случай (с)), то согласно пункту 2 леммы 6.7 $h(x)$ имеет только действительные корни.

Если $|i_1 - i_2| = 1$ и $p = 1$, то, используя обозначение $i = \min(i_1, i_2)$, в силу пункта 2 леммы 6.7 имеем $h(x) = Z_i(x^2)Z_{i+1}(x^2) - 1 = P_{2i+1}^2(x) - 2$. Поскольку $P_{2i+1}^2(x)$ имеет максимум на $]0, 1[$ и на этом интервале

$$P_{2i+1}^2(x) = \frac{\sin^2((2i+2) \arccos \frac{x}{2})}{1 - \frac{x^2}{4}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3},$$

многочлен $h(x)$ имеет хотя бы один отрицательный максимум, следовательно, он имеет хотя бы одну пару недействительных корней.

Наконец, если $K > 2$, то согласно пункту 2 леммы 6.8 $h(x)$ имеет хотя бы два недействительных корня.

Выражение для корней в случае (а) может быть получено с помощью леммы 6.3; в случаях (б) и (с) выражения для корней легко выводятся с использованием тождества $P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) + 1 = P_n^2(x)$ (см. [385, равенство (1.1')]) или леммы 6.7. \square

⁴В этом выражении каждый корень появляется дважды.

6.4. Существенная цикличность взвешенных орграфов

В этом разделе обратимся к задаче характеристики существенно циклических взвешенных орграфов.

Матрицу $L = L(\Gamma) = (\ell_{ij})$ называют лапласовской матрицей взвешенного орграфа Γ со строго положительными весами дуг, если при $j \neq i$ ее элемент ℓ_{ij} равен взятому с минусом весу дуги (i, j) в Γ ($\ell_{ij} = 0$, если Γ не имеет дуги (i, j)), а диагональные элементы L таковы, что сумма элементов каждой строки равна нулю.

Некоторые свойства спектров лапласовских матриц взвешенных орграфов изучались в работах [3, 4, 72, 132, 142], в цитируемых в них статьях, а также в [160], где используется несколько иное определение лапласовской матрицы.

Вначале рассмотрим произвольный взвешенный цикл C_3 на трех вершинах (см. рис. 6.5а). Заметим, что согласно теореме 6.1 невзвешенный ориентированный цикл является существенно циклическим орграфом.

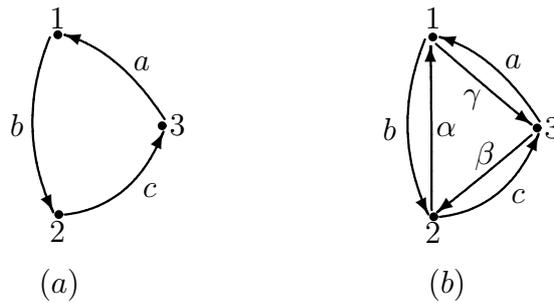


Рис. 6.5. Взвешенные орграфы на трех вершинах: (а) цикл C_3 ; (б) полный орграф K_3 .

Предложение 6.1. *Взвешенный 3-цикл C_3 является существенно циклическим тогда и только тогда, когда квадратные корни из весов его дуг \sqrt{a} , \sqrt{b} и \sqrt{c} удовлетворяют строгому неравенству треугольника, а именно,*

$$\sqrt{a} < \sqrt{b} + \sqrt{c}, \quad \sqrt{b} < \sqrt{a} + \sqrt{c} \quad \text{и} \quad \sqrt{c} < \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Предложение 6.1 следует из теоремы 6.6, которая будет приведена ниже. Оно может быть интерпретировано следующим образом: C_3 — существенно циклический, когда квадратные корни из весов его дуг являются длинами сторон невырожденного треугольника. Несуществование такого треугольника интерпретируется как «разрушение» цикла (цикл становится *несущественным*).

Рассмотрим теперь полный взвешенный орграф без петель на трех вершинах K_3 (рис. 6.5б). Лапласовское характеристическое уравнение этого орграфа

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - b - \gamma & b & \gamma \\ \alpha & \lambda - c - \alpha & c \\ a & \beta & \lambda - a - \beta \end{pmatrix} = 0,$$

приводится к виду

$$\lambda(\lambda^2 - (a + b + c + \alpha + \beta + \gamma)\lambda + (ab + bc + ca + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + a\alpha + b\beta + c\gamma)) = 0.$$

Орграф — существенно циклический тогда и только тогда, когда $D < 0$, где

$$D = (a + b + c + \alpha + \beta + \gamma)^2 - 4(ab + bc + ca + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + a\alpha + b\beta + c\gamma)$$

или, эквивалентно,

$$D = (a - \alpha)^2 - 2(a - \alpha)(b + c - \beta - \gamma) + (b - c - \beta + \gamma)^2.$$

Этот трехчлен от $a - \alpha$ отрицателен если и только если его корни действительны и $a - \alpha$ лежит строго между ними. Корни

$$\begin{aligned} (a - \alpha)_{1,2} &= (b + c - \beta - \gamma) \pm \sqrt{(b + c - \beta - \gamma)^2 - (b - c - \beta + \gamma)^2} \\ &= (b - \beta) + (c - \gamma) \pm 2\sqrt{(b - \beta)(c - \gamma)} \end{aligned} \quad (6.30)$$

действительны и не равны если и только если

$$(b - \beta)(c - \gamma) > 0. \quad (6.31)$$

Пусть необходимое условие существенной цикличности (6.31) выполнено. Рассмотрим сначала случай, когда $b > \beta$ и $c > \gamma$. Тогда корни (6.30) имеют вид

$$(a - \alpha)_{1,2} = (\sqrt{b - \beta} \pm \sqrt{c - \gamma})^2,$$

и неравенство $D < 0$, эквивалентное существенной цикличности K_3 , равносильно

$$\left| \sqrt{b - \beta} - \sqrt{c - \gamma} \right| < \sqrt{a - \alpha} < \sqrt{b - \beta} + \sqrt{c - \gamma},$$

что совпадает со строгим неравенством треугольника для действительных выражений $\sqrt{a - \alpha}$, $\sqrt{b - \beta}$ и $\sqrt{c - \gamma}$.

Случай $b < \beta$ и $c < \gamma$ рассматривается аналогично. В качестве результата получаем следующую теорему.

Теорема 6.6. Пусть $W = \begin{pmatrix} 0 & b & \gamma \\ \alpha & 0 & c \\ a & \beta & 0 \end{pmatrix}$ — матрица весов дуг взвешенного орграфа Γ . Тогда Γ — существенно циклический если и только если выражения $\sqrt{a - \alpha}$, $\sqrt{b - \beta}$ и $\sqrt{c - \gamma}$ или выражения $\sqrt{\alpha - a}$, $\sqrt{\beta - b}$ и $\sqrt{\gamma - c}$ действительны и удовлетворяют строгому неравенству треугольника.

Этот критерий отвечает интуитивному пониманию существенной цикличности.

Отметим, что согласно теореме 6.6 для того, чтобы полный взвешенный орграф на трех вершинах был существенно циклическим, требуется, чтобы он удовлетворял строгому неравенству треугольника, примененному к величинам, относящимся скорее к вершинам, чем к их парам (или дугам). Такая величина в теореме 6.6 есть квадратный корень из разности весов двух дуг, входящих в одну и ту же вершину.

С увеличением числа вершин до четырех проблема характеристики существенной цикличности сразу выходит на иной уровень сложности. Однако при этом некоторые условия существенной цикличности также включают неравенство треугольника для корней из весов дуг.

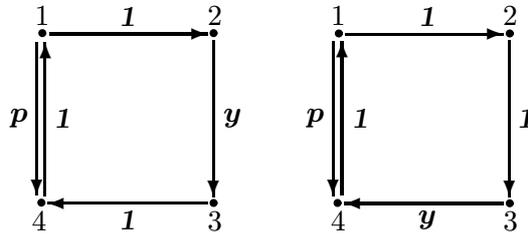


Рис. 6.6. Два коспектральных взвешенных орграфа на четырех вершинах.

Рассмотрим левый взвешенный орграф на рис. 6.6. Отметим, что согласно теореме 6.4 соответствующий ему невзвешенный орграф — существенно циклический. Лапласовское характеристическое уравнение для этого взвешенного орграфа

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - p - 1 & 1 & 0 & p \\ 0 & \lambda - y & y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = 0,$$

так же, как и для второго взвешенного орграфа, показанного на рис. 6.6, имеет вид

$$\lambda(\lambda^3 - (y + q)\lambda^2 + (qy + q)\lambda - (qy + 1)) = 0, \text{ где } q = p + 3.$$

Этот орграф — существенно циклический всегда, когда $D < 0$, где

$$D = \frac{4(b^2 - 3c)^3 - (2b^3 - 9bc + 27d)}{27}, \quad (6.32)$$

$$b = -(y + q), \quad c = qy + q \text{ и } d = -(qy + 1).$$

Подставив выражения для b , c и d в (6.32), получаем

$$D = q(q-4)y^4 - (2q^3 - 8q^2 + 4)y^3 + q(q^3 - 2q^2 - 8q + 6)y^2 - 2q(q+2)(q-3)^2y + (q+1)(q-3)^3. \quad (6.33)$$

Для решения неравенства $D < 0$ относительно y нужно найти действительные корни многочлена (6.33), рассматривая q как параметр. Однако выражения этих корней через q достаточно громоздки, так же, как и обратные выражения q через y .

Например, при $p = 3$, корни уравнения $D = 0$ имеют вид

$$y_{1,2} = \left(37 - Q \pm \sqrt{290 - 36z - 504/z + 3454/Q} \right) / 12,$$

где

$$Q = \sqrt{36z + 145 + 504/z}, \quad z = 0.5 \sqrt[3]{671 + 65\sqrt{65}}.$$

Поэтому маловероятной представляется возможность указания простого (такого, как, например, теорема 6.6) критерия существенной цикличности для орграфов данного типа. Решив соответствующую задачу при $p = 3$ численно, получаем, что орграф является существенно циклическим, т. е. $D < 0$, когда $0.266 < y < 2.441$ (границы — приближенные). Таким образом, существенная цикличность данного орграфа может быть устранена как увеличением, так и уменьшением веса y .

Рассмотрим теперь взвешенный цикл на четырех вершинах с двумя переменными весами дуг (рис. 6.7).

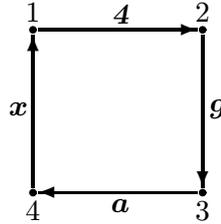


Рис. 6.7. Цикл на четырех вершинах с двумя переменными весами дуг a и x .

Легко найти его лапласовский характеристический многочлен:

$$f(\lambda) = \lambda(\lambda^3 - (13 + x + a)\lambda^2 + (36 + 13x + 13a + ax)\lambda - 36x - 36a - 13ax).$$

Используя формулы решения кубического уравнения, получаем, что граница области на плоскости (a, x) , точки которой соответствуют существенно циклическим орграфам, задается уравнением

$$\begin{aligned} -a^2x^2(x-a)^2 + 26(x+a)(ax(x-a)^2 + 25(x^2+a^2) + 58ax + 900) + \\ + 870a^2x^2 - 241(x^2+a^2)(2ax+25) - 25(x^4+a^4) - 3934ax - 32400 = 0. \end{aligned}$$

Нетрудно установить, что левая часть этого уравнения — многочлен, не являющийся произведением многочленов меньшей степени с рациональными коэффициентами. Решения (a, x) этого уравнения в неотрицательном квадранте показаны на рис. 6.8, где оси масштабированы в единицах \sqrt{a} и \sqrt{x} .

Область, соответствующая существенно циклическим орграфам, закрашена. Ее под-область, показанная темно-серым цветом, есть геометрическое место точек (\sqrt{a}, \sqrt{x}) , для которых квадратные корни из трех меньших весов дуг удовлетворяют неравенству треугольника. Геометрическое место точек (\sqrt{a}, \sqrt{x}) , соответствующих существенно циклическим орграфам, также включает четыре подобласти, показанные светло-серым цветом.

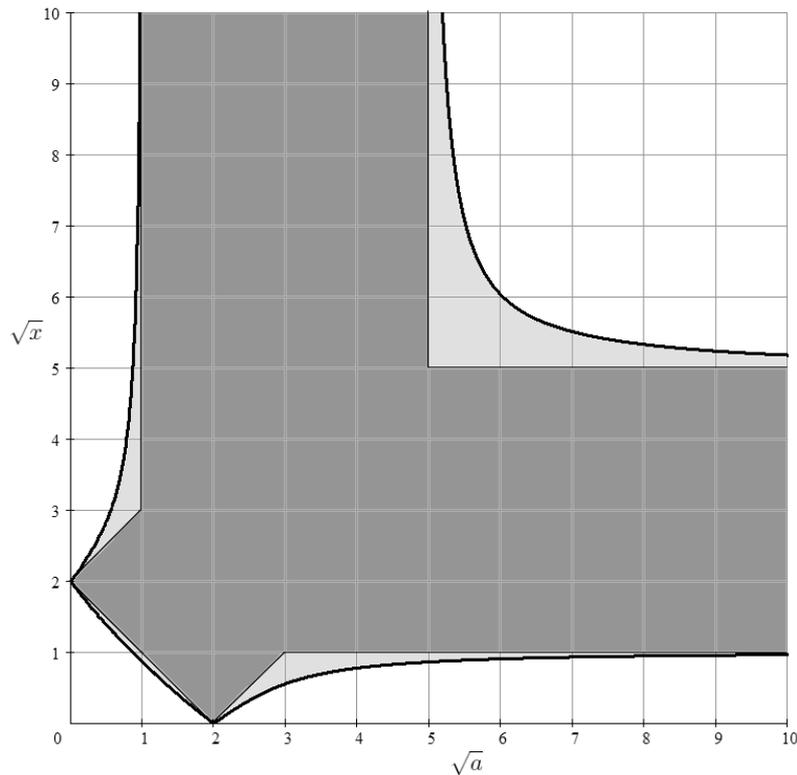


Рис. 6.8. Для взвешенного ориентированного цикла, показанного на рис. 6.7, область, в которой квадратные корни из трех меньших весов дуг удовлетворяют неравенству треугольника, закрашена темно-серым; область, соответствующая существенно циклическим орграфам, есть объединение этой «области неравенства треугольника» и четырех обрамляющих ее областей, закрашенных светло-серым.

Таким образом, для рассматриваемого циклического орграфа неравенство треугольника для квадратных корней из трех наименьших весов дуг — достаточное, но не необходимое условие существенной цикличности. *Критерием* существенной цикличности является *ослабленная* версия неравенства треугольника. Можно показать, что неравенство, задающее область существенной цикличности, переходит в неравенство треугольника для трех наименьших весов дуг, когда вес четвертой дуги (т. е. наибольший вес в орграфе) стремится к бесконечности или же наименьший вес стремится к нулю. Ослабление максимально, когда наибольший вес становится равным второму по величине весу. Наша гипотеза состоит в том, что для класса взвешенных 4-циклов неравенство треугольника для квадратных корней из трех наименьших весов дуг есть достаточное условие существенной цикличности.

Итак, задача характеристики существенно циклических взвешенных орграфов является нетривиальной даже для орграфов на четырех вершинах. Для орграфов с большим числом вершин сложность ее увеличивается.

6.5. Подсчет числа остовных деревьев и нахождение спектра цикла

В этом разделе, завершающем главу 6, применим многочлены Чебышева второго рода для решения двух задач, связанных с графами кольцевой структуры: задачи подсчета числа остовных деревьев и задачи вычисления спектра неориентированного цикла.

6.5.1. О числе остовных деревьев в орграфах с кольцевой структурой

Согласно матричной теореме о деревьях (см., например, теорему VI.27 в [49] или теорему 16.9' в [52]) для любого орграфа Γ алгебраическое дополнение каждого элемента i -й строки лапласовской матрицы равно числу остовных деревьев, входящих в вершину i . Число всех входящих деревьев равно сумме алгебраических дополнений элементов любого столбца матрицы L .

Тем самым матричная теорема о деревьях дает общий подход к нахождению числа входящих остовных деревьев в орграфе и числа остовных деревьев в неориентированном графе. Применительно к некоторым специальным классам графов этот подход приводит к явным формулам, которые могут быть получены с помощью многочленов Чебышева второго рода. В [105] данный метод был применен для колеса, веера, лестницы Мебиуса и некоторых других типов графов. В [412] многочлены Чебышева были использованы для получения явных выражений количеств остовных деревьев для различных классов циркулянтных графов. Применим результаты настоящей работы для вычисления числа остовных деревьев в орграфах с кольцевой структурой.

Через t_i^n обозначим число остовных входящих деревьев в орграфе с лапласовской матрицей L_n'' (см. (6.15), где i — параметр). Суммируя алгебраические дополнения элементов последнего столбца L_n'' и учитывая, что (1) $\det M_n = (-1)^n Z_n(0) = (-1)^n P_{2n}(0) = 1$, (2) $P_n(x) = \det(xI - C_n)$, где

$$C_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(см, например, [43, теорема 1.11]), и (3) $P_k(2) = k + 1$ (значение, равное пределу снизу выражения (6.2) в точке $x = 2$), получаем следующее представление для t_i^n :

$$t_i^n = \sum_{k=0}^{i-1} P_k(2) + \sum_{k=0}^{n-i-1} P_k(2) = \frac{1}{2}(n + i^2 + (n - i)^2). \quad (6.34)$$

Поскольку t_i^n равно произведению ненулевых собственных значений матрицы L_n'' , для нетривиальных орграфов с кольцевой структурой, имеющих чисто действительный спектр, соотношение (6.34) и теорема 6.3 позволяют получить следующие выражения для t_i^n (и одновременно — тригонометрические тождества):

$$t_{n/2}^n = \left(\prod_{k=1}^{n/2-1} 2 \cos \frac{\pi k}{n} \prod_{k=1}^{n/2} 2 \cos \frac{\pi k}{n+2} \right)^2 = \frac{n(n+2)}{4}, \text{ если } n \text{ четно};$$

$$t_{(n-1)/2}^n = t_{(n+1)/2}^n = \left(\prod_{k=1}^{(n-1)/2} 2 \cos \frac{\pi k}{n+1} \right)^4 = \frac{(n+1)^2}{4}, \text{ если } n \text{ нечетно}.$$

6.5.2. О выводе формулы для спектра неориентированного цикла

Пусть L_n^c — лапласовская матрица неориентированного цикла на n вершинах. Специальной нумерацией вершин графа можно представить L_n^c в виде матрицы, отличающейся от M_n (6.7) лишь одним элементом $(1, 1)$, который в L_n^c равен 1.

Разложив $\det(\lambda I - L_n^c)$ по первой строке и используя (6.8), лемму 6.1, и (6.6), для всех $\lambda \in]0, 4]$ получаем

$$\begin{aligned} \Delta_{L_n^c}(\lambda) &= (\lambda - 1)Z_{n-1}(\lambda)Z_{n-2}(\lambda) = Z_n(\lambda) + Z_{n-1}(\lambda) = P_{2n}(\sqrt{\lambda}) + P_{2(n-1)}(\sqrt{\lambda}) \\ &= \sqrt{\lambda} P_{2n-1}(\sqrt{\lambda}) = \lambda \prod_{k=1}^{n-1} \left(\lambda - 4 \cos^2 \frac{\pi k}{2n} \right) = \prod_{k=1}^n \left(\lambda - 4 \cos^2 \frac{\pi k}{2n} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, корни $\Delta_{L_n^c}$ имеют вид $4 \cos^2 \frac{\pi k}{2n}$, $k = 1, \dots, n$. Очевидно, $4 \sin^2 \frac{\pi k}{2n}$, $k = 0, \dots, n-1$ — иное представление того же спектра. Последнее выражение было выписано «в готовом виде» и затем доказано в [180] и [80]. Проведенная выше редукция к многочленам Чебышева показывает, как можно *вывести* этот результат. Иной вывод может быть получен с помощью пункта 1 теоремы 6.1 и представления $C = \vec{C} \cup \vec{C}^{n-1}$, где \vec{C} — направленный цикл, а \vec{C}^{n-1} — его $(n-1)$ -я степень. О связи характеристических многочленов матриц *смежности* с многочленами Чебышева см. [2], [56, § 2.6].

Заключение к главе 6

В данной главе рассмотрена задача характеризации существенно циклических орграфов, т. е. задача об условиях действительности лапласовского спектра орграфов. Для невзвешенных орграфов с кольцевой структурой эту задачу удалось решить полностью: см. необходимое и достаточное условие существенной цикличности в разделе 6.3.4. Для некоторых других орграфов это исследование было продолжено в [261].

Для произвольных взвешенных орграфов с кольцевой структурой рассматриваемая задача оказалась весьма трудной. Ее полное решение для случая трех вершин формулируется в терминах неравенства треугольника для квадратных корней из разностей весов

дуг (теорема 6.6). Интерпретация данного результата подтверждает естественность понятия существенной цикличности. Согласно этой интерпретации невыполнение неравенства треугольника «разрушает» 3-цикл, т. к. один из его элементов «перевешивает» сумму двух оставшихся.

Для взвешенных орграфов с большим числом вершин получить необходимое и достаточное условие существенной цикличности пока не удалось. Рассмотрение взвешенных циклов на четырех вершинах позволяет сформулировать гипотезу, согласно которой для таких циклов достаточным условием существенной цикличности является строгое неравенство треугольника для квадратных корней из трех меньших весов дуг.

Кроме того, в данной главе для нетривиальных орграфов с кольцевой структурой, имеющих чисто действительный спектр, найдены количества остовных входящих деревьев, а также указан способ вывода формулы лапласовского спектра неориентированного цикла с применением многочленов Чебышева.

Побочным продуктом полученных результатов стала теорема 6.5 о действительности корней многочленов, на 1 отличающихся от произведений многочленов Чебышева второго рода.

Глава 7

Меры связанности вершин графов, их свойства и характеристические условия

В данной главе вводятся нормативные свойства показателей связанности вершин мультиграфов и мультиорграфов. Эти нормативные свойства задают одну из возможных формализаций понятия близости вершин. Рассматривается ряд естественных показателей связанности, а именно, показатель, двойственный классическому расстоянию на графе, путевая достижимость, надежность связи, максимальный поток/минимальный разрез, маршрутная достижимость. Показатели протестированы на выполнение введенных нормативных условий. В первом разделе рассмотрены некоторые приложения данной теории. Глава написана в основном по результатам работ [67–69, 148]. Эти результаты, в частности, использовались в [130, 155–157, 171, 187, 190, 191, 206, 218, 220, 243, 245, 248, 250, 269, 307, 333–336, 352, 357, 400]. Алгебраические индексы, соответствующие матричной теореме о лесах, будут рассмотрены в главе 8.

7.1. О приложениях структурных индексов графов

В данном разделе обсуждается ряд задач, требующих введения показателей связанности вершин, а также других структурных индексов графов и сетей.

7.1.1. Транспортные сети

Показатели связанности вершин графов широко используются при анализе и планировании транспортных сетей. Транспортная магистраль между двумя пунктами характеризуется набором параметров, к числу которых относятся пропускная способность, загруженность в каждом из направлений в разное время суток и в разные дни недели, ограничения по движению определенных видов транспорта, качество покрытия, развитость инфраструктуры (заправочные станции, пункты автосервиса, магазины). К задачам, которые необходимо решать, относятся планирование развития дорожной сети, определение ее эффективности и «слабых мест», планирование маршрутов общественного транспорта [197, 198, 216, 321, 373]. Для решения последней задачи используются данные о пассажиропотоках, которые, как и ряд других характеристик сети, могут быть представлены весами ребер оргграфов.

Не меньшее значение имеют «обратные» задачи, в частности: что произойдет с нагрузкой на транспортную сеть при планируемых изменениях инфраструктуры? Еще один

важный класс задач — оценка влияния положения в транспортной сети на демографические и социальные характеристики населенных пунктов. Близкая задача — построение моделей влияния транспортных факторов на стоимостные показатели: цену земли, налог на землю, арендную плату и др. Все эти задачи являются составными частями общей проблемы планирования развития регионов с учетом всего комплекса технических, экономических, социальных и демографических факторов. Ясно, что для многих возникающих при этом сетевых задач едва ли возможно построить точные математические модели. Поэтому алгебраические индексы, выражающие связанность, близость, центральность и т. д., приходится выбирать до определенной степени эвристически. Для правильного выбора этих индексов большое значение имеет знание их топологических свойств и взаимосвязей с моделями. Некоторые из таких свойств исследуются в этой и следующей главах. Еще одна возможная область применения этих результатов — планирование компьютерных сетей (включая Интернет).

В данной книге эти задачи не формулируются подробно, поскольку основным ее содержанием являются математические результаты. В то же время реальные проблемы, связанные с планированием транспортных сетей, как правило, не имеют достаточно адекватной локальной математической формулировки. Поэтому в данной книге большее внимание уделяется другим приложениям, где меньше дистанция между «рафинированными» математическими формулировками и реальными задачами.

7.1.2. Химическая информатика, наукометрия, семантические сети

Имеется большое число работ, посвященных применению топологических индексов графов в органической химии (см. также раздел 5.1). Основательный обзор этого направления в свое время был дан в [48]. Ряд подходов, развитых в следующее десятилетие, описан в [237]. Для знакомства с современным состоянием дел в этой области можно порекомендовать № 2 тома 59 (2008 г.) журнала *MATCH: Communications in mathematical and in computer chemistry*, целиком посвященный данной проблематике.

Топологические индексы графов используются в органической химии для решения следующих задач: 1) тестирование сложных органических молекул на изоморфность; 2) различение положения атомов в структуре молекул; 3) построение численных характеристик молекул, выражающих их структуру и коррелирующих с физико-химическими свойствами веществ.

Известные инварианты графа можно разделить на две группы. Инварианты первой группы — это векторы, компоненты которых характеризуют вершины графа, поэтому они могут служить как для распознавания неизоморфных графов, так и для различения топологически неэквивалентных вершин графа. Инварианты второй группы содержат интегральную информацию обо всех вершинах и дугах графа и могут использоваться как

предварительный фильтр при проверке пар графов на изоморфизм. К инвариантам первой группы относятся индексы вершин, используемые для нахождения группы симметрии графа, максимального общего подграфа, компоненты собственного вектора, соответствующего максимальному собственному значению матрицы смежности и др.

В ряде работ рассматривалось применение *метрических инвариантов* графа, т. е. инвариантов, основанных на вычислении расстояний между вершинами. Так, Рандич и Уилкинс (ссылки приведены в [47, 48]) в свое время предложили характеризовать каждый атом в молекуле числом путей различной длины, начинающихся в соответствующей вершине графа. Ряд авторов использовали разбиение вершин на классы эквивалентности по значениям межвершинных расстояний. В связи с тем, что отдельный инвариант, как правило, не обеспечивает различения всех неэквивалентных вершин, были предложены различные наборы инвариантов.

Среди инвариантов второй группы (интегральных характеристик графов) большее распространение получил характеристический полином матрицы смежности, вопросы применимости которого для различения химических графов весьма широко обсуждались в литературе. Предложен также ряд интегральных показателей, построенных на основе метрических характеристик графа. Например, — вектор и матрицы количеств путей различной длины между атомами в молекуле.

Сравнительный анализ предложенных подходов показывает, что лучше всего для решения перечисленных задач подходят индексы, выражающие степень связанности вершин и индексы, производные от них. Один из таких подходов был предложен в 90-е годы Клейном и Рандичем [237, 239]. Отметим его эквивалентность подходу, разработанному в теории социальных сетей Стефенсоном и Зеленом [370] и развитому Альтманом [77] применительно к моделированию распространения заболеваний. Этот подход связан с вычислением меры связанности вершин графов, в данной книге называемой *доступностью по субмаксимальным лесам*. Другой замечательный подход — метод моментов Голендера, Дрбоглава и Розенблита [200], тесно связанный с показателем *относительной лесной доступности*, подробно анализируемым в главе 8.

В работе [30] было проведено экспериментальное исследование эффективности топологических индексов для идентификации химических структур. Изучено 19 индексов, включая индексы Винера, Гутмана, Рандича, Бончева, Балабана, три индекса метода потенциалов и др. Эффективность индексов оценивалась по ряду критериев, включающих долю различных значений индекса в большом массиве неизоморфных структур и вычислительные затраты по сравнению с прямой проверкой неизоморфности. В исследовании были использованы несколько массивов неизоморфных структур: 1) 424 графа — ациклических, моно- и бициклических; 2) 800 изомеров, имеющих бициклическую структуру; 3) 2000 изомеров пятициклической структуры.

По результатам этих экспериментов, наибольшей чувствительностью и эффективностью обладают индексы на основе метода потенциалов. Кроме того, в рамках этого метода

разработана методика подбора весов атомов и связей с помощью алгоритмов нелинейной оптимизации, позволяющая аппроксимировать различные зависимости типа «структура–свойство». Проведены эксперименты [31] по аппроксимации значений коэффициента распределения в системе октанол–вода и других показателей в различных рядах химических соединений.

Традиционно в тесной связи с химической информатикой разрабатывались сетевые модели в наукометрии — содержательно весьма далекой от органической химии области. Здесь речь идет главным образом о двух проблемах. Первая связана с семантическими сетями, узлами которых служат научные направления, проблемы и понятия. Целями является составление рубрикаторов и классификаторов, включая библиографические, определение близости их элементов, их кластеризация и т. п. Второе направление — изучение сетей цитирования: элементы сетей — отдельные авторы, научные школы, журналы, научные парадигмы (см., например, [300]). В последние годы быстро развиваются сетевые рекомендательные системы [190, 192, 201, 333], в частности, реализованные как интернет-сервисы, а также словарные сетевые системы [319]. Очень большое внимание уделяется проблеме ранжирования интернет-страниц, найденных поисковой машиной по пользовательскому запросу (см., например, [76, 254]). Исходные данные при этом представляются ориентированным графом ссылок страниц друг на друга.

Причина тесной связи семантических сетей и химической информатики отчасти в том, что в химии всегда очень остро стояла проблема классификации, и в силу этого интенсивно разрабатывался соответствующий аналитический аппарат.

Отметим в заключение этого раздела, что задача построения алгебраических индексов, коррелирующих с свойствами веществ, будет решаться эффективнее, если исследователям будут известны «отклики» индексов на изменения топологии графов. Поскольку накоплено немало фактов о взаимосвязи свойств веществ и наличия определенных структурных элементов и особенностей молекул, задача состоит в том, чтобы «вооружиться» индексами, чувствительными к указанным элементам и особенностям. Некоторые из полученных нами результатов уже нашли применение в наукометрии [218, 365] и теории семантических сетей (например, [190, 192, 201, 333]), в химической и биологической информатике [194, 238], в задачах прогнозирования новых связей в графах [92, 194, 246–248, 250, 266, 267, 413].

7.1.3. Социальные сети

Термин «социальные сети», исходно звучавший по-русски несколько непривычно, в последние годы прочно вошел в обиход — во многом, благодаря развитию Интернета. Соответствующий англоязычный термин “social networks” обозначает направление, динамично развивающееся уже в течение сорока лет. Для этого направления характерно применение единого « сетевого » подхода к социальным явлениям, изучаемым в рамках различных

научных дисциплин. К числу таких дисциплин относятся, в частности,

1) политология и политическая социология, т. е. исследование взаимоотношений государств и субъектов общественных отношений — партий и других организаций, структур гражданского общества;

2) исследование взаимоотношений между индивидами и подразделениями в фирмах и других организационных структурах (распределение власти, взаимодействие, потоки информации, документов и ресурсов); оценка эффективности структур и их оптимизация;

3) социология малых групп, социометрия — изучение взаимоотношений, влияния, социальной поддержки, взаимодействия в группах; аналогичные задачи решаются и в биологии;

4) эпидемиология (исследование распространения заболеваний); предметом наибольшего числа работ здесь является распространение ВИЧ.

В 90-е и 2000-е гг. вышел ряд обзоров (с многими сотнями ссылок) и монографий по социальным сетям; из сравнительно ранних источников можно назвать [89, 114, 196, 217, 301, 302, 326, 390]. Новый импульс это направление получило с созданием социальных сетей в интернете. К проблематике социальных сетей близко примыкают структурные проблемы антропологии, которым посвящена монография [208].

Для всех перечисленных направлений исследований большую роль играют топологические индексы графов и сетей, которые из-за отсутствия точных математических моделей часто выбираются эвристически. Поэтому анализ свойств этих индексов здесь весьма важен.

Напомним, что важным приложением показателей близости вершин графов является также проблема агрегирования неполных предпочтений, рассмотренная в [61, 146, 150, 154].

7.1.4. Структурные индексы графов в социометрии

Задача социометрии — изучение структуры малых социальных групп по заданным на них отношениям (как правило, бинарным; нередко — взвешенным). Под малыми социальными группами понимают группы, в которых общественные отношения выступают в форме личных контактов или, проще говоря, это естественные общности, где все друг друга знают. Бинарное отношение может быть получено в результате социометрического опроса. Например, каждого члена коллектива спрашивают, кому он симпатизирует (а кому — нет), или с кем чаще всего проводит свободное время, или с кем *предпочел бы* заниматься определенной деятельностью (работа, отдых, «идти в разведку»), или кто, по его мнению, обладает определенными качествами. Если член группы i , отвечая на вопрос, указал (в числе прочих) j , то в оргграфе проводится дуга от i к j . Объективная информация (контакты, «горизонтальные» связи по работе и т. п.) во многих случаях представляется неориентированными графами. Если задается несколько однотипных вопросов или респондентов просят высказать предположения об ответах остальных («автосоциометрические»

данные), моделью могут служить мультиграфы и мультиорграфы. Близкая проблематика — политологические исследования, где субъекты отношений не члены группы, а страны или партии.

Требования к структурным индексам в этих областях различны, и построить аксиоматику алгебраических индексов для всех типов отношений едва ли возможно. Более реалистичен другой подход: собрать совокупность («библиотеку») структурных индексов с изученными свойствами, и в каждом приложении использовать те индексы, свойства которых наиболее адекватны специфике задачи.

Индексы, традиционно используемые в социологии, довольно просты. Так *социометрический статус* i -го члена группы есть нормированная полустепень захода (число входящих дуг) i -й вершины, *психологическая экспансивность* — нормированная полустепень исхода, *степень взаимности выбора* i — нормированное число пар встречных дуг, инцидентных i [42]. *Плотность* и *сплоченность* группы получаются усреднением соответственно социометрического статуса и степени взаимности по всей группе. *Неоднородность* группы измеряют эмпирической дисперсией статусов. Недостаток этих простейших индексов — их *локальность*. Так, в [42] приводятся примеры существенно различных структур с одинаковыми значениями индексов и отмечается, что осмысленными были бы индексы, более тонко отражающие свойства структуры *как целого* и роль каждого актора в этой структуре.

Более чувствительны показатели, основанные на измерении положения вершины графа суммой длин (или обратных им величин) ведущих в нее путей из всех других вершин [54]. Однако и здесь характеристика члена группы часто не меняется при изменении связей других членов, а это не всегда согласуется с интерпретацией моделируемых понятий. Кроме того, характеризуя близость двух членов группы, нередко важно учесть не только длину кратчайшего пути между ними, но и количества путей различной длины.

Еще одна идея, используемая при построении социометрических индексов, — измерение сплоченности группы числом дуг (ребер) в минимальном разрезе, т. е. минимальным числом связей, удаление которых нарушает связность графа. *Устойчивостью* (*живучестью*) группы иногда называют нормированное минимальное число вершин соответствующего графа, удаление которых (вместе с инцидентными им дугами) приводит к несвязности графа. Одна из проблем (наряду с вычислительной), связанная с использованием таких индексов, в том, что граф может быть несвязным с самого начала. В этом случае можно находить минимальное число связей, удаление которых приводит к *увеличению* числа компонент связности. Заметим, что значения этих индексов определяются лишь «самыми тонкими местами» его компонент связности, т. е. такие показатели безразличны к силе связей в местах «менее тонких».

Выше перечислены лишь некоторые предметные области, где применяются структурные индексы графов. Среди других областей в которых они также применяются, можно указать обработку спортивных турниров, анализ потребительского спроса, биометрику,

теорию параллельных вычислений и баз данных.

В настоящей главе изучаются свойства ряда чувствительных структурных индексов графов. Индексы из предложенного автором семейства, связанного с матричной теоремой о лесах, рассматриваются в главе 8.

7.2. Нормативные свойства показателей связанности

Сформулируем ряд условий, выполнение которых представляется достаточно естественным для показателей близости вершин мультиграфов (мультиорграфов). Большинство из них были введены в работе [67]. Через $P = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ будем обозначать матрицу, интерпретируемую как матрица близости (связанности, достижимости) вершин мультиграфа (мультиорграфа) с n вершинами.

Симметричность. *Для любого мультиграфа матрица P симметрична.*

Это свойство не является естественным для ориентированных графов. Ниже всюду, где говорится о симметричности, предполагается, что мультиграф — неориентированный.

Неотрицательность. *Для любого мультиграфа (мультиорграфа) $p_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, \dots, n$.*

Обратимость. *Для любого мультиорграфа обращение всех его дуг (при сохранении их весов) приводит к транспонированию матрицы близости.*

Диагональное превосходство. *Для любого мультиграфа (мультиорграфа) и любых $i, j = 1, \dots, n$ при $i \neq j$ имеет место $p_{ij} < p_{ii}$ и $p_{ij} < p_{jj}$.*

Это свойство состоит в более сильной связанности каждой вершины с ней самой, чем с любой другой вершиной. Если показатель близости обладает свойством обратимости, то два неравенства, составляющие диагональное превосходство, эквивалентны даже в случае ориентированных графов. Поскольку все изучаемые показатели, применимые к ориентированным графам, «обратимы», мы будем доказывать только первое неравенство.

Неравенство треугольника для близостей. *Для любого мультиграфа и для любых $i, j, k = 1, \dots, n$ имеет место $p_{ij} + p_{ik} - p_{jk} \leq p_{ii}$. Если, к тому же, $j = k$ и $i \neq j$, то неравенство строгое.*

Положив в неравенстве треугольника для близостей $k = i$, убеждаемся, что его следствием является симметричность: $p_{ij} = p_{ji}$, $i, j = 1, \dots, n$. Симметричность показателя близости естественна лишь для неориентированных графов, поэтому неравенство треугольника для близостей будем рассматривать также лишь в неориентированном случае.

Изменением порядка индексов (p_{ji} вместо p_{ij} и т. п.) можно получить варианты неравенства треугольника для близостей, применимые в случае ориентированных графов. Таких вариантов два: $p_{ii} - p_{ij} \geq p_{ki} - p_{kj}$ и $p_{ii} - p_{ji} \geq p_{ik} - p_{jk}$. В настоящей работе они подробно не рассматриваются, и речь идет только о приведенном выше «неориентированном» неравенстве треугольника для близостей.

В дальнейших формулировках предполагается (и это вполне естественное формальное соглашение), что из любой вершины имеется путь длины 0 в себя.

Условие несвязности. Для любого мультиграфа (мультиорграфа) и любых $i, j = 1, \dots, n$ $p_{ij} = 0$ если и только если не существует путей из i в j .

Условие связности (следствие условия несвязности). 1) Для любого мультиграфа матрица P приводима к блочно-диагональному виду, где все элементы блоков строго положительны, а все элементы вне блоков — нули. Матрица P строго положительна тогда и только тогда, когда G связан. 2) Для любых $i, j, k \in V(G)$, если $p_{ij} > 0$ и $p_{jk} > 0$, то $p_{ik} > 0$.

Следующее условие есть, по сути, обобщение «диагонального превосходства».

Транзитность. Для любого мультиграфа (мультиорграфа) и любых его вершин i, k, t , таких что $i \neq k \neq t$, если мультиграф (мультиорграф) содержит путь из i в k , и каждый путь из i в t включает k , то $p_{ik} > p_{it}$.

Монотонность. Пусть вес некоторого ребра (дуги) ε_{kt}^p в мультиграфе G (мультиорграфе Γ) увеличился или к нему было добавлено новое ребро (дуга) между k и t . Тогда:

1) $\Delta p_{kt} > 0$, и для любых $i, j = 1, \dots, n$, если $\{i, j\} \neq \{k, t\}$ в G ($(i, j) \neq (k, t)$ в Γ), то $\Delta p_{kt} > \Delta p_{ij}$;

2) для любых $i = 1, \dots, n$, если существует путь от i до k , и каждый путь от i до t включает k , то $\Delta p_{it} > \Delta p_{ik}$;

3) для любых $i_1, i_2 = 1, \dots, n$, если i_1 и i_2 могут быть подставлены на место i в посылку пункта 2, то $p_{i_1 i_2}$ не увеличивается.

У этого условия много общего с одноименным свойством метода обобщенных сумм очков для агрегирования предпочтений [146]. Пункт 3 «монотонности» интерпретируются так: близость между парой вершин не увеличивается, когда усиливаются существующие или появляются новые «внешние» для рассматриваемого соединения связи.

7.3. Исследование простейших показателей связанности вершин графов

В данном разделе рассматриваются несколько естественных показателей связанности вершин мультиграфов (мультиорграфов) и изучаются их свойства.

7.3.1. Путевая достижимость

Простейшим показателем близости вершин графа, учитывающим не только кратчайший путь между ними, но и более длинные пути, является *путевая достижимость*. Путевая достижимость вершины j из вершины i определяется как суммарный вес всех путей из i в j . Есть две основные возможности определения этого показателя при $j = i$. Во-первых, путями из i в i можно считать все простые циклы из i в i плюс путь длины 0, вес которого принимается равным 1. Вторая возможность — считать, что из i в i существует только один тривиальный путь длины 0 с весом 1. Если же не учитывать тривиальный путь, то будет нарушено диагональное превосходство. Мы воспользуемся первым определением (дающим больше информации и, на наш взгляд, более логичным), но всё, что будет сказано, будет приложимо и ко второму определению.

Данный показатель может интерпретироваться как близость, только если короткий путь получает больший вес, чем содержащий его длинный. Если под весом пути понимается произведение весов входящих в него ребер/дуг (наиболее распространенный и достаточно осмысленный подход), для этого необходимо, чтобы веса принадлежали отрезку $[0, 1]$. Данный показатель (как и все последующие) лучше всего подходит для моделей, где вес ребра (дуги) интерпретируется как его «коэффициент передачи», выражающий ослабление «влияния» вершины в результате удаления от нее по этому ребру (дуге). В некоторых случаях (когда исходно веса превосходят 1) к такой модели можно перейти домножением исходного веса каждого ребра (дуги) на постоянную величину $\tau < 1$, т. е. определив вес пути как $\prod(\tau \varepsilon(e))$, где произведение берется по всем ребрам (дугам) e в пути. Аналогично каждому ребру (дуге) *невзвешенного* графа может быть присвоен вес $\tau \leq 1$. Далее, говоря о весах ребер (дуг), мы будем иметь в виду в частности и веса, модифицированные (полученные) таким образом. Для выбора τ нужно оценить, во сколько раз две вершины, соединенные одним ребром с весом 1, «ближе», чем две вершины, соединенные путем из двух таких ребер. Если ответ — «в два раза», то $\tau = 1/2$. Тогда пути длины 3 будет соответствовать ослабление «близости» в 4 раза по сравнению с путем длины 1, а пути длины 4 — в 8 раз. Если более естественными кажутся соответственно коэффициенты ослабления 3 и 4, то нужно выбрать иную модель, которую также нетрудно построить. В ней величина, обратная весу пути, есть сумма величин, обратных весам входящих в него ребер (не «геометрическое», а «гармоническое» ослабление). Базовым понятием такой модели, является расстояние, а за близость принимается величина, обратная ему. Эта

модель, безусловно, интересна и в определенных случаях естественна, но отличается от тех, что рассмотрены далее. Некоторые ее свойства обсуждаются в [77, 236].

Пусть P — матрица *путевых достижимостей* мультиграфа G (мультиорграфа Γ).

Теорема 7.1. *Путевая достижимость обладает следующими свойствами: симметричность, неотрицательность, обратимость, условие несвязности. Кроме того, если при всех $i, j = 1, \dots, n$ и $p \leq t$ выполняется $\varepsilon_{ij}^p < \varepsilon_0$ (где t — максимально возможное число кратных ребер (дуг), а ε_0 — некоторая константа, зависящая от n и t), то справедливы диагональное превосходство, неравенство треугольника для близостей (в случае мультиграфов), транзитность и монотонность.*

Отметим, что поскольку интерес представляют изменения значений близости при модификациях графов, ограничения на веса ребер (дуг) вводятся не для индивидуального графа, а для семейства, характеризующегося значениями n и t .

Доказательство теоремы 7.1. *Симметричность, неотрицательность, обратимость и условие несвязности* выводятся непосредственно из определения путевой достижимости. Для доказательства других свойств найдем ε_0 , гарантирующее, что в случае, когда веса всех ребер (дуг) меньше ε_0 , $p_{ij} < 1$ при всех i и $j \neq i$. Напомним, что t — максимально возможное число ребер (дуг), инцидентных паре вершин. Заметим, что если мультиграф полон (т. е. каждой паре вершин инцидентно t ребер), и веса всех ребер равны ε , то при $j \neq i$ $p_{ij} = \sum_{k=1}^{n-1} A_{n-2}^{k-1} (\varepsilon t)^k$, где A_{n-2}^{k-1} — число размещений из $n-2$ по $k-1$. Приравняв эту величину к единице, в качестве ε_0 выберем положительный корень полученного уравнения. Далее будем предполагать $\varepsilon_{ij}^p < \varepsilon_0$ для всех весов ребер ε_{ij}^p . Поскольку p_{ij} максимально в полном мультиграфе, это гарантирует

$$p_{ij} < 1, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j \quad (7.1)$$

для всех взвешенных мультиграфов на n вершинах с числом кратных ребер (дуг) не выше t . То же ограничение, очевидно, получаем для весов дуг мультиорграфов.

Диагональное превосходство следует из (7.1) и того факта, что $p_{ii} \geq 1$.

Докажем *неравенство треугольника для близостей* в случае мультиграфов. При $i = j$ или $i = k$ неравенство обращается в равенство. Пусть $i \neq j$, $i \neq k$. Заметим, что в случае, если все пути из j в k проходят через i , $p_{jk} = p_{ji} p_{ik}$, а если это не так, то $p_{jk} \geq p_{ji} p_{ik}$. Пусть C — суммарный вес простых циклов из i в i , тогда $p_{ii} = 1 + C$. Используя (7.1), получаем неравенство треугольника для близостей:

$$p_{ij} + p_{ik} - p_{jk} - p_{ii} \leq p_{ji} + p_{ik} - p_{ji} p_{ik} - 1 - C = -(1 - p_{ji})(1 - p_{ik}) - C < 0.$$

Для доказательства *транзитности* заметим, что $p_{it} = p_{ik} p_{kt}$, и, используя (7.1), имеем $p_{it} < p_{ik}$.

Докажем *монотонность*. Пункт 1. Пусть $\Delta\varepsilon_{kt}$ — приращение веса ребра или вес нового ребра между k и t . Тогда $\Delta p_{kt} = \Delta\varepsilon_{kt} > 0$. Покажем, что при весах ребер, меньших ε_0 , и при $\{i, j\} \neq \{k, t\}$ имеет место $\Delta p_{ij} < \Delta\varepsilon_{kt}$. Если $i = k$, то $\Delta p_{ij} = \Delta p_{kj} \leq \Delta\varepsilon_{kt} p_{tj}$, и требуемое следует из (7.1). Случаи $i = t, j = k$ и $j = t$ аналогичны. Осталось рассмотреть случай $\{i, j\} \cap \{k, t\} = \emptyset$, в котором $n \geq 4$. Очевидно, $\Delta p_{ij} = \Delta\varepsilon_{kt} w$, где w — суммарный $\overline{(k, t)}$ -вес путей из i в j , содержащих новое (или измененное) ребро (k, t) , где под $\overline{(k, t)}$ -весом пути понимается произведение весов всех его ребер, за исключением ребра (k, t) . Докажем, что $w < 1$. Очевидно, w максимально в полном мультиграфе, где, как нетрудно убедиться, $w = 2 \sum_{k=2}^{n-2} (k-1) A_{n-4}^{k-2} (\varepsilon_0 m)^k$. Покажем, что в этом случае w меньше величины $p = \sum_{k=1}^{n-1} A_{n-2}^{k-1} (\varepsilon_0 m)^k$ близости несовпадающих вершин в полном мультиграфе, которая по определению ε_0 равна 1. Сравним коэффициенты при равных степенях $\varepsilon_0 m$ в выражениях w и p . Нетрудно проверить, что неравенство $2(k-1) A_{n-4}^{k-2} \geq A_{n-2}^{k-1}$ имеет единственным решением $n = 4, k = 2$. Таким образом, для случая $n > 4$ утверждение доказано. Наконец, при $n = 4$ имеем $p = \varepsilon_0 m + 2(\varepsilon_0 m)^2 + 2(\varepsilon_0 m)^3$, $w = 2(\varepsilon_0 m)^2$, и также $w < p$. Для мультиорграфов доказательство проводится аналогично.

Пункт 2. Утверждение следует из того, что $\Delta p_{ik} = 0$ и $\Delta p_{it} > 0$.

Пункт 3. Имеем $\Delta p_{i_1 i_2} = 0$, так как ребро (дуга) (k, t) не лежит ни на одном пути между i_1 и i_2 . \square

7.3.2. Надежность связи как мера связанности вершин

Предположим, как и ранее, что все веса ребер (дуг) принадлежат отрезку $[0, 1]$, и будем интерпретировать их как *вероятности исправности* ребер (дуг). Пусть p_{ij} — надежность связи i и j , т. е. вероятность наличия хотя бы одного исправного пути между i и j при условии независимости выхода из строя ребер (дуг); $P = (p_{ij})$ — матрица надежности связей пар вершин. Надежность связи можно рассматривать как показатель близости вершин. Укажем привлекательные стороны этого показателя. Во-первых, ему соответствует наглядная математическая модель, описывающая физическую реальность. Во-вторых, не всегда естественно считать, что «близость» удваивается, если продублированы все пути между парой вершин (так получается при использовании путевой достижимости): в некоторых случаях естественнее считать, что она увеличивается, но не так сильно. Именно таков результат использования надежности связи.

Согласно известной формуле для надежности (см., например, [364, с. 10]),

$$p_{ij}(G) = \sum_k \Pr(R_k) - \sum_{k < t} \Pr(R_k R_t) + \sum_{k < t < l} \Pr(R_k R_t R_l) - \dots + (-1)^{h+1} \Pr(R_1 R_2 \dots R_h), \quad (7.2)$$

где R_1, R_2, \dots, R_h — все пути между вершинами i и j ; $\Pr(R_k R_t) = \varepsilon(R_k \cup R_t)$, где под $R_k \cup R_t$ понимается подграф, содержащий те ребра (дуги), которые входят хотя бы в один из этих путей, и аналогично определяются другие выражения вида $\Pr(\dots)$. В силу (7.2)

надежность можно рассматривать как естественную модификацию путевой достижимости, которая позволяет принимать во внимание *степени пересечения путей* между двумя вершинами.

Следующей теоремой устанавливается, что Надежность обладает всеми перечисленными свойствами близости, но для выполнения некоторых из них нужно потребовать, чтобы веса ребер (дуг) были строго меньше 1.

Теорема 7.2. *Надежность связей обладает следующими свойствами: симметричность, неотрицательность, обратимость, условие несвязности, пункт 3 монотонности. Диагональное превосходство, неравенство треугольника для близостей (в случае мультиграфов), транзитность и пункты 1, 2 монотонности выполняются при условии, что вероятность исправности каждого ребра (дуги) строго меньше 1; в противном случае они выполняются в нестрогой форме.*

Доказательство теоремы 7.2. *Симметричность, неотрицательность, обратимость и условие несвязности* сразу следуют из определения надежности связи вершин. *Диагональное превосходство* в нестрогой версии следует из того, что $p_{ii} = 1$ и $p_{ij} \leq 1$ ($i, j = 1, \dots, n$). Если веса ребер (дуг) меньше 1, то, очевидно, при $j \neq i$ имеем $p_{ij} < 1$ и $p_{ij} < p_{ii}$.

Неравенство треугольника для близостей (в случае мультиграфов) доказывается так же, как в случае путевой достижимости.

Транзитность (в форме, оговоренной в теореме) следует из выполняющегося в условиях свойства равенства $p_{it} = p_{ik} p_{kt}$.

Докажем пункт 1 *монотонности* для мультиорграфов. Это доказательство будет справедливо также для мультиграфов. *Состоянием* мультиорграфа, дугам которого приписаны вероятности исправности, назовем любой его остовный подграф. Дуги подграфа интерпретируются как исправные дуги исходного мультиорграфа. В силу допущения о независимости отказов вероятность состояния — произведение вероятностей исправности присутствующих в нем дуг и вероятностей неисправности отсутствующих дуг. Пусть проведена новая дуга из k в t . Заметим, что Δp_{ij} есть суммарная вероятность тех состояний, в которых 1) присутствует новая дуга (k, t) , 2) существует путь из i в j и 3) после удаления дуги (k, t) путей из i в j не остается. Но во всех этих состояниях после удаления дуги (k, t) путей из k в t также не остается (иначе удаление этой дуги не разорвало бы путей из i в j). Поэтому указанная суммарная вероятность входит слагаемым и в Δp_{kt} и, таким образом, $\Delta p_{kt} \geq \Delta p_{ij}$. При весах дуг, строго меньших 1, есть по крайней мере одно состояние, ненулевая вероятность которого входит слагаемым в Δp_{kt} , но не входит в Δp_{ij} : в этом состоянии исправна только новая дуга (k, t) , и, значит, неравенство — строгое. Эти выводы сохраняются и при увеличении веса дуги из k в t — в силу линейности зависимости надежности связи от весов дуг.

Пункт 2 *монотонности* следует из того, что $\Delta p_{ik} = 0$, $\Delta p_{it} \geq 0$ ($\Delta p_{it} > 0$ при весах дуг/ребер, строго меньших 1). Пункт 3 выполняется, поскольку ребро (дуга) (k, t) не принадлежит путям из i_1 в i_2 . \square

7.3.3. Величина максимального потока (минимального разреза) как мера связанности вершин

В данном разделе вес ε ребра будет интерпретироваться как его пропускная способность. Величина максимального потока между парой вершин выражает определенную концепцию связанности между этими вершинами. Пусть p_{ij} — величина максимального потока (минимального разреза) между i и j . Если величине p_{ii} придать значение (на расширенной числовой прямой), равное плюс бесконечности, то справедлива следующая теорема.

Теорема 7.3. *Матрица P величин максимальных потоков (минимальных разрезов) обладает следующими свойствами: симметричность (для мультиграфов), неотрицательность, обратимость, диагональное превосходство, неравенство треугольника для близостей (в случае мультиграфов), условие несвязности, условие связности (для мультиграфов), транзитность (при замене строгого неравенства на нестрогое), а также пункты 1, 2 и 3 монотонности (при замене строгих неравенств на нестрогие).*

Доказательство теоремы 7.3. Выполнение *симметричности* (для мультиграфов), *неотрицательности*, *обратимости*, *условий связности* и *несвязности* легко устанавливается прямой проверкой.

Диагональное превосходство следует из того, что p_{ii} приписано значение плюс бесконечность на расширенной числовой прямой. *Неравенство треугольника для близостей* (в случае мультиграфов) выполняется в форме равенства при $j = i$ или $k = i$, а в противном случае следует из того, что p_{ii} приписано значение $+\infty$.

Пункт 1 *транзитности* следует из выполняющегося в условиях свойства равенства $p_{it} = \min(p_{ik}, p_{kt})$.

Пункт 1 *монотонности* следует из того, что $\Delta p_{kt} = \Delta \varepsilon_{kt}$, $\Delta p_{ij} \in \{\Delta \varepsilon_{kt}, 0\}$.

Пункт 2 *монотонности* следует из того, что $\Delta p_{ik} = 0$, $\Delta p_{it} \geq 0$.

Пункт 3 следует из того, что (k, t) не лежит ни на одном из путей между i_1 и i_2 и $\Delta p_{i_1 i_2} = 0$. \square

7.3.4. Маршрутная достижимость

Алгоритм вычисления путевой достижимости вершин, построенный непосредственно по определению, использует логические элементы, а именно, условные переходы. То же относится к показателю близости, определяемому как надежность связи. Рассмотрение *маршрутов* между парой вершин (вместо путей) сводит задачу к обращению

матрицы (см., например, [225]). Кроме того, *маршрутная достижимость* j из i имеет отношение к следующей задаче: какова вероятность, что, начав случайные блуждания из i , мы в «случайно выбранный» момент времени окажемся в j . Показатели близости вершин графов, связанные с цепями Маркова, представляют собой отдельную интересную тему. Материал для их обсуждения может быть найден, в частности, в [77, 172, 188, 190–192, 195, 201, 237, 333, 401]; см. также главы 3, 4 и 8.

Рассмотрим теперь матрицу $P = (I - \mathcal{E})^{-1}$, где $\mathcal{E} = (\varepsilon_{ij})$ — введенная ранее матрица суммарных весов ребер (дуг) мультиграфа (мультиорграфа). Пользуясь (пока не проверяя выполнение условия сходимости), формулой бесконечно убывающей геометрической прогрессии, запишем

$$P = (I - \mathcal{E})^{-1} = I + \mathcal{E} + \mathcal{E}^2 + \dots \quad (7.3)$$

Пусть \mathcal{N}_{ij} — множество маршрутов между i и j . Поскольку элементы матрицы \mathcal{E}^k — суммарные веса маршрутов длины k между парами вершин, при выполнении (7.3) можно записать

$$p_{ij} = \sum_{N \in \mathcal{N}_{ij}} \varepsilon(N), \quad (7.4)$$

т. е. p_{ij} — суммарный вес маршрутов из i в j (при $j = i$ учитывается и маршрут длины 0, имеющий вес 1), и P — матрица *маршрутных достижимостей* в мультиграфе (мультиорграфе). Равенство (7.3) выполняется если и только если

$$|\lambda_1| < 1, \quad (7.5)$$

где $|\lambda_1|$ — спектральный радиус матрицы \mathcal{E} , см., например, [55, следствие 5.6.16].

Рассмотрим верхнюю границу для $|\lambda_1|$, которая может быть получена из теоремы Гершгорина (см. [55]):

$$|\lambda_1| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\varepsilon_{ij}|. \quad (7.6)$$

Пусть ε_{\max} — верхняя граница весов ребер, m — максимальное число кратных ребер (дуг), инцидентных одной паре вершин в мультиграфе (мультиорграфе). Тогда

$$|\lambda_1| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\varepsilon_{ij}| \leq m(n-1)\varepsilon_{\max}. \quad (7.7)$$

Поэтому выполнение (7.5), а значит и (7.3), обеспечивается условием

$$\varepsilon_{\max} < (m(n-1))^{-1}. \quad (7.8)$$

Говоря о маршрутной достижимости, мы будем предполагать, что ограничение (7.8) выполняется (если это не так, то можно воспользоваться преобразованием весов ребер (дуг), указанным в разделе о путевой достижимости). Представление элементов матрицы (7.3) через веса *соединений* в орграфе (содержащее лишь конечные суммы и потому не

требующее выполнения дополнительных ограничений) может быть получено с помощью [329]. Хороший обзор результатов, связанных с перечислением маршрутов в графах, дан в [56].

Теорема 7.4. *Маршрутная достижимость обладает следующими свойствами: симметричность, неотрицательность, обратимость, диагональное превосходство, неравенство треугольника для близостей (в случае мультиграфов и при весах ребер, не превосходящих $(tn)^{-1}$), условие несвязности, транзитность, пункты 1 и 2 монотонности. Пункт 3 монотонности для нее не выполняется.*

При доказательстве ряда свойств будет использована следующая теорема, имеющая и самостоятельное значение.

Теорема 7.5 (об одношаговом изменении маршрутной достижимости в мультиорграфе). Пусть в мультиорграфе Γ вес некоторой дуги ε_{kt}^p увеличился на $\Delta\varepsilon_{kt} > 0$ или к Γ была добавлена новая дуга из k в t с весом $\Delta\varepsilon_{kt} > 0$. Пусть Γ' — полученный мультиорграф и $P' = P(\Gamma')$. Тогда

$$\Delta P = hR,$$

где $\Delta P = P' - P$, $h = \frac{\Delta\varepsilon_{kt}}{1 - \Delta\varepsilon_{kt} p_{tk}}$, $R = (r_{ij})$ — $n \times n$ -матрица с элементами $r_{ij} = p_{ik} p_{tj}$.

Доказательство теоремы 7.5. Пусть $\Delta(I - \mathcal{E}) = (I - \mathcal{E}') - (I - \mathcal{E})$. Заметим, что $\Delta(I - \mathcal{E}) = XY$, где $X = (x_{i1})$ ($i = 1, \dots, n$) — вектор-столбец с элементами $x_{k1} = -\Delta\varepsilon_{kt}$, $x_{i1} = 0$ для всех $i \neq k$; $Y = (y_{1j})$ ($j = 1, \dots, n$) — вектор-строка с элементами $y_{1t} = 1$, $y_{1j} = 0$ для всех $j \neq t$. Согласно [55, раздел 0.7.4]

$$P' = P - \frac{1}{1 + YPX} PXY P.$$

Нетрудно непосредственно проверить, что $(-\frac{1}{1+YPX}) = -h/\Delta\varepsilon_{kt}$ и $PXY P = -\Delta\varepsilon_{kt} R$, тем самым теорема доказана. \square

Доказательство теоремы 7.4. *Симметричность, неотрицательность, обратимость и условие несвязности* следуют из определения маршрутной достижимости.

Диагональное превосходство докажем сначала для мультиорграфов. Говоря о маршрутной достижимости, мы рассматриваем семейство графов с заданным максимально возможным числом кратных ребер (дуг) m и весами ребер (дуг), меньшими $\varepsilon_{\max} = (m(n-1))^{-1}$. Пусть Γ — взвешенный мультиорграф, принадлежащий этому семейству, i и $j \neq i$ — произвольные вершины Γ , $\varepsilon < \varepsilon_{\max}$ — максимальный среди весов его дуг. Построим мультиорграф Γ' , дополнив Γ до полного мультиорграфа с кратностью дуг m и весами всех дуг ε и затем удалив все дуги, входящие в вершину i . Очевидно, для Γ' $p'_{ii} = 1$ и $p'_{ij} = p'_{ik}$ для любого $k \neq i$. Записав $P'(I - \mathcal{E}') = I$ для элемента (i, j) матрицы $P'(I - \mathcal{E}')$,

находим $p'_{ij} = \frac{\varepsilon m}{1 - (n-2)\varepsilon m}$, и, следовательно, $p'_{ii} > p'_{ij}$, поскольку $\varepsilon < (m(n-1))^{-1}$. При удалении дуг из Γ' или уменьшении весов имеющихся дуг величина p_{ii} не изменяется, а p_{ij} может лишь уменьшиться. Пусть к Γ' добавлена дуга из $k \neq i$ в i . В силу теоремы 7.5 при этом $\Delta p_{ii} - \Delta p_{ij} = h p'_{ik}(p'_{ii} - p'_{ij}) > 0$, и значит, $p_{ii} > p_{ij}$. Аналогично $p_{ii} > p_{ij}$ сохраняется при последовательном добавлении других дуг, направленных в i . Следовательно, для Γ также выполняется $p_{ii} > p_{ij}$, и диагональное превосходство доказано. Выполнение свойства для мультиграфа обеспечивается выполнением его для симметричного мультиорграфа с такой же матрицей \mathcal{E} .

Докажем *неравенство треугольника для близостей* в случае мультиграфов и при условии, что веса ребер не превосходят $(mn)^{-1}$. При $j = i$ или $k = i$ неравенство выполняется в форме равенства. При $j \neq i$ и $k \neq i$ покажем, что неравенство выполняется для *ориентированных* мультиграфов. Рассмотрим сначала оргграф Γ'_i , отличающийся от полного отсутствием дуг, входящих в i . Пусть каждая дуга Γ'_i имеет вес $\varepsilon = 1/n$. Записав равенство $(I - \mathcal{E}')P' = I$ для элементов (i, j) , (i, k) и (i, i) матрицы $(I - \mathcal{E}')P'$, получим

$$p'_{ij} = p'_{ik} = \frac{\varepsilon}{1 - (n-2)\varepsilon} = \frac{1}{2}, \quad p'_{ii} = 1,$$

следовательно, $p'_{ii} - p'_{ij} - p'_{ik} + p'_{jk} > p'_{ii} - p'_{ij} - p'_{ik} = 0$. Докажем теперь, что изменение Γ'_i не может привести к уменьшению $p_{ii} - p_{ij} - p_{ik}$. Действительно, при удалении из Γ'_i дуг или уменьшении их весов величина p_{ii} не изменяется, а p_{ij} и p_{ik} могут лишь уменьшиться, значит, неравенство $p_{ii} - p_{ij} - p_{ik} \geq 0$ сохранится. Далее, если для некоторого орграфа Γ выполняется это неравенство, то при добавлении к Γ любой дуги (t, i) оно также не нарушится, так как, согласно теореме 7.5,

$$\Delta p_{ii} - \Delta p_{ij} - \Delta p_{ik} = h(t) p_{it}(p_{ii} - p_{ij} - p_{ik}) \geq 0.$$

Таким образом, неравенство треугольника для близостей при $j \neq i$ и $k \neq i$ выполняется для любого орграфа. Оно выполняется и для мультиорграфов, что доказывается заменой множества дуг между парой вершин на одну дугу с суммарным весом и переходом, тем самым, к орграфу. Выполнение свойства для мультиграфа обеспечивается выполнением его для симметричного мультиорграфа с той же матрицей \mathcal{E} .

Транзитность для мультиорграфов докажем от противного. Пусть Γ — мультиорграф с минимальным числом дуг, нарушающий транзитность: в нем имеется путь из i в k , $t \neq k$, и любой путь из i в t содержит k , но $p_{ik} \leq p_{it}$. В силу диагонального превосходства $k \neq i$. Пусть (i, j) — первая дуга произвольного пути из i в k , и Γ' — мультиорграф, получающийся из Γ удалением дуги (i, j) . Тогда при добавлении к Γ' дуги (i, j) имеет место $\Delta p_{it} \geq \Delta p_{ik}$. Действительно, если в Γ' нет путей из i в k , то в Γ' $p'_{ik} = p'_{it} = 0$, и $\Delta p_{it} < \Delta p_{ik}$ противоречило бы тому, что в Γ $p_{ik} \leq p_{it}$. Если же в Γ' есть путь из i в k и $\Delta p_{it} < \Delta p_{ik}$, то Γ' нарушает транзитность, что противоречит минимальности Γ . Далее, по теореме 7.5, $\Delta p_{it} - \Delta p_{ik} = h p'_{ii}(p'_{jt} - p'_{jk})$, где $h > 0$, и из $\Delta p_{it} \geq \Delta p_{ik}$ следует $p'_{jt} \geq p'_{jk}$. По построению

в Γ' есть путь из j в k , и любой путь из j в t содержит k . Следовательно, Γ' нарушает транзитность, что противоречит минимальности Γ . *Транзитность* для мультиграфа доказывается переходом к мультиорграфу с той же матрицей \mathcal{E} .

Для доказательства пункта 1 *монотонности* в случае мультиорграфа заметим, что согласно теореме 7.5 $\Delta p_{kt} = hp_{kk}p_{tt}$, $\Delta p_{ij} = hp_{ik}p_{tj}$. Теперь искомое утверждение следует из диагонального превосходства и очевидным образом может быть распространено на мультиграфы. Аналогично пункт 2 монотонности следует из формулы $\Delta p_{it} - \Delta p_{ik} = h(p_{ik}p_{tt} - p_{ik}p_{tk})$ и диагонального превосходства. Пункт 3 нарушается, так как при выполнении посылки монотонности могут появляться (или увеличивать вес) маршруты из i_1 в i_2 , содержащие новое (или — с увеличенным весом) ребро (дугу) (k, t) . \square

7.3.5. Метризуемость близости

Введем показатель¹

$$d_{ij} = p_{ii} + p_{jj} - p_{ij} - p_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (7.9)$$

где $P = (p_{ij})$ — матрица близости. Рассмотрим следующее характеристическое условие.

Метризуемость близости. *Показатель d_{ij} есть расстояние между вершинами мультиграфа, т. е. удовлетворяет аксиомам метрики.*

Как следует из доказательства предложения 7.3, данное условие всегда выполняется при выполнении неравенства треугольника для близостей; последнее соответствует при этом обычному неравенству треугольника для расстояний d_{ij} . Более того, в разделе 7.4 будет установлено, что между метриками, заданными на произвольном множестве, и двухместными функциями на этом множестве, удовлетворяющими неравенству треугольника для близостей и дополнительному условию нормировки, имеет место определенная двойственность [68].

Проиллюстрируем неравенство треугольника для близостей и метрику (7.9) на примере, относящемся к теории множеств. Пусть $p(x, y)$ — функция, заданная на декартовом квадрате некоторого семейства \mathcal{X} конечных множеств и паре множеств (x, y) ставящая в соответствие число элементов в их пересечении: $|x \cap y|$. Тогда для любых $x, y, z \in \mathcal{X}$

$$\begin{aligned} p(x, x) &= |x| \geq |x \cap y| + |x \cap z| - |x \cap y \cap z| \geq |x \cap y| + |x \cap z| - |y \cap z| = \\ &= p(x, y) + p(x, z) - p(y, z), \end{aligned} \quad (7.10)$$

то есть выполняется неравенство треугольника для близостей (с учетом того, что при $x \neq y$ и $y = z$ первое из неравенств в (7.10) — строгое). Преобразование (7.9), примененное

¹Преобразование вида (7.9) в явной или неявной форме встречается во многих работах по теории матриц и ее приложениям, например, в [31, 67, 77, 183, 237, 239, 293, 370], а также в ряде работ по линейным статистическим моделям.

к функции $p(x, y)$, дает обычную метрику на семействах конечных множеств: расстояние между множествами определяется как число элементов в их симметрической разности. Данный пример свидетельствует в пользу естественности преобразования (7.9).

7.4. К формализации понятия близости: функции Σ -близости

При анализе дискретных структур нередко используют функции, выражающие близость объектов друг к другу, но не являющиеся метриками. В данном разделе вводится рассмотрение класс таких функций, представители которого нередко встречаются и неявно используются как в прикладных, так и в чисто математических работах, в частности, в многомерном шкалировании, при анализе линейных статистических моделей, марковских процессов, электрических цепей и экономических моделей, а также при исследовании графов и сетей [67, 77, 153, 195, 200, 239, 251, 293, 370].

Прежде всего напомним следующее определение.

Определение 7.1. *Метрика* на множестве A есть такая функция $d : A^2 \rightarrow \mathbb{R}$, что для любых $x, y, z \in A$

- 1) $d(x, y) = 0$ в том и только том случае, если $x = y$;
- 2) $d(x, y) + d(x, z) - d(y, z) \geq 0$ (неравенство треугольника).

Из этого определения легко выводится, что если $d(\cdot, \cdot)$ — метрика, то для любых $x, y \in A$

- $d(x, y) = d(y, x)$ (симметричность);
- $d(x, y) \geq 0$ (неотрицательность).

Определим теперь другой класс функций, элементы которого, выражая близость объектов, не являются метриками. Функции этого класса нередко используются в теоретических и прикладных работах.

Определение 7.2. Пусть A — непустое конечное множество, Σ — действительное число. Функцию $\sigma : A^2 \rightarrow \mathbb{R}$ назовем Σ -близостью на A , если для любых $x, y, z \in A$ выполняются:

- 1) *условие нормировки:*

$$\sum_{t \in A} \sigma(x, t) = \Sigma; \quad (7.11)$$

- 2) *неравенство треугольника для близостей:* $\sigma(x, y) + \sigma(x, z) - \sigma(y, z) \leq \sigma(x, x)$, причем если $z = y$ и $x \neq y$, то неравенство строгое.

Это то же неравенство треугольника для близостей, которое было введено в разделе 7.2 и исследовалось в последующих разделах главы 7. Как уже отмечалось, оно

в определенном смысле *двойственно* неравенству треугольника, входящему в определение метрики. Точный смысл этой двойственности будет изучен далее в этом разделе. В силу условия нормировки матрица, представляющая Σ -близость, имеет собственный вектор, состоящий из единиц, и он соответствует собственному значению Σ . Рассматривая Σ -близости, будем полагать множество A и число Σ фиксированными, если не оговорено обратное.

Предложение 7.1. Пусть σ есть Σ -близость на A . Тогда для любых $x, y \in A$

$$\begin{aligned} \sigma(x, y) &= \sigma(y, x) \text{ (симметричность);} \\ \text{если } x \neq y, \text{ то } \sigma(x, x) &> \sigma(x, y) \text{ («эгоцентризм»)}. \end{aligned}$$

Доказательство предложения 7.1. Симметричность получаем, положив в неравенстве треугольника $z = x$ и пользуясь произвольностью x и y . Для доказательства свойства «эгоцентризм» вновь запишем неравенство треугольника, в данном случае — предполагая $x \neq y$: для любого $z \in A$ имеем

$$\sigma(x, y) + \sigma(x, z) - \sigma(y, z) \leq \sigma(x, x).$$

Просуммировав эти неравенства по всем $z \in A$ и воспользовавшись строгостью неравенства при $z = y$, имеем

$$n\sigma(x, y) + \sum_{z \in A} \sigma(x, z) - \sum_{z \in A} \sigma(y, z) < n\sigma(x, x),$$

где $n = |A|$, и в силу условия нормировки имеем $\sigma(x, x) > \sigma(x, y)$. □

Исследуем связь между Σ -близостями и метриками.

Пусть d — метрика на конечном множестве A ; здесь и далее $|A| = n$. Введем обозначения:

$$d(x, \cdot) = \frac{1}{n} \sum_{t \in A} d(x, t), \quad (7.12)$$

$$d(\cdot, \cdot) = \frac{1}{n^2} \sum_{s, t \in A} d(s, t). \quad (7.13)$$

Предложение 7.2. Для любой метрики d на конечном множестве A функция²

$$\sigma(x, y) = d(x, \cdot) + d(y, \cdot) - d(x, y) - d(\cdot, \cdot) + \frac{\Sigma}{n} \quad (7.14)$$

является Σ -близостью на A .

Доказательство предложения 7.2. Условие нормировки проверяется непосредственно. Для доказательства неравенства треугольника, пользуясь (7.14), получаем

²В матричной форме: $S = -KDK + \frac{\Sigma}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^T$, где D — матрица расстояний, K определена (5.7).

$$\sigma(x, x) + \sigma(y, z) - \sigma(x, y) - \sigma(x, z) = d(x, y) + d(x, z) - d(y, z), \quad (7.15)$$

и нестрогая часть неравенства треугольника для σ вытекает из одноименного неравенства для d . При $z = y$ и $x \neq y$ правая часть (7.15) есть $2d(x, y) - d(y, y)$, и строгое утверждение неравенства треугольника для σ следует из первой аксиомы метрики и неотрицательности $d(x, y)$. \square

Можно сказать, что функция σ , построенная по d с помощью преобразования (7.14), измеряет близость x к y по сравнению со средней близостью x и y ко всем элементам A .

Предложение 7.3. Для любой Σ -близости σ на A функция³

$$d(x, y) = \frac{1}{2}(\sigma(x, x) + \sigma(y, y)) - \sigma(x, y) \quad (7.16)$$

является метрикой на A .

Доказательство предложения 7.3. В силу (7.16) для любого $x \in A$ имеем $d(x, x) = 0$. Согласно строгой части неравенства треугольника для σ при $x \neq y$ выполняется $d(x, y) > 0$. Чтобы доказать *неравенство треугольника* для d , достаточно сделать подстановку (7.16), приводящую к равенству

$$d(x, y) + d(x, z) - d(y, z) = \sigma(x, x) + \sigma(y, z) - \sigma(x, y) - \sigma(x, z),$$

и воспользоваться нестрогой частью неравенства треугольника⁴ для σ . \square

Заметим теперь, что для определения $d(x, y)$ с помощью (7.16) достаточно знать значения σ на трех аргументах: (x, x) , (y, y) и (x, y) . В этом смысле преобразование (7.16) *локально* и напоминает взятие конечных разностей. Напротив, (7.14) является *дискретным интегральным* преобразованием, поскольку Σ -близость $\sigma(x, y)$ для любых x и y определяется всей совокупностью расстояний на множестве A . Например, согласно (7.14), $\sigma(x, x) = 2d(x, \cdot) - d(\cdot, \cdot) + \frac{\Sigma}{n}$, т. е. $\sigma(x, x)$ больше для тех x , для которых больше среднее расстояние до всех элементов A . Тем самым $\sigma(x, x)$ отражает степень «периферийности» («уединенности») элемента x в A : «центральным» элементам соответствуют меньшие значения $\sigma(x, x)$, чем элементам, находящимся «на отшибе». Тот же вывод можно сделать из условия нормировки: $\sigma(x, x) = \Sigma - \sum_{y \neq x} \sigma(x, y)$, и $\sigma(x, x)$ тем больше, чем меньше значения $\sigma(x, y)$, выражающие близость x к остальным элементам A .

Рассмотрим (7.14) и (7.16) как отображения функций⁵ и обозначим эти отображения соответственно $\varphi(d)$ и $\psi(\sigma)$.

³В матричной форме: $D = \frac{1}{2}(s\mathbf{1}^T + \mathbf{1}s^T) - S$, где S – матрица Σ -близостей, вектор s – диагональ S .

⁴Условие нормировки в доказательстве не используется, что позволяет, пользуясь (7.16), построить метрику по любой функции, удовлетворяющей неравенству треугольника для близостей.

⁵Отображения такого рода используются в *классическом многомерном шкалировании* (см. [109]), восходящем к работам Торгерсона [381, 382] и Говера [202].

Лемма 7.1. *Отображение $\psi(\varphi(d))$ есть тождественное преобразование множества метрик, заданных на A . Отображение $\varphi(\psi(\sigma))$ есть тождественное преобразование множества Σ -близостей, заданных на A .*

Доказательство леммы 7.1. Первое утверждение проверяется подстановкой (7.14) в (7.16) и использованием первой аксиомы метрики; второе — подстановкой (7.16) в (7.14) и использованием условия нормировки. \square

Согласно лемме 7.1 и предложениям 7.2 и 7.3 отображения $\varphi(d)$ и $\psi(\sigma)$, заданные соответственно на множестве метрик на A и множестве Σ -близостей на A , *взаимно обратны*. Поэтому имеет место следующая

Теорема 7.6. *Отображения φ и $\psi = \varphi^{-1}$ задают взаимно-однозначное соответствие множества метрик на A и множества Σ -близостей на A .*

«Центральное» место среди Σ -близостей занимают 0-близости, из которых другие Σ -близости получаются сдвигом на Σ/n (см. условие нормировки или (7.14)). Множество 0-близостей на A , как и множество метрик на A , замкнуто относительно суммы его элементов и умножения их на положительное число. В связи с этим заметим, что при $\Sigma = 0$ отображения φ и ψ являются линейными. Множества Σ -близостей с иными значениями Σ замкнуты относительно взятия выпуклых комбинаций. Еще один важный класс Σ -близостей — это 1-близости с неотрицательными значениями. Они могут быть представлены симметричными дважды стохастическими матрицами и часто встречаются в приложениях. Отметим также Σ -близости, полученные из метрик при $\Sigma = nd(\cdot, \cdot)$. При этом средняя близость равна среднему расстоянию, а в правой части (7.14) остаются лишь три первых члена; кроме того, $\forall x \in A \quad \sigma(x, x) = 2d(x, \cdot)$.

Построим теперь обобщение понятия Σ -близости на бесконечные множества. Путь, подсказываемый видом условия нормировки, — замена в этом условии суммы на интеграл. Однако, если мера множества A бесконечна, то при такой замене множество функций σ приобретает иную структуру, в частности, Σ -близости с $\Sigma \neq 0$ не могут быть получены из 0-близостей добавлением постоянного слагаемого. Обобщение с теми же свойствами, что и в конечном случае, может быть построено заменой суммы в условии нормировки операцией взятия *среднего*. При этом нет необходимости связывать себя конкретной формой среднего. Вместо этого достаточно рассмотреть абстрактный усредняющий функционал и потребовать от него выполнения лишь нескольких необходимых свойств.

Пусть A — непустое множество, \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 — множества функций $A \rightarrow \mathbb{R}$ и $A^2 \rightarrow \mathbb{R}$ соответственно.

Определение 7.3. *Вещественный функционал μ , заданный на множестве $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{A}_1$, назовем *линейным усредняющим функционалом*, если μ и \mathcal{B}_1 обладают следующими*

свойствами:

- 1) \mathcal{B}_1 — линейное пространство над \mathbb{R} , содержащее все постоянные функции;
- 2) μ — линейный функционал на \mathcal{B}_1 , на постоянных функциях равный их значениям;
- 3) если $f, g \in \mathcal{B}_1$ и $\forall x \in A \ f(x) \geq g(x)$, то $\mu(f) \geq \mu(g)$ (монотонность).

Отметим, что по теореме Рисса (см., например, [37]) при некоторых условиях, наиболее существенным из которых является непрерывность, линейный функционал представим в виде интеграла Стильтьеса по некоторому заряду от функции-аргумента.

Пусть μ — линейный усредняющий функционал, заданный на \mathcal{B}_1 . Пусть $f \in \mathcal{A}_2$, и при любом $x_0 \in A$ $f(x_0, y)$ принадлежит \mathcal{B}_1 как функция y . Через $f(x, \cdot) = \mu_y(f(x, y))$ обозначим функцию от x , которая каждому x ставит в соответствие результат применения μ к $f(x, y)$ как к функции y .

Определение 7.4. Множество $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{A}_2$ назовем *семейством усредняемых функций двух переменных*, если \mathcal{B}_2 — линейное пространство над \mathbb{R} , содержащее все постоянные функции и все элементы \mathcal{B}_1 как функции каждого из аргументов, постоянные по второму аргументу, и для любой функции $f \in \mathcal{B}_2$ выполняется:

- 1) $\forall x \in A \ g_x(y) \in \mathcal{B}_1$, где $g_x(y) = f(x, y)$;
- 2) $f(x, \cdot) \in \mathcal{B}_1$ и $g(x) \in \mathcal{B}_1$, где $g(x) = f(x, x)$.

Понятие Σ -близости обобщим следующим образом. Пусть для непустого множества A заданы \mathcal{B}_1, μ и \mathcal{B}_2 в соответствии с определениями, данными выше; m — действительное число.

Определение 7.5. Функцию $\sigma \in \mathcal{B}_2$ назовем Σ_m -близостью на A , если для любых $x, y, z \in A$ выполняются

- 1) условие нормировки: $\sigma(x, \cdot) = m$;
- 2) неравенство треугольника (такое же, как в определении 7.2): $\sigma(x, y) + \sigma(x, z) - \sigma(y, z) \leq \sigma(x, x)$, причем если $z = y$ и $x \neq y$, то неравенство строгое.

Следующие утверждения аналогичны сформулированным выше. Схемы всех доказательств остаются теми же, но там, где использовались свойства среднего арифметического или условие нормировки в виде суммы, теперь применяются свойства линейного усредняющего функционала μ и множеств \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 . Так, именно благодаря ограничениям, наложенным на \mathcal{B}_2 , это множество содержит образы отображений φ и ψ .

Предложение 7.4. Для любой Σ_m -близости $\sigma \in \mathcal{B}_2$ и для любых $x, y \in A$

- $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ (симметричность);
- $\sigma(x, x) \geq \sigma(x, y)$ (эгоцентризм).

Причина более слабой формы последнего неравенства, чем в конечном случае, в том, что при бесконечном множестве A естественно требовать монотонности, а не строгой монотонности μ . Отметим, что монотонность μ при доказательстве последующих утверждений (за исключением следствия 7.1) не нужна. Благодаря симметричности Σ_m -близостей, а также метрик нет необходимости требовать коммутативности применения μ_x и μ_y к функциям из \mathcal{B}_2 . В частности, эта симметричность обеспечивает корректность обозначения $d(\cdot, \cdot) = \mu\mu_y(d(x, y)) = \mu\mu_x(d(x, y))$ в следующем утверждении (не путать с $\mu(d(x, x))$).

Предложение 7.5. Для любой метрики $d \in \mathcal{B}_2$ функция

$$\sigma(x, y) = d(x, \cdot) + d(y, \cdot) - d(x, y) - d(\cdot, \cdot) + m \quad (7.17)$$

есть Σ_m -близость на A .

Предложение 7.6. Для любой Σ_m -близости σ , заданной на A , функция

$$d(x, y) = \frac{1}{2}(\sigma(x, x) + \sigma(y, y)) - \sigma(x, y) \quad (7.18)$$

является метрикой на A и принадлежит \mathcal{B}_2 .

Пусть $\varphi(d)$ и $\psi(\sigma)$ — отображения, задаваемые соответственно (7.17) и (7.18).

Лемма 7.2. Отображения $\psi(\varphi(d))$ и $\varphi(\psi(\sigma))$ есть тождественные преобразования множества метрик из \mathcal{B}_2 и множества Σ_m -близостей на A соответственно.

Теорема 7.7. Отображения φ и $\psi = \varphi^{-1}$ задают взаимно-однозначное соответствие множества метрик из \mathcal{B}_2 и множества Σ_m -близостей на A .

следует заметить что обращение к Σ -близостям может быть полезно при доказательстве утверждений о средних расстояниях. В качестве примера приведем следствие из теоремы 7.7 и предложения 7.4.

Следствие 7.1. Для любых множества A , метрики $d \in \mathcal{B}_2$ и $x \in A$

$$d(x, \cdot) \geq \frac{d(\cdot, \cdot)}{2}. \quad (7.19)$$

Доказательство следствия 7.1. Рассмотрим Σ_0 -близость σ , в которую расстояние d преобразуется оператором φ . Согласно (7.17) для любого $x \in A$ имеет место

$$\sigma(x, x) = 2d(x, \cdot) - d(\cdot, \cdot). \quad (7.20)$$

Если $\sigma(x, x) < 0$, то из свойства «эгоцентризм» следует $\sigma(x, y) \leq \sigma(x, x) < 0$ для всех $y \in A$, и условие нормировки, очевидно, нарушено в силу свойств усредняющего функционала μ . Следовательно, $\sigma(x, x) \geq 0$, и (7.20) влечет требуемое неравенство. \square

Можно показать, что оценка (7.19), вообще говоря, неуллучшаема, т.е. данное неравенство может обращаться в равенство. Для этого достаточно рассмотреть бесконечное множество A (рассмотрим также последовательность конечных множеств с растущим числом элементов) и «почти дискретную» метрику с одним «центральным» элементом x_0 : $\forall x_1, x_2 \in A \setminus \{x_0\} \quad d(x_1, x_2) = 1, d(x_1, x_0) = 1/2$. В случае конечного множества A из теоремы 7.6 и предложения 7.1 следует, что нестрогое неравенство в (7.19) можно заменить строгим. Рассмотрев множество A , состоящее из отрезка и удаленной от него точки, легко показать, что отношение $d(x, \cdot)/d(\cdot, \cdot)$ (при $d(\cdot, \cdot) > 0$) в общем случае не ограничено сверху.

7.5. Достижимость, двойственная классическому расстоянию на графе

В данном разделе в качестве примера Σ -близости рассматривается показатель, двойственный классическому расстоянию на графе. Напомним, что классическое («геодезическое») расстояние между двумя вершинами связного неориентированного графа равно длине кратчайшего пути между этими вершинами [115]. Обобщая классическое расстояние на случай взвешенных связных графов, длиной пути, содержащего хотя бы одно ребро, будем называть сумму величин, обратных весам ребер, входящих в этот путь. Данный подход эвристически оправдан, поскольку путь, состоящий из ребер с большим весом, можно интерпретировать как более короткий (см. также раздел 9.2). Нетрудно убедиться, что это обобщение геодезического расстояния удовлетворяет аксиомам метрики. Рассмотрим матрицу P , соответствующую показателю достижимости вершин, полученному из данной метрики с помощью (7.14):

$$p_{ij} = d(i, \cdot) + d(j, \cdot) - d(i, j) - d(\cdot, \cdot) + \frac{\Sigma}{n} \quad (7.21)$$

Введенный показатель p_{ij} (число Σ , по сути, является параметром сдвига) будем называть *простейшим показателем достижимости вершин*.

Докажем теорему о свойствах этого показателя. Сразу отметим, что невыполнение для него свойств связности и несвязности обусловлено тем, что классическое расстояние определяется лишь на связных графах.

Теорема 7.8. *Простейший показатель достижимости обладает следующими свойствами: симметричность, неотрицательность (достигается выбором параметра сдвига Σ), диагональное превосходство в нестрогой форме, неравенство треугольника для близостей, условия связности и несвязности — в части, относящейся к связным графам, транзитность, метрическая представимость, пункт 3 монотонности. Первое утверждение п. 1 и п. 2 монотонности выполняются в нестрогой форме, второе утверждение п. 1 не выполняется.*

Доказательство. *Симметричность*⁶, а также условия связности и несвязности (в части, относящейся к связным графам) следуют из определения простейшего показателя достижимости.

Неотрицательность, очевидно, может быть достигнута выбором параметра Σ .

Неравенство треугольника для близостей выполняется, поскольку простейший показатель достижимости в силу предложения 7.2 является показателем Σ -близости. С учетом этого из предложения 7.3 следует *метризуемость*, а из предложения 7.1 — *диагональное превосходство*.

Для доказательства *транзитности* предположим, что для i, k и t выполняется посылка этого свойства (с. 146), и рассмотрим разность

$$p_{ik} - p_{it} = d(i, t) - d(i, k) + d(k, \cdot) - d(t, \cdot).$$

Учитывая неравенство треугольника для расстояний и то, что в силу предположения имеет место $d(i, t) = d(i, k) + d(k, t)$, получаем:

$$\begin{aligned} p_{ik} - p_{it} &= d(i, t) - d(i, k) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (d(k, j) - d(t, j)) = \\ &= d(k, t) + \frac{1}{n} \left(\sum_{j \notin \{i, t\}} (d(k, j) - d(t, j)) + d(k, i) - d(t, i) + d(k, t) - d(t, t) \right) \geq \\ &\geq d(k, t) - \frac{1}{n}(n-2)d(k, t) = \frac{2}{n}d(k, t) > 0. \end{aligned}$$

Пусть выполняется посылка *монотонности* (см. с. 146): вес некоторого ребра (k, t) в графе G увеличился или к G добавлено новое ребро между k и t . Покажем, что при этом $\Delta p_{kt} \geq 0$ т. е. первое утверждение п. 1 выполняется в нестрогой форме. Согласно (7.21)

$$\Delta p_{kt} = \Delta d(k, \cdot) + \Delta d(t, \cdot) - \Delta d(k, t) - \Delta d(\cdot, \cdot) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (d(k, j) + \Delta d(t, j)) - \Delta d(k, t) - \Delta d(\cdot, \cdot).$$

Пусть $a = -\Delta d(k, t) \geq 0$. Заметим, что если в модифицированном взвешенном графе какой-либо кратчайший (с учетом весов) путь от некоторой вершины j к t содержит k , то никакой кратчайший путь от j к k не содержит t . В этом случае $-\Delta d(t, j) \leq a$ и $-\Delta d(k, j) = 0$, поэтому $\Delta d(t, j) + \Delta d(k, j) \geq -a$. Аналогично последнее неравенство выполняется и во всех иных случаях. Следовательно,

$$\Delta p_{kt} \geq -a + a - \Delta d(\cdot, \cdot) = -\Delta d(\cdot, \cdot) \geq 0,$$

поскольку при рассматриваемой модификации графа расстояния между вершинами не увеличиваются. Равенство $\Delta p_{kt} = 0$ имеет место в случае, если в модифицированном графе

⁶Напомним, что в этом разделе рассматриваются неориентированные графы.

ребро (k, t) не является единственным кратчайшим путем между k и t . В противоположном случае имеем $\Delta d(\cdot, \cdot) > 0$, следовательно, $\Delta p_{kt} > 0$.

Покажем, что второе утверждение п. 1 монотонности не выполняется, а именно, что при выполнении посылки монотонности возможно $\Delta p_{uv} > \Delta p_{kt}$. Действительно, обратимся к рис. 7.1, где в исходном графе вес ребра (k, t) равен $\frac{1}{2}$, а в модифицированном графе он равен 1 (на рисунке это обозначено так: $\frac{1}{2} \nearrow 1$). Проведя вычисления по формуле (7.21), получаем $\Delta p_{uv} = \Delta p_{ks} = \Delta p_{ut} = 0,6 > 0,4 = \Delta p_{kt}$.

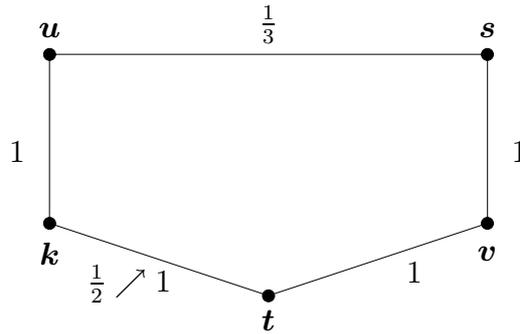


Рис. 7.1. Взвешенный граф, нарушающий 2-е условие пункта 1 монотонности для простейшего показателя достижимости.

Убедимся в выполнении в нестрогой форме п. 2 монотонности. Пусть в G существует путь от i до k , и каждый путь от i до t включает k . Покажем, что $\Delta p_{it} \geq \Delta p_{ik}$. Используя (7.21) и то, что в силу сделанного предположения $\Delta d(i, k) = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \Delta p_{it} - \Delta p_{ik} &= \Delta d(i, \cdot) + \Delta d(t, \cdot) - \Delta d(i, t) - \Delta d(\cdot, \cdot) - \\ &\quad - (\Delta d(i, \cdot) + \Delta d(k, \cdot) - \Delta d(i, k) - \Delta d(\cdot, \cdot)) = \\ &= \Delta d(t, \cdot) - \Delta d(k, \cdot) - \Delta d(i, t) + \Delta d(i, k) = \\ &= \Delta d(t, \cdot) - \Delta d(k, \cdot) - \Delta d(i, t). \end{aligned} \quad (7.22)$$

Если $-\Delta d(k, t) = a \geq 0$, то, в силу предположения, $-\Delta d(i, t) = a$. Далее, $-\Delta d(k, \cdot) \geq 0$, поскольку при данной модификации графа расстояния не увеличиваются. Возможно ли $\Delta d(t, \cdot) < -a$? Если вершина j такова, что в модифицированном графе кратчайший путь от t до j содержит k , то $\Delta d(t, j) \geq -a$; если же этот путь не содержит k , (в частности, таков путь длины 0 от t до t) то $\Delta d(t, j) = 0$. Следовательно, $\Delta d(t, \cdot) \geq -a$. В силу доказанного $\Delta p_{it} \geq \Delta p_{ik}$, что и требовалось доказать. При этом если в модифицированном графе ребро (k, t) не образует единственного кратчайшего пути между k и t , то, очевидно, $\Delta p_{it} = \Delta p_{ik} = 0$. В противном случае $\Delta p_{it} > \Delta p_{ik}$, поскольку $-\Delta d(k, t) > 0$ и в (7.22) имеем $-\Delta d(k, \cdot) > 0$ при неотрицательности (точнее, — положительности, т. к. $\Delta d(t, t) = 0$) суммы остальных слагаемых.

Докажем п. 3 монотонности. Пусть i_1 и i_2 могут быть подставлены на место i в посылку п. 2 монотонности. Покажем, что тогда $\Delta p_{i_1 i_2} \leq 0$. Действительно, если в мо-

дифицированном графе имеется кратчайший путь между t_1 и t_2 , включающий t , то, в силу предположения, он дважды включает k , что противоречит определению пути. Следовательно, этот путь не включает t , откуда $\Delta d(i_1, i_2) = 0$. Поскольку рассматриваемая модификация графа не увеличивает расстояний, (7.21) влечет

$$\Delta p_{i_1 i_2} = \Delta d(i_1, \cdot) + \Delta d(i_2, \cdot) - \Delta d(i_1, i_2) \leq 0,$$

что завершает доказательство теоремы. □

Заключение к главе 7

В данной главе введены нормативные условия, характеризующие показатели близости вершин мультиграфов и орграфов. Доказаны теоремы о свойствах ряда естественных показателей близости — путевой достижимости, маршрутной достижимости, максимального потока/минимального разреза, надежности связи, показателя, двойственного классическому расстоянию на графе. Эти свойства должны учитываться при выборе мер близости в прикладных задачах, некоторые из которых рассмотрены в первом разделе главы. Предложено *неравенство треугольника для близостей*, двойственное классическому неравенству треугольника для расстояний. Введено понятие функций Σ -близости; установлено, что в определенном смысле эти функции двойственны метрикам. В качестве примера функции Σ -близости рассмотрен показатель, двойственного классическому расстоянию на графе. Другой пример функции Σ -близости встретится в главе 8: он будет построен с помощью матрицы остовных лесов графа/орграфа. Показатели близости, вводимые в главе 8, будут исследованы по той же схеме: каждый из них будет проверен на выполнение нормативных условий, сформулированных в разделе 7.2.

Глава 8

Меры связанности вершин графов, построенные с помощью матричной теоремы о лесах

В предыдущей главе был рассмотрен ряд мер связанности вершин графов. В главе 1 (в конце раздела 1.3) матрицы $Q = (I + L)^{-1}$ и $\tilde{Q} = (I + \tilde{L})^{-1}$ были названы матрицами «относительных доступностей по лесам» или «относительных лесных доступностей» вершин мультиграфа (мультиорграфа). Элементы этих матриц могут интерпретироваться как меры близости вершин в том же смысле, как и показатели из главы 7: чем слабее связаны вершины i и j в графе, тем меньше q_{ij} и \tilde{q}_{ij} . В данной главе будут изучены свойства *доступностей по лесам* и других связанных с ними алгебраических индексов графов. Получена графовая интерпретация матрицы, обобщенно обратной к лапласовской матрице мультиграфа. Глава написана в основном по материалам работ [3, 4, 67, 69, 137]. Результаты использовались, в частности, в [12, 81, 82, 85, 87, 92, 106, 116, 130, 143, 155, 156, 187, 188, 190–192, 194, 201, 218, 234, 243–247, 249, 250, 265–267, 274, 293, 294, 318, 333, 335, 336, 352, 357, 362, 365, 366, 400, 401, 403, 407–409, 411, 413].

8.1. Свойства относительной лесной доступности для мультиграфов

В дополнение к условиям, характеризующим меры связанности вершин графов, которые были рассмотрены в предыдущей главе, рассмотрим два специфических условия: *двойную стохастичность* и *независимость от макровершины*.

Двойная стохастичность. Для любого мультиграфа G имеет место

- 1) $p_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, \dots, n$;
- 2) $\sum_{i=1}^n p_{ij} = \sum_{i=1}^n p_{ji} = 1$, $i = 1, \dots, n$.

Согласно этому свойству p_{ij} можно интерпретировать как долю связанности («соединенности») вершин i и j в суммарной связанности i (или j) со всеми вершинами. Данная интерпретация нуждается в осмыслении. Действительно, в силу симметрии, она требует, чтобы «суммарная связанность» у всех вершин была одинаковой, несмотря на разное положение вершин в мультиграфе. Соответствующее равенство достигается за счет диагональных элементов матрицы относительных лесных доступностей: если вершина i слабо

связана с другими, то велика «уединенность» вершины, выражаемая элементом p_{ii} .

Пусть D — подмножество множества вершин $V(G)$. Назовем D *макровершиной*, если для всех $i, j \in D$ и $k \notin D$ имеет место $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{jk}$.

Следующее свойство — достаточное условие¹ равенства и постоянства близостей.

Независимость от макровершины. Пусть D — макровершина в мультиграфе G и $i, j \in D, k \notin D$. Тогда $p_{ik} = p_{jk}$ и p_{ik} не меняется при добавлении новых или изменении весов имеющихся дуг внутри D .

Независимость от макровершины является существенным усилением следующего простого свойства (оно не включено в перечень свойств в разделе 7.2, так как выполнение его очевидно для всех рассматриваемых показателей близости).

Независимость компонент мультиграфа. Если A и B — различные компоненты мультиграфа (различные слабые компоненты мультиорграфа), то проведение новых или изменение весов имеющихся ребер (дуг) в компоненте B не меняет значений близости вершин, принадлежащих компоненте A .

Теорема 8.1. Относительная лесная доступность для мультиграфов обладает следующими свойствами: симметричность, неотрицательность, диагональное превосходство, неравенство треугольника для близостей, условие несвязности, транзитность, монотонность, стохастичность, независимость от макровершины.

Таким образом, относительная лесная доступность для мультиграфов без каких-либо ограничений на веса ребер обладает всеми свойствами из раздела 7.2 и данного раздела и является Σ -близостью (см. раздел 7.4) при $\Sigma = 1$. Разумеется, это не означает, что данная мера близости вершин графа — «самая лучшая». Это значит лишь, что относительная лесная доступность соответствует одной из возможных концепций близости, а именно, концепции, задаваемой указанными свойствами.

При доказательстве теоремы 8.1 будет использована следующая теорема, аналогичная теореме 7.5 и представляющая самостоятельный интерес.

Теорема 8.2 (об одношаговом изменении относительной лесной доступности в мультиграфе). Пусть в мультиграфе G вес некоторого ребра ε_{kt}^p увеличился на $\Delta\varepsilon_{kt} > 0$ или к G было добавлено новое ребро между k и t с весом $\Delta\varepsilon_{kt} > 0$. Пусть G' — полученный мультиграф и $W' = W(G'), Q' = Q(G')$. Тогда

1) $\Delta Q = hR$, где $\Delta Q = Q' - Q$, $h = (d_{kt} + 1/\Delta\varepsilon_{kt})^{-1}$, $d_{kt} = q_{kk} + q_{tt} - 2q_{kt}$, $R = (r_{ij})_{n \times n}$ — матрица с элементами $r_{ij} = (q_{ik} - q_{it})(q_{jt} - q_{jk})$;

2) все строки и все столбцы матрицы ΔQ пропорциональны, т. е. ранг ΔQ равен 1;

¹Аналогичное свойство процедур агрегирования предпочтений рассматривалось в [146, 154].

- 3) если $q_{ik} > q_{it}$, то $\Delta q_{ij} > 0$ тогда и только тогда, когда $q_{jt} > q_{jk}$, и $\Delta q_{ij} < 0$ тогда и только тогда, когда $q_{jk} > q_{jt}$;
- 4) знаки всех приращений Δq_{ij} не зависят от модуля $\Delta \varepsilon_{kt} > 0$, а модули ненулевых Δq_{ij} строго возрастают по $\Delta \varepsilon_{kt}$;
- 5) для любых $i, j \in V(G)$ имеет место $\Delta d_{ij} = -\frac{1}{4}(d_{ik} - d_{it} + d_{jt} - d_{jk})^2(d_{kt} + 1/\Delta \varepsilon_{kt})^{-1}$, и следовательно, $d'_{ij} \leq d_{ij}$.

Доказательство теоремы 8.2. Пусть $\Delta W = W' - W$. Заметим, что $\Delta W = XY$, где $X = (x_{11}, \dots, x_{n1})^T$ — вектор-столбец с элементами $x_{k1} = 1$, $x_{t1} = -1$ и $x_{i1} = 0$ при $i \notin \{k, t\}$; $Y = (y_{11}, \dots, y_{1n})$ — вектор-строка с элементами $y_{1k} = \Delta \varepsilon_{kt}$, $y_{1t} = -\Delta \varepsilon_{kt}$ и $y_{1j} = 0$ при $j \notin \{k, t\}$. Согласно [55, раздел 0.7.4]

$$Q' = Q - \frac{1}{1 + YQX} QXYQ.$$

Непосредственно проверяется, что $\frac{1}{1 + YQX} = h/\Delta \varepsilon_{kt}$ и $QXYQ = -\Delta \varepsilon_{kt} R$, и, тем самым, пункт 1 доказан. Пункты 2, 3, 4 и 5 выводятся из пункта 1 и неотрицательности d_{kt} . \square

Доказательство теоремы 8.1. *Симметричность* следует из симметричности матрицы W .

Стохастичность. Пункт 1 следует из теоремы 1.4 и положительности весов ребер. Пункт 2 следует из того, что данным свойством обладает матрица $W = Q^{-1}$ [200, 361]. Другое простое доказательство получается применением теоремы 1.4 и использованием того факта, что для любых $i_1, i_2, j \in V(G)$ имеет место $i_1 \neq i_2 \Rightarrow \mathcal{F}^{i_1 j} \cap \mathcal{F}^{i_2 j} = \emptyset$ и $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}^{ij} = \mathcal{F}$. Пункт 3 следует из пункта 2 и симметричности.

Диагональное превосходство. Заметим, что для любых $i, j = 1, \dots, n$, таких что $j \neq i$, и любого $H \in \mathcal{F}$, если $H \in \mathcal{F}^{ij}$, то $H \in \mathcal{F}^{ii}$. Поэтому $\mathcal{F}^{ij} \subseteq \mathcal{F}^{ii}$. Пусть F_0 — такой подграф G , что $V(F_0) = V(G)$, $E(F_0) = \emptyset$. Тогда $F_0 \in \mathcal{F}^{ii} \setminus \mathcal{F}^{ij}$ и $\varepsilon(F_0) = 1$, то есть $\mathcal{F}^{ij} \subset \mathcal{F}^{ii}$ и $\varepsilon(\mathcal{F}^{ij}) < \varepsilon(\mathcal{F}^{ii})$. Согласно теореме 1.4 $q_{ii} > q_{ij}$.

Неравенство треугольника для близостей. Если $i = j$ или $i = k$, то $q_{ij} + q_{ik} - q_{jk} = q_{ii}$. Предположим, что $i \neq j$ и $i \neq k$. Так же, как в доказательстве диагонального превосходства, получаем $\mathcal{F}^{ij} \cup \mathcal{F}^{ik} \subset \mathcal{F}^{ii}$, следовательно,

$$\varepsilon(\mathcal{F}^{ij} \cup \mathcal{F}^{ik}) = \varepsilon(\mathcal{F}^{ij}) + \varepsilon(\mathcal{F}^{ik}) - \varepsilon(\mathcal{F}^{ij} \cap \mathcal{F}^{ik}) < \varepsilon(\mathcal{F}^{ii}). \quad (8.1)$$

Обозначим через \mathcal{F}^{ijk} множество $\mathcal{F}^{ij} \cap \mathcal{F}^{ik}$. Заметим, что \mathcal{F}^{ijk} отличается от $\mathcal{F}^{jik} = \mathcal{F}^{ji} \cap \mathcal{F}^{jk}$ только корнями деревьев, содержащих i, j и k одновременно. Поэтому

$$\varepsilon(\mathcal{F}^{ij} \cap \mathcal{F}^{ik}) = \varepsilon(\mathcal{F}^{ijk}) = \varepsilon(\mathcal{F}^{jik}) \leq \varepsilon(\mathcal{F}^{jk}). \quad (8.2)$$

Из (8.1), (8.2) следует

$$\varepsilon(\mathcal{F}^{ij}) + \varepsilon(\mathcal{F}^{ik}) - \varepsilon(\mathcal{F}^{jk}) < \varepsilon(\mathcal{F}^{ii}),$$

и, согласно теореме 1.4,

$$q_{ij} + q_{ik} - q_{jk} < q_{ii}.$$

Условия несвязности и связности следуют из теоремы 1.4.

Транзитность. Заметим, что если $H \in \mathcal{F}^{it}$, то $H \in \mathcal{F}^{ik}$. Далее, $\mathcal{F}^{ik} \setminus \mathcal{F}^{it} \neq \emptyset$ и $\varepsilon(\mathcal{F}^{ik} \setminus \mathcal{F}^{it}) > 0$. Следовательно, по теореме 1.4 имеем $q_{ik} > q_{it}$.

Монотонность. Пункт 1. Согласно теореме 8.2 (она доказана выше) при $h > 0$ $\Delta p_{kt} = h(p_{kk} - p_{kt})(p_{tt} - p_{tk})$ и $\Delta p_{ij} = h(p_{ik} - p_{it})(p_{jt} - p_{jk})$. В силу диагонального превосходства $\Delta p_{kt} > 0$. Если $\Delta p_{ij} > 0$, то $(p_{ik} - p_{it})(p_{jt} - p_{jk}) > 0$. Положим для определенности $p_{ik} - p_{it} > 0$, $p_{jt} - p_{jk} > 0$ (дополнительный случай рассматривается аналогично). Тогда по пункту 2 свойства 6 из [67] (свойство «транзитность-2» из раздела 8.5), если $i \neq k$, то в G есть путь из i в k , такой что разность $p_{uk} - p_{ut}$ строго возрастает, когда u последовательно пробегает все вершины от i до k в этом пути. Следовательно, $p_{kk} - p_{kt} > p_{ik} - p_{it}$. Аналогично при $j \neq t$ $p_{tt} - p_{tk} > p_{jt} - p_{jk}$. Пользуясь выражениями для Δp_{kt} и Δp_{ij} , получаем $\Delta p_{kt} > \Delta p_{ij}$.

Пункт 2. Положив $Q' = Q(G')$, по пункту 1 теоремы 8.2 имеем

$$\begin{aligned} \Delta q_{it} - \Delta q_{ik} &= h(q_{ik} - q_{ii})(q_{tt} - q_{tk}) - h(q_{ik} - q_{ii})(q_{kt} - q_{kk}) = \\ &= h(q_{ik} - q_{ii})(q_{kk} + q_{tt} - q_{tk} - q_{kt}) = h(q_{ik} - q_{ii})d_{kt}. \end{aligned}$$

Теперь нужное неравенство следует из пункта 1 транзитности и метризуемости.

Пункт 3. Согласно пункту 1 транзитности $q_{i_1k} > q_{i_1t}$ и $q_{i_2k} > q_{i_2t}$, и по пункту 3 теоремы 8.2 $\Delta q_{i_1i_2} < 0$.

При доказательстве *независимости от макровершины* будет использована следующая лемма.

Лемма 8.1. *В условиях теоремы 8.2 для любого $i = 1, \dots, n$, если $q_{ik} = q_{it}$, то для всех $j = 1, \dots, n$ q_{ij} не меняются.*

Доказательство. По пункту 1 теоремы 8.2 при $q_{ik} = q_{it}$ имеем

$$\Delta q_{ij} = h(q_{ik} - q_{it})(q_{jt} - q_{jk}) = 0. \quad \square$$

Теперь рассмотрим такой граф G' с множеством вершин $V(G)$, что

- 1) $(i, j) \in E(G')$ если и только если $i \neq j$ и $\ell_{ij} \neq 0$ и
- 2) для каждого ребра $(i, j) \in E(G')$ $\varepsilon'_{ij} = -\ell_{ij}$.

Пусть $Q' = Q(G') = (q'_{ij})$. Очевидно, D является макровершиной и в G' . Пусть $S = V(G) \setminus D$. Докажем сначала требуемое свойство для G' . Рассмотрим граф G'' , получающийся из G' удалением всех ребер внутри D . Пусть $Q'' = Q(G'') = (q''_{ij})$. Вершины из D в G'' эквивалентны; значит, для всех $i, j \in D$ и $k \in S$ имеем $q''_{ik} = q''_{jk}$. Тогда по пункту 4 монотонности, используя индукцию, получаем $q'_{ik} = q''_{ik} = q''_{jk} = q'_{jk}$ для всех $i, j \in D$, $k \in S$. Это доказывает свойство, поскольку $Q' = Q$. \square

Теперь построим еще одну теоретико-графовую интерпретацию матрицы Q относительных лесных доступностей (первая интерпретация была дана теоремой 1.4 на стр. 22). Покажем, что q_{ij} связаны с весами маршрутов разной длины между i и j в G . Для этого введем понятие маршрута со стоками.

Маршрут со стоками — это чередующаяся последовательность вершин и ребер мультиграфа, обладающая следующими свойствами:

- 1) первый и последний элементы последовательности — вершины;
- 2) ребро, расположенное в последовательности между двумя вершинами, инцидентно каждой из них.

Заметим, что одна и та же вершина может стоять в последовательности и до, и после ребра, тогда, по второму свойству, она ему инцидентна; вторая инцидентная ему вершина может быть любой. Такое ребро называем *стоком*.

Общее число ребер в маршруте со стоками назовем его *длиной*. Из любой вершины, очевидно, существует единственный маршрут со стоками длины 0 в себя — это одноэлементная последовательность, содержащая данную вершину и не содержащая ребер.

Маршрут со стоками получается из обычного маршрута добавлением любого конечного числа «одношаговых ответвлений» (стоков), которые, в частности, могут следовать «вперед» и «назад» по основному маршруту.

Вес маршрута со стоками определяется как произведение весов всех его ребер (если ребро входит в маршрут со стоками несколько раз, столько же раз входит в произведение его вес). Вес маршрута со стоками длины 0 положим равным 1.

Пусть $a^* = \max_{i,j \in V(G)} n_{ij}$ — максимальное число ребер, инцидентных одной и той же паре вершин в G .

Теорема 8.3. *Для любого мультиграфа G с весами ребер, принадлежащими интервалу $(0, (2a^*(n-1))^{-1})$, и для любых $i, j = 1, \dots, n$*

$$q_{ij} = \sum_{t=0}^{\infty} (U_{ij}^{(t)} - P_{ij}^{(t)}),$$

где $U_{ij}^{(t)}$ и $P_{ij}^{(t)}$ — соответственно веса маршрутов со стоками длины t с четным и нечетным числом стоков между вершинами i и j в G .

Доказательство теоремы 8.3. Разложим $Q = (I - (-L))^{-1}$ в сумму бесконечноубывающей геометрической прогрессии, введя обозначение $M = (m_{ij}) = -L$,

$$Q = (I - M)^{-1} = I + M + M^2 + \dots \quad (8.3)$$

Равенство (8.3) выполняется если и только если

$$|\lambda_1| < 1, \quad (8.4)$$

где $|\lambda_1|$ — максимальный модуль собственного значения матрицы $M = -L$ [55, следствие 5.6.16]. Рассмотрим верхнюю границу для $|\lambda_1|$, которая может быть получена из теоремы Гершгорина (см. [55]):

$$|\lambda_1| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\ell_{ij}|. \quad (8.5)$$

Пусть $\varepsilon_{\max} = \max_{1 \leq i \neq j \leq n} \varepsilon_{ij}$, где $\varepsilon_{ij} = \sum_{p=1}^{n_{ij}} \varepsilon_{ij}^p = -\ell_{ij}$. Тогда, согласно (1.2), (1.3),

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\ell_{ij}| = 2 \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j \neq i} |\ell_{ij}| \leq 2 \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j \neq i} a^* \varepsilon_{\max} = 2a^*(n-1)\varepsilon_{\max}. \quad (8.6)$$

Поэтому выполнение (8.4), а значит и (8.3), обеспечивается условием

$$\varepsilon_{\max} < (2a^*(n-1))^{-1}.$$

Согласно (8.3) остается доказать

$$m_{ij}^{(k)} = U_{ij}^{(k)} - P_{ij}^{(k)}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.7)$$

где $m_{ij}^{(k)}$ ($i, j = 1, \dots, n$) — элементы матрицы M^k .

Проведем индукцию по длине k маршрутов со стоками между i и j . Доказательство без изменений может быть использовано и в случае мультиорграфов, так как оно не использует симметричность матрицы M .

1⁰. $k = 0$. (8.7) выполняется, поскольку $M^0 = I$, и, по определению маршрута со стоками, для всех $i, j = 1, \dots, n$ при $j \neq i$ имеет место $P_{ij}^{(0)} = U_{ij}^{(0)} = P_{ii}^{(0)} = 0$ и $U_{ii}^{(0)} = 1$.

2⁰. Пусть (8.7) выполняется при $k = v$. Докажем его для $k = v + 1$. Рассмотрим произвольный маршрут μ длины $v + 1$ с g стоками между вершинами i и j . Пусть t — предпоследняя вершина μ . Если $t \neq j$, то μ получается присоединением ребра (t, j) к маршруту с g стоками длины v из i в t . Если же $t = j$, то μ может быть образован присоединением к маршруту с $g - 1$ стоком из i в j ребра, инцидентного j и становящегося g -ым стоком. Поэтому

$$U_{ij}^{(v+1)} = \sum_{t \neq j} U_{it}^{(v)} m_{tj} + \sum_{t \neq j} P_{ij}^{(v)} m_{jt},$$

$$P_{ij}^{(v+1)} = \sum_{t \neq j} P_{it}^{(v)} m_{tj} + \sum_{t \neq j} U_{ij}^{(v)} m_{jt}.$$

Тогда

$$U_{ij}^{(v+1)} - P_{ij}^{(v+1)} = \sum_{t \neq j} U_{it}^{(v)} m_{tj} + \sum_{t \neq j} P_{ij}^{(v)} m_{jt} - \sum_{t \neq j} P_{it}^{(v)} m_{tj} - \sum_{t \neq j} U_{ij}^{(v)} m_{jt} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{t \neq j} (U_{it}^{(v)} - P_{it}^{(v)}) m_{tj} - \sum_{t \neq j} (U_{ij}^{(v)} - P_{ij}^{(v)}) m_{jt} \stackrel{\langle 1 \rangle}{=} \sum_{t \neq j} m_{it}^{(v)} m_{tj} - m_{ij}^{(v)} \sum_{t \neq j} m_{jt} = \\
&\stackrel{\langle 2 \rangle}{=} \sum_{t \neq j} m_{it}^{(v)} m_{tj} + m_{ij}^{(v)} m_{jj} = \sum_{t=1}^n m_{it}^{(v)} m_{tj} = m_{ij}^{(v+1)},
\end{aligned}$$

где переход $\langle 1 \rangle$ сделан по предположению индукции, а $\langle 2 \rangle$ использует равенство $m_{jj} = -\sum_{t \neq j} m_{jt}$, следующее из (1.3), с учетом обозначения $M = -L$. \square

Еще одна интерпретация матрицы Q может быть получена с помощью теоремы Кэли-Гамильтона (см. [200]).

Вместо $Q = W^{-1} = (I + L)^{-1}$ (см. (1.7)) в качестве матрицы близости можно использовать матрицу $Q_\alpha = (I + \alpha L)^{-1}$ ($\alpha > 0$), имеющую те же основные свойства, что и Q (лишь в свойстве о путях со стоками появляется множитель α). Параметр α задает пропорцию учета связей данной длины между вершинами G по сравнению со связями, на единицу более короткими. Примеры вычисления относительной лесной доступности даны в [137]. В частности, для цепей и циклов близость между вершинами выражается через числа Фибоначчи и числа Люка.

В следующем разделе будут установлены свойства относительной лесной доступности для ориентированных мультиграфов.

8.2. Свойства относительной лесной доступности для мультиорграфов

Напомним понятия строчной стохастичности и столбцовой стохастичности.

Строчная стохастичность и столбцовая стохастичность. Матрица $P = (p_{ij})$ с неотрицательными элементами является:

- строчно-стохастической, если $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$ ($i = 1, \dots, n$);
- столбцово-стохастической, если $\sum_{i=1}^n p_{ij} = 1$ ($j = 1, \dots, n$).

Если $P = (p_{ij})$ — матрица близости вершин орграфа, и P — строчно-стохастическая, то p_{ij} можно интерпретировать как долю связанности (соединенности) вершин i и j в суммарной связанности всех вершин с i (или i со всеми вершинами); если P — столбцово-стохастическая, то p_{ij} может рассматриваться как доля связанности i и j в суммарной связанности всех вершин с j (или j со всеми вершинами).

Согласно теореме 1.4 элементы матриц $\tilde{Q} = (\tilde{q}_{ij})$ и $Q = (q_{ij})$ относительной лесной доступности в случае мультиорграфов имеют следующее топологическое представление: $\tilde{q}_{ij} = \varepsilon(\mathcal{F}^{j \bullet \rightarrow i}) / \varepsilon(\mathcal{F}^{\bullet \rightarrow \bullet})$, $q_{ij} = \varepsilon(\mathcal{F}^{i \rightarrow \bullet j}) / \varepsilon(\mathcal{F}^{\rightarrow \bullet})$, $i, j = 1, \dots, n$.

Свойство независимости от макровершины переформулируем для мультиорграфов.

Пусть D — подмножество множества вершин $V(\Gamma)$. Назовем D макровершиной, если для всех $i, j \in D$ и $k \notin D$ имеет место $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{jk}$ и $\varepsilon_{ki} = \varepsilon_{kj}$.

Следующее свойство — достаточное условие равенства и постоянства значений показателя $P = (p_{ij})$ близости вершин мультиорграфа.

Независимость от макровершины. Показатель $P = (p_{ij})$ близости вершин мультиорграфа обладает свойством независимости от макровершины, если для любого мультиорграфа Γ , любой его макровершины D и любых $i, j \in D$, $k \notin D$ имеет место $p_{ik} = p_{jk}$, и p_{ik} не меняются при добавлении новых или изменении весов имеющихся дуг внутри D .

Теорема 8.4. Относительная доступность по исходящим лесам $\tilde{Q} = (\tilde{q}_{ij})$ для мультиорграфов обладает следующими свойствами: неотрицательность, диагональное превосходство, условие несвязности, условие связности, транзитность, монотонность, столбцовая стохастичность, независимость от макровершины.

Аналогичными свойствами, но с заменой столбцовой стохастичности на строчную стохастичность, обладает относительная доступность по входящим лесам $Q = (q_{ij})$. Таким образом, за исключением симметричности, неравенства треугольника для близостей и метризуемости, естественных только для неориентированных мультиграфов, относительная лесная доступность для мультиорграфов обладает всеми свойствами из раздела 7.2.

Аналогом теоремы 8.2 является следующая теорема, которая используется при доказательстве теоремы 8.4.

Теорема 8.5 (об одношаговом изменении относительной лесной доступности в мультиорграфе). Пусть в мультиорграфе Γ вес некоторой дуги ε_{kt}^p увеличился на $\Delta\varepsilon_{kt} > 0$ или к Γ была добавлена новая дуга из k в t с весом $\Delta\varepsilon_{kt} > 0$. Пусть Γ' — полученный мультиорграф и $\tilde{Q}' = \tilde{Q}(\Gamma')$. Тогда

- 1) $\Delta\tilde{Q} = hR$, где $\Delta\tilde{Q} = \tilde{Q}' - \tilde{Q}$, $h = \frac{\Delta\varepsilon_{kt}}{1 + \Delta\varepsilon_{kt}(\tilde{q}_{tt} - \tilde{q}_{kt})}$, $R = (r_{ij})$ — $n \times n$ -матрица с элементами $r_{ij} = \tilde{q}_{it}(\tilde{q}_{kj} - \tilde{q}_{tj})$;
- 2) все столбцы матрицы $\Delta\tilde{Q}$ пропорциональны;
- 3) $\Delta\tilde{q}_{ij} > 0$ тогда и только тогда, когда $\tilde{q}_{kj} > \tilde{q}_{tj}$, и $\Delta\tilde{q}_{ij} < 0$ тогда и только тогда, когда $\tilde{q}_{kj} < \tilde{q}_{tj}$.

Доказательство теоремы 8.5 имеет ту же схему, что доказательство теоремы 8.2. При этом нужно положить $X = (x_{i1})_{n \times 1}$ — вектор-столбец с элементами $x_{t1} = 1$, $x_{i1} = 0$ для всех $i \neq t$, $Y = (y_{1j})_{1 \times n}$ — вектор-строка с элементами $y_{1t} = \Delta\varepsilon_{kt}$, $y_{1k} = -\Delta\varepsilon_{kt}$, $y_{1j} = 0$ для всех $j \neq k, t$. \square

Доказательство теоремы 8.4. Неотрицательность следует из теоремы 1.4 и положительности весов дуг.

Доказательство *диагонального превосходства для мультиорграфа* полностью аналогично доказательству этого свойства для мультиграфа. То же относится к транзитности и независимости от макровершины.

Условие *несвязности* следует из теоремы 1.4, а *условие связности* выводится из условия несвязности.

Докажем *монотонность*. Пункт 1. Согласно теореме 8.5, приведенной выше, $\Delta\tilde{q}_{kt} = h(\tilde{q}_{kk} - \tilde{q}_{kt})(\tilde{q}_{tt} - \tilde{q}_{tk})$ и $\Delta\tilde{q}_{ij} = h(\tilde{q}_{ik} - \tilde{q}_{it})(\tilde{q}_{jt} - \tilde{q}_{jk})$, где $h > 0$. В силу диагонального превосходства $\Delta\tilde{q}_{kt} > 0$. Если $\Delta\tilde{q}_{ij} > 0$, то $(\tilde{q}_{ik} - \tilde{q}_{it})(\tilde{q}_{jt} - \tilde{q}_{jk}) > 0$. Положим для определенности $\tilde{q}_{ik} - \tilde{q}_{it} > 0$ и $\tilde{q}_{jt} - \tilde{q}_{jk} > 0$ (дополнительный случай рассматривается аналогично). Тогда по пункту 3 свойства 6 из [67], если $i \neq k$, то в Γ есть путь из i в k , такой что разность $\tilde{q}_{uk} - \tilde{q}_{ut}$ строго возрастает, когда u последовательно пробегает все вершины от i до k в этом пути. Следовательно, $\tilde{q}_{kk} - \tilde{q}_{kt} > \tilde{q}_{ik} - \tilde{q}_{it}$. Аналогично при $j \neq t$ $\tilde{q}_{tt} - \tilde{q}_{tk} > \tilde{q}_{jt} - \tilde{q}_{jk}$. Пользуясь выражениями для $\Delta\tilde{q}_{kt}$ и $\Delta\tilde{q}_{ij}$, получаем $\Delta\tilde{q}_{kt} > \Delta\tilde{q}_{ij}$.

Согласно теореме 8.5 $\Delta\tilde{q}_{tk} = h\tilde{q}_{tt}(\tilde{q}_{kk} - \tilde{q}_{tk})$ и $\Delta\tilde{q}_{ik} = h\tilde{q}_{it}(\tilde{q}_{kk} - \tilde{q}_{tk})$, и значит, по пункту 3 теоремы 8.5, \tilde{q}_{tk} возрастает на большую величину, чем \tilde{q}_{ik} .

Пункт 2. По теореме 8.5 имеем $\Delta\tilde{q}_{ti} = h\tilde{q}_{tt}(\tilde{q}_{ki} - \tilde{q}_{ti})$, $\Delta\tilde{q}_{ki} = h\tilde{q}_{kt}(\tilde{q}_{ki} - \tilde{q}_{ti})$. Учитывая, что по пункту 1 транзитности $\tilde{q}_{ki} > \tilde{q}_{ti}$, получаем необходимое утверждение.

Пункт 3. Согласно теореме 8.5

$$\Delta\tilde{q}_{i_1i_2} = h\tilde{q}_{i_1t}(\tilde{q}_{ki_2} - \tilde{q}_{ti_2}),$$

и, согласно пункту 1 транзитности, $\tilde{q}_{i_1i_2}$ уменьшается.

Пункт 4. По п. 1 теоремы 8.5 $\Delta\tilde{q}_{ti} = h\tilde{q}_{tt}(\tilde{q}_{ki} - \tilde{q}_{ti}) = 0$, $\Delta\tilde{q}_{it} = h\tilde{q}_{kt}(\tilde{q}_{ki} - \tilde{q}_{ti}) = 0$.

Докажем *столбцовую стохастичность*. По свойству неотрицательности $\tilde{q}_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, \dots, n$. Далее, $\sum_{i=1}^n \tilde{p}_{ij} = 1$ ($j = 1, \dots, n$) в силу матричной теоремы о лесах (теорема 1.4) и того факта, что для любых $i_1, i_2, j \in V(\Gamma)$, если $i_1 \neq i_2$, то $\mathcal{F}^{i_1 \bullet \rightarrow j} \cap \mathcal{F}^{i_2 \bullet \rightarrow j} = \emptyset$ и, кроме того, $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}^{j \bullet \rightarrow i} = \mathcal{F}^{\bullet \rightarrow}$.

Докажем *независимость от макровершины*. Вначале установим для орграфов аналог леммы 8.1. Действительно, по пункту 1 теоремы 8.5 имеем $\Delta\tilde{q}_{ti} = h\tilde{q}_{tt}(\tilde{q}_{ki} - \tilde{q}_{ti}) = 0$, $\Delta\tilde{q}_{it} = h\tilde{q}_{kt}(\tilde{q}_{ki} - \tilde{q}_{ti}) = 0$. Теперь свойство доказывается аналогично неориентированному случаю заменой всех понятий на их ориентированные аналоги. \square

Отметим в заключение этого раздела, что введя понятие маршрута со стоками в мультиорграфе, можно получить топологическую интерпретацию относительной лесной доступности в ориентированном случае, аналогичную теореме 8.3 для мультиграфов.

Анализ относительной лесной доступности в более общем, параметрическом случае, будет продолжен в разделе 8.6.2.

8.3. Составляющие относительной лесной доступности

В этом разделе будет получено разложение относительной лесной доступности в мультиграфе на составляющие, которые соответствуют лесам с различным числом компонент-деревьев. Затем будут рассмотрены понятия близости вершин мультиграфа, соответствующие каждой из составляющих. Через v будем обозначать количество связанных компонент в G , через V_i — множество вершин компоненты, содержащей вершину i ($i = 1, \dots, n$).

Напомним теорему 3.1 — параметрическую версию матричной теоремы о лесах.

Теорема 3.1. *Для любого взвешенного мультиграфа G с положительными весами ребер и любого $\tau \geq 0$ существует матрица $Q(\tau) = (q_{ij}(\tau)) = (I + \tau L(G))^{-1}$, причем*

$$q_{ij}(\tau) = \frac{\sum_{k=0}^{n-v} \tau^k \varepsilon(\mathcal{F}_k^{ij})}{\sum_{k=0}^{n-v} \tau^k \varepsilon(\mathcal{F}_k)}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

где \mathcal{F}_k — множество остовных корневых лесов в G , содержащих k ребер, \mathcal{F}_k^{ij} — множество остовных корневых лесов в G , содержащих k ребер, где j принадлежит корневому дереву с корнем i , v — число компонент в G .

Как отмечено выше, относительная лесная доступность обладает свойством стохастичности, откуда следует $\sum_{j=1}^n q_{ij}(\tau) = 1$, $i = 1, \dots, n$. Это свойство выполняется и для матриц $(\varepsilon(\mathcal{F}_k^{ij})/\varepsilon(\mathcal{F}_k))$.

Предложение 8.1. *Для всех $i = 1, \dots, n$ и $k = 0, \dots, n - v$*

$$\sum_{j=1}^n \varepsilon(\mathcal{F}_k^{ij}) = \varepsilon(\mathcal{F}_k). \quad (8.8)$$

Доказательство предложения 8.1. Это равенство вытекает из соотношений $\mathcal{F}_k = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}_k^{ij}$, $\mathcal{F}_k^{i_1 j} \cap \mathcal{F}_k^{i_2 j} = \emptyset$ и $\varepsilon(\mathcal{F}_k^{ij}) = \varepsilon(\mathcal{F}_k^{ji})$, выполняющихся при любых $k = 0, \dots, n - v$ и $i, j, i_1, i_2 = 1, \dots, n$, таких что $i_1 \neq i_2$. \square

Матрицы $\{Q(\tau) \mid \tau > 0\}$ определяют параметрическое семейство относительных лесных доступностей, обладающих теми же основными свойствами, что $Q = Q(1)$. Согласно (3.2) $Q(\tau)$ можно представить в виде

$$Q(\tau) = \frac{1}{s(\tau)} (\tau^0 Q_0 + \tau^1 Q_1 + \dots + \tau^{n-v} Q_{n-v}), \quad (8.9)$$

где $s(\tau) = \sum_{k=0}^{n-v} \tau^k \varepsilon(\mathcal{F}_k)$, $Q_k = (q_{k,ij})$, $q_{k,ij} = \varepsilon(\mathcal{F}_k^{ij})$, $k = 0, \dots, n - v$, $i, j = 1, \dots, n$.

Каждая из матриц Q_k ($k = 0, \dots, n - v$) может быть рассмотрена как матрица близости вершин графа. Изучим некоторые свойства этих матриц. $Q_0 = I$, т. е. близость,

задаваемая Q_0 , совпадает с понятием «тождественность». Далее, элемент $q_{1,ij}$ матрицы Q_1 при $j \neq i$ равен суммарному весу ребер G , соединяющих i и j . В общем случае элемент $Q_{k,ij}$ матрицы Q_k отличен от нуля тогда и только тогда, когда в G имеются пути длины не более k между i и j . Таким образом, соответствующее понятие близости игнорирует пути длины, превосходящей k ; когда же $k \geq |V_i|_{\max} - 1$ (где $|V_i|_{\max}$ — максимальное количество вершин среди всех компонент G), «близость», соответствующая Q_k , учитывает все пути в графе.

Напомним, что V_i — множество вершин компоненты G , содержащей i . Для описания матрицы близости Q_{n-v} введем матрицу $\bar{J}(G) = \bar{J} = (\bar{J}_{ij})$:

$$\bar{J}_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{|V_i|}, & \text{если } j \in V_i, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

и докажем следующую лемму.

Лемма 8.2.

$$Q_{n-v} = \varepsilon(\mathcal{F}_{n-v}) \bar{J}. \quad (8.10)$$

Доказательство леммы 8.2. Пусть $j \in V_i$. Утверждение леммы вытекает из следующего факта: каждому остовному корневому лесу, принадлежащему \mathcal{F}_{n-v}^{ij} , можно поставить в соответствие $|V_i|$ остовных корневых лесов, принадлежащих \mathcal{F}_{n-v} (с тем же весом у каждого) и различающихся лишь корнем в компоненте, содержащей i , причем в этом соответствии единожды участвует каждый элемент множества \mathcal{F}_{n-v} . При $j \notin V_i$ утверждение следует из $\mathcal{F}_{n-v}^{ij} = \emptyset$. \square

Как сказано выше, матрице Q_0 соответствует близость–тождественность. Согласно лемме 8.2 матрица Q_{n-v} представляет другую предельную концепцию близости: все вершины, принадлежащие одной компоненте G , одинаково близки друг другу, причем эта близость обратно пропорциональна числу вершин в компоненте. Таким образом, *близость* k i равномерно распределена по компоненте G , которой принадлежит i . Если в G — одна компонента, то $\bar{J} = \frac{1}{n}J$, где J — $(n \times n)$ -матрица из единиц, и все элементы Q_{n-v} равны $\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v})/n$. Для всех матриц Q_k , $k = 0, \dots, n - v$ близость между вершинами из разных компонент G равна 0.

Следствие 8.1. $\lim_{\tau \rightarrow \infty} Q(\tau) = \bar{J}$.

Это следствие выводится непосредственно из теоремы 3.1 и леммы 8.2.

Замечание 8.1. Особенный интерес представляет матрица Q_{n-v-1} . Ее элемент $q_{n-v-1,ij}$ есть суммарный вес тех остовных корневых лесов (где j принадлежит дереву с корнем i), которые имеют два дерева в одной из компонент G и по одному в остальных. Среди матриц

Q_k матрица Q_{n-v-1} ближе всего по свойствам к матрице относительных лесных доступностей $Q(\tau)$. Причина в том, что, как видно из (8.9)–(8.10), при достаточно больших τ сравнение двух элементов матрицы $Q(\tau)$ определяется в основном сравнением соответствующих элементов Q_{n-v-1} . Только в случае равенства этих элементов Q_{n-v-1} значение имеют элементы Q_k при $k < n - v - 1$. Рассматривая примеры, можно убедиться, что ситуации, когда два элемента матрицы Q_{n-v-1} равны, а соответствующие элементы матриц Q_k , $k < n - v - 1$ различны, возникают довольно редко, и в них сравниваемые близости, если понимать их интуитивно, примерно равны. Но есть одно исключение. Как отмечено выше, чтобы матрица Q_k учитывала все пути в графе, необходимо $k \geq |V_i|_{\max} - 1$. Если все компоненты G , кроме одной, — отдельные вершины или компонента всего одна, то $|V_i|_{\max} - 1 = n - v$. При этом, если пара вершин в нетривиальной компоненте соединена лишь путями длины $n - v$ (граф цепного вида), то ей соответствует нулевой элемент в Q_{n-v-1} , и для Q_{n-v-1} нарушено условие несвязности. Но взвешенные суммы матриц Q_{n-v-1} и Q_{n-v} , изучению которых посвящен следующий раздел, уже свободны от данного недостатка. В следующем разделе также показано, что матрица Q_{n-v-1} тесно связана с матрицей L^+ — обобщенно обратной к L по Муру-Пенроузу. А именно, L^+ есть сумма Q_{n-v-1} и Q_{n-v} с определенными коэффициентами.

8.4. Достижимость по «густым» лесам, связанная с обобщенным обращением лапласовской матрицы графа

Данный раздел посвящен изучению взвешенных сумм матриц Q_{n-v-1} и $Q_{n-v} = \varepsilon(\mathcal{F}_{n-v})\bar{J}$. В ряде работ [77,237,239,370] явно или неявно использовались матрицы близости вершин связных графов, обобщением которых на произвольные графы являются матрицы $(L + \alpha \bar{J})^{-1}$, где $\alpha > 0$. Задачи этого раздела: 1) дать топологическую интерпретацию показателей близости этого типа в случае произвольных мультиграфов (эта интерпретация оказывается связанной с матрицами Q_{n-v-1} и Q_{n-v}); 2) установить связь этой близости с матрицей L^+ — обобщенно-обратной к L по Муру-Пенроузу и 3) рассмотреть ее свойства. Мы покажем, что при достаточно малых α матрица $(L + \alpha \bar{J})^{-1}$ есть сумма Q_{n-v-1} и Q_{n-v} с положительными весами и удовлетворяет ряду условий раздела 7.2.

Для решения перечисленных задач рассмотрим матрицу

$$\hat{Q} = (L + \bar{J})^{-1} - \bar{J}, \quad (8.11)$$

которая обладает замечательными свойствами, и получим четыре представления для \hat{Q} .

Предложение 8.2. При любом $\alpha \neq 0$ матрица $L + \alpha \bar{J}$ обратима, и

$$\hat{Q} = (L + \alpha \bar{J})^{-1} - \alpha^{-1} \bar{J}.$$

Согласно предложению 8.2 матрицы \hat{Q} и $(L + \alpha \bar{J})^{-1}$ отличаются на матрицу, элементы которой постоянны в каждой диагональной клетке, соответствующей какой-либо компоненте G . В [77, 237, 239, 370] матрицы вида $(L + \alpha \bar{J})^{-1}$ используются в основном для преобразований типа (7.9), где, если не интересоваться «межкомпонентными» элементами, они могут быть эквивалентно заменены матрицей \hat{Q} .

Доказательство предложения 8.2. Докажем сначала, что $\forall \alpha \neq 0 \det(L + \alpha \bar{J}) \neq 0$. Поскольку матрица $L + \alpha \bar{J}$ приводима к блочно-диагональному виду, где блокам соответствуют компоненты G , достаточно доказать ее невырожденность в случае связных мультиграфов (включая мультиграф без ребер и с одной вершиной — точечный граф). Пусть, напротив, для некоторого связного мультиграфа $G \det(L + \alpha \bar{J}) = 0$. Тогда существует вектор $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)^T \neq \mathbf{0}$, такой что $(L + \alpha \bar{J})\mathbf{b} = \mathbf{0}$, где $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)^T$. Заметим, что вектор $L\mathbf{b}$ имеет нулевую сумму компонент, а вектор $\alpha \bar{J}\mathbf{b}$ состоит из одинаковых компонент. Поэтому $L\mathbf{b} = \alpha \bar{J}\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Из $L\mathbf{b} = \mathbf{0}$ следует $b_1 = b_2 = \dots = b_n$, значит, в силу $\alpha \bar{J}\mathbf{b} = \mathbf{0}$, имеем $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Это противоречие доказывает обратимость $L + \alpha \bar{J}$.

Далее понадобится следующая лемма.

Лемма 8.3. Для любых матриц A и B , если A и B обратимы и $A\bar{J} = \bar{J}B = \alpha\bar{J}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$), то $A^{-1}\bar{J} = \bar{J}B^{-1} = \alpha^{-1}\bar{J}$.

Доказательство леммы 8.3. Домножив $A\bar{J} = \alpha\bar{J}$ на A^{-1} слева, получим $\bar{J} = \alpha A^{-1}\bar{J}$. Утверждение относительно матрицы B доказывается аналогично. \square

Поскольку

$$\bar{J}L = L\bar{J} = 0 \quad (8.12)$$

и

$$\bar{J}^2 = \bar{J}, \quad (8.13)$$

согласно лемме 8.3 и теореме 3.1 при любом $\tau > 0$

$$(I + \tau L)^{-1}\bar{J} = \bar{J}, \quad (8.14)$$

$$(L + \bar{J})^{-1}\bar{J} = \bar{J}. \quad (8.15)$$

Пользуясь (8.12), (8.13), (8.15), вычислим

$$\hat{Q}L = (L + \bar{J})^{-1}L - \bar{J}L = (L + \bar{J})^{-1}(L + \bar{J} - \bar{J}) = I - (L + \bar{J})^{-1}\bar{J} = I - \bar{J}, \quad (8.16)$$

$$\hat{Q}\bar{J} = (L + \bar{J})^{-1}\bar{J} - \bar{J}^2 = 0. \quad (8.17)$$

Следовательно, при любом $\alpha \neq 0$

$$(\hat{Q} + \alpha^{-1}\bar{J})(L + \alpha\bar{J}) = I - \bar{J} + \bar{J} = I.$$

Отсюда $\hat{Q} + \alpha^{-1}\bar{J} = (L + \alpha\bar{J})^{-1}$. \square

Напомним, что для любой матрицы A обобщенно обратной к ней по Муру-Пенроузу называется такая матрица A^+ , что

- 1) матрицы AA^+ и A^+A — эрмитовы,
- 2) $AA^+A = A$,
- 3) $A^+AA^+ = A^+$.

Теорема 8.6. Для любого взвешенного мультиграфа G матрица \hat{Q} является обобщенно обратной к матрице L по Муру-Пенроузу: $\hat{Q} = L^+$.

Доказательство теоремы 8.6. Согласно (8.16) $\hat{Q}L = I - \bar{J}$. Аналогично доказывается $L\hat{Q} = I - \bar{J}$. Таким образом, условие 1 из определения матрицы, обобщенно обратной по Муру-Пенроузу, выполняется. Далее, пользуясь леммой 8.3, (8.12) и (8.13), имеем

$$\begin{aligned} L\hat{Q}L &= L(I - \bar{J}) = L, \\ \hat{Q}L\hat{Q} &= (I - \bar{J})Q = Q - \bar{J}Q = Q - \bar{J}(L + \bar{J})^{-1} + \bar{J}^2 = Q - \bar{J} + \bar{J} = Q, \end{aligned}$$

что завершает доказательство теоремы. □

Поскольку L — квадратная матрица, и, как следует из доказательства теоремы 8.6, $AA^+ = A^+A$, матрица \hat{Q} является и групповой обратной к матрице L : $\hat{Q} = L^\#$ (см. [236]). Геометрическая интерпретация матрицы L^+ дана в [183].

Матрица L^+ может быть получена предельным переходом из параметрической матрицы относительных лесных доступностей $Q(\tau)$, а именно, выполняется следующее

Предложение 8.3. $L^+ = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau(Q(\tau) - \bar{J})$.

Доказательство предложения 8.3 сводится к следующим преобразованиям, использующим (8.12)–(8.15) и следствие 8.1:

$$\begin{aligned} & \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \left((I + \tau L)^{-1} - \bar{J} \right) + \bar{J} \right) (L + \bar{J}) = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \left((I + \tau L)^{-1} L + (I + \tau L)^{-1} \bar{J} - \bar{J} L - \bar{J}^2 \right) + \bar{J} L + \bar{J}^2 = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau (I + \tau L)^{-1} L + \bar{J} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} (I + \tau L)^{-1} (I + \tau L - I) + \bar{J} = \\ &= I - \lim_{\tau \rightarrow \infty} (I + \tau L)^{-1} + \bar{J} = I. \end{aligned}$$

Теперь осталось применить теорему 8.6. □

Предложение 8.3 и теорема 3.1 позволяют получить следующую интерпретацию матрицы $L^+ = (\ell_{ij}^+)$.

Теорема 8.7 (топологическая интерпретация матрицы L^+ , обобщенно обратной к L).

$$\ell_{ij}^+ = \begin{cases} \frac{\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v-1}^{ij}) - \frac{1}{|V_i|} \cdot \varepsilon(\mathcal{F}_{n-v-1})}{\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v})} & \text{при } j \in V_i, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (8.18)$$

Здесь в числителе из $\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v-1}^{ij})$ вычитается среднее по строке величин $\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v-1}^{ij})$ (см. (8.8)). Согласно теореме 8.7, определению \bar{J} и лемме 8.2

$$\begin{aligned} L^+ &= \frac{\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v-1})}{\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v})} \left(\frac{1}{\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v-1})} Q_{n-v-1} - \frac{1}{\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v})} Q_{n-v} \right) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v})} (Q_{n-v-1} - \varepsilon(\mathcal{F}_{n-v-1}) \bar{J}). \end{aligned} \quad (8.19)$$

Другое представление матрицы L^+ (в случае связного взвешенного графа) было получено в [236]. В последние годы стало появляться больше работ по обобщенному обращению лапласовских матриц, см., например, [207, 215]; отметим и отечественную работу [18].

Доказательство теоремы 8.7. При $j \notin V_i$ утверждение следует из теоремы 3.1, предложения 8.3 и определения \bar{J} . При $j \in V_i$, пользуясь тем же и леммой 8.3, имеем

$$\begin{aligned} \ell_{ij}^+ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \left(\frac{\sum_{k=0}^{n-v} \tau^k \varepsilon(\mathcal{F}_k^{ij})}{\sum_{k=0}^{n-v} \tau^k \varepsilon(\mathcal{F}_k)} - \bar{J}_{ij} \right) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-v} \tau^{k+1} \left(\varepsilon(\mathcal{F}_k^{ij}) - \frac{1}{|V_i|} \varepsilon(\mathcal{F}_k) \right)}{\sum_{k=0}^{n-v} \tau^k \varepsilon(\mathcal{F}_k)} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-v-1} \tau^{k+1} \left(\varepsilon(\mathcal{F}_k^{ij}) - \frac{1}{|V_i|} \varepsilon(\mathcal{F}_k) \right)}{\sum_{k=0}^{n-v} \tau^k \varepsilon(\mathcal{F}_k)} = \frac{\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v-1}^{ij}) - \frac{1}{|V_i|} \varepsilon(\mathcal{F}_{n-v-1})}{\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v})}. \quad \square \end{aligned}$$

Можно ли рассматривать L^+ как матрицу близости вершин? Согласно (8.18) при этом «близость» вершин из разных компонент G равна 0, так же, как и сумма «близостей» каждой вершины к вершинам той же компоненты. Последнее не соответствует интуитивному представлению о близости. Во-первых, нарушено условие неотрицательности, а во-вторых, «близость» некоторых вершин из одной компоненты оказывается меньше, чем для вершин из разных компонент.

Вернемся теперь к матрицам $(L + \alpha \bar{J})^{-1}$. Из предложений 8.2 и 8.3, теоремы 8.6 и формулы (8.19) следует

$$\begin{aligned} (L + \alpha \bar{J})^{-1} &= L^+ + \alpha^{-1} \bar{J} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau(Q(\tau) - \bar{J}) + \alpha^{-1} \bar{J} = \end{aligned} \quad (8.20)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v})} \left(Q_{n-v-1} + \left(\alpha^{-1} - \frac{\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v-1})}{\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v})} \right) Q_{n-v} \right) = \quad (8.21)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v})} Q_{n-v-1} + \left(\alpha^{-1} - \frac{\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v-1})}{\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v})} \right) \bar{J}. \quad (8.22)$$

Таким образом, при $0 < \alpha < \frac{\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v})}{\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v-1})}$ $(L + \alpha \bar{J})^{-1}$ есть сумма Q_{n-v-1} и Q_{n-v-1} с положительными коэффициентами. Если «густыми» лесами назвать остовные корневые леса в G с $n-v$ или $n-v-1$ ребрами, то показатель близости (8.21) при $0 < \alpha < \frac{\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v})}{\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v-1})}$ может быть назван *доступностью по «густым» лесам*.

Теорема 8.8. *Доступность по «густым» лесам для мультиграфов обладает следующими свойствами: симметричность, неотрицательность, диагональное превосходство, неравенство треугольника для близостей, условие несвязности, транзитность. При этом она не обладает монотонностью.*

Доказательство теоремы 8.8. Симметричность, неотрицательность и условие несвязности следуют из (8.22).

Докажем *диагональное превосходство*. Этим свойством в нестрогой версии $p_{ii} \geq p_{ij}$ обладает матрица \bar{J} , поэтому, в силу (8.22), остается доказать его для Q_{n-v-1} . По определению при всех $i, j = 1, \dots, n$ $q_{n-v-1,ij} = \varepsilon(\mathcal{F}_{n-v-1}^{ij})$, где \mathcal{F}_{n-v-1}^{ij} — множество остовных корневых лесов в G , содержащих $n-v-1$ ребер, где j принадлежит корневому дереву с корнем i . Очевидно, при $j \neq i$ $\mathcal{F}_{n-v-1}^{ij} \subseteq \mathcal{F}_{n-v-1}^{ii}$. Покажем, что $\mathcal{F}_{n-v-1}^{ii} \setminus \mathcal{F}_{n-v-1}^{ij} \neq \emptyset$. Рассмотрим произвольный $F \in \mathcal{F}_{n-v-1}^{ij}$. Удалим из F любое ребро, принадлежащее пути из i в j , и выберем произвольно корень в образовавшейся компоненте, содержащей j . Получившийся подграф принадлежит $\mathcal{F}_{n-v-1}^{ii} \setminus \mathcal{F}_{n-v-1}^{ij}$. По предположению о положительности весов ребер получаем $\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v-1}^{ii}) > \varepsilon(\mathcal{F}_{n-v-1}^{ij})$, откуда $q_{n-v-1,ii} > q_{n-v-1,ij}$, и свойство доказано. Отметим, что аналогично диагональное превосходство может быть доказано для Q_1, \dots, Q_{n-v-2} ; для Q_0 оно очевидно, а для $Q_{n-v} = \varepsilon(\mathcal{F}_{n-v}) \bar{J}$ выполняется в нестрогой версии.

Докажем *неравенство треугольника для близостей*. Строгое утверждение (при $j = k, i \neq j$) вытекает из диагонального превосходства. Докажем $p_{ij} + p_{ik} - p_{jk} \leq p_{ii}$. При $i = j$ или $i = k$ имеем тождество. Пусть $i \neq j$ и $i \neq k$. Очевидно, $\mathcal{F}_{n-v-1}^{ij} \cup \mathcal{F}_{n-v-1}^{ik} \subseteq \mathcal{F}_{n-v-1}^{ii}$. Следовательно,

$$\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v-1}^{ij}) + \varepsilon(\mathcal{F}_{n-v-1}^{ik}) - \varepsilon(\mathcal{F}_{n-v-1}^{ij} \cap \mathcal{F}_{n-v-1}^{ik}) = \varepsilon(\mathcal{F}_{n-v-1}^{ij} \cup \mathcal{F}_{n-v-1}^{ik}) \leq \varepsilon(\mathcal{F}_{n-v-1}^{ii}). \quad (8.23)$$

Введя обозначение $\mathcal{F}_{n-v-1}^{ijk} = \mathcal{F}_{n-v-1}^{ij} \cap \mathcal{F}_{n-v-1}^{ik}$, заметим что $\mathcal{F}_{n-v-1}^{ijk}$ отличается от $\mathcal{F}_{n-v-1}^{jik} = \mathcal{F}_{n-v-1}^{ji} \cap \mathcal{F}_{n-v-1}^{jk}$ только корнями деревьев, содержащих i, j и k . Поэтому

$$\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v-1}^{ij} \cap \mathcal{F}_{n-v-1}^{ik}) = \varepsilon(\mathcal{F}_{n-v-1}^{ijk}) = \varepsilon(\mathcal{F}_{n-v-1}^{jik}) \leq \varepsilon(\mathcal{F}_{n-v-1}^{jk}). \quad (8.24)$$

Сложив левые и правые части (8.23) и (8.24), получаем

$$\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v-1}^{ij}) + \varepsilon(\mathcal{F}_{n-v-1}^{ik}) \leq \varepsilon(\mathcal{F}_{n-v-1}^{ii}) + \varepsilon(\mathcal{F}_{n-v-1}^{jk}),$$

откуда, в силу определений Q_{n-v-1} и \bar{J} , а также (8.22) следует требуемое неравенство.

Докажем *транзитность*. Для матрицы \bar{J} нужное неравенство выполняется в нестрогой форме, и в силу (8.22) остается доказать его для Q_{n-v-1} . Очевидно, $\mathcal{F}_{n-v-1}^{it} \subseteq \mathcal{F}_{n-v-1}^{ik}$. Для доказательства $\mathcal{F}_{n-v-1}^{ik} \setminus \mathcal{F}_{n-v-1}^{it} \neq \emptyset$ рассмотрим произвольный $F \in \mathcal{F}_{n-v-1}^{ik}$. Удалим из F любое ребро, принадлежащее пути из k в t и выберем произвольно корень в образовавшейся компоненте, содержащей t . Получившийся подграф принадлежит $\mathcal{F}_{n-v-1}^{ik} \setminus \mathcal{F}_{n-v-1}^{it}$. По предположению о положительности весов ребер получаем $\varepsilon(\mathcal{F}_{n-v-1}^{ik}) > \varepsilon(\mathcal{F}_{n-v-1}^{it})$, и свойство доказано.

Чтобы показать нарушение *монотонности*, достаточно рассмотреть граф G с множеством вершин $V(G) = \{1, 2, 3\}$ и одним ребром $(1, 2)$ с единичным весом, к которому затем добавляется ребро $(1, 3)$ также с единичным весом. При этом для доступности по «густым» лесам при любом $\alpha \neq 0$ $\Delta p_{13} = -1/9 < 5/36 = \Delta p_{12}$ (что нарушает пункт 1 монотонности) и $\Delta p_{23} = -4/9 < 5/36 = \Delta p_{21}$ (что нарушает пункт 2). Здесь же тривиальным образом нарушается и пункт 3, так как $\Delta p_{22} = 11/36 > 0$. Добавлением изолированных вершин аналогичный пример может быть построен для произвольного n . \square

Укажем характер нарушения монотонности для данного показателя близости. Из (8.20) следует, что когда вершины k и t принадлежат одной и той же компоненте исходного мультиграфа, монотонность выполняется в нестрогой форме (неравенства заменяются на нестрогие), что можно признать приемлемым. «Грубые» нарушения монотонности (а именно, $\Delta p_{kt} < \Delta p_{ij}$ и $\Delta p_{kt} < 0$) наблюдаются, когда k и t исходно лежат в разных компонентах G . Это наводит на мысль о поиске иной модификации доступности по «густым» лесам. Изучение этого вопроса, а также свойств метрики, двойственной (в смысле [68]) данному показателю (см. [77, 236, 237, 239]) — тема для дополнительного исследования.

8.5. Об особенностях показателей близости вершин графов

Отметим вначале особенность *максимального потока*, отличающую его от остальных рассмотренных показателей близости. Величина максимального потока между парой вершин не зависит от длин путей, соединяющих эту пару, и, например, в ситуации, когда $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, поток от i до t на рис. 8.1 равен потоку до k и не меняется при увеличении ε_2 .

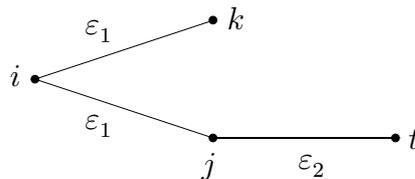


Рис. 8.1.

Особенность путевой и маршрутной доступностей — необходимость введения до-

вольно сильных ограничений на веса ребер (дуг) для того, чтобы эти показатели обладали свойствами из раздела 7.2 и для обеспечения сходимости, необходимой при вычислении маршрутной доступности. Это означает быстрое «ослабление влияния» вершины при удалении от нее по графу. Для надежности связи характерен эффект насыщения. Если, например, две вершины связаны ребром с весом, близким к 1, то добавление других путей между ними мало изменит значение показателя. Еще одна особенность: все диагональные элементы равны 1, т.е. они не выражают «центральности» вершины. Доступность по «густым» лесам не монотонна при соединении компонент графа новыми ребрами и нестрого монотонна при изменениях внутри компонент. В отличие от лесной доступности, неравенство треугольника (для мультиграфов) выполняется здесь также в нестрогой форме, когда i, j и k все различны. Вместе с тем, метрика, двойственная этому показателю близости, в случае деревьев совпадает с классической графовой метрикой, определяемой электрическим сопротивлением (“resistance distance”) [239]. Далее она изучалась в [236] и целом ряде других работ. Лесная доступность отличается от других рассматриваемых мер близости тем, что это относительный показатель. Проявление этого — стохастичность матриц Q и $Q(\tau)$ в ориентированном случае и двойная стохастичность в неориентированном. Как следствие, проведение новых ребер (дуг) в графе увеличивает лишь часть значений близости; некоторые значения обязательно уменьшатся. Соответствующий «абсолютный» показатель близости может быть получен, если вместо матрицы $Q(\tau) = (I + \tau L)^{-1}$ рассмотреть матрицу алгебраических дополнений элементов матрицы $I + \tau L$. Кроме того, для относительной лесной доступности характерна независимость от макровершины. Чтобы проиллюстрировать эту и некоторые другие особенности показателей близости, рассмотрим несколько простых примеров.

Для графа на рис. 8.2 путевая доступность, надежность и маршрутная доступность дают $p_{ik} < p_{it}$.

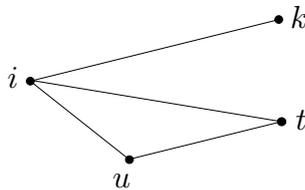


Рис. 8.2.

Иное, казалось бы, нелогично, т.к. вершины i и t связывает не только ребро (как i и k), но и путь длины 2 (iut). Тем не менее, в случае относительной лесной доступности $p_{ik} = p_{it}$ (это следует из независимости от макровершины: здесь $\{k, t, u\}$ — макровершина). Тот же результат — для доступности по «густым» лесам. Независимость от макровершины осмысленна тогда, когда связи внутри макровершины можно рассматривать как ее «внутреннее дело», не оказывающее даже косвенного влияния на интенсивность связей с

внешними вершинами. На практике это бывает осмысленно. Например, если каждый преподаватель читает лекции всем студентам (студенты при этом образуют макровершину), а те дословно эти лекции записывают, то никакое чтение конспектов друг друга не позволит студентам узнать что-либо новое (т. е. «приблизиться» к знаниям преподавателей).

Следующий пример показывает особенности путевой и маршрутной доступностей. На рис. 8.3 вершина i связана с k двумя путями, так же, как и с t , и веса этих путей равны (при равных весах ребер). Поэтому путевые доступности p_{ik} и p_{it} также равны. Но пути, связывающие i с t , имеют общее ребро. Поэтому для показателя надежности $p_{ik} > p_{it}$. Так же — для относительной лесной доступности и доступности по «густым» лесам. Но для маршрутной доступности $p_{ik} < p_{it}$. Это объясняется тем, что из вершины x имеется два пути в t , а из вершин x_1 и x_2 — по одному пути длины 2 в k . Поэтому i с t соединяют 8 маршрутов длины 7, а i с k соединяют 4 маршрута длины 7.

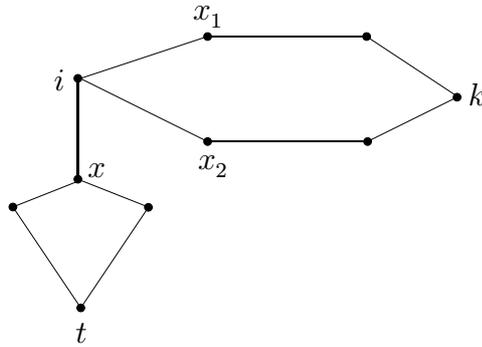


Рис. 8.3.

По-разному рассматриваемые показатели ведут себя и по отношению к циклам. Цикл на рис. 8.4 не влияет на значения путевой доступности и надежности для пары вершин (i, t) .

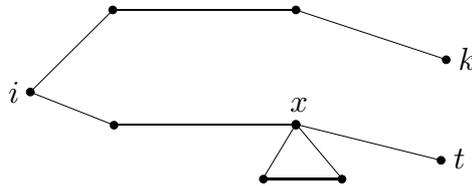


Рис. 8.4.

Для маршрутной доступности имеем $p_{it} > p_{ik}$. Для относительной лесной доступности $p_{it} < p_{ik}$, так как приближение i и t к вершинам цикла (в результате его появления) относительно удаляет их друг от друга. Так же — для доступности по «густым» лесам.

Заметим, наконец, что для путевой доступности, надежности связи и показателей, задаваемых взвешенными суммами матриц Q_1, \dots, Q_{n-v} , значения близости линейно связаны с весами ребер (дуг), а для остальных рассмотренных показателей это не так.

В заключение этого раздела покажем, что для маршрутной и лесной доступностей выполняется следующее свойство.

Транзитность–2. Для любого мультиграфа G и любых $i, k, t \in V(G)$, если $p_{ik} > p_{it}$ и $i \neq k$, то в G есть путь от i до k , такой что разность $p_{jk} - p_{jt}$ строго возрастает, когда j последовательно пробегает все вершины от i до k в этом пути.

Доказательство свойства транзитность–2 для маршрутной доступности.

Согласно определению маршрутной доступности

$$(I - \mathcal{E})P = I. \quad (8.25)$$

Запишем (8.25) покомпонентно для элементов ik и it матрицы $(I - \mathcal{E})P$. Получаем:

$$\begin{aligned} p_{ik} &= \sum_{j \neq i} \varepsilon_{ij} p_{jk}, \\ p_{it} &= \sum_{j \neq i} \varepsilon_{ij} p_{jt}, \\ p_{ik} - p_{it} &= \sum_{j \neq i} \varepsilon_{ij} (p_{jk} - p_{jt}). \end{aligned}$$

Поскольку $p_{jk} - p_{jt} > 0$, найдется $j \neq i$, такое что $\varepsilon_{ij} \neq 0$ (и значит, $(i, j) \in E(G)$) и $p_{jk} > p_{jt}$ (вспомним, что по принятому соглашению $\varepsilon_{ij} \geq 0$).

Повторяя это рассуждение для найденной вершины j (вместо i) и так далее и учитывая, что ни одна из вершин в определяемом так пути не совпадает с предыдущими и что $i \neq k$, в конце концов получим k как последнюю вершину этого пути, что и требовалось доказать. Выполнение условия для мультиграфа обеспечивается выполнением его для соответствующего симметричного мультиорграфа с такой же матрицей \mathcal{E} . \square

Доказательство свойства транзитность–2 для лесной доступности.

Согласно (1.7)

$$(I + L)Q = I. \quad (8.26)$$

Для элементов ik и it матрицы $(I + L)Q$, используя (1.2), (1.3), обозначение $\varepsilon_{ij} = -\ell_{ij}$ и следующее из диагонального превосходства $i \neq t$, получаем

$$\begin{aligned} q_{ik} &= \sum_{j \neq i} \varepsilon_{ij} (q_{jk} - q_{ik}), \\ q_{it} &= \sum_{j \neq i} \varepsilon_{ij} (q_{jt} - q_{it}), \\ q_{ik} - q_{it} &= \sum_{j \neq i} \varepsilon_{ij} [(q_{jk} - q_{jt}) - (q_{ik} - q_{it})]. \end{aligned}$$

Тогда, поскольку $q_{ik} - q_{it} > 0$, найдется $j \neq i$, такое что $\varepsilon_{ij} \neq 0$ (и значит, $(i, j) \in E(G)$) и $q_{jk} - q_{jt} > q_{ik} - q_{it}$ (вспомним, что по определению $\varepsilon_{ij} \geq 0$).

Свойство	Пути	Надежность	Маршр.	Леса (неор.)	Леса (ор.)	«Густые» леса
Симметричность	+	+	+	+	×	+
Неотрицательность	+	+	+	+	+	+
Обратимость	+	+	+	×	+	×
Диагональное превосходство	+*	+*	+	+	+	+
Неравенство треугольника для близостей ¹	+*	+*	+**	+	+	+
Несвязность	+	+	+	+	+	+
Транзитность	+*	+*	+	+	+	+
Монотонность 1	+*	+*	+	+	+	—
Монотонность 2	+	+*	+	+	+	—
Монотонность 3	+	+	—	+	+	—

¹ для случая мультиграфов

* выполняется при дополнительном ограничении и/или в нестрогой версии

** доказано при дополнительном ограничении

× свойство неприменимо

Таблица 8.1. Некоторые свойства показателей близости вершин графов

Повторяя это рассуждение для вершины j (вместо i) и так далее и учитывая, что ни одна из вершин в определяемом таким образом пути не совпадает с предыдущими и что $i \neq k$, мы в конце концов получим k как последнюю вершину этого пути, что и требовалось доказать. \square

Таким образом, данные показатели близости вершин имеют существенно различные свойства. Вместе с тем, «почти все» они обладают «почти всеми» «основными» свойствами, сформулированными в разделе 7.2 (см. таблицу 8.1).

8.6. Продолжение исследования показателей близости, связанных с классификацией лесов, для орграфа

8.6.1. Вес максимальных исходящих лесов как показатель близости вершин орграфа

Согласно теореме 3.9 матрица $\bar{J} = (\bar{J}_{ij})$ взвешенного орграфа Γ совпадает с предельной матрицей средних вероятностей любой цепи Маркова, связанной с Γ . Поэтому величину \bar{J}_{ij} можно назвать *предельной достижимостью* вершины i из вершины j при случайных блужданиях по Γ с переходными вероятностями, пропорциональными весам дуг. Поэтому матрицу \bar{J}^T будем называть *матрицей предельных достижимостей* в Γ . Рассмотрим совокупность элементов матрицы \bar{J}^T как показатель близости вершин Γ . Для этого обратимся к условиям, введенным в [67, 69] и характеризующим матрицы близости $P = (p_{ij})$ вершин орграфов (см. раздел 7.2). Эти условия не рассматриваются здесь как необходимые атрибуты показателей близости, но если большинство из них не выполнено,

можно сделать вывод, что показатель измеряет не близость вершин, а что-то иное.

Условие *монотонности* сформулируем здесь в сокращенной версии.

Монотонность (сокращенная версия). Пусть вес некоторой дуги ε_{kt}^p в мультиорграфе Γ увеличился. Тогда:

- 1) $\Delta p_{kt} > 0$, и для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$, если $(i, j) \neq (k, t)$, то $\Delta p_{kt} > \Delta p_{ij}$;
- 2) для любых $i \in \{1, \dots, n\}$, если существует путь из i в k и каждый путь из i в t включает k , то $\Delta p_{it} > \Delta p_{ik}$.

Пусть $P = (p_{ij}) = \bar{J}^T$ — матрица предельных достижимостей орграфа.

Теорема 8.9. Для показателя предельной достижимости выполняются условия неотрицательности, часть « \Leftarrow » условия несвязности и лишь в нестрогой форме — диагональное превосходство, транзитность, первая часть пункта 1 и пункт 2 сокращенной версии монотонности. Условие обратимости, а также часть « \Rightarrow » условия несвязности вторая часть пункта 1 монотонности (в сокращенной версии) не выполняются.

Доказательство теоремы 8.9. Неотрицательность и часть « \Leftarrow » условия несвязности следуют из теоремы 3.2', а диагональное превосходство в нестрогой форме — из теоремы 3.3 (стр. 51). В силу пункта 3 теоремы 3.2' диагональное превосходство в строгой форме, а также транзитность в строгой форме не выполняются.

Выполнение транзитности в нестрогой форме докажем от противного. Пусть в орграфе Γ для некоторых $i, k, t \in V(G)$ есть путь из i в k , $i \neq k \neq t$, и каждый путь из i в t включает k , но $p_{it} > p_{ik}$. Тогда существует максимальный исходящий лес F , в котором вершина t достижима из i , но k недостижима из i , что противоречит предположению. Первая часть пункта 1 монотонности (сокращенной версии) выполняется в нестрогой форме по определению матрицы \bar{J} , но не выполняется в строгой форме в силу пункта 2 теоремы 3.2'. Так же демонстрируется невыполнение второй части пункта 1 монотонности (сокращенной версии), а также части « \Rightarrow » условия несвязности.

Докажем выполнение пункта 2 монотонности (сокращенной версии) в нестрогой форме. Пусть вес некоторой дуги (k, t) увеличился на $\Delta\varepsilon_{kt}$, а веса остальных дуг не изменились. Полученный орграф обозначим через Γ' и положим $Q'(\tau) = (I + \tau L(\Gamma'))^{-1}$. Тогда $\Delta L = L(\Gamma') - L(\Gamma) = XY$, где $X = (x_{i1})$ — вектор-столбец с элементами $x_{t1} = 1$, $x_{i1} = 0$ для всех $i \neq t$, $Y = (y_{1j})$ — вектор-строка с элементами $y_{1k} = -\Delta\varepsilon_{kt}$, $y_{1t} = \Delta\varepsilon_{kt}$ и $y_{1j} = 0$ для всех $j \neq k, j \neq t$. Поскольку матрицы $I + \tau L(\Gamma')$ и $I + \tau L(\Gamma)$ несингулярны, и вторая получается из первой добавлением матрицы ΔL , имеющей ранг 1, согласно [55] имеем

$$Q'(\tau) = Q(\tau) - \frac{\tau Q(\tau) XY Q(\tau)}{1 + \tau Y Q(\tau) X} = Q(\tau) - \frac{Q(\tau) XY Q(\tau)}{\tau^{-1} + Y Q(\tau) X}.$$

Далее,

$$Q(\tau) XY Q(\tau) = (a_{ij}(\tau)),$$

где $a_{ij}(\tau) = \Delta\varepsilon_{kt} q_{it}(\tau)(q_{tj}(\tau) - q_{kj}(\tau))$, $i, j = 1, \dots, n$;

$$YQ(\tau)X = \Delta\varepsilon_{kt}(q_{tt}(\tau) - q_{kt}(\tau)).$$

Следовательно,

$$\Delta q_{ij}(\tau) = \frac{\Delta\varepsilon_{kt}q_{it}(\tau)(q_{kj}(\tau) - q_{tj}(\tau))}{\tau^{-1} + \Delta\varepsilon_{kt}(q_{tt}(\tau) - q_{kt}(\tau))} = \frac{q_{it}(\tau)(q_{kj}(\tau) - q_{tj}(\tau))}{(\Delta\varepsilon_{kt}\tau)^{-1} + q_{tt}(\tau) - q_{kt}(\tau)}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (8.27)$$

Пусть $P(\tau) = (p_{ij}(\tau)) = Q^T(\tau)$. Выражение (8.27) запишем для $P(\tau)$:

$$\Delta p_{ji}(\tau) = \frac{p_{ti}(\tau)(p_{jk}(\tau) - p_{jt}(\tau))}{(\Delta\varepsilon_{kt}\tau)^{-1} + p_{tt}(\tau) - p_{tk}(\tau)}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (8.28)$$

Тогда для любого $i \in V(\Gamma)$

$$\Delta p_{it}(\tau) - \Delta p_{ik}(\tau) = \frac{(p_{tt}(\tau) - p_{tk}(\tau))(p_{ik}(\tau) - p_{it}(\tau))}{(\Delta\varepsilon_{kt}\tau)^{-1} + p_{tt}(\tau) - p_{tk}(\tau)}.$$

Пусть существует путь из i в k , и любой путь из i в t содержит k . Тогда из матричной теоремы о лесах следует $p_{ik}(\tau) > p_{it}(\tau)$, причем в силу диагонального превосходства $p_{tt}(\tau) - p_{tk}(\tau) > 0$. Переходя к пределу при $\tau \rightarrow \infty$, получаем $\Delta p_{it} \geq \Delta p_{ik}$.

Всем вершинам, которые не входят в недоминируемые узлы Γ , соответствуют нулевые столбцы матрицы \bar{J} . В то же время, у стохастической матрицы \bar{J} нет нулевых строк. Поэтому *обратимость* не выполняется. \square

В силу теоремы 8.9 показатель предельной достижимости достаточно далек от представления о «близости» вершин, формализованного с помощью приведенных выше условий. Это связано с тем, что он, в силу его «марковской» интерпретации, отражает достижимость «за бесконечно большое время». Замена матрицы $\bar{J} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} (I + \tau L)^{-1}$ (теорема 3.7) на матрицу $(I + \tau L)^{-1}$ с конечным положительным τ приводит, как будет установлено в разделе 8.6.2, к более естественному показателю близости вершин.

8.6.2. Относительная лесная доступность: параметрический случай

В разделе 8.2 были рассмотрены свойства относительной лесной доступности для мультиорграфов.

Матрица $\bar{J}^T = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tilde{Q}^T(\tau)$ рассматривалась выше как матрица предельных достижимостей в мультиорграфе. Сейчас в качестве показателя достижимости вершин мультиорграфа рассмотрим матрицу $P_1(\tau) = \tilde{Q}^T(\tau)$ при $\tau > 0$. Согласно теореме 3.1 элемент, стоящий в этой матрице на пересечении i -й строки и j -го столбца, есть суммарный вес остовных лесов, исходящих из i и «соединяющих» i и j в мультиорграфе, где все веса дуг домножены на τ . Наряду с $P_1(\tau)$ рассмотрим матрицу остовных *входящих* лесов $P_2(\tau) = Q(\tau)$. Здесь элемент на пересечении i -й строки и j -го столбца есть вес множества всех остовных входящих лесов, где i принадлежит дереву со стоком j , в мультиорграфе, где все веса дуг домножены на τ .

Следующее определение формулируется для произвольных показателей достижимости вершин [мульти]орграфа (формально в этой роли могут выступать любые функции, орграфам ставящие в соответствие квадратные матрицы порядка n). Показатель P_2 будем называть *двойственным* показателю P_1 , если после обращения всех дуг в произвольном орграфе (при сохранении их весов) матрица P_2 для нового орграфа совпадает с матрицей P_1^T , вычисленной для исходного орграфа. Из этого определения следует, что показатель P_2 двойственен P_1 тогда и только тогда, когда P_1 двойственен P_2 . В [69] были рассмотрены три показателя достижимости вершин орграфа, которые являются самодвойственными.

Для введенных выше $P_1(\tau)$ и $P_2(\tau)$ проверим выполнение введенных в разделе 7.2 характеристических условий. Выполнение неравенства треугольника для показателей близости, требующего симметричности матрицы показателя, проверим для $P_3(\tau) = (P_1(\tau) + P_2(\tau) + P_1^T(\tau) + P_2^T(\tau))/4$.

Условие *транзитность* дополним вторым пунктом.

Транзитность. Для любого мультиорграфа Γ и любых $i, k, t \in V(\Gamma)$, если в Γ есть путь из i в k , $i \neq k \neq t$, и каждый путь из i в t включает k , то 1) $p_{ik} > p_{it}$; 2) $p_{kt} > p_{it}$.

Монотонность сформулируем немного иначе.

Монотонность. Пусть вес некоторой дуги ε_{kt}^p в мультиорграфе Γ увеличен. Тогда:

- 1) $\Delta p_{kt} > 0$, и для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$, если $(i, j) \neq (k, t)$, то $\Delta p_{kt} > \Delta p_{ij}$;
- 2) для любого $i \in \{1, \dots, n\}$, если существует путь из k в t и каждый путь из k в i включает t , то а) $\Delta p_{kt} > \Delta p_{ki}$ и б) $\Delta p_{ki} > \Delta p_{ti}$;
- 3) для любого $i \in \{1, \dots, n\}$, если существует путь из i в k и каждый путь из i в t включает k , то а) $\Delta p_{kt} > \Delta p_{it}$ и б) $\Delta p_{it} > \Delta p_{ik}$.

Теорема 8.10. При любом $\tau > 0$ показатели $P_1(\tau)$ и $P_2(\tau)$ взаимно двойственны. Для них выполняются неотрицательность, обратимость, несвязность, первая часть пункта 1 и пункт 2 монотонности. Кроме того, для $P_1(\tau)$ выполняются пункты 1 диагонального превосходства и транзитности, а для $P_2(\tau)$ — пункты 2 тех же условий. Далее, для $P_1(\tau)$ выполняются пункты 2 и 3б, а для $P_2(\tau)$ — пункты 3 и 2б монотонности. Вторая часть пункта 1 монотонности для показателей $P_1(\tau)$ и $P_2(\tau)$, вообще говоря, не выполняется. Кроме того, для $P_1(\tau)$ в общем случае не выполняется пункт 2 транзитности и пункт 3а монотонности, а для $P_2(\tau)$ — пункт 1 транзитности и пункт 2а монотонности. Для $P_3(\tau)$, вообще говоря, нарушается неравенство треугольника для показателей достижимости.

Доказательство теоремы 8.10. При изменении направления всех дуг исходящие и входящие леса в исходном орграфе переходят во входящие и исходящие леса в получающемся орграфе соответственно. Поэтому $P_1(\tau)$ и $P_2(\tau)$ взаимно двойственны.

Выполнение *неотрицательности*, *условия несвязности* для показателей $P_1(\tau)$ и $P_2(\tau)$, пункта 1 *диагонального превосходства* для $P_1(\tau)$ и пункта 2 *диагонального превосходства* для $P_2(\tau)$ доказывается с помощью теоремы 3.1 так же, как в неориентированном случае (раздел 8.1).

Для любых $i, k, t \in V(\Gamma)$, если в Γ есть путь из i в k , $i \neq k \neq t$, и каждый путь из i в t включает k , то $\mathcal{F}^{i \bullet \rightarrow t} \subset \mathcal{F}^{i \bullet \rightarrow k}$. Из этого включения и теоремы 3.1 следует выполнение пункта 1 *транзитности* для $P_1(\tau)$. Аналогично доказывается пункт 2 *транзитности* для $P_2(\tau)$.

В [3] (доказательство предложения 17) было установлено (см. также раздел 8.6.1), что если в орграфе вес некоторой дуги (k, t) увеличился на $\Delta \varepsilon_{kt}$, а веса остальных дуг не изменились, то приращения всех элементов матрицы $P_1(\tau) = (p_{ij}^{(1)}(\tau))$ выражаются формулой:

$$\Delta p_{ij}^{(1)}(\tau) = \frac{p_{tj}^{(1)}(\tau) (p_{ik}^{(1)}(\tau) - p_{it}^{(1)}(\tau))}{(\Delta \varepsilon_{kt} \tau)^{-1} + p_{tt}^{(1)}(\tau) - p_{tk}^{(1)}(\tau)}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (8.29)$$

В силу *обратимости* аналогичная формула для $P_2(\tau) = (p_{ij}^{(2)}(\tau))$ имеет вид

$$\Delta p_{ij}^{(2)}(\tau) = \frac{p_{ik}^{(2)}(\tau) (p_{tj}^{(2)}(\tau) - p_{kj}^{(2)}(\tau))}{(\Delta \varepsilon_{kt} \tau)^{-1} + p_{kk}^{(2)}(\tau) - p_{tk}^{(2)}(\tau)}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (8.30)$$

где $p_{ij}^{(2)}(\tau)$ — вес множества входящих лесов, в которых i принадлежит входящему дереву со стоком j .

Запишем (8.29) для $\Delta p_{kt}^{(1)}(\tau)$:

$$\Delta p_{kt}^{(1)}(\tau) = \frac{p_{tt}^{(1)}(\tau) (p_{kk}^{(1)}(\tau) - p_{kt}^{(1)}(\tau))}{(\Delta \varepsilon_{kt} \tau)^{-1} + p_{tt}^{(1)}(\tau) - p_{tk}^{(1)}(\tau)}.$$

Из $p_{ii}^{(1)}(\tau) > p_{ji}^{(1)}(\tau)$ для всех $i, j = 1, \dots, n$ следует $\Delta p_{kt}^{(1)}(\tau) > 0$, т. е. для показателя $P_1(\tau)$ выполняется первая часть пункта 1 условия *монотонности*.

Запишем теперь (8.30) для $\Delta p_{kt}^{(2)}(\tau)$:

$$\Delta p_{kt}^{(2)}(\tau) = \frac{p_{kk}^{(2)}(\tau) (p_{tt}^{(2)}(\tau) - p_{kt}^{(2)}(\tau))}{(\Delta \varepsilon_{kt} \tau)^{-1} + p_{kk}^{(2)}(\tau) - p_{tk}^{(2)}(\tau)}.$$

Из $p_{ii}^{(2)}(\tau) > p_{ji}^{(2)}(\tau)$ для всех $i, j = 1, \dots, n$ следует $\Delta p_{kt}^{(2)}(\tau) > 0$, т. е. первая часть пункта 1 *монотонности* выполняется и для $P_2(\tau)$.

Выписав выражения (8.29) для $\Delta p_{kt}^{(1)}(\tau)$, $\Delta p_{ki}^{(1)}(\tau)$ и $\Delta p_{ii}^{(1)}(\tau)$ и пользуясь пунктом 1 *диагонального превосходства*, убеждаемся, что для $P_1(\tau)$ выполняется пункт 2 *монотонности*. Сравнив выражения для $\Delta p_{it}^{(1)}(\tau)$ и $\Delta p_{ik}^{(1)}(\tau)$ и пользуясь пунктом 1 *транзитности*, получаем пункт 3*b* *монотонности*. Аналогично пункт 3*a* имеет место тогда и только

тогда, когда $(p_{kk}^{(1)}(\tau) - p_{kt}^{(1)}(\tau)) - (p_{ik}^{(1)}(\tau) - p_{it}^{(1)}(\tau)) > 0$. Поскольку *неравенство треугольника* для показателей близости выполняется для $P_1(\tau)$ не всегда (как и для любого показателя с не всегда симметричной матрицей), пункт 3а *монотонности*, вообще говоря, не имеет места. Аналогично доказывается, что показатель $P_2(\tau)$ удовлетворяет пунктам 3 и 2b, но нарушает пункт 2а *монотонности*.

Рассмотрим орграф на множестве вершин $\{i, j, k, t\}$ с множеством дуг $\{(i, k), (k, t), (t, j)\}$ и весами дуг $\varepsilon(i, k) = 4, \varepsilon(k, t) = 1, \varepsilon(t, j) = 4$. Тогда матрица $P_1(1)$ равна

$$P_1(1) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} i & j & k & t \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0,32 & 0,8 & 0,4 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,08 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0,5 \end{array} \right\| \begin{array}{c} i \\ j \\ k \\ t \end{array} \end{array} . \quad (8.31)$$

Поскольку $p_{it}^{(1)}(1) > p_{kt}^{(1)}(1)$, пункт 2 *транзитности* не выполняется.

Сравним приращения $\Delta p_{kt}^{(1)}(1)$ и $\Delta p_{ij}^{(1)}(1)$ при произвольном $\Delta\varepsilon_{kt} > 0$:

$$\Delta p_{kt}^{(1)} = \frac{p_{tt}^{(1)}(1) (p_{kk}^{(1)}(1) - p_{kt}^{(1)}(1))}{(\Delta\varepsilon_{kt})^{-1} + p_{tt}^{(1)}(1) - p_{tk}^{(1)}(1)}, \quad \Delta p_{ij}^{(1)} = \frac{p_{tj}^{(1)}(1) (p_{ik}^{(1)}(1) - p_{it}^{(1)}(1))}{(\Delta\varepsilon_{kt})^{-1} + p_{tt}^{(1)}(1) - p_{tk}^{(1)}(1)}.$$

Из $p_{tt}^{(1)}(1) (p_{kk}^{(1)}(1) - p_{kt}^{(1)}(1)) = 0,5(0,2 - 0,1) = 0,05$, $p_{tj}^{(1)}(1) (p_{ik}^{(1)}(1) - p_{it}^{(1)}(1)) = 0,4(0,8 - 0,4) = 0,16$ и положительности общего знаменателя следует $\Delta p_{kt}^{(1)}(1) < \Delta p_{ij}^{(1)}(1)$, т. е. вторая часть пункта 1 *монотонности* нарушается.

Аналогичным образом на этом примере нарушаются пункт 1 *транзитности* и вторая часть пункта 1 *монотонности* для $P_2(\tau)$.

Покажем, что $P_3(\tau)$ не удовлетворяет *неравенству треугольника для показателей близости*. Рассмотрим орграф с множеством вершин $\{i, j, k, t\}$, множеством дуг $\{(i, j), (j, k), (k, t), (t, i)\}$ и весами дуг $\varepsilon(i, j) = 1, \varepsilon(j, k) = 10, \varepsilon(k, t) = 10, \varepsilon(t, i) = 1$. Тогда матрица $P_3(1)$ равна

$$P_3(1) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} i & j & k & t \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccc} 0,6302 & 0,2233 & 0,1693 & 0,2233 \\ 0,2233 & 0,3724 & 0,1823 & 0,2747 \\ 0,1693 & 0,1823 & 0,1146 & 0,1823 \\ 0,2233 & 0,2747 & 0,1823 & 0,3724 \end{array} \right\| \begin{array}{c} i \\ j \\ k \\ t \end{array} \end{array} . \quad (8.32)$$

Здесь $p_{ki}^{(3)}(1) + p_{kj}^{(3)}(1) - p_{ij}^{(3)}(1) > p_{kk}^{(3)}(1)$, т. е. неравенство нарушается. В силу доказательства предложения 7.1 следствием неравенства треугольника для показателей близости является симметричность матрицы P . Поэтому для $P_1(\tau)$ и $P_2(\tau)$ данное неравенство также не выполняется. \square

В [3] и разделе 8.6.1 было отмечено, что показатель предельной достижимости $P = \bar{J}^T$ не вполне соответствует понятию «близости». Заметим, что *условие несвязности*, которое для предельной достижимости выполняется лишь в одну сторону, для показателей $P_1(\tau)$ и $P_2(\tau)$, очевидно, выполняется полностью. Кроме того, для $P_1(\tau)$ и $P_2(\tau)$ выполняются условия, которые для показателей предельной достижимости верны лишь в нестрогой форме. Тем самым $P_1(\tau)$ и $P_2(\tau)$ лучше, чем $P = \bar{J}^T$ соответствуют концепции близости, согласующейся с рассматриваемыми нормативными условиями.

8.6.3. Достижимость по «густым» лесам

Рассмотрим теперь показатель, который занимает промежуточное положение по отношению к достижимости по максимальным лесам (зависящей лишь от \tilde{Q}_{n-v}) и достижимости по лесам $\tilde{Q}(\tau)$ (которая представляется взвешенной суммой всех матриц \tilde{Q}_k). Этот показатель определяется матрицами \tilde{Q}_{n-v-1} и \tilde{Q}_{n-v} (или, эквивалентно, матрицами \bar{J}_{n-v-1} и $\bar{J}_{n-v} = \bar{J}$), через которые матрица $\tilde{L}^\#$ выражается, как установлено в предложении 4.7. Альтернативно он может быть получен обращением матрицы $\tilde{L} + \alpha \bar{J}$ при значениях α , принадлежащих определенному интервалу.

Рассмотрим семейство матриц $R(\alpha) = (r_{ij}) = (\tilde{L} + \alpha \bar{J})^{-1}$ при $\alpha > 0$. Из теоремы 4.8 и предложения 4.7 следует

$$R(\alpha) = (\tilde{L} + \alpha \bar{J})^{-1} = \tilde{L}^\# + \alpha^{-1} \bar{J} = \frac{\sigma_{n-v-1}}{\sigma_{n-v}} \bar{J}_{n-v-1} + \left(\alpha^{-1} - \frac{\sigma_{n-v-1}}{\sigma_{n-v}} \right) \bar{J}. \quad (8.33)$$

Если $0 < \alpha < \frac{\sigma_{n-v}}{\sigma_{n-v-1}}$, то согласно (8.33) $R(\alpha)$ есть сумма \tilde{Q}_{n-v-1} и \tilde{Q}_{n-v} с положительными коэффициентами. В [69] и разделе 8.4 остовные корневые леса с $n - v$ или $n - v - 1$ ребрами в неориентированном мультиграфе G названы «густыми» лесами, а неориентированный аналог показателя близости (8.33) при $0 < \alpha < \frac{\sigma_{n-v}}{\sigma_{n-v-1}}$ — доступностью по «густым» лесам.

Для ориентированного графа введем два показателя: $P_1(\alpha) = R^T(\alpha)$ — достижимость по «густым» исходящим лесам; $P_2(\alpha)$ — аналогичный показатель достижимости по «густым» входящим лесам.

Важное свойство множества «густых» исходящих лесов состоит в следующем.

Предложение 8.4. 1. Для любой вершины $i \in V(\Gamma)$ существует остовный исходящий лес, принадлежащий $\mathcal{F}_{n-v-1}^{\bullet \rightarrow}$, в котором i является корнем.
2. Для любого пути (ориентированной цепи) в Γ существует остовный исходящий лес, принадлежащий $\mathcal{F}_{n-v-1}^{\bullet \rightarrow} \cup \mathcal{F}_{n-v}^{\bullet \rightarrow}$ и содержащий этот путь.

Доказательство предложения 8.4. 1. Для построения нужного леса достаточно из любого максимального исходящего леса удалить дугу, идущую в i , если такая имеется, или любую дугу в противном случае.

2. Для данной ориентированной цепи и любого максимального исходящего леса в Γ рассмотрим их объединение, из которого удалены все дуги леса, входящие в вершины цепи и не принадлежащие ей. Получившийся подграф не содержит контуров, а также вершин, в которые входит более одной дуги, т. е. является исходящим лесом. Число дуг в нем не меньше $n - v - 1$, значит, он принадлежит $\mathcal{F}_{n-v-1}^{\bullet \rightarrow} \cup \mathcal{F}_{n-v}^{\bullet \rightarrow}$. \square

Аналогичное (точнее, — двойственное) утверждение верно и для входящих лесов. Множество $\mathcal{F}_{n-v}^{\bullet \rightarrow}$ максимальных исходящих лесов (как и множество максимальных входящих лесов) таким свойством не обладает. Так, для орграфа, показанного на рис. 8.5а, единственный максимальный исходящий лес (он показан на рис. 8.5б) не содержит дугу (4, 2), но ее содержат два субмаксимальных исходящих леса (рис. 8.5в,г).

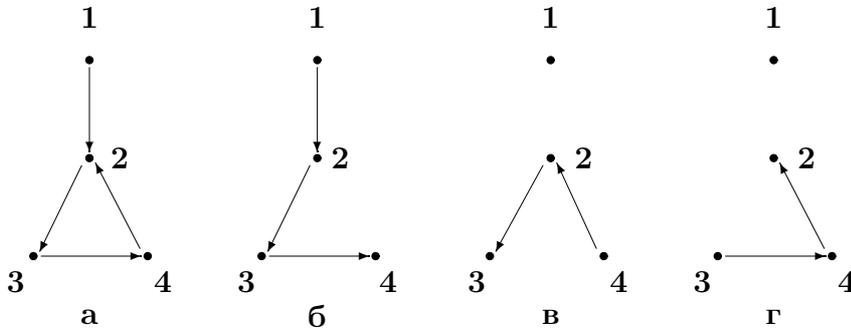


Рис. 8.5. (а) орграф; (б) единственный максимальный исходящий лес; (в,г) субмаксимальные исходящие леса, содержащие дугу (4, 2).

Проверим теперь выполнение характеристических условий для $P_1(\alpha)$ и $P_2(\alpha)$. Выполнение неравенства треугольника для показателей близости будем проверять для $P_3(\alpha) = (P_1(\alpha) + P_1^T(\alpha) + P_2(\alpha) + P_2^T(\alpha))/4$, поскольку это неравенство может выполняться только для симметричных матриц.

Теорема 8.11. Для любого $\alpha \in]0, \sigma_{n-v}/\sigma_{n-v-1}[$ показатели $P_1(\alpha)$ и $P_2(\alpha)$ взаимно двойственны. Для них выполняются неотрицательность и условие несвязности. Кроме того, для $P_1(\alpha)$ выполняются, но лишь в нестрогой форме, пункты 1 диагонального превосходства и транзитности, а для $P_2(\alpha)$ — пункты 2 тех же условий. Монотонность для $P_1(\alpha)$ и $P_2(\alpha)$ не выполняется. Для $P_3(\alpha)$ не выполняется неравенство треугольника для показателей близости.

Доказательство теоремы 8.11. При обращении всех дуг в Γ остовные исходящие и остовные входящие леса переходят друг в друга. Поэтому $P_1(\alpha)$ и $P_2(\alpha)$ взаимно двойственны. Выполнение условия несвязности следует из пункта 2 предложения 8.4.

Неотрицательность следует из того, что элементы \bar{J}_{n-v} и \bar{J}_{n-v-1} — относительные веса множеств, и положительности коэффициентов при этих весах в (8.33).

Выполнение пункта 1 *диагонального превосходства* и пункта 1 *транзитности* для $P_1(\alpha)$ в нестрогой форме (а также пунктов 2 тех же условий для $P_2(\alpha)$ в нестрогой форме) вытекает из нестрогого вложения множеств лесов, определяющих сравниваемые элементы матриц \tilde{Q}_{n-v} и \tilde{Q}_{n-v-1} .

Условие *диагонального превосходства* в строгой форме нарушается, например, для орграфа с множеством вершин $\{j, i, k, t\}$, множеством дуг $\{(j, i), (i, k), (k, t)\}$ и весами дуг $\varepsilon(j, i) = 4$, $\varepsilon(i, k) = 1$, $\varepsilon(k, t) = 1$. Матрицы исходящих лесов \tilde{Q}_{n-v} и \tilde{Q}_{n-v-1} , матрицы входящих лесов Q_{n-v} и Q_{n-v-1} , а также матрицы $P_1(\alpha)$ и $P_2(\alpha)$ при $\alpha = 4/13$ таковы:

$$\tilde{Q}_{n-v} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} j & i & k & t \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccc} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{c} j \\ i \\ k \\ t \end{array} \end{array}, \quad \tilde{Q}_{n-v-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} j & i & k & t \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccc} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{array} \right\| \begin{array}{c} j \\ i \\ k \\ t \end{array} \end{array}, \quad P_1\left(\frac{4}{13}\right) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} j & i & k & t \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccc} 3,25 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{c} j \\ i \\ k \\ t \end{array} \end{array},$$

$$Q_{n-v} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} j & i & k & t \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right\| \begin{array}{c} j \\ i \\ k \\ t \end{array} \end{array}, \quad Q_{n-v-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} j & i & k & t \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array} \right\| \begin{array}{c} j \\ i \\ k \\ t \end{array} \end{array}, \quad P_2\left(\frac{4}{13}\right) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} j & i & k & t \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccc} 0,25 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1,25 \\ 0 & 0 & 1 & 2,25 \\ 0 & 0 & 0 & 3,25 \end{array} \right\| \begin{array}{c} j \\ i \\ k \\ t \end{array} \end{array}.$$

Здесь же нарушается строгая версия пункта 1 транзитности для $P_1(\alpha)$ (так как $p_{ik}^{(1)}(\alpha) = p_{it}^{(1)}(\alpha)$) и строгая версия пункта 2 транзитности для $P_2(\alpha)$ (так как $p_{ik}^{(2)}(\alpha) = p_{jk}^{(2)}(\alpha)$).

На этом же примере покажем нарушение *неравенства треугольника для показателей близости* для матрицы $P_3(\alpha) = (P_1(\alpha) + P_1^T(\alpha) + P_2(\alpha) + P_2^T(\alpha))/4$, равной

$$P = P_3\left(\frac{4}{13}\right) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} j & i & k & t \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccc} 1,75 & 1 & 0,75 & 0,5 \\ 1 & 0,625 & 0,3125 & 0,375 \\ 0,75 & 0,3125 & 1 & 0,8125 \\ 0,5 & 0,375 & 0,8125 & 2,125 \end{array} \right\| \begin{array}{c} j \\ i \\ k \\ t \end{array} \end{array}.$$

Поскольку $p_{ij}^{(3)}(\alpha) + p_{it}^{(3)}(\alpha) - p_{jt}^{(3)}(\alpha) = 0,875 > p_{ii}^{(3)}(\alpha) = 0,625$, это условие нарушается.

Монотонность не выполняется для неориентированных графов (см. теорему 8.8 в разделе 8.4 или предложение 10 в [69]), следовательно, для орграфов она также нарушается. \square

8.7. Относительная лесная доступность и производные структурные индексы в задачах социометрии

В этом разделе семейство структурных индексов графов, построенное с помощью матричной теоремы о лесах, рассматривается в контексте математической социологии.

Свойства относительной лесной доступности, доказанные выше, показывают, что это достаточно естественный показатель близости (связанности, достижимости) вершин графа (мультиграфа). Характерной чертой этого индекса является его нормировка: в неориентированном случае сумма доступностей всех вершин из данной и сумма доступностей данной вершины из всех вершин графа равны 1. Поэтому каждая (i -я) строка матрицы Q может трактоваться как связанное с i -й вершиной распределение некоторого ресурса (или распределение вероятностей) на множестве всех вершин.

В каких случаях необходима именно такая нормировка? Рассмотрим два примера.

Пусть члены группы собирают информацию из окружающего мира и, кроме того, обмениваются ею друг с другом, причем интенсивность обмена в каждой паре своя. Каждый участник сообщает не только «первичную», то есть собранную им самим информацию, но и полученную от других. Требуется определить, какие доли совокупной информации, полученной i -м участником, исходно собраны каждым членом группы. Аналогичные модели могут быть построены для распределения влияния или материальных ресурсов. Общее здесь — распределение долей определенного ресурса, связанного с одним элементом сети, по всей сети. Одна из таких моделей рассмотрена в [137].

Второй пример — вариант детской игры в «колечко», отличающийся от классического тем, что колечко может последовательно передаваться много раз, и это происходит не на глазах. Для каждого участника задаются вероятности передачи колечка каждому из остальных, а также временные характеристики этого случайного процесса (в простейшем случае — марковского), и естественной является задача определения вероятностей местонахождения колечка в определенный момент времени при условии, что в начальный момент оно было у участника i . Ключевой элемент этого примера — распределения вероятностей, связанные с каждой вершиной.

Можно показать, что для обоих примеров существуют естественные модели, приводящие к относительным лесным доступностям. Это значит, что даже в случаях, когда детальная модель процесса отсутствует, но известны интенсивности (или вероятности) парных взаимодействий, относительные лесные доступности являются корректными значениями искомых величин.

Теперь кратко остановимся на производных структурных индексах. Величину

$$1 - \sum_{j \neq i} q_{ij} = q_{ii}$$

можно рассматривать как меру *уединенности* i -го члена группы. Так, в [137] вводятся

понятия *золотого интроверта* и *золотого экстраверта* — участников, у которых пропорция *уединенности* и *общительности* приближается соответственно к золотому сечению и обратной к нему величине, — и указываются типы графов, в которых обнаруживаются вершины с такими свойствами. Многие другие показатели строятся стандартным способом на основе базовых показателей. Так, средний индекс уединенности по группе

$$\rho = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_{ii}$$

показывает степень ее разобщенности. Эмпирическая дисперсия уединенности есть мера неоднородности группы. Отношение q_{ii} к ρ (или их разность) измеряет сравнительную *периферийность* i -го члена группы. Показатель (7.9) есть метрика на множестве членов группы (см. предложение 7.1 в разделе 7.4). Свойства этих индексов определяются свойствами относительной лесной доступности, доказанными выше.

В заключение этого раздела еще раз отметим сходство задачи определения центральности (периферийности) членов группы и задачи оценивания участников неполного турнира (эта задача рассматривалась в [61, 146, 150, 154]). При этом также обрабатывается матрица «объект–объект», но элемент ее отражает не выбор одним участником другого, а результат их сравнения (частный случай сравнения – спортивный поединок). Задача упорядочения и оценивания участников турниров несколько лучше (хотя тоже недостаточно) исследована, чем задача построения социометрических индексов. Например, классическая работа [226] была принята «как своя» и хорошо известна в литературе по агрегированию парных сравнений, хотя предмет ее — обработка социограмм. С другой стороны, чувствительные методы агрегирования результатов парных сравнений могут быть рассмотрены применительно к социограммам. Их обзор дан в [150, 154].

8.8. Особенности показателей близости на примере фрагмента транспортной сети

В работе [270] были рассчитаны значения центральности узлов сети автострад юго-востока США, ранее изучавшейся в [197] и ряде других работ. В [270] центральность оценивалась с помощью показателя, названного выше маршрутной доступностью. В данном разделе с использованием этого классического примера отмечаются особенности нескольких рассмотренных показателей близости вершин графов.

Для иллюстрации отличий был выделен фрагмент сети, приведенный на рис. 8.6, где показаны девять городов и транспортная развязка, обозначенная «D». Расчет проводился при весе ребер $\varepsilon = 0,05$. Для показателя близости, двойственного классическому расстоянию на графе, взято $\Sigma = nd(\cdot, \cdot)$.

В таблице 8.2 приведены значения пяти показателей близости на парах вершин рассматриваемого фрагмента сети автострад. Две первые строки (где записаны значения

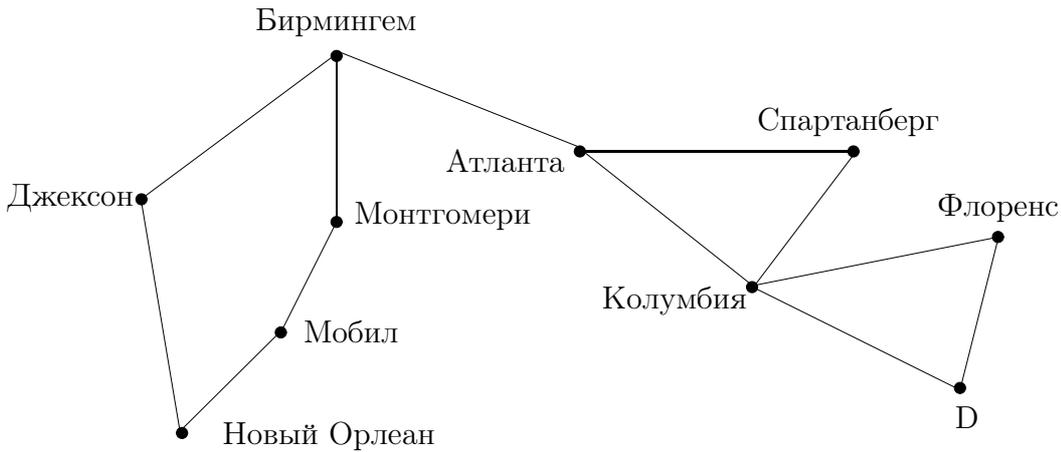


Рис. 8.6. Фрагмент сети автострад юго-востока США.

Близость для пар вершин	Пути	Надежность	Маршруты	Леса	Простейшая
Бирмингем – Спартанберг	0,002625	0,002619	0,002667	0,001812	38
Бирмингем – Новый Орлеан	0,002625	0,002624	0,002658	0,001898	48
Атланта – Колумбия	0,0525	0,052375	0,053326	0,038327	54
Атланта – Спартанберг	0,0525	0,052375	0,053059	0,041501	58

Таблица 8.2. Значения некоторых показателей близости для фрагмента сети автострад юго-востока США.

показателей близости для пар ⟨Бирмингем, Спартанберг⟩ и ⟨Бирмингем, Новый Орлеан⟩ демонстрируют отличие маршрутной и путевой доступностей (по первому из этих показателей связь Бирмингем – Спартанберг сильнее, чем Бирмингем – Новый Орлеан, по второму — силы этих связей равны) от остальных показателей (при их использовании сильнее связь Бирмингем – Новый Орлеан). Указанные порядковые различия характерны для случая, когда все пути между вершинами одной из пар (здесь — пары ⟨Бирмингем, Спартанберг⟩) имеют общее начальное или общее конечное ребро.

Третья и четвертая строки таблицы иллюстрируют различие показателей при обработке циклов. Так, при использовании показателей путевой доступности и надежности связи силы связей Атланта – Колумбия и Атланта – Спартанберг равны, при использовании маршрутной доступности первая связь оказывается чуть более сильной, а если пользоваться лесной доступностью или показателем близости, двойственным простейшему расстоянию, то более сильной оказывается связь Атланта – Спартанберг.

8.9. Несколько замечаний

Проведенный анализ особенностей и связанных с ними формальных свойств показателей близости может быть полезен при выборе адекватных алгебраических индексов в прикладных задачах. Разумеется, выбор показателей в случае наличия строгой математической модели (классические задачи о надежности, о максимальном потоке и т. д.) производится не по «очкам», набранным выполнением нормативных условий. Но такая ситуация — скорее исключение, чем правило. Во многих приложениях (особенно — в социальных науках) приходится пользоваться эвристическими подходами, основанными на анализе свойств показателей. В частности, маршрутная доступность может считаться адекватной смыслу задачи, когда подразумеваются возможность случайных блужданий по графу или движений с возвращениями нестохастической природы. Направление исследований, связанное с рассмотрением структурных индексов графов и сетей под таким углом зрения, получило в последние годы заметное развитие. Полученные нами результаты использовались в некоторых работах этого направления, например, в [190, 192, 218, 220, 284, 306–308, 318, 333, 365, 401].

Интересно появление чисел Фибоначчи и Люка и золотого сечения при вычислении относительных лесных доступностей; соответствующие результаты [137] нашли применение в [86, 94, 175, 379, 409, 410].

Целесообразность выбора относительной лесной доступности определяется ее спецификой. Свойство стохастичности позволяет использовать данный показатель в задачах, где речь идет о распределении каких-либо ресурсов, например, о распределении объемов перевозок между различными пунктами с учетом затрат. Отметим, что свойство независимости от макровершины ценно тогда, когда связи внутри множества объектов, логически составляющих единое целое, неважны для «внешних» объектов. Простейшим алгебраическим индексом, удовлетворяющим этому условию, является классическое расстояние на графе, а относительную лесную доступность имеет смысл предпочесть тогда, когда нужен *чувствительный* показатель, обладающий этим свойством.

Заключение к главе 8

В главе 8 рассмотрено одно из приложений матричной теоремы о лесах — показатель *относительной лесной доступности* и производные структурные индексы графов. Судя по полученным результатам, относительная лесная доступность есть мера близости вершин графов, которая учитывает все пути между вершинами и имеет естественные свойства. Рассмотрены особенности нескольких показателей, тесно связанных с данным. Предложена графовая интерпретация матрицы, обобщенно обратной к лапласовской матрице мультиграфа.

Глава 9

Свойства лесной метрики графа

В работах [68, 70, 145], материал которых использован в этой главе, получены и проинтерпретированы соотношения, выражающие приращения *расстояния по лесам* между вершинами взвешенного мультиграфа и *относительной лесной доступности* при элементарных трансформациях мультиграфа. Дана интерпретация величины лесного расстояния между вершинами в терминах вероятности случайного выбора «фрагментации» графа, «разобщающей» эти вершины. Установлены соотношения между лесной метрикой и резисторной метрикой мультиграфа. Результаты использовались, в частности, в [64, 83, 86, 93, 137, 140, 164, 171, 178, 238, 273, 376, 389, 401, 402, 410].

Последний раздел главы посвящен логарифмическим лесным метрикам и использует результаты [139, 140].

9.1. Введение

Показатели близости вершин графов и связанные с ними другие алгебраические индексы находят множество применений. Среди главных областей их приложения — транспорт, передача информации, органическая химия, кристаллография, градостроительство, организационное управление, социология, политология, агрегирование предпочтений, эпидемиология (ряд ссылок, связанных с этими приложениями, приведены еще в [69]; см. также раздел 7.1). Отметим также применения в кластерном анализе (см., например, [260]), распознавании образов [375], теории параллельных вычислений [368], оптике [255]. Во всех этих областях есть потребность в показателях, более тонких, чем классическое расстояние [115] между вершинами графа.

Пусть G — взвешенный мультиграф без петель с множеством вершин $V(G) = \{1, \dots, n\}$, мультимножеством ребер $E(G)$ (среди них возможны кратные) и положительными весами ребер¹ w_{ij}^p . Здесь w_{ij}^p — вес p -го ребра между i и j , где $p \in \{1, \dots, n_{ij}\}$, $n_{ij} \in \{0, 1, \dots\}$ — число ребер, инцидентных i и j . Пусть $w_{ij} = \sum_{p=1}^{n_{ij}} w_{ij}^p$ — суммарный вес таких ребер (если $n_{ij} = 0$, то по определению $w_{ij} = 0$).

В [67] был введен индекс близости вершин, названный *относительной лесной доступностью* (см. главы 1 и 8). Более точно, речь идет об однопараметрическом классе показателей: при выбранном параметре $\alpha > 0$ матрица $Q_\alpha = (q_{ij}^\alpha)$ сравнительной близости

¹Здесь мы рассматриваем только такие мультиграфы; для простоты будем иногда называть их просто графами.

вершин задается формулой

$$Q_\alpha = (I + \alpha L)^{-1}, \quad (9.1)$$

где I — единичная матрица, $L = L(G) = (\ell_{ij})$ — лапласовская матрица взвешенного мультиграфа G (иногда называемая также матрицей Кирхгофа и матрицей проводимостей; см. (1.2)–(1.3)). Матрицы Q_α являются дважды стохастическими:

$$q_{ij}^\alpha \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (9.2)$$

$$\sum_{k=1}^n q_{ik}^\alpha = \sum_{k=1}^n q_{kj}^\alpha = 1, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (9.3)$$

и симметричными. Величина q_{ij}^α может интерпретироваться как относительный вес всех связей i с j среди связей i со всеми вершинами G . Параметр α определяет пропорцию учета длинных и коротких маршрутов между вершинами.

В [67] была введена также метрика на множестве вершин графа, связанная с относительной лесной доступностью². Расстояние между вершинами i и j (взвешенного) мультиграфа было определено как $q_{ii}^1 + q_{jj}^1 - q_{ij}^1 - q_{ji}^1$ (см. также раздел 7.3.5 и разделы 7.4 и 8.1). В данной главе будут рассмотрены два параметрических семейства лесных метрик графа. Элементы этих семейств пропорциональны, но свойства самих семейств различны. То, что вводимые функции являются метриками, следует из утверждения 1 в [67] (или из теоремы 8.1 и предложения 7.3 данной книги).

Определение 9.1. При выбранном параметре $\alpha > 0$ величину

$$d_{ij}^\alpha = \frac{1}{2}(q_{ii}^\alpha + q_{jj}^\alpha - q_{ij}^\alpha - q_{ji}^\alpha), \quad i, j = 1, \dots, n \quad (9.4)$$

назовем *лесным расстоянием между вершинами i и j* , а величину

$$\rho_{ij}^\alpha = \alpha(q_{ii}^\alpha + q_{jj}^\alpha - q_{ij}^\alpha - q_{ji}^\alpha), \quad i, j = 1, \dots, n \quad (9.5)$$

назовем *приведенным лесным расстоянием между вершинами i и j* .

Множитель $1/2$ в (9.4) обеспечивает «равенство масштабов» относительных лесных доступностей и лесных расстояний (см. ниже (9.20) и последующее замечание). Если вершины i и j принадлежат одной и той же компоненте G , то, пользуясь следствием 8.1, получаем $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} d_{ij}^\alpha = 0$. Приведенное лесное расстояние имеет нетривиальное предельное поведение, которое изучается в разделе 9.5. В разделе 9.2 будет показано, что величина, обратная к ρ_{ij}^α , может быть использована для определения «совокупного веса связей» между вершинами i и j .

Одна из основных целей данной главы — получить и проинтерпретировать формулы, выражающие приращение лесных расстояний и относительных лесных доступностей при

²Впервые показатель такого рода рассматривался, по-видимому, в химической информатике [200] (см. конец раздела 5.1 и раздел 7.1.2 книги).

элементарных изменениях в мультиграфе. Простота этих соотношений свидетельствует в пользу того, что лесные метрики выражают важные свойства графов. Кроме того, в этой главе будет дана интерпретация величины лесного расстояния между двумя вершинами и изучена связь между лесными метриками и резисторной метрикой графа.

Вплоть до начала раздела 9.5 параметр α будем полагать фиксированным и использовать «облегченные» обозначения d_{ij} , ρ_{ij} , q_{ij} и Q вместо более точных d_{ij}^α , ρ_{ij}^α , q_{ij}^α и Q_α .

Некоторые свойства лесной метрики графа изучались в [67] и [294]. Из пункта 5 свойства 7 в [67] (см. теорему 8.2 данной книги) следует, что если суммарный вес ребер G , имеющих концы k и t , получил приращение $\Delta w_{kt} > 0$, то при отсутствии других изменений в G для любых $i, j \in V(G)$ приращение расстояния ρ_{ij} равно

$$\Delta \rho_{ij} = -\frac{(\rho_{ik} - \rho_{it} + \rho_{jt} - \rho_{jk})^2}{4(\rho_{kt} + 1/\Delta w_{kt})}. \quad (9.6)$$

Заметим, что если значения $\rho_{ik} - \rho_{it} + \rho_{jt} - \rho_{jk}$ и ρ_{kt} фиксированы, то приращение приведенного лесного расстояния $\Delta \rho_{ij}$ не зависит от α . В силу (9.6) при проведении новых или увеличении веса имеющихся ребер никакие лесные расстояния в графе не увеличиваются.

Из двойной стохастичности матрицы Q следуют неравенства

$$d_{ij} \leq 1, \quad (9.7)$$

$$\rho_{ij} \leq 2\alpha, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (9.8)$$

причем, в силу условия несвязности равенство достигается тогда и только тогда, когда i и j — две изолированные вершины.

Следствие 9 в [293] дает более тонкую верхнюю границу для d_{ij} :

$$d_{ij} \leq (1 + \alpha a(G))^{-1}, \quad (9.9)$$

где $a(G)$ — введенная М. Фидлером *алгебраическая связность графа* (второе минимальное собственное значение матрицы L). При этом, очевидно, $(1 + \alpha a(G))^{-1}$ — второе максимальное собственное значение матрицы Q . Преобразовав (9.9), получаем верхние оценки для алгебраической связности графа (см. (14) в [294]).

Неравенства (9.7) и (9.9) дают верхние оценки для *диаметра графа* (наибольшего расстояния между двумя его вершинами), соответствующего лесной метрике. Другие верхние оценки лесных расстояний будут получены ниже (см. (9.14), (9.15)).

9.2. Изменение приведенного лесного расстояния между вершинами при усилении их связи

В [67] (близкие результаты были получены в [293, 294, 369]) выведена формула изменения относительной лесной доступности при проведении нового или изменении веса имеющегося ребра в мультиграфе (пункт 1 теоремы 8.2 данной книги). Здесь приведем этот результат в несколько более общем виде.

Определение 9.2. Будем говорить, что взвешенный мультиграф G' *отличается лишь ребром* (k, t) ($k \neq t$) от G , если при некотором числе $\Delta w_{kt} = \varepsilon \neq 0$ G' может быть получен из G прибавлением к весу некоторого ребра w_{kt}^p величины ε или добавлением нового ребра между k и t с весом ε ($\varepsilon > 0$), или удалением некоторого ребра между k и t с весом $-\varepsilon$ ($\varepsilon < 0$).

Говоря, что G' отличается лишь ребром от G , всегда будем через $\Delta w_{kt} = \varepsilon$ обозначать входящую в определение разницу весов (вес); обозначения со штрихами будут относиться к G' , обозначения без штрихов — к G .

Предложение 9.1. Пусть взвешенный мультиграф G' отличается лишь ребром (k, t) от G . Тогда для любых $i, j \in V(G)$

$$\Delta q_{ij} = q'_{ij} - q_{ij} = \frac{\alpha(q_{ik} - q_{it})(q_{jt} - q_{jk})}{\rho_{kt} + \varepsilon^{-1}}. \quad (9.10)$$

В основе результатов этого раздела лежит следующая лемма, которая доказывается посредством преобразования равенства (9.6) при $i = k, j = t$.

Лемма 9.1. Пусть взвешенный мультиграф G' отличается от G лишь ребром (k, t) . Тогда

$$\frac{1}{\rho'_{kt}} - \frac{1}{\rho_{kt}} = \Delta w_{kt}. \quad (9.11)$$

Доказательство предложения 9.1. Это доказательство проводится аналогично доказательству пункта 1 теоремы 8.2. Необходимо лишь добавить, что знаменатель правой части (9.10) не может обратиться в 0 даже при отрицательном Δw_{kt} . Действительно, по лемме 9.1 имеем $1/\rho_{kt} + \Delta w_{kt} = 1/\rho'_{kt}$. Поскольку ρ — метрика, величина ρ'_{kt} определена и при $k \neq t$ отлична от нуля для любого мультиграфа G' , следовательно, $1/\rho_{kt} + \Delta w_{kt} \neq 0$ и значит, $\rho_{kt} + 1/\Delta w_{kt} \neq 0$. \square

Формула (9.11) предельно проста, но эта простота не исключает сомнений в осмысленности инверсной связи лесной метрики с приращением веса ребра. Заметим, однако, что поскольку величина Δw_{kt} может быть сколь угодно большой, а расстояние между k и t , очевидно, должно убывать при росте Δw_{kt} , нетривиальная метрика не может реализовать линейную связь этого расстояния с Δw_{kt} . Приняв во внимание также, что при $\Delta w_{kt} = 0$ необходимо $\rho'_{kt} = \rho_{kt}$ и, кроме того, должны выполняться *аддитивность реакции на приращения* и *принцип обратимости* (см. ниже), похоже, нельзя найти для возможного закона изменения расстояния более простую форму чем (9.11). Отметим, наконец, что инверсная связь «длины ребра» с его весом — наиболее естественный способ обобщения расстояния кратчайшего пути на взвешенные графы (см. [236]).

Расстояние (9.5) для каждой пары вершин, вообще говоря, чувствительно ко всем связям в графе, но при фиксированном ρ_{kt} новое расстояние определяется в данном случае только величиной Δw_{kt} . В частности, для любого невзвешенного мультиграфа при добавлении любого ребра (k, t) имеет место красивое соотношение

$$\frac{1}{\rho'_{kt}} - \frac{1}{\rho_{kt}} = 1, \quad (9.12)$$

или, эквивалентно,

$$\Delta \rho_{kt} = -\rho_{kt} \rho'_{kt}. \quad (9.13)$$

Вид равенств (9.11) и (9.12) свидетельствует в пользу осмысленности перехода к величине, обратной расстоянию (см. также раздел 7.5, [54] и [110]).

Определение 9.3. Пусть $i, j \in V(G)$ — различные вершины мультиграфа G . Совокупным весом связей между i и j в G назовем величину $\theta_{ij} = (\rho_{ij})^{-1} - (2\alpha)^{-1}$.

В силу леммы 9.1 совокупный вес связей удовлетворяет простому соотношению $\theta'_{kt} = \theta_{kt} + \Delta w_{kt}$, а из (9.12) следует $\theta'_{kt} = \theta_{kt} + 1$. Последовательно применяя лемму 9.1 ко всем ребрам с концами i и j и используя неравенство (9.8) и условие равенства в нем, получаем следующее утверждение, проясняющее смысл названия «совокупный вес связей».

Теорема 9.1. Пусть G — произвольный взвешенный мультиграф, i и j — две его не совпадающие вершины, w_{ij} — суммарный вес всех ребер с концами i и j в G . Тогда

- 1) $\theta_{ij} = \theta_{ij}^0 + w_{ij}$, где θ_{ij}^0 — сила связи между i и j в мультиграфе, получающемся из G удалением всех ребер с концами i и j ;
- 2) $\theta_{ij} \geq w_{ij}$;
- 3) $\theta_{ij} = w_{ij}$ тогда и только тогда, когда i и j не связаны ребрами ни с какими другими вершинами — лишь, возможно, друг с другом.

Пользуясь пунктом 2 теоремы 9.1 и определением 9.3, получаем следующие верхние оценки для лесных расстояний:

$$d_{ij} \leq (1 + 2\alpha w_{ij})^{-1}, \quad (9.14)$$

$$\rho_{ij} \leq ((2\alpha)^{-1} + w_{ij})^{-1}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (9.15)$$

где w_{ij} — суммарный вес ребер с концами i и j в G . Условия равенства здесь те же, что в пункте 3 теоремы 9.1.

9.3. Соотношение лесных расстояний для пары графов, отличающихся одним ребром

Рассмотрим теперь более общие свойства, связанные с приращением расстояний (9.4), а также с приращением относительных лесных доступностей для мультиграфов, от-

личающихся лишь одним ребром. Это ребро будем обозначать (k, t) . Наиболее интересны при этом изменения величин $\tau_{i(kt)}$ и $\pi_{i(kt)}$, которые определяются следующим образом:

$$\tau_{i(kt)} = d_{ik} - d_{it}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (9.16)$$

$$\pi_{i(kt)} = q_{ik} - q_{it}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (9.17)$$

В частности, имеем

$$\tau_{t(kt)} = d_{kt} = -\tau_{k(kt)}.$$

Величина $\tau_{i(kt)}$ есть разница лесных расстояний от i до тех вершин, между которыми проведено новое ребро или ребро с измененным весом; $\pi_{i(kt)}$ есть аналогичная разница относительных лесных доступностей.

Одновременное рассмотрение расстояний и доступностей позволяет понять, чем они содержательно отличаются кроме того, что доступность, как правило, тем больше, чем меньше расстояние. Основное отличие в том, что доступность является *относительной*: как следует из теоремы 8.2, при добавлении нового (или увеличении веса имеющегося) ребра расстояние между любыми вершинами не может увеличиться, в то время как изменение относительной доступности может быть как положительным так и отрицательным. Если вершина k «более доступна», чем t из i ($q_{ik} > q_{it}$), а из вершины j , наоборот, доступнее t ($q_{jt} > q_{jk}$), то добавление нового ребра между k и t увеличивает доступность j из i ($q'_{ij} > q_{ij}$): новое ребро как бы «расширяет дорогу» из i в j . Если же и из i , и из j вершина k более доступна, чем t ($q_{ik} > q_{it}$, $q_{jk} > q_{jt}$), то добавление ребра (k, t) уменьшает *относительную* доступность i из j ($q'_{ij} < q_{ij}$): новое ребро сильнее связывает i и j с t и вершинами, расположенными «дальше t », чем i и j друг с другом (ведь сумма относительных доступностей всех вершин из любой вершины равна 1). Диагональные элементы матрицы Q выражают «уединенность» вершин (этот тезис подтверждается теоремой 3 в [294]); все они не увеличиваются при добавлении нового ребра.

Как показано в [68] (см. раздел 7.4 данной книги), между метриками и Σ -близостями (к которым относится относительная лесная доступность) существует естественное взаимно-однозначное соответствие и определенная двойственность.

Из определений (9.4), (9.16) и (9.17) следуют простого вида связи между величинами d_{kt} , $\pi_{i(kt)}$ и $\tau_{i(kt)}$:

$$2d_{kt} = \pi_{k(kt)} - \pi_{t(kt)}, \quad (9.18)$$

$$2\tau_{i(kt)} = (\pi_{k(kt)} - \pi_{i(kt)}) + (\pi_{t(kt)} - \pi_{i(kt)}), \quad (9.19)$$

$$\tau_{i(kt)} - \tau_{j(kt)} = \pi_{j(kt)} - \pi_{i(kt)}, \quad i, j, k, t = 1, \dots, n. \quad (9.20)$$

Замечание 9.1. Формула (9.20) показывает равенство «масштабов» относительных лесных доступностей q_{ij} и лесных расстояний d_{ij} (см. определения (9.16), (9.17)). Это «равенство масштабов» достигается введением множителя $1/2$ в (9.4).

Следующим предложением устанавливаются простые соотношения между приращениями лесных расстояний и близостей при изменении одного ребра.

Предложение 9.2. Пусть взвешенный мультиграф G' отличается лишь ребром (k, t) от G . Пусть $\Delta d_{ij} = d'_{ij} - d_{ij}$, $\Delta q_{ij} = q'_{ij} - q_{ij}$. Тогда для всех $i, j = 1, \dots, n$ имеет место

$$\Delta q_{ij} = -\alpha \varepsilon \pi_{i(kt)} \pi_{j(kt)} \frac{d'_{kt}}{d_{kt}} = -\alpha \varepsilon \pi'_{i(kt)} \pi'_{j(kt)} \frac{d_{kt}}{d'_{kt}}, \quad (9.21)$$

$$\begin{aligned} 2\Delta d_{ij} &= -\alpha \varepsilon (\tau_{i(kt)} - \tau_{j(kt)})^2 \frac{d'_{kt}}{d_{kt}} = -\alpha \varepsilon (\tau'_{i(kt)} - \tau'_{j(kt)})^2 \frac{d_{kt}}{d'_{kt}} = \\ &= -\alpha \varepsilon (\pi_{i(kt)} - \pi_{j(kt)})^2 \frac{d'_{kt}}{d_{kt}} = -\alpha \varepsilon (\pi'_{i(kt)} - \pi'_{j(kt)})^2 \frac{d_{kt}}{d'_{kt}}, \end{aligned} \quad (9.22)$$

где $\varepsilon = \Delta w_{kt}$ — вес нового или приращение веса имеющегося ребра между k и t .

Первые равенства в (9.21) и (9.22) — результат применения леммы 9.1 к формулам (9.10) и (9.6) соответственно. Третье равенство в (9.22) выводится из (9.20). Остальные равенства могут быть получены с помощью следующего принципа обратимости:

Принцип обратимости. Если в произвольном утверждении, истинном для любой пары мультиграфов (G, G') , где G' отличается от G лишь одним ребром, заменить все величины, относящиеся к мультиграфу G , на соответствующие величины, относящиеся к G' , и наоборот, а также заменить Δw_{kt} на $-\Delta w_{kt}$, то получившееся утверждение будет также истинным для любой пары мультиграфов (G, G') , где G' отличается от G лишь одним ребром.

Принцип обратимости напоминает принцип ориентированной двойственности, но имеет иную природу. Он является следствием следующего очевидного факта: если G' отличается от G лишь одним ребром, то и G отличается от G' лишь одним ребром (с противоположным приращением веса). В то же время этот принцип помогает, как мы убедились выше, быстро получать вполне содержательные результаты.

Укажем теперь, как меняются величины $\tau_{i(kt)}$, $\pi_{i(kt)}$ при элементарных изменениях мультиграфа.

Предложение 9.3. Пусть взвешенный мультиграф G' отличается лишь ребром (k, t) от G . Тогда для всех $i = 1, \dots, n$ имеет место

$$\frac{\tau'_{i(kt)}}{d'_{kt}} = \frac{\tau_{i(kt)}}{d_{kt}}, \quad \text{или} \quad \frac{d'_{ik} - d'_{it}}{d'_{kt}} = \frac{d_{ik} - d_{it}}{d_{kt}}, \quad (9.23)$$

$$\frac{\pi'_{i(kt)}}{d'_{kt}} = \frac{\pi_{i(kt)}}{d_{kt}}, \quad \text{или} \quad \frac{q'_{ik} - q'_{it}}{d'_{kt}} = \frac{q_{ik} - q_{it}}{d_{kt}}. \quad (9.24)$$

Равенство (9.24) — следствие предложения 9.1 и леммы 9.1, но может быть также получено из тех соотношений в (9.21), (9.22), которые доказываются применением принципа обратимости; (9.23) выводится, например, из (9.24) и (9.19).

Согласно (9.23) разница расстояний от i до k и до t уменьшается при «сближении»³ k и t — что естественно, — причем отношение этой разницы к расстоянию между k и t не меняется; согласно (9.24) то же выполняется для разницы доступностей.

Заметим также, что в силу (9.23)–(9.24) и леммы 9.1 отношение

$$\frac{\tau'_{i(kt)}}{\tau_{i(kt)}} = \frac{\pi'_{i(kt)}}{\pi_i(kt)} = \frac{d'_{kt}}{d_{kt}} = \frac{\rho'_{kt}}{\rho_{kt}} = \frac{1}{1 + \varepsilon\rho_{kt}} = 1 - \varepsilon\rho'_{kt} \quad (9.25)$$

одинаково для всех вершин $i = 1, \dots, n$.

9.4. Интерпретация лесной метрики графа

В этом разделе дадим графовую интерпретацию величины лесного расстояния. В литературе интерпретации такого рода нередко называют топологическими.

Напомним, что остовный корневой лес мультиграфа G — это остовный подграф G , не содержащий циклов, в котором в каждой компоненте отмечена одна вершина, называемая корнем. Компонентами корневого леса являются корневые деревья.

Любой остовный корневой лес, в котором i — корень дерева, а j не принадлежит этому дереву, назовем *фрагментацией графа, отделяющей j от i* . Остовный корневой лес, в котором j принадлежит дереву с корнем i , назовем *фрагментацией графа, присоединяющей j к i* . Пусть G_α — взвешенный мультиграф, получающийся из G домножением на α весов всех его ребер. Рассмотрим следующую модель.

Модель случайного выбора леса.

1. Зафиксировав пару вершин (i, j) , выбираем одну из них: i или j , каждую — с вероятностью $1/2$.
2. Выбираем случайно остовный корневой лес мультиграфа G_α : вероятность выбора любого леса F есть

$$p(F) = \frac{w(F)}{\sum_{F_k \in \mathcal{F}(G_\alpha)} w(F_k)}, \quad (9.26)$$

где $\mathcal{F}(G_\alpha)$ — множество остовных корневых лесов мультиграфа G_α , $w(F_k)$ — вес леса F_k , который определяется как произведение весов его ребер.

3. Если лес, выбранный на шаге 2, является фрагментацией графа, отделяющей вершину, выбранную на шаге 1, от второй вершины из пары (i, j) , говорим, что выбрана фрагментация, разделяющая i и j .

³ «Сближение» здесь вызвано усилением связи между k и t при сохранении весов остальных связей в мультиграфе.

Следующее утверждение представляет собой интерпретацию величины лесного расстояния между i и j .

Теорема 9.2. *Лесное расстояние d_{ij} равно вероятности выбора фрагментации, разделяющей i и j , в рассмотренной модели случайного выбора леса.*

Теорема 9.2 позволяет лучше понять смысл лесной метрики графа: близкими являются те вершины, для которых мала вероятность выбора разделяющей фрагментации. Кроме того, в рамках вероятностной интерпретации становится естественным неравенство (9.7): $d_{ij} \leq 1$.

Доказательство теоремы 9.2. Заметим, что согласно матричной теореме о лесах (теорема 1.4 на с. 22) $q_{ii} - q_{ij}$ есть доля веса всех фрагментаций, отделяющих j от i , в суммарном весе всех остовных корневых лесов мультиграфа G_α . Поэтому, согласно (9.26), $q_{ii} - q_{ij}$ есть вероятность выбора фрагментации, отделяющей j от i , на шаге 2 рассмотренной модели выбора. Значит, по формуле полной вероятности, $\frac{1}{2}(q_{ii} - q_{ij}) + \frac{1}{2}(q_{jj} - q_{ji})$ есть вероятность выбора фрагментации, разделяющей i и j . Но согласно (9.4) эта величина равна d_{ij} . \square

Пользуясь теоремой 3 из [69] (теоремой 8.7 данной книги), аналогичную интерпретацию можно построить и для резисторной метрики взвешенного мультиграфа. К этой метрике мы обратимся в следующем разделе.

9.5. О связи лесной метрики и резисторной метрики графа

Согласно пункту 3 теоремы 9.1 величина θ_{ij} , названная совокупным весом связей между i и j , обладает несколько неожиданным свойством: если i и j принадлежат разным компонентам G , но хотя бы одна из этих вершин не является изолированной, то $\theta_{ij} > 0$. О каких же связях между такими вершинами можно говорить? Ответить на этот вопрос поможет исследование соотношения лесных метрик и *резисторной метрики графа*. Последняя может быть определена как функция, каждой паре вершин $i, j \in V(G)$ ставящая в соответствие неотрицательный элемент $\tilde{\rho}_{ij}$ расширенной действительной прямой $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ по следующему правилу: если i и j лежат в разных компонентах G , то $\tilde{\rho}_{ij} = +\infty$, в противном случае

$$\tilde{\rho}_{ij} = \ell_{ii}^+ + \ell_{jj}^+ - \ell_{ij}^+ - \ell_{ji}^+, \quad (9.27)$$

где ℓ_{ij}^+ , $i, j = 1, \dots, n$ — элементы матрицы L^+ , обобщенно обратной по Муру–Пенроузу к лапласовской матрице L мультиграфа. Электрическую интерпретацию и некоторые свойства резисторной метрики можно найти, например, в [81, 82, 207, 237, 239, 327].

Обратимся к предельным свойствам лесных метрик d^α и ρ^α . При $\alpha \rightarrow 0$ метрика d^α стремится к дискретной:

$$d_{ij}^0 = \begin{cases} 0, & j = i, \\ 1, & j \neq i, \end{cases} \quad (9.28)$$

а метрика ρ^α — к тождественно нулевой функции.

Пусть V_i — множество вершин компоненты мультиграфа G , содержащей вершину i . Нетрудно убедиться, что если $j \in V_i$, то $d_{ij}^\alpha \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow \infty$. Полностью поведение d^α и ρ^α при $\alpha \rightarrow \infty$ описывается следующим утверждением, которое выводится из следствия 1 и предложения 9 в [69] (следствия 8.1 и предложения 8.3 данной книги).

Предложение 9.4. *Пределы $d_{ij}^\infty = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} d_{ij}^\alpha$ и $\rho_{ij}^\infty = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \rho_{ij}^\alpha$ всегда существуют (второй — на расширенной числовой прямой), причем*

$$d_{ij}^\infty = \begin{cases} 0, & j \in V_i, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{|V_i|} + \frac{1}{|V_j|} \right), & j \notin V_i, \end{cases} \quad (9.29)$$

$$\rho_{ij}^\infty = \tilde{\rho}_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (9.30)$$

Заметим, что если $j \notin V_i$, то пределом совокупного веса связей θ_{ij} при $\alpha \rightarrow \infty$ является 0. Следующее соотношение между лесными метриками и резисторной метрикой графа не менее интересно.

Определение 9.4. α -расширением взвешенного мультиграфа G назовем взвешенный мультиграф G_α , в котором

- 1) $V(G_\alpha) = V(G) \cup \{0\}$,
- 2) сужение $E(G_\alpha)$ на $V(G)$ совпадает с $E(G)$, причем веса ребер в G_α равны весам соответствующих ребер в G , умноженным на α , и
- 3) в $E(G_\alpha)$ входит по одному ребру $(0, i)$ с весом 1 для каждой вершины $i \in V(G)$.

Предложение 9.5. *Для любого взвешенного мультиграфа G и любых $i, j \in V(G)$ имеет место $\tilde{\rho}_{ij}(G_\alpha) = 2d_{ij}^\alpha(G)$, где G_α — α -расширение G , $\tilde{\rho}_{ij}(G_\alpha)$ — резисторное расстояние на G_α , $d_{ij}^\alpha(G)$ — лесное расстояние на G с параметром α .*

Доказательство предложения 9.5. 1. Матрица $Q_\alpha = (I + \alpha L)^{-1}$, дополненная нулевыми строкой и столбцом, соответствующими дополнительной вершине 0, является обобщенно обратной к L_α , лапласовской матрице мультиграфа G_α . Действительно, равенство

$$L_\alpha Q_\alpha^0 L_\alpha = L_\alpha, \quad (9.31)$$

где Q_α^0 — дополненная матрица Q_α , легко проверяется непосредственным умножением блочных матриц.

2. Как было показано в [363] (см. также [371]), любая матрица H , обобщенно обратная к дважды центрированной матрице Y с вырождением 1, представима в виде

$$H = Y^+ + ae^T + ea^T, \quad (9.32)$$

где Y^+ — матрица, обобщенно обратная к Y по Муру–Пенроузу, $e = (1, 1, \dots, 1)^T$, a и b — некоторые векторы.

3. Заметим теперь, что преобразование

$$h'_{ij} = h_{ii} + h_{jj} - h_{ij} - h_{ji}, \quad (9.33)$$

примененное к матрице $H = (h_{ij})$, удовлетворяющей (9.32), а также к матрице Y^+ дает совпадающие результаты. Применив это к матрице L_α , дважды центрированной и имеющей вырождение 1, и воспользовавшись (9.31), получаем требуемое утверждение. Заметим, что инвариантность результата преобразования (9.33) к выбору обобщенно обратной матрицы отмечалась в [81]. \square

Вернемся теперь к особенности показателя θ_{ij} (*совокупного веса связей между i и j*), отмеченной в начале раздела: этот вес может быть *положительным* для вершин, принадлежащих разным компонентам G . Вместе с тем предельное значение этого показателя, соответствующее резисторной метрике, равно нулю.

Отметим, что обычно объекты, представляемые вершинами графа, характеризуются некоторой общностью происхождения или видовым сходством, которые обуславливают их априорную взаимосвязь. Если для исследователя желательно, чтобы эта взаимосвязь априори учитывалась в структурной модели, он может воспользоваться лесной метрикой и регулировать силу априорных связей выбором параметра α . Тогда увеличение $1/\alpha$ соответствует усилению априорных связей. С этой точки зрения рассмотрение в качестве совокупного веса связей величины $(\rho_{ij})^{-1}$ не менее осмысленно, чем использование показателя θ_{ij} . Предложение 9.5 позволяет заключить, что в данной модели априорная зависимость задается не дополнительными соединениями объектов друг с другом, а связями со «скрытым источником», что (и это важно!) дает возможность сохранить структуру непосредственных связей между объектами неискаженной.

Многим специалистам по теории графов известно, что введение «скрытого источника» нередко облегчает доказательства теорем. Например, введением такой вершины и дуг с единичным весом, соединяющих ее с «настоящими» вершинами, каждому остовному корневному лесу в исходном мультиграфе ставится в соответствие остовное дерево с тем же весом в новом мультиграфе, причем это соответствие взаимно однозначно. Данный прием помогает сводить теоремы о лесах к теоремам о деревьях.

Добавлением «скрытого источника» и определением соответствующих весов дуг в некоторых моделях можно задать степень «сравнимости» (сопоставимости) элементов, принадлежащих разным компонентам графа. Так обстоит дело, в частности, в линейном регрессионном анализе при переходе от оценок метода наименьших квадратов к гребневым оценкам (ridge estimates). При этом матрица системы нормальных уравнений, которая исходно может быть вырожденной, регуляризуется, становясь обратимой. Анализ

показывает, что гребневые оценки во многих случаях более адекватны и точны, чем оценки метода наименьших квадратов. Пример тому — метод агрегирования предпочтений, связанный с линейной статистической моделью парных сравнений [61, 146]. Как показано в [361], оценки метода обобщенных строчных сумм для этой модели выражаются через относительные лесные доступности, рассмотренные в главе 8.

9.6. О логарифмических лесных расстояниях

Исследование графовых метрик, учитывающих все связи между вершинами, было продолжено в [139–141]. В этих работах изучаются граф-геодезические метрики, т. е. метрики d , для которых $d(x, y) + d(y, z) = d(x, z)$ тогда и только тогда, когда все пути в графе, соединяющие вершины x и z , содержат вершину y .

В этом разделе кратко изложим некоторые результаты статьи [139].

Прежде всего отметим, что в 2008 г. появилась работа [403], в которой было построено семейство мер удаленности вершин графа, предельными элементами которого являются расстояние кратчайшего пути и резисторное расстояние. В реализованных авторами [403] алгоритмах кластерного анализа наилучшие результаты были достигнуты при использовании не крайних, а промежуточных элементов семейства, но ценность подхода снижается тем, что эти элементы не являются метриками: они нарушают неравенство треугольника.

В [139] строится класс *логарифмических лесных метрик*, обладающий теми же предельными свойствами. Конструкция класса основана на матричной теореме о лесах (см. главу 1) и неравенстве перемычки [140]. Полученные метрики удовлетворяют *геодезическому условию*: $d(i, j) + d(j, k) = d(i, k)$ тогда и только тогда, когда каждый путь из i в k проходит через j .

Как и ранее, под весом взвешенного графа H , $w(H)$, понимаем произведение весов его ребер. Если в H нет ребер, то $w(H) = 1$. Вес множества S графов, $w(S)$, есть сумма весов графов, принадлежащих S ; вес пустого множества равен нулю.

Для данного взвешенного мультиграфа G через $\mathcal{F} = \mathcal{F}(G)$ и $\mathcal{F}_{ij} = \mathcal{F}_{ij}(G)$ обозначаем соответственно множество всех остовных корневых лесов G и множество всех остовных корневых лесов G , в которых вершина i принадлежит дереву с корнем j . Пусть

$$f = w(\mathcal{F}), \quad f_{ij} = w(\mathcal{F}_{ij}), \quad i, j \in V(G).$$

$F = (f_{ij})_{n \times n}$ называем *матрицей лесов* мультиграфа G .

Пусть $L = (\ell_{ij})$ — лапласовская матрица G : $\ell_{ij} = -w_{ij}$ при $j \neq i$ и $\ell_{ij} = \sum_{k \neq i} w_{ik}$ при $j = i$. В силу матричной теоремы о лесах (глава 1) для матрицы $Q = (q_{ij}) = (I + L)^{-1}$ имеет место

$$q_{ij} = f_{ij}/f, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Q может рассматриваться как *матрица близости* для вершин G (глава 8).

Через $d^s(i, j)$ обозначим *расстояние кратчайшего пути*, т.е. число ребер в кратчайшем пути между i и j в G ; $d^r(i, j) = \tilde{\rho}_{ij}$ — *резисторное расстояние* между i и j , определяемое формулой (9.27).

Введем новый класс метрик на множестве вершин графа. Пусть

$$Q_\alpha = (I + \alpha L)^{-1}, \quad (9.34)$$

где $\alpha \in \mathbb{R}_+$ — параметр. Пусть

$$H_\alpha = \gamma (\alpha - 1) \overrightarrow{\log_\alpha Q_\alpha}, \quad (9.35)$$

где $\alpha \neq 1$, $\gamma \in \mathbb{R}_+$, а $\overrightarrow{\log_\alpha Q_\alpha}$ — покомпонентная операция, применяемая к каждому элементу матрицы Q_α отдельно. Рассмотрим

$$D_\alpha = \frac{1}{2}(h_\alpha \mathbf{1}^T + \mathbf{1} h_\alpha^T) - H_\alpha, \quad (9.36)$$

где h_α — столбец диагональных элементов H_α , $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$.

Определение (2) переносится на случай $\alpha = 1$ по непрерывности:

$$H_1 = \gamma \overrightarrow{\ln Q}. \quad (9.37)$$

Приводимые ниже результаты получены в [139].

Теорема 9.3. *Если G связан и $\alpha, \gamma > 0$, то матрица $D_\alpha = (d_{ij}(\alpha))$, определяемая (9.34)–(9.37), существует и задает метрику на $V(G)$.*

В силу теоремы 9.3 корректно следующее определение.

Определение 9.5. Пусть G — связный мультиграф и $\alpha > 0$. *Логарифмической лесной метрикой с параметром α на G назовем функцию $d_\alpha: V(G) \times V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ такую, что $d_\alpha(i, j) = d_{ij}(\alpha)$, где $(d_{ij}(\alpha)) = D_\alpha$ — матрица, определяемая (9.34)–(9.37).*

Элементы матрицы расстояний D_α могут быть выражены через веса остовных лесов в G . Через G_α обозначим взвешенный мультиграф, получающийся из G умножением весов его ребер на α . Пусть

$$f_{ij}(\alpha) = w(\mathcal{F}_{ij}(G_\alpha)), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Предложение 9.6. *Если G связан и $\alpha, \gamma > 0$, то элементы матрицы $D_\alpha = (d_{ij}(\alpha))$, определяемой (9.34)–(9.37), имеют представление*

$$d_{ij}(\alpha) = \begin{cases} \gamma (\alpha - 1) \log_\alpha \frac{\sqrt{f_{ii}(\alpha) f_{jj}(\alpha)}}{f_{ij}(\alpha)}, & \alpha \neq 1 \\ \gamma \ln \frac{\sqrt{f_{ii} f_{jj}}}{f_{ij}}, & \alpha = 1 \end{cases}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Определение 9.6. Для мультиграфа G функция $d : V(G) \times V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ *геодезична*, если для всех $i, j, k \in V(G)$ $d(i, j) + d(j, k) = d(i, k)$ выполняется тогда и только тогда, когда каждый путь из i в k содержит j .

Теорема 9.4. Если G *связен* и $\alpha > 0$, то метрика $d_\alpha(i, j)$ *геодезична* для G .

Рассмотрим введенные метрики со шкалирующим множителем

$$\gamma = \ln(e + \alpha^{\frac{2}{n}}). \quad (9.38)$$

Теорема 9.5. Если G *связен*, то метрика $d_\alpha(i, j)$ со шкалирующим множителем (9.38) *сходится* к метрике кратчайшего пути $d^s(i, j)$ при $\alpha \rightarrow 0^+$ и к резисторной метрике $d^r(i, j)$ при $\alpha \rightarrow \infty$.

Для метрик (9.34)–(9.37) с произвольным положительным γ «сходится к» в теореме 9.5 нужно заменить на «асимптотически пропорциональна».

Заключение к главе 9

Соотношения простого вида, полученные в данной главе, облегчают интерпретацию относительной лесной доступности и лесного расстояния на графах и могут быть полезны при разработке концепций сравнения графовых метрик. Исследование метрик, учитывающих все связи между вершинами, было продолжено в [139–141]. В этих работах изучаются *граф-геодезические метрики*, т. е. метрики d , для которых $d(x, y) + d(y, z) = d(x, z)$ тогда и только тогда, когда все пути в графе, соединяющие вершины x и z , содержат вершину y .

Глава 10

Метод проекции в задаче о консенсусе и регуляризованный предел степеней стохастической матрицы

В этой главе полученные ранее результаты анализа лапласовских матриц орграфов применены к задаче об итеративном достижении консенсуса. Модели консенсуса (согласования характеристик) являются базовыми в теории управления многоагентными системами. Результаты, представленные в данной главе, вошли в статью [8].

В итерационной модели согласования характеристик (см. раздел 5.8.5) известным условием достижимости консенсуса является наличие остовного исходящего дерева в орграфе влияний. В данной главе рассмотрена проблема дискретного согласования характеристик в случае, когда это условие нарушается. Дана характеристика подпространства T_P начальных мнений (где P — матрица влияний), обеспечивающих сходимость процедуры согласования в модели Де Гроота. Предложен метод согласования, сводящийся к 1) преобразованию вектора начальных мнений в вектор, принадлежащий T_P , с помощью ортогональной проекции и 2) дальнейшей коррекции мнений посредством преобразования P . Исследованы свойства метода ортогональной проекции. Установлено, что итоговая матрица процедуры ортогональной проекции может рассматриваться как регуляризованный предел степеней стохастической матрицы.

10.1. Введение

Как уже отмечалось в разделе 5.8, в последнее десятилетие достижение согласия в многоагентных системах было темой большого числа работ. Базовые результаты отражены в обзорах и монографиях [7, 26, 65, 219, 296, 322, 343, 345, 349, 397, 398].

Одна из первых дискретных моделей достижения консенсуса была предложена Де Гроотом в [170]. Если $s(0) = (s_1^0, \dots, s_n^0)^T$ — вектор начальных мнений членов группы, а $s(k) = (s_1^k, \dots, s_n^k)^T$ — вектор мнений после k -го шага согласования, то в соответствии с этой моделью $s(k) = Ps(k-1)$, $k = 1, 2, \dots$, где P — стохастическая по строкам матрица влияний, элемент p_{ij} которой задает степень влияния мнения j -го агента на мнение¹ i -го.

¹Таким образом, i -я строка матрицы P описывает процедуру коррекции мнения i -го агента; поскольку P стохастична по строкам, сумма степеней влияния на каждого агента равна единице.

Тем самым

$$s(k) = P^k s(0), \quad k = 1, 2, \dots \quad (10.1)$$

Согласие *достижимо*, если при некотором $\bar{s} \in \mathbb{R}$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ имеет место $\lim_{k \rightarrow \infty} s_i^k = \bar{s}$. Де Гроот показал [170], что согласие достижимо при любых начальных мнениях в том и только в том случае, если существует предельная матрица $P^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} P^k$ и все ее строки равны, что равносильно регулярности² матрицы P . Таким образом, в модели Де Гроота достижение консенсуса определяется предельными свойствами степеней матрицы влияний.

Если матрица P нерегулярна, то согласие, вообще говоря, не достигается. Но оно может быть достигнуто при векторах начальных мнений, принадлежащих определенному подпространству. В этой главе дана характеристика этого подпространства и предложен *метод проекции* — метод, обеспечивающий достижение консенсуса в случае, если вектор начальных мнений в указанном подпространстве не лежит. Установлено, что итоговая матрица процедуры ортогональной проекции может рассматриваться как регуляризованный предел степеней стохастической матрицы.

Глава имеет следующую структуру. После терминологического раздела 10.2 и перечисления ряда известных результатов, используемых в анализе сетевых моделей управления (раздел 10.3), в разделе 10.4 обсуждаются условия, гарантирующие достижение согласия в модели Де Гроота. В разделе 10.5 дана характеристика области сходимости процедуры Де Гроота. В разделах 10.6–10.8 представлен метод ортогональной проекции, обобщающий процедуру Де Гроота и применимый, когда эта процедура не обеспечивает сходимости, а также установлена структура проектора и некоторые свойства предложенного метода. В разделе 10.9 рассмотрен подход, связанный с неортогональным проектированием на область сходимости. В разделе 10.8 установлено, что небазовые агенты в методе ортогональной проекции, как и в процедуре Де Гроота, не влияют на конечный результат. В разделах 10.10 и 10.12 рассмотрен случай отсутствия небазовых агентов и полученный результат распространен на общий случай. В разделе 10.11 кратко обсуждается интерпретация метода ортогональной проекции, и заключительный раздел 10.13 посвящен понятию регуляризованного предела стохастической матрицы.

10.2. Основные термины и обозначения

Стохастической матрице P , входящей в модель Де Гроота, поставим в соответствие *орграф влияний* Γ с множеством вершин $V(\Gamma) = \{1, \dots, n\}$, в котором при $p_{ij} > 0$ (т. е. если j -й агент влияет на i -го) от вершины j к вершине i проводится дуга (j, i) с весом $w_{ji} = p_{ij}$.

²Стохастическая матрица называется *регулярной* [23], если кроме простого собственного значения 1 она не имеет собственных значений, по модулю равных единице. В терминологии матричного анализа мы в основном следуем [23, 55], в терминологии теории графов — [49, 52, 56].

Таким образом, дуги проводятся «в направлении влияния»; вес дуги — сила влияния.

Матрица Кирхгофа (см. раздел 1.1.4, [49, 142]) $\tilde{L} = \tilde{L}(\Gamma) = (\tilde{\ell}_{ij})$ орграфа Γ определяется следующим образом: при $j \neq i$ полагают $\tilde{\ell}_{ij} = -w_{ji}$, если в Γ имеется дуга (j, i) , и $\tilde{\ell}_{ij} = 0$ в противном случае; $\tilde{\ell}_{ii} = -\sum_{k \neq i} \tilde{\ell}_{ik}$; $i, j = 1, \dots, n$. Матрица \tilde{L} имеет нулевые строчные суммы и неположительные элементы вне главной диагонали.

Иногда матрицу Кирхгофа называют *ориентированным лапласианом* орграфа [386]. Однако в более точной терминологии (раздел 1.1.4, [142, раздел 2.2]) лапласовская матрица $L = (\ell_{ij})$ орграфа — это матрица с нулевыми строчными суммами, недиагональные элементы которой определяются соотношением $\ell_{ij} = -w_{ij}$, т. е., в отличие от матрицы Кирхгофа, элементы i -й строки определяются весами дуг, исходящих из вершины i , а не входящих³ в нее. Таким образом, если изменить в Γ направления всех дуг на противоположные, то лапласовской матрицей получившегося орграфа будет матрица Кирхгофа орграфа Γ и наоборот. Поэтому алгебраически классы матриц Кирхгофа и лапласовских матриц орграфов совпадают.

В силу приведенных определений для орграфа Γ , отвечающего матрице P , имеем

$$\tilde{L}(\Gamma) = I - P, \quad (10.2)$$

где I — единичная матрица.

Любой максимальный по включению сильный (т. е. характеризующийся взаимной достижимостью всех вершин) подграф орграфа называют его *сильной компонентой* или *бикомпонентой*. *Базовой бикомпонентой* (или *недоминируемым узлом*) называют такую бикомпоненту, в которую не входят дуги извне (см. раздел 1.1.2). Вершины, принадлежащие базовым бикомпонентам, назовем *базовыми*, не принадлежащие — *небазовыми*; соответственно базовыми и небазовыми будем называть и агентов, представленных этими вершинами; число базовых вершин обозначим b , через ν будем обозначать число базовых бикомпонент.

Занумеруем сначала базовые вершины (по компонентам), а затем небазовые вершины (также по компонентам). Далее будем предполагать, не отмечая этого каждый раз, что агенты занумерованы именно таким образом. При этом матрица влияний P и матрица Кирхгофа \tilde{L} приобретают нижний блочно-треугольный вид, называемый *нормальной формой Фробениуса*. В матрицах P и \tilde{L} , представленных в такой форме, левым верхним блокам размера $b \times b$ соответствуют базовые вершины орграфа влияний (эти блоки обозначим $P_{\mathfrak{B}}$ и $\tilde{L}_{\mathfrak{B}}$):

³Из-за близости этих определений матрицу Кирхгофа и лапласовскую матрицу нередко путают. В задачах децентрализованного управления можно пользоваться как одним, так и другим формализмом. Если анализ опирается на построение орграфа влияний (как в этой главе), то удобно пользоваться матрицами Кирхгофа, если же строят орграф «ссылок» (обращений за информацией), дуги которого противоположно направлены, то удобнее использовать лапласовские матрицы.

$$P = \begin{pmatrix} P_{\mathfrak{B}} & 0 \\ * & * \end{pmatrix}, \quad \tilde{L} = \begin{pmatrix} \tilde{L}_{\mathfrak{B}} & 0 \\ * & * \end{pmatrix}. \quad (10.3)$$

$P_{\mathfrak{B}}$ и $\tilde{L}_{\mathfrak{B}}$ — соответственно матрица влияний и матрица Кирхгофа орграфа влияний, суженного на множество базовых агентов.

Множество вершин любой бикомпоненты называют *классом*. Будем говорить также о *классах агентов*. В случае базовой бикомпоненты ее класс будем называть *финальным*⁴ [96].

Если согласие достижимо и j -я вершина не является базовой, то, как отмечено в [170], в предельной матрице P^∞ j -й столбец — нулевой и начальное мнение j -го агента не влияет на конечный результат согласования мнений.

10.3. Результаты из алгебраической теории графов, используемые в этой главе

Приведем полученные ранее результаты, полезные при анализе модели Де Гроота и других сетевых моделей управления. В частности, они используются при доказательстве утверждений настоящей главы.

Если последовательность степеней P^k стохастической матрицы P имеет предел P^∞ , то

$$P^\infty = \bar{J}, \quad (10.4)$$

где \bar{J} — нормированная матрица максимальных исходящих лесов соответствующего взвешенного орграфа Γ (следствие матричной теоремы о деревьях для цепей Маркова [20]; см. теорему 3.9).

Матрица \bar{J} равна матрице $\bar{J}_{n-\nu}$, определяемой рекурсивно:

$$\bar{J}_k = I - k \frac{\tilde{L} \bar{J}_{k-1}}{\text{tr}(\tilde{L} \bar{J}_{k-1})}, \quad \text{где } k = 1, \dots, n - \nu, \quad \bar{J}_0 = I \quad \text{и} \quad \tilde{L} \bar{J}_{n-\nu} = 0 \quad (10.5)$$

(см. (4.17), [4, раздел 4], [142, раздел 5]), и может быть найдена также переходом к пределу

$$\bar{J} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} (I + \tau \tilde{L})^{-1} \quad (10.6)$$

(теорема 3.7, [3, теорема 6]).

Далее, поскольку $\tilde{L} = I - P$, имеем

⁴В контексте данной главы это определение может показаться не совсем логичным, поскольку в базовую бикомпоненту не входят дуги извне. Оно оправдано тем, что в цепи Маркова, задаваемой матрицей влияний P , переходы осуществляются не в направлении дуг влияния, а, наоборот, в направлении агентов, оказывающих влияние. Тем самым «все пути ведут» в базовые бикомпоненты, и объединение финальных классов совпадает с множеством возвратных состояний цепи Маркова.

$$P^\infty \tilde{L} = \tilde{L} P^\infty = 0, \quad (10.7)$$

причем

$$\mathcal{N}(P^\infty) = \mathcal{R}(\tilde{L}), \quad \mathcal{R}(P^\infty) = \mathcal{N}(\tilde{L}), \quad (10.8)$$

где $\mathcal{N}(A)$ и $\mathcal{R}(A)$ — соответственно ядро и образ A (см., например, раздел 4.5; [4, раздел 5]). Кроме того, P^∞ — собственный проектор⁵ (главный идемпотент) матрицы \tilde{L} ([298, 353], теорема 3.8) и

$$\text{rank } P^\infty = \nu; \quad \text{rank } \tilde{L} = n - \nu, \quad (10.9)$$

где ν — число базовых бикомпонент в Γ (теорема 3.6, [3, предложение 11]). Из (10.9) следует

$$\dim \mathcal{N}(\tilde{L}) = \nu, \quad (10.10)$$

где $\dim \mathcal{N}(\tilde{L})$ — размерность ядра \tilde{L} . Наконец, согласно теореме 3.8 [142, предложение 12]

$$\mathcal{N}(\tilde{L}) \cap \mathcal{R}(\tilde{L}) = \{\mathbf{0}\}, \quad (10.11)$$

$$\text{ind } \tilde{L} = 1, \quad (10.12)$$

где $\text{ind } \tilde{L}$ (индекс матрицы \tilde{L}) — порядок наибольшей жордановой клетки \tilde{L} , соответствующей нулевому собственному значению, и в силу (10.10) и (10.12)

$$m_{\tilde{L}}(0) = \nu, \quad (10.13)$$

где $m_{\tilde{L}}(0)$ — кратность нуля как собственного значения \tilde{L} .

10.4. Об условиях, гарантирующих достижение согласия в модели Де Гроота

Как было отмечено во введении, процедура Де Гроота ведет к консенсусу при любых начальных мнениях тогда и только тогда, когда существует предельная матрица $P^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} P^k$ и все ее строки равны. Согласно так называемой эргодической теореме для цепей Маркова критерием этого, в свою очередь, является регулярность матрицы P .

Равенство строк P^∞ означает, что

$$P^\infty = \mathbf{1}\pi^T \quad (10.14)$$

при некотором вероятностном (компоненты неотрицательны и в сумме дают единицу) векторе π , где $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$. Консенсус \bar{s} , к которому приводит процедура Де Гроота, при этом выражается скалярным произведением вектора π на вектор начальных мнений $s(0)$:

⁵О методах вычисления собственных проекторов см., в частности, главу 2 и [5, 66].

$$s(\infty) = P^\infty s(0) = \mathbf{1}\pi^T s(0) = \mathbf{1}\bar{s}, \quad (10.15)$$

где $s(\infty)$ — предельный вектор мнений, π — вектор, задающий предельное распределение процедуры Де Гроота, $\bar{s} = \pi^T s(0)$ — консенсус.

Вероятностный вектор π называют *стационарным* для стохастической матрицы P , если он является для P левым собственным вектором, отвечающим собственному значению 1: $\pi^T P = \pi^T$. Очевидно, что этому определению удовлетворяет вектор π , входящий в представление $P^\infty = \mathbf{1}\pi^T$ матрицы P^∞ в случае, когда стремление к консенсусу в модели Де Гроота гарантировано регулярностью матрицы P .

Согласно теореме 3 в [170], если при любом векторе начальных мнений $s(0)$ согласие в модели Де Гроота достижимо и согласованное мнение равно $\pi^T s(0)$, то⁶ вектор π — *единственный* стационарный вектор матрицы P .

Отметим некоторые *достаточные* условия [170] сходимости степеней P^k к матрице с одинаковыми строками: одно из них — наличие положительного столбца в матрице P^k при некотором k , т. е. принадлежность P^k классу *матриц Маркова*, другое условие — взаимодостижимость всех состояний цепи Маркова, соответствующей матрице P (при этом орграф Γ сильно связан, агенты образуют один класс), и ее *правильность* (отсутствие собственных значений, имеющих единичный модуль, но не равных единице) — в этом случае P *примитивна*.

Сформулируем теперь критерий сходимости процедуры Де Гроота в терминах свойств орграфа влияний Γ . Равенство строк стохастической матрицы P^∞ равносильно тому, что $\text{rank } P^\infty = 1$. Поэтому в силу (10.9) при сходящейся последовательности P^k согласие в модели Де Гроота достигается при любом векторе начальных мнений, если и только если в орграфе влияний Γ , соответствующем P , имеется ровно одна базовая бикомпонента ($\nu = 1$). Таким образом, $\nu = 1$ при условии сходимости последовательности P^k равносильно регулярности матрицы P . Согласно (10.13) в этом и только в этом случае 0 — простое собственное значение \tilde{L} .

Наконец, $\nu = 1$ равносильно наличию в Γ остовного исходящего дерева (предложение 3.5, [3, предложение 6]). В этом случае (см. (10.4)) $P^\infty = (p_{ij}^\infty) = \bar{J} = (\bar{J}_{ij})$ есть нормированная матрица остовных исходящих деревьев (раздел 3.6):

$$p_{ij}^\infty = \pi_j = \bar{J}_{ij} = \frac{t_j}{t}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (10.16)$$

где t_j — суммарный вес⁷ остовных исходящих деревьев орграфа Γ с корнем j , t — суммарный вес всех остовных исходящих деревьев в Γ . Из (10.15) и (10.16) следует, что в рассматриваемом случае гарантированного консенсуса

⁶В действительности, еще в [23] (§7 гл. 13) отмечалось, что если P регулярна, то из уравнения $\pi = P^T \pi$ вектор π определяется однозначно и каждая строка матрицы $P^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} P^k$ совпадает с ним.

⁷Под весом исходящего дерева (как и вообще орграфа) понимается произведение весов его дуг.

$$\bar{s} = \left(\frac{t_1}{t}, \dots, \frac{t_n}{t} \right) s(0) = t^{-1} \sum_{j=1}^n t_j s_j^0.$$

Обзор некоторых результатов анализа модели Де Гроота и ее обобщений можно найти в [7, 219]. Отметим, что одним из применений модели Де Гроота является информационное управление в социальных сетях [11].

10.5. Характеризация области сходимости процедуры Де Гроота

Пусть P — матрица влияний агентов, последовательность степеней которой имеет предел⁸, обозначаемый P^∞ , причем строки матрицы P^∞ не обязательно равны.

В пространстве векторов $s(0)$ начальных мнений найдем подпространство T_P , каждый вектор которого матрицей P^∞ преобразуется в вектор с одинаковыми компонентами. Легко видеть, что согласие в модели Де Гроота (10.1) достигается тогда и только тогда, когда $s(0) \in T_P$, поэтому T_P будем называть *областью сходимости процедуры Де Гроота*. Идея метода согласования, который будет представлен в разделе 10.6, состоит в том, чтобы до начала итераций (10.1) заданный вектор начальных мнений $s(0)$, не принадлежащий T_P , преобразовать в максимально близкий к нему вектор из T_P .

Следующая теорема характеризует область T_P .

Теорема 10.1. *Если степени стохастической матрицы P сходятся, то $T_P = \mathcal{R}(\tilde{L}) \oplus T_1$, где T_P — подпространство начальных мнений $s(0)$, для которых достигается согласие в модели Де Гроота (10.1), $\tilde{L} = I - P$, T_1 — линейная оболочка вектора $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$.*

Доказательство теоремы 10.1. Из $\tilde{L}\mathbf{1} = \mathbf{0}$ следует $\mathbf{1} \in \mathcal{N}(\tilde{L})$, и в силу (10.11) $\mathbf{1} \notin \mathcal{R}(\tilde{L})$. Поэтому сумма подпространств $\mathcal{R}(\tilde{L})$ и T_1 — прямая. Пусть вектор начальных мнений x принадлежит $\mathcal{R}(\tilde{L}) \oplus T_1$. Тогда $x = v + a\mathbf{1}$, где $v \in \mathcal{R}(\tilde{L})$, $a \in \mathbb{R}$. В силу (10.7) $P^\infty x = P^\infty(v + a\mathbf{1}) = a\mathbf{1}$, т. е. согласие достигается: $x \in T_P$.

Предположим теперь, что для вектора начальных мнений x агенты приходят к согласию: $x \in T_P$. Тогда $P^\infty x = a\mathbf{1}$ при некотором $a \in \mathbb{R}$. Поскольку $P^\infty \mathbf{1} = \mathbf{1}$, имеем $P^\infty(x - a\mathbf{1}) = \mathbf{0}$, откуда $x - a\mathbf{1} \in \mathcal{N}(P^\infty)$. В силу (10.8) $\mathcal{N}(P^\infty) = \mathcal{R}(\tilde{L})$, значит, $x - a\mathbf{1} \in \mathcal{R}(\tilde{L})$. Следовательно, при некотором $v \in \mathcal{R}(\tilde{L})$ имеем $x = v + a\mathbf{1}$, и $x \in \mathcal{R}(\tilde{L}) \oplus T_1$. \square

Представим теорему 10.1 в эквивалентной форме.

⁸Последнее предположение не обременительно. Для его выполнения достаточно, например, чтобы в каждом финальном классе был хотя бы один агент, при итеративной коррекции мнений хоть в малой степени учитывающий свое текущее мнение. Критерием же существования предела P^∞ является [23] *правильность* матрицы P (отсутствие собственных значений, не равных единице, но имеющих единичный модуль).

Следствие 10.1. Пусть степени стохастической матрицы P сходятся и $\tilde{L} = I - P$. Пусть $\tilde{L}^{(i)}$ и $M_\xi^{(i)}$ — матрицы, получающиеся из \tilde{L} соответственно заменой i -го столбца на столбец из единиц $\mathbf{1}$ и прибавлением к i -му столбцу столбца $\xi\mathbf{1}$, где $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда $T_P = \mathcal{R}(\tilde{L}^{(i)}) = \mathcal{R}(M_\xi^{(i)})$ при любом $i = 1, \dots, n$.

Для доказательства следствия 10.1 достаточно заметить, что любой столбец матрицы \tilde{L} равен сумме остальных столбцов, взятых со знаком минус. Поэтому его удаление не сужает линейной оболочки столбцов. Следовательно, $\mathcal{R}(\tilde{L}^{(i)}) = \mathcal{R}(\tilde{L}) \oplus T_1$, и $T_P = \mathcal{R}(\tilde{L}^{(i)})$ равносильно утверждению теоремы 10.1. Аналогично $\mathcal{R}(M_\xi^{(i)}) = \mathcal{R}(\tilde{L}) \oplus T_1$, и $T_P = \mathcal{R}(M_\xi^{(i)})$ также равносильно утверждению теоремы 10.1.

Замечание 10.1. Следствие 10.1 можно сформулировать иначе: $s(0) \in T_P$, если и только если любая из систем уравнений $\tilde{L}^{(i)}x = s(0)$ и $M_\xi^{(i)}x = s(0)$ совместна. Действительно, разрешимость этих систем синонимична соответственно $s(0) \in \mathcal{R}(\tilde{L}^{(i)})$ и $s(0) \in \mathcal{R}(M_\xi^{(i)})$.

Построим теперь матрицу с независимыми столбцами, образ которой совпадает с T_P .

Следствие 10.2. Пусть U — любая матрица, полученная из \tilde{L} отбрасыванием по одному столбцу, соответствующему какой-либо вершине из каждого финального класса, и добавлением столбца $\mathbf{1}$ в качестве первого. Тогда столбцы U независимы и $T_P = \mathcal{R}(U)$.

Доказательство следствия 10.2. Согласно (10.9) $\text{rank } \tilde{L} = n - \nu$. При доказательстве теоремы 3.6 (предложение 11 в [3]) установлено, что диагональный блок матрицы \tilde{L} , отвечающий небазовым бикомпонентам Γ , имеет полный ранг; при этом каждый диагональный блок \tilde{L}_i , отвечающий базовой бикомпоненте, имеет ранг, на единицу меньший его порядка, а сумма столбцов такого блока равна $\mathbf{0}$. Поэтому, строя максимальный набор линейно независимых столбцов \tilde{L} и выбрав все столбцы, отвечающие небазовым бикомпонентам, из столбцов, отвечающих базовой бикомпоненте, можно отбросить не более одного, т. е. ровно один, так как число отброшенных столбцов должно равняться ν . В представлении отброшенного столбца, отвечающего i -й базовой бикомпоненте, линейной комбинацией столбцов максимального набора независимых столбцов коэффициенты при других столбцах, относящихся к i -й бикомпоненте, равны -1 . Следовательно, из этого представления можно выразить и любой другой столбец бикомпоненты. Таким образом, отбросив по одному произвольному столбцу для каждой базовой бикомпоненты и дополнив оставшиеся столбцы всеми «небазовыми» столбцами, получаем максимальный набор линейно независимых столбцов \tilde{L} . В силу теоремы 10.1 для матрицы U , составленной из максимального набора линейно независимых столбцов \tilde{L} и столбца $\mathbf{1}$, выполняется $\mathcal{R}(U) = T_P$. \square

Замечание 10.2. В силу следствия 10.2 $n - b$ столбцов \tilde{L} , соответствующих небазовым вершинам, линейно независимы, поэтому они могут быть заменены в U любыми $n - b$ неза-

висимыми столбцами, имеющими нули в «базовых» позициях (см. также предложение 10.1 и следствие 10.4 далее).

Пользуясь (10.8), (10.4), выразим область сходимости T_P через ядро матрицы $P^\infty = \bar{J}$.

Следствие 10.3. В условиях теоремы 10.1 имеет место $T_P = \mathcal{N}(\bar{J}) \oplus T_1$.

Замечание 10.3. Согласно (10.9) $\text{rank } \bar{J} = \nu$. В силу [23, (102) в гл. 13] $P^\infty = \bar{J}$ имеет нижнюю блочно-треугольную форму, причем ее подматрица, соответствующая базовым вершинам, — блочно-диагональная: каждой базовой бикомпоненте отвечает диагональный блок, имеющий равные строки. Поэтому $\mathcal{N}(\bar{J})$ есть ортогональное дополнение линейной оболочки ν столбцов \bar{J}^T , взятых по одному из диагональных блоков, отвечающих финальным классам.

Описать «расположение» подпространства T_P помогает следующее предложение.

Предложение 10.1. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда $x \in T_P \Leftrightarrow x_{\mathfrak{B}} \in T_{P_{\mathfrak{B}}}$, где $x_{\mathfrak{B}}$ есть вектор x , из которого удалены небазовые компоненты.

В силу определения T_P чтобы доказать предложение 10.1, достаточно установить, что $P^\infty x = a\mathbf{1}_n \Leftrightarrow (P_{\mathfrak{B}})^\infty x_{\mathfrak{B}} = a\mathbf{1}_b$, где $a \in \mathbb{R}$, $(P_{\mathfrak{B}})^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} (P_{\mathfrak{B}})^k$ и к векторам $\mathbf{1}$ в качестве индекса добавлена их размерность. Эта эквивалентность легко выводится из следующих свойств матрицы P^∞ (см. [23, (102) в гл. 13]): 1) подматрица P^∞ , соответствующая базовым вершинам, совпадает с $(P_{\mathfrak{B}})^\infty$; 2) последние $n - b$ столбцов P^∞ — нулевые; 3) последние $n - b$ строк P^∞ — выпуклые комбинации первых b строк.

Следствие 10.4 (из предложения 10.1). Область сходимости процедуры Де Гроота имеет вид $T_P = T_{P_{\mathfrak{B}}} \times \mathbb{R}^{n-b}$.

Пример 10.1. Рассмотрим систему, орграф влияний Γ которой показан на рис. 10.1.

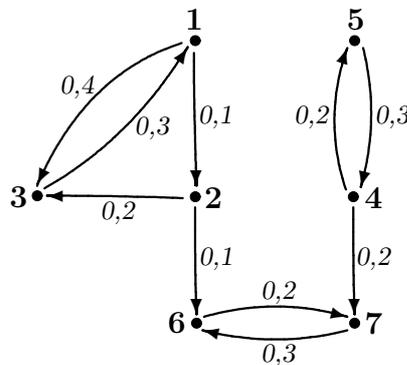


Рис. 10.1. Орграф влияний Γ многоагентной системы.

На рис. 1 для простоты не изображены петли: каждая вершина имеет петлю, вес которой в сумме с весами всех дуг, *входящих* в эту вершину, дает единицу.

Базовые бикомпоненты Γ — сужения Γ на классы $\{1, 2, 3\}$ и $\{4, 5\}$; класс $\{6, 7\}$ — небазовый. Выпишем матрицы P и $\tilde{L} = I - P$ орграфа влияний Γ :

$$P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,7 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,3 & 0 & 0 & 0,3 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}, \quad \tilde{L} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 & -0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,1 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,4 & -0,2 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,3 & -0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,2 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1 & -0,3 & 0 & 0 & 0,7 & -0,3 \\ 0 & 0 & 0 & -0,2 & 0 & -0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу U (см. следствие 10.2), отбросив первый и четвертый столбцы \tilde{L} и добавив столбец $\mathbf{1}$ в качестве первого, а также матрицу $P^\infty = \bar{J}$, используя (10.5) или (10.6) или вычислив $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k$:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0,3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -0,2 & 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -0,3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 1 & -0,1 & -0,3 & 0 & 0,7 & -0,3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -0,2 & 0,4 \end{pmatrix}, \quad P^\infty \approx \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0,291 & 0,291 & 0,146 & 0,109 & 0,164 & 0 & 0 \\ 0,146 & 0,146 & 0,073 & 0,255 & 0,382 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10.17)$$

(в P^∞ все элементы, кроме десятичных дробей в последних двух строках, указаны точно).

Согласно следствию 10.2 матрица U имеет полный столбцовый ранг и линейная оболочка ее столбцов совпадает с областью сходимости процедуры Де Гроота: $\mathcal{R}(U) = T_P$. Наконец, согласно следствию 10.3 и замечанию 10.3 T_P есть прямая сумма T_1 и ортогонального дополнения линейной оболочки векторов⁹

$$\tilde{\pi}^1 = (0,4 \ 0,4 \ 0,2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T \quad \text{и} \quad \tilde{\pi}^2 = (0 \ 0 \ 0 \ 0,4 \ 0,6 \ 0 \ 0)^T, \quad (10.18)$$

полученных транспонированием из строк P^∞ , отвечающих разным финальным классам.

10.6. Метод ортогональной проекции

Если матрица P нерегулярна, то $T_P \neq \mathbb{R}^n$, т. е. существуют векторы начальных мнений, не приводимые данной процедурой Де Гроота к консенсусу. Рассмотрим случай, когда достичь консенсуса все же необходимо. Как это сделать? Напрашивается предложение —

⁹Компоненты вектора-строки в данном случае разделяем пробелом.

добавить в оргграф влияний дополнительные связи, которые обеспечат регулярность матрицы P , и все шаги итеративного согласования мнений проводить уже с новой матрицей. Но предположим, что связи между агентами являются их прерогативой, а «центр» может лишь предложить некоторую коррекцию начальных условий — вектора $s(0)$. Далее мы рассмотрим математические аспекты этого подхода.

Как показано выше, чтобы итеративное согласование мнений с матрицей P вело к консенсусу, необходимо преобразовать вектор $s(0)$ в некоторый вектор $s'(0) \in T_P$. Естественно потребовать, чтобы изменение начальных условий было наименьшим, т. е. минимизировать $\|s'(0) - s(0)\|$.

Преобразование, отображающее произвольный вектор $s(0)$ в ближайший к нему по евклидовой метрике вектор из T_P , осуществляется оператором ортогонального проектирования \mathbb{R}^n на T_P (вдоль ортогонального подпространства T_P^\perp). Согласно лемме 2.3 из [91] этот проектор задается симметричной идемпотентной матрицей; обозначим эту матрицу через S .

В случае коррекции начальных условий посредством ортогонального проектора S предельный вектор мнений $s(\infty)$ представляется в виде¹⁰

$$s(\infty) = P^\infty S s(0).$$

Данную процедуру назовем *процедурой ортогональной проекции в задаче о консенсусе*. Матрицу $P^\infty S$ будем называть *итоговой матрицей процедуры ортогональной проекции* и обозначать через \tilde{P} :

$$\tilde{P} = P^\infty S. \quad (10.19)$$

По построению процедура ортогональной проекции приводит к консенсусу при любом векторе начальных мнений¹¹ $s(0)$ (напомним, что T_P — область сходимости процедуры Де Гроота, а S проектирует \mathbb{R}^n на T_P). Следовательно, все строки матрицы \tilde{P} одинаковы, т. е. существует вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$ такой, что

$$\tilde{P} = \mathbf{1}\alpha^T. \quad (10.20)$$

Вектор α назовем *весовым вектором процедуры ортогональной проекции*. Таким образом, рассматриваемая процедура записывается в виде

$$s(\infty) = P^\infty S s(0) = \tilde{P} s(0) = \mathbf{1}\alpha^T s(0) = \mathbf{1}\bar{s}, \quad (10.21)$$

где $s(0)$ — произвольный вектор начальных мнений, α — весовой вектор процедуры ортогональной проекции, $\bar{s} = \alpha^T s(0)$ — консенсус.

¹⁰Отметим, что при итеративном его вычислении, как и в процедуре Де Гроота, нет необходимости в нахождении степеней матрицы P : достаточно итераций умножения матрицы P на вектор (начиная с вектора $Ss(0)$; о его нахождении речь идет далее).

¹¹Формально это можно доказать так: в силу определения S , теоремы 10.1 и равенства (10.7) $\mathcal{R}(P^\infty S) = \{P^\infty S s(0) \mid s(0) \in \mathbb{R}^n\} = \{P^\infty (\tilde{L}y + a\mathbf{1}) \mid y \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}\} = \{a\mathbf{1} \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Является ли вектор α вероятностным? S есть проектор на область T_P , которая в силу теоремы 10.1 содержит вектор $\mathbf{1}$. Следовательно, S оставляет $\mathbf{1}$ неподвижным, т. е. S имеет единичные строчные суммы. С учетом того, что P^∞ — стохастическая, получаем, что $\tilde{P} = P^\infty S$ также имеет единичные строчные суммы, т. е. $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Отметим, однако, что S может иметь отрицательные элементы, поэтому ответ на вопрос о неотрицательности компонент α не вполне очевиден. Этот ответ будет дан в разделе 10.10, что позволит интерпретировать матрицу \tilde{P} как регуляризованный предел стохастической матрицы P .

10.7. Нахождение ортогонального проектора

Рассмотрим некоторые свойства проектирующей матрицы S . Известно [91], что для любой прямоугольной матрицы A матрица AA^+ , где A^+ — псевдообратная к A по Муру-Пенроузу, является ортогональным проектором с образом $\mathcal{R}(A)$.

В силу следствия 10.2 (раздел 10.5) матрица U , определенная в этом следствии, имеет полный столбцовый ранг, равный $n - \nu + 1$, и $\mathcal{R}(U) = T_P$. Значит, в силу приведенного выше утверждения, ортогональный проектор S с образом T_P имеет выражение $S = UU^+$. Для определения U^+ воспользуемся формулой $U^+ = (U^T U)^+ U^T$ (см., например, задачу 2.17(d) в [91]), которая для матрицы полного столбцового ранга U приобретает вид $U^+ = (U^T U)^{-1} U^T$. Следовательно,

$$S = UU^+ = U(U^T U)^{-1} U^T. \quad (10.22)$$

Структуру матрицы S проясняет следующее предложение.

Предложение 10.2. *Ортогональный проектор S на подпространство T_P имеет вид*

$$S = \begin{pmatrix} S_{\mathfrak{B}} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (10.23)$$

где $S_{\mathfrak{B}}$ — ортогональный проектор на область сходимости $T_{P_{\mathfrak{B}}}$ процедуры с матрицей $P_{\mathfrak{B}}$.

Предложение 10.2 вытекает из следствия 10.4, приведенного в разделе 10.5. Небазовые компоненты вектора при проектировании его на T_P не меняются, так как изменение их противоречило бы минимальности расстояния до проекции.

Вычислив с помощью (10.22) проектор S для примера 10.1 из раздела 10.5, получаем:

$$S = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 18 & -4 & -2 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ -4 & 18 & -2 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 21 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 18 & -6 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 3 & -6 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,818 & -0,182 & -0,091 & 0,182 & 0,273 & 0 & 0 \\ -0,182 & 0,818 & -0,091 & 0,182 & 0,273 & 0 & 0 \\ -0,091 & -0,091 & 0,955 & 0,091 & 0,136 & 0 & 0 \\ 0,182 & 0,182 & 0,091 & 0,818 & -0,273 & 0 & 0 \\ 0,273 & 0,273 & 0,136 & -0,273 & 0,591 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подставив S и найденную ранее (см. (10.17)) матрицу $P^\infty = \bar{J}$ в (10.19), находим итоговую матрицу процедуры ортогональной проекции:

$$\bar{P} = P^\infty S = \mathbf{1} \cdot \frac{1}{110} (26 \ 26 \ 13 \ 18 \ 27 \ 0 \ 0) \approx \mathbf{1} \cdot (0,2364 \ 0,2364 \ 0,1182 \ 0,1636 \ 0,2455 \ 0 \ 0). \quad (10.24)$$

Отметим следующие свойства вектора $\alpha = \frac{1}{110} (26 \ 26 \ 13 \ 18 \ 27 \ 0 \ 0)^T$, определяющего матрицу \bar{P} согласно (10.20): 1) компоненты α , отвечающие базовым вершинам, строго положительны, а компоненты, отвечающие небазовым вершинам, — нулевые; 2) $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$; 3) сравнение (10.24) и (10.18) показывает, что если вершины k и m принадлежат i -му финальному классу, то $\alpha_k/\alpha_m = \tilde{\pi}_k^i/\tilde{\pi}_m^i$, где $\tilde{\pi}^i$ — стационарный вектор матрицы влияний i -й базовой бикомпоненты. Далее установим, всегда ли выполняются эти свойства.

В целом, метод ортогональной проекции осуществляет переход от матрицы P^∞ , приводящей к консенсусу каждый финальный класс отдельно, к матрице \bar{P} , обеспечивающей общий консенсус.

10.8. На что влияют небазовые агенты?

Как отмечено во введении к главе, если процедура Де Гроота приводит к консенсусу, то он не зависит от исходных мнений небазовых агентов. Это свойство наследуется методом ортогональной проекции — с тем отличием, что консенсус при его использовании и правильной (апериодической) матрице P достигается всегда.

Предложение 10.3. *В случае правильной матрицы P итоговый вектор мнений $s(\infty)$ метода ортогональной проекции не зависит от исходных мнений небазовых агентов.*

Отметим, что согласно (10.21) $s(\infty) = P^\infty s'(0)$, где $s'(0) = Ss(0)$. В силу предложения 10.2 компоненты $s'(0)$, отвечающие небазовым вершинам, равны соответствующим компонентам $s(0)$: *предкоррекция*, осуществляемая матрицей S , не меняет мнений небазовых агентов.

Предложение 10.3 моментально выводится из формулы $s(\infty) = \bar{P}s(0)$ (10.21) и следующего представления матрицы \bar{P} .

Теорема 10.2. *Для любой правильной матрицы P вектор α , определяющий итоговую матрицу $\bar{P} = \mathbf{1}\alpha^T$ метода ортогональной проекции, имеет вид*

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_b, 0, \dots, 0)^T,$$

где $(\alpha_1, \dots, \alpha_b)$ — любая строка матрицы $(P_{\mathfrak{B}})^\infty S_{\mathfrak{B}}$ (см. (10.3), (10.23)).

Доказательство теоремы 10.2. Поскольку небазовым вершинам отвечают несущественные состояния цепи Маркова, задаваемой матрицей P , P^∞ имеет вид $(*\ 0)$, где блок 0 состоит из $n - b$ столбцов [23, (102) в гл.13]. Согласно (10.23) $S = \begin{pmatrix} S_{\mathfrak{B}} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, поэтому матрица $\overset{\infty}{P} = P^\infty S$, как и P^∞ , имеет вид $(*\ 0)$. Учитывая (10.20), получаем $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_b, 0, \dots, 0)^T$.

В силу (10.3) верхние левые блоки порядка b матриц P^2, P^3, \dots и P^∞ равны соответственно $(P_{\mathfrak{B}})^2, (P_{\mathfrak{B}})^3, \dots$ и $(P_{\mathfrak{B}})^\infty$. Учитывая (10.23), получаем, что верхний левый блок порядка b матрицы $\overset{\infty}{P} = P^\infty S$ есть $(P_{\mathfrak{B}})^\infty S_{\mathfrak{B}}$, что завершает доказательство теоремы 10.2. \square

Ответ на более общий вопрос: «Влияет ли на результат согласования мнений *присутствие* небазовых агентов?» — также отрицательный.

Предложение 10.4. *В случае правильной матрицы P консенсус \bar{s} метода ортогональной проекции не изменится при исключении небазовых агентов и сохранении начальных мнений базовых агентов и коэффициентов их влияния друг на друга.*

Предложение 10.4, как и предложение 10.3, следует из теоремы 10.2, согласно которой вектор $(\alpha_1, \dots, \alpha_b)^T$, определяющий $\overset{\infty}{P}$, не изменится при исключении небазовых агентов. Свойства этого вектора будут описаны в теореме 10.3 (раздел 10.10).

Таким образом, при использовании метода ортогональной проекции единственный результат присутствия в системе небазовых агентов состоит в том, что в итоге их мнения приходят к тому же консенсусу, что и мнения базовых агентов. Сам же этот консенсус не зависит ни от начальных мнений небазовых агентов, ни от их присутствия.

10.9. Неортогональное проектирование на область сходимости

В методе проекции итеративной коррекции (10.1) предшествует проектирование вектора начальных мнений $s(0)$ на подпространство T_P . В качестве преобразования с образом T_P используется ортогональный проектор S . Согласно предложению 10.2 для его нахождения достаточно рассмотреть сужение орграфа влияний на множество базовых вершин.

В качестве альтернативы S можно рассмотреть стохастическую матрицу, переводящую векторы начальных мнений в векторы, принадлежащие T_P , и одновременно являющуюся наилучшим приближением (в смысле наименьших квадратов, т. е. евклидовой метрики) для исходной матрицы P . Имеет смысл дополнительно потребовать, чтобы искомая матрица была идемпотентна, иначе она будет изменять некоторые векторы начальных мнений, уже лежащие в T_P и потому в предкоррекции не нуждающиеся. Задача нахождения такой матрицы имеет много общего с классической задачей аппроксимации матриц

(см., например, [174] и раздел 7.4 в [55]).

Покажем, что вместо S можно использовать также матрицу \tilde{S} , первые b строк которой совпадают с соответствующими строками S , а остальные строки совпадают с последними $n - b$ строками P . Если $P = \begin{pmatrix} P_{\mathfrak{B}} & 0 \\ B & D \end{pmatrix}$ и $S = \begin{pmatrix} S_{\mathfrak{B}} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ (см. (10.3), (10.23)), то

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} S_{\mathfrak{B}} & 0 \\ B & D \end{pmatrix}. \quad (10.25)$$

Матрица \tilde{S} , вообще говоря, не идемпотентна, однако поскольку $B \neq 0$, имеем

$$\|P - \tilde{S}\|_E = \left\| \begin{pmatrix} P_{\mathfrak{B}} - S_{\mathfrak{B}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|_E < \left\| \begin{pmatrix} P_{\mathfrak{B}} - S_{\mathfrak{B}} & 0 \\ B & D - I \end{pmatrix} \right\|_E = \|P - S\|_E,$$

где $\|X\|_E$ — евклидова норма матрицы X , т. е. \tilde{S} «ближе» к исходной матрице P , чем S . С другой стороны, поскольку P^∞ имеет нулевой блок, соответствующий небазовым вершинам (действительно, им отвечают несущественные состояния цепи Маркова, задаваемой матрицей P ; см. [23, (102) в гл. 13]), имеем $P^\infty S = P^\infty \tilde{S}$, тем самым выполняется следующее предложение.

Предложение 10.5. *Если матрица P правильная и \tilde{S} задается (10.25), то двухэтапная процедура согласования мнений, состоящая из предкоррекции $s'(0) = \tilde{S}s(0)$ и итеративной коррекции $s(k) = P^k s'(0)$, $k = 1, 2, \dots$, приводит к тому же консенсусу, что и процедура ортогональной проекции.*

В качестве следствия получаем, что $\mathcal{R}(\tilde{S}) \subseteq T_P$. Можно показать, что при условии невырожденности блока D выполняется $\mathcal{R}(\tilde{S}) = T_P$.

Замечание 10.4. Нетрудно указать еще один — не требующий нахождения ортогонального проектора — способ отображения пространства исходных мнений \mathbb{R}^n на множество T_P . В силу следствия 10.1 из теоремы 10.1 (раздел 10.5) для матриц $\tilde{L}^{(i)}$ и $M_\xi^{(i)}$, полученных из \tilde{L} соответственно заменой i -го столбца на вектор $\mathbf{1}$ и прибавлением к i -му столбцу вектора $\xi\mathbf{1}$, где $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, имеет место $\mathcal{R}(\tilde{L}^{(i)}) = \mathcal{R}(M_\xi^{(i)}) = T_P$. Таким образом, предкоррекция вектора начальных мнений $s(0)$, проведенная с помощью любого из отображений $\tilde{L}^{(i)}$ или $M_\xi^{(i)}$, обеспечивает достижение консенсуса при дальнейшей итеративной коррекции с матрицей P . Однако данный подход порождает «диктаторские» процедуры: они ведут к консенсусу, который *равен* начальному мнению i -го агента в случае матриц $\tilde{L}^{(i)}$ и $M_1^{(i)}$ или *пропорционален* ему (т. е. искажает даже его) при использовании $M_\xi^{(i)}$ с $\xi \neq 1$. Тем самым этот подход пригоден только для *маскировки* диктаторского «согласования» мнений.

Рассматривая иные возможные отображения пространства \mathbb{R}^n в T_P , следует помнить о главном преимуществе проектора S : при его использовании результат предварительной коррекции минимально отличается от исходного вектора мнений.

Формула (10.22) дает явное выражение ортогонального проектора S . В следующем разделе будет получено еще одно выражение для S , весьма полезное при изучении свойств метода ортогональной проекции и его содержательной интерпретации.

10.10. Метод ортогональной проекции в случае, когда все агенты — базовые

Согласно теореме 10.2 небазовые агенты не влияют на вектор $(\alpha_1, \dots, \alpha_b)^T$, определяющий результаты согласования мнений в процедуре ортогональной проекции. Поэтому логично рассмотреть случай, когда небазовые агенты отсутствуют. Этому и посвящен данный раздел.

Пусть, как и ранее, матрица P правильная, $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k = P^\infty$ и число базовых бикомпонент равно ν . Поскольку между ними нет связей, при отсутствии небазовых агентов процедура Де Гроота распадается на ν автономных процессов согласования. Представляет интерес вопрос о том, каким образом процедура ортогональной проекции объединяет эти процессы в один.

Пусть m_i — число вершин в i -й бикомпоненте. Ее матрицу влияний, матрицу Кирхгофа и предел степеней матрицы влияний обозначим соответственно через P_i , $\tilde{L}_i = (\tilde{\ell}_{uv}^i)$ и P_i^∞ . В данном случае матрицы P , \tilde{L} и P^∞ всей системы имеют вид

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_\nu \end{pmatrix}, \quad \tilde{L} = \begin{pmatrix} \tilde{L}_1 & & & \\ & \tilde{L}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{L}_\nu \end{pmatrix}, \quad P^\infty = \begin{pmatrix} P_1^\infty & & & \\ & P_2^\infty & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_\nu^\infty \end{pmatrix}, \quad (10.26)$$

где блоки соответствуют финальным классам, а не входящие в них элементы равны нулю.

Матрицы P_i^∞ соответствуют сильно связным орграфам, поэтому (см. достаточные условия достижения согласия в разделе 10.4) все строки каждой из них одинаковы, т. е. эти матрицы представляются в виде

$$P_i^\infty = \mathbf{1}(\pi^i)^T, \quad i = 1, \dots, \nu, \quad (10.27)$$

где $(\pi^i)^T$ — любая строка P_i^∞ .

Поставим следующую задачу: выяснить, как вектор α , входящий в представление (10.21) метода ортогональной проекции, связан с векторами π^i .

Пусть $q^i = \tilde{\pi}^{i-1} - \tilde{\pi}^i$, $i = 2, \dots, \nu$, где $\tilde{\pi}^i \in \mathbb{R}^n$ есть вектор π^i , дополненный нулевыми элементами в позициях, отвечающих всем бикомпонентам, кроме i -й. Определим матрицу

X следующим образом: X получается из \tilde{L} заменой первого столбца столбцом $\mathbf{1}$ и заменой первого столбца каждого из блоков, соответствующих остальным базовым бикомпонентам, столбцом из нулей. Таким образом, X содержит $\nu - 1$ нулевых столбцов, а все остальные ее столбцы линейно независимы, и $\text{rank } X = n - \nu + 1$ (см. следствие 10.2 из теоремы 10.1).

Теперь определим матрицу Z : она получается из X заменой нулевых столбцов в блоках с номерами $i = 2, \dots, \nu$ векторами q^i . Вид матрицы Z при $\nu = 3$ представлен формулой (10.28).

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{\ell}_{12}^1 & \dots & \tilde{\ell}_{1m_1}^1 & \pi_1^1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{1} & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ 1 & \tilde{\ell}_{m_1 2}^1 & \dots & \tilde{\ell}_{m_1 m_1}^1 & \pi_{m_1}^1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\pi_1^2 & \tilde{\ell}_{12}^2 & \dots & \tilde{\ell}_{1m_2}^2 & \pi_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\pi_{m_2}^2 & \tilde{\ell}_{m_2 2}^2 & \dots & \tilde{\ell}_{m_2 m_2}^2 & \pi_{m_2}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\pi_1^3 & \tilde{\ell}_{12}^3 & \dots & \tilde{\ell}_{1m_3}^3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\pi_{m_3}^2 & \tilde{\ell}_{m_3 2}^3 & \dots & \tilde{\ell}_{m_3 m_3}^3 \end{pmatrix}. \quad (10.28)$$

Лемма 10.1. Матрица Z — невырожденная.

Доказательство леммы 10.1. Введем обозначение $q^1 = \mathbf{1}$ ($\mathbf{1}$ — столбец из n единиц). Прежде всего докажем, что векторы q^2, \dots, q^ν линейно независимы. Действительно, в противном случае $\sum_{i=2}^\nu \alpha_i q^i = 0$, причем в этой сумме не все коэффициенты α_i нулевые. Тогда если $j = \min \{i \mid \alpha_i \neq 0\}$, то вектор $\alpha_j q^j$ по определению содержит ненулевые компоненты от $\alpha_j \pi^{i-1}$, причем соответствующие компоненты всех векторов q^i при $i > j$ равны нулю. Получаем $\sum_{i=2}^\nu \alpha_i q^i \neq 0$, что доказывает линейную независимость q^2, \dots, q^ν .

Далее, если бы q^1, q^2, \dots, q^ν были линейно зависимы, то при некоторых $\alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ выполнялось бы $q^1 = \sum_{k=2}^\nu \alpha_k q^k$ (так как q^2, \dots, q^ν линейно независимы). В силу положительности первых m_1 компонент q^2 и равенства нулю соответствующих компонент q^1 при $i > 1$ имеем $\alpha_2 > 0$. Следующие m_2 компонент отрицательны у вектора q^2 , положительны у q^3 и равны нулю у оставшихся векторов, поэтому $\alpha_3 > 0$. Продолжая по индукции, получаем $\alpha_\nu > 0$. Но у вектора q^ν последние m_ν компонент отрицательны, что противоречит $q^1 = \sum_{k=2}^\nu \alpha_k q^k$. Тем самым q^1, \dots, q^ν линейно независимы.

По построению $q^2, \dots, q^\nu \in \mathcal{R}(P^\infty)$. Согласно (10.8) $\mathcal{R}(P^\infty) = \mathcal{N}(\tilde{L})$. Следовательно, $q^2, \dots, q^\nu \in \mathcal{N}(\tilde{L})$. Поскольку $\tilde{L}\mathbf{1} = 0$, $q^1 \in \mathcal{N}(\tilde{L})$. Таким образом, множество столбцов Z состоит из векторов q^1, \dots, q^ν , образующих линейно независимое подмножество в $\mathcal{N}(\tilde{L})$, и набора линейно независимых столбцов \tilde{L} , принадлежащих $\mathcal{R}(\tilde{L})$. Но в силу (10.11) $\mathcal{N}(\tilde{L}) \cap \mathcal{R}(\tilde{L}) = \{0\}$. Значит, столбцы Z линейно независимы, и Z — невырожденная. \square

В силу леммы 10.1 и доказательства теоремы 2.8 из [91] ортогональный проектор S с образом T_P удовлетворяет соотношению

$$S = XZ^{-1}. \quad (10.29)$$

Подставив (10.29) в (10.19) и используя (10.20), получаем

$$\mathbf{1}\alpha^T = \tilde{P} = P^\infty S = P^\infty XZ^{-1}. \quad (10.30)$$

В теореме 10.3 с использованием (10.30) установлен ряд свойств вектора α — весового вектора процедуры ортогональной проекции, задающего ее в «свернутом виде» (10.21). В частности, указана связь вектора α с векторами π^i и матрицей Z^{-1} (см. (10.27), (10.28)).

Теорема 10.3. *Если все агенты — базовые, выполняются следующие утверждения:*

1. Вектор-строка α^T совпадает с первой строкой матрицы Z^{-1} ;
2. Все компоненты вектора α положительны, и $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Сумма элементов любой строки Z^{-1} кроме первой равна нулю;
3. Пусть $c(g)$ — номер бикомпоненты, содержащей вершину g . Тогда для $g, h = 1, \dots, n$

$$\frac{\alpha_g}{\alpha_h} = \frac{\beta_{c(g)} \tilde{\pi}_g^{c(g)}}{\beta_{c(h)} \tilde{\pi}_h^{c(h)}},$$

где $\beta_i = (t^i)^2 / \sum_{l=1}^{m_i} (t_l^i)^2$; t^i и t_l^i — суммарный вес всех остовных исходящих деревьев в i -й бикомпоненте Γ и суммарный вес тех из них, которые имеют корень l .

Доказательство теоремы 10.3.

1. Используем выражение (10.30). Из определения матрицы X , стохастичности P^∞ и равенства $P^\infty \tilde{L} = 0$ (10.7) следует, что первый столбец матрицы $P^\infty X$ состоит из единиц, а остальные столбцы — из нулей. Поэтому каждая строка итоговой матрицы $P^\infty XZ^{-1} = \mathbf{1}\alpha^T$ равна первой строке матрицы Z^{-1} .

2. При доказательстве используем следующую лемму.

Лемма 10.2. *Если все элементы первого столбца матрицы $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ равны единице и A обратима, то $A^{-1}\mathbf{1} = (1, 0, \dots, 0)^T$.*

Доказательство леммы 10.2. Пусть A^{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A , σ_k — сумма элементов k -й строки A^{-1} . В условиях леммы, разложив $\det A$ по первому столбцу, выразим σ_1 :

$$\sigma_1 = \frac{\sum_{i=1}^n A^{i1}}{\det A} = \frac{\sum_{i=1}^n A^{i1}}{\sum_{i=1}^n 1 \cdot A^{i1}} = 1.$$

Через $M^{i|k}$ и $M^{ij|km}$ обозначим миноры A , полученные соответственно вычеркиванием строки i и столбца k и вычеркиванием строк i и j и столбцов k и m . Раскладывая миноры $M^{i|k}$ порядка $n - 1$ по первому столбцу, при $k > 1$ получаем

$$\sigma_k \det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} M^{i|k} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} \left(\sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{1+j} M^{ij|1k} + \sum_{j=i+1}^n (-1)^j M^{ij|1k} \right). \quad (10.31)$$

Для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$ таких, что $j < i$, минор $M^{ij|1k}$ входит в сумму (10.31) со знаком $(-1)^{i+k+1+j}$, а равный ему минор $M^{ji|1k}$ — со знаком $(-1)^{j+k+i}$. Таким образом, эти миноры сокращаются. Следовательно, при $\det A \neq 0$ и $k > 1$ имеем $\sigma_k = 0$. Лемма доказана. \square

Следствие 10.5 (из леммы 10.2). *Если все элементы k -го столбца матрицы $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ равны $y \in \mathbb{C}$ и A обратима, то $A^{-1}\mathbf{1} = (0, \dots, 0, y^{-1}, 0, \dots, 0)^T$, где y^{-1} — k -я компонента.*

Следствие 10.5 очевидно.

Докажем п. 2 теоремы 10.3. Равенство $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ доказано в последнем абзаце раздела 10.6. Поскольку первый столбец Z состоит из единиц, строчные суммы Z^{-1} , кроме равной единице суммы по первой строке, в силу леммы 10.2 — нулевые.

Осталось доказать положительность элементов первой строки Z^{-1} . Обозначим через t^i и t_k^i сумму весов всех остовных исходящих деревьев i -й бикомпоненты орграфа Γ и сумму весов тех из них, которые имеют корень в k -й вершине i -й бикомпоненты. Согласно матричной теореме о деревьях (см., например, теорему VI.27 в [49] или теорему 16.9' в [52], где результат формулируется для матрицы \tilde{L}^T и невзвешенных орграфов) t_k^i равно алгебраическому дополнению любого элемента k -й строки матрицы \tilde{L}_i (см. (10.26)). Пусть W_i — определитель матрицы, полученной из \tilde{L}_i заменой первого столбца вектором π^i . Раскладывая W_i по первому столбцу и используя (10.16), получаем

$$W_i = \sum_{k=1}^{m_i} \pi_k^i t_k^i = \sum_{k=1}^{m_i} (\pi_k^i)^2 t^i = \sum_{k=1}^{m_i} \frac{(t_k^i)^2}{t^i}.$$

Найдем алгебраические дополнения Z^{h1} ($h = 1, \dots, n$) элементов первого столбца Z (см. (10.28)), представив номер строки h в виде $h = \sum_{u=1}^{c(h)-1} m_u + k(h)$, где $c(h)$ — номер базовой бикомпоненты, содержащей h -ю вершину, $k(h)$ — номер этой вершины в $c(h)$ -й бикомпоненте. Пусть $Z^{(h1)}$ — матрица Z после удаления из нее h -й строки и первого столбца. Для вычисления

$$Z^{h1} = (-1)^{h+1} \det Z^{(h1)} \quad (10.32)$$

в матрице $Z^{(h1)}$ последовательно переместим каждый из столбцов q^{u+1} ($u = 1, \dots, c(h) - 1$) на $m_u - 1$ позиций влево (если $c(h) = 1$, то никакие столбцы не перемещаются). Обозначив полученный определитель через \tilde{Z}^{h1} , имеем

$$\det Z^{(h1)} = (-1)^{\sum_{u=1}^{c(h)-1} (m_u - 1)} \tilde{Z}^{h1} = (-1)^{h - k(h) - (c(h) - 1)} \tilde{Z}^{h1}. \quad (10.33)$$

Далее, определитель \tilde{Z}^{h1} равен произведению своих диагональных подопределителей, имеющих размеры $m_1, \dots, m_{c(h)-1}, m_{c(h)} - 1, m_{c(h)+1}, \dots, m_\nu$, поскольку произведения, содержащие иные элементы столбцов q^u , в том числе — перемещенных столбцов, равны нулю. Следовательно,

$$\tilde{Z}^{h1} = \prod_{u=1}^{c(h)-1} W_u (-1)^{k(h)+1} t_{k(h)}^{c(h)} (-1)^{\nu-c(h)} \prod_{u=c(h)+1}^{\nu} W_u = (-1)^{\nu-c(h)+k(h)+1} t_{k(h)}^{c(h)} \prod_{u \neq c(h)} W_u, \quad (10.34)$$

где множитель $(-1)^{\nu-c(h)}$ появляется из-за отрицательности первых столбцов последних $\nu - c(h)$ диагональных определителей. Подставив (10.34) в (10.33) и (10.33) в (10.32), получаем

$$Z^{h1} = (-1)^{\nu+1} t_{k(h)}^{c(h)} \prod_{u \neq c(h)} W_u. \quad (10.35)$$

Из (10.35) и п. 1 теоремы 10.3 следует, что знаки всех компонент α одинаковы; отметим, что $t_{k(h)}^{c(h)}$ не равны нулю. Поскольку, как доказано выше, сумма компонент α равна единице, все компоненты α положительны.

Докажем п. 3 теоремы 10.3. Для простоты введем следующие обозначения: $i = c(g)$, $j = c(h)$, $k = k(g)$, $r = k(h)$. В силу п. 1 теоремы 10.3, (10.35) и (10.16) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_g}{\alpha_h} &= \frac{Z^{g1}}{Z^{h1}} = \frac{t_k^i / W_i}{t_r^j / W_j} = \frac{t_k^i / \sum_{l=1}^{m_i} \pi_l^i t_l^i}{t_r^j / \sum_{l=1}^{m_j} \pi_l^j t_l^j} = \frac{\pi_k^i t^i / \sum_{l=1}^{m_i} \pi_l^i t_l^i}{\pi_r^j t^j / \sum_{l=1}^{m_j} \pi_l^j t_l^j} = \\ &= \frac{\pi_k^i (t^i)^2 / \sum_{l=1}^{m_i} (t_l^i)^2}{\pi_r^j (t^j)^2 / \sum_{l=1}^{m_j} (t_l^j)^2} = \frac{\beta_i \pi_k^i}{\beta_j \pi_r^j} = \frac{t_k^i t^i / \sum_{l=1}^{m_i} (t_l^i)^2}{t_r^j t^j / \sum_{l=1}^{m_j} (t_l^j)^2}, \end{aligned} \quad (10.36)$$

откуда, в частности, следует требуемое утверждение. Теорема доказана. \square

Пример 10.2. Сузим оргграф влияний из примера 10.1 на финальные классы (рис. 10.2).

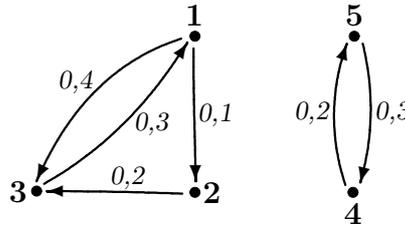


Рис. 10.2. Оргграф влияний $\Gamma_{\mathfrak{B}}$.

Иными словами, рассмотрим подсистему, матрица влияний и лапласовская матрица которой имеют вид

$$P_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,9 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}, \quad \tilde{L}_{\mathfrak{B}} = I - P_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 & -0,3 & 0 & 0 \\ -0,1 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ -0,4 & -0,2 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,3 & -0,3 \\ 0 & 0 & 0 & -0,2 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Предельной матрицей $(P_{\mathfrak{B}})^{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} (P_{\mathfrak{B}})^k$ этой подсистемы является «базовая» подматрица матрицы $P^{\infty} = \bar{J}$, найденной в разделе 10.5 (см. (10.17)):

$$(P_{\mathfrak{B}})^{\infty} = \bar{J}_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Найдем итоговую матрицу метода ортогональной проекции, пользуясь соотношением (10.29). Сначала построим определенные выше матрицы X и Z :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0,3 & 0 & 0 \\ 1 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -0,2 & 0,6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -0,3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0,3 & 0,4 & 0 \\ 1 & 0,1 & 0 & 0,4 & 0 \\ 1 & -0,2 & 0,6 & 0,2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -0,4 & -0,3 \\ 1 & 0 & 0 & -0,6 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим Z^{-1} и по формуле (10.29) — проектор $S_{\mathfrak{B}}$:

$$Z^{-1} \approx \begin{pmatrix} 0,236 & 0,236 & 0,118 & 0,164 & 0,245 \\ -4,182 & 5,818 & -2,091 & 0,182 & 0,273 \\ -1,939 & 1,394 & 0,697 & -0,061 & -0,091 \\ 0,455 & 0,455 & 0,227 & -0,455 & -0,682 \\ 0,182 & 0,182 & 0,091 & -2,182 & 1,727 \end{pmatrix}, \quad S_{\mathfrak{B}} \approx \begin{pmatrix} 0,818 & -0,182 & -0,091 & 0,182 & 0,273 \\ -0,182 & 0,818 & -0,091 & 0,182 & 0,273 \\ -0,091 & -0,091 & 0,955 & 0,091 & 0,136 \\ 0,182 & 0,182 & 0,091 & 0,818 & -0,273 \\ 0,273 & 0,273 & 0,136 & -0,272 & 0,591 \end{pmatrix}.$$

Найденный проектор $S_{\mathfrak{B}}$ совпадает (см. предложение 10.2) с «базовой» подматрицей проектора S всей системы, вычисленного в разделе 10.7.

Итоговая матрица метода ортогональной проекции определяется формулой (10.19):

$$\tilde{P}_{\mathfrak{B}}^{\infty} = (P_{\mathfrak{B}})^{\infty} S_{\mathfrak{B}} \approx \mathbf{1} \cdot (0,2364 \ 0,2364 \ 0,1182 \ 0,1636 \ 0,2455).$$

В соответствии с теоремой 10.2 (раздел 10.8) $\tilde{P}_{\mathfrak{B}}^{\infty}$ совпадает с «базовой» подматрицей матрицы \tilde{P} (см. (10.24)). Первая строка матрицы Z^{-1} совпадает с любой строкой матрицы $\tilde{P}_{\mathfrak{B}}^{\infty}$, что согласуется с теоремой 10.3.

В рассмотренном случае отсутствия небазовых вершин метод ортогональной проекции позволяет перейти от серии локальных консенсусов, достигаемых применением преобразования $(P_{\mathfrak{B}})^{\infty}$, к общему консенсусу, обеспечиваемому преобразованием $\tilde{P}_{\mathfrak{B}}^{\infty}$. Связь вектора α , определяющего матрицу $\tilde{P}_{\mathfrak{B}}^{\infty}$, с векторами π^i , задающими $(P_{\mathfrak{B}})^{\infty}$, установлена в п. 3 теоремы 10.3.

10.11. Об интерпретации метода ортогональной проекции

Следствие теоремы 10.3, важное для интерпретации метода ортогональной проекции, состоит в том, что вектор α (весовой вектор процедуры ортогональной проекции:

$\tilde{P} = \mathbf{1}\alpha^T$) — вероятностный, т. е. реализует *распределение* весов на множестве мнений агентов. Иными словами, достигаемый в пределе консенсус равен взвешенному среднему исходных мнений, взятому по распределению α . Относительный вес i -й вершины k -й бикомпоненты в распределении определяется долей веса деревьев, исходящих из вершины i , в общем весе исходящих деревьев k -й бикомпоненты (эта доля равна π_k^i) и тем, насколько однородны вершины k -й бикомпоненты по весу исходящих из них деревьев: можно показать, что чем однородность выше, тем больше β_i . Таким образом, в наибольшей степени на итоговое мнение влияют те «лидеры» в своих бикомпонентах, которые сильнее всего «оторвались от преследователей». Отметим, что формула (10.36) дает несколько выражений для α_g/α_h , позволяющих получить разные варианты интерпретации весов агентов в методе ортогональной проекции.

Фактически двухшаговый метод, включающий предкоррекцию и последующее усреднение мнений с помощью стохастической матрицы орграфа влияний, действует так, как если бы базовые бикомпоненты дополнительными дугами были соединены в одну бикомпоненту. В одной из последующих работ будет указано, добавление каких дуг приводит к результату, эквивалентному предкоррекции с помощью ортогональной проекции.

Отметим, что добавление связей и вычисление стационарного вектора стохастической матрицы, отвечающей полученному орграфу, составляет основу известного метода PageRank [254]. При этом связи добавляются равномерно: между всеми вершинами и с равными весами. Связи, добавляемые для моделирования метода проекции, имеют более сложное описание.

10.12. Снова о небазовых агентах

Проектор S может быть представлен в виде (10.29) не только в случае, когда все агенты — базовые, но и в общем случае. Для этого достаточно применить определения матриц X и Z , данные в разделе 10.10, к произвольной матрице \tilde{L} и воспользоваться доказательством теоремы 2.8 из [91]. При этом сохраняет силу и п. 1 теоремы 3.

Ниже мы приведем несколько более общий результат. Матрицу X , определенную в разделе 10.10 для множества базовых вершин (обозначим ее $X_{\mathfrak{B}}$), дополним нулевым блоком справа, блоком $\tilde{L}_{\mathfrak{B}}$, отвечающим в \tilde{L} небазовым вершинам, и произвольно заполненным блоком¹² G ; матрица Z — аналогичное расширение $Z_{\mathfrak{B}}$:

$$X = \begin{pmatrix} X_{\mathfrak{B}} & 0 \\ G & \tilde{L}_{\mathfrak{B}} \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} Z_{\mathfrak{B}} & 0 \\ G & \tilde{L}_{\mathfrak{B}} \end{pmatrix}. \quad (10.37)$$

В силу леммы 10.1 из раздела 10.10 $Z_{\mathfrak{B}}$ невырождена. Согласно доказательству теоремы 3.6 (предложение 11 в [3]) $\tilde{L}_{\mathfrak{B}}$ также невырождена. Поэтому Z обратима. Воспользовавшись (10.37), формулой Фробениуса для обращения блочных матриц [23, (86) в гл. 2],

¹²И блок G , и нулевой блок справа могут быть взяты из матрицы Кирхгофа \tilde{L} .

(10.29) и (10.23), находим

$$XZ^{-1} = \begin{pmatrix} X_{\mathfrak{B}} & 0 \\ G & \tilde{L}_{\mathfrak{B}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{\mathfrak{B}}^{-1} & 0 \\ -\tilde{L}_{\mathfrak{B}}^{-1}GZ_{\mathfrak{B}}^{-1} & \tilde{L}_{\mathfrak{B}}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{\mathfrak{B}}Z_{\mathfrak{B}}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{\mathfrak{B}} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = S.$$

Таким образом, имеет место следующий результат (второе утверждение доказывается так же, как в теореме 10.3).

Предложение 10.6. 1. При наличии небазовых агентов ортогональный проектор на область сходимости процедуры Де Гроота имеет представление $S = XZ^{-1}$, где X и Z определены в (10.37).

2. Вектор-строка α^T такая, что $\tilde{P} = \mathbf{1}\alpha^T$, совпадает с первой строкой матрицы Z^{-1} .

10.13. Регуляризованный предел стохастической матрицы

Смысл п. 2 теоремы 10.3 выходит за рамки задачи о консенсусе. А именно: с учетом определения проектора S установлено, что для любой правильной стохастической матрицы P матрица $P^\infty = P^\infty S$ стохастическая, имеет ранг 1 (поэтому все ее строки одинаковы) и в случае когда P регулярна, $P^\infty = P^\infty$.

Кроме того, п. 3 теоремы 10.3 устанавливает, что компоненты вектора α , определяющего матрицу \tilde{P} ($\tilde{P} = \mathbf{1}\alpha^T$), связаны естественными соотношениями, а именно: в рамках одной (i -й) базовой бикомпоненты их отношение равно отношению соответствующих элементов вектора π^i — стационарного вектора бикомпоненты. Если же вершины принадлежат разным бикомпонентам, то последнее нужно домножить на отношение специальных «весов» бикомпонент; эти веса определяются внутренней однородностью бикомпонент по весам деревьев, входящих в их вершины.

Наконец, рассмотрение задачи о консенсусе приводит к выводу, что в определенных случаях полезно сопоставить стохастической матрице P обобщенный «предел» ранга 1 даже тогда, когда P нерегулярна.

Эти обстоятельства позволяют назвать матрицу \tilde{P} , сопоставленную правильной стохастической матрице P , *регуляризованным пределом степеней* P^1, P^2, \dots матрицы P .

Осмысленность этого понятия подтверждается следующими свойствами.

Предложение 10.7. Для любой правильной стохастической матрицы P

- 1) вектор α такой, что $\tilde{P} = \mathbf{1}\alpha^T$, есть стационарный вектор матрицы P : $\alpha^T P = \alpha$;
- 2) $\tilde{P}P = P\tilde{P} = P^\infty\tilde{P} = \tilde{P}P^\infty = \tilde{P}$.

Пункт 1 предложения 10.7 следует, например, из того, что в силу п. 3 теоремы 10.3 вектор α — линейная комбинация векторов $\tilde{\pi}^1, \dots, \tilde{\pi}^\nu$, каждый из которых — стационарный вектор P . Нетривиальные утверждения п. 2 следуют из п. 1.

Отметим, что использованием предела по Чезаро $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m P^k$ понятие регуляризованного предела стохастической матрицы может быть распространено на произвольные (не обязательно правильные) стохастические матрицы.

Заключение к главе 10

В данной главе рассмотрена задача согласования мнений агентов в случае, когда их матрица влияний, входящая в модель Де Гроота, — правильная, но не обязательно регулярная. Для решения этой задачи предложен метод ортогональной проекции, на первом этапе отображающий пространство всевозможных начальных мнений на специальное подпространство T_P — область сходимости процедуры Де Гроота, любой вектор которого дальнейшей итеративной коррекцией приводится к консенсусу. Область T_P есть прямая сумма $\mathcal{R}(\tilde{L})$, где $\tilde{L} = I - P$, и линейной оболочки вектора из единиц. Исследованы свойства метода и получена интерпретация итоговых весов агентов в терминах основных исходящих лесов в орграфе влияний. Установлено, что итоговая матрица $\tilde{P} = P^\infty S$ метода ортогональной проекции, где S — ортогональный проектор на T_P и $P^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} P^k$, может рассматриваться как регуляризованный предел степеней стохастической матрицы P .

Заключение

К числу основных результатов монографии, относятся, в частности, следующие.

- Матричная теорема о лесах.
- Подход к нахождению собственного проектора и компонент квадратной матрицы A с помощью аннулирующего многочлена для A^u , где $u \geq \text{ind } A$.
- Структура и свойства множеств остовных корневых лесов графов и орграфов, связанных с ними матриц и многочленов. «Матричная теорема о росте лесов». Теорема о равенстве матрицы максимальных входящих лесов орграфа и собственного проектора лапласовской матрицы. Последняя проясняет смысл матричной теоремы о деревьях для цепей Маркова.
- Некоторые свойства лапласовского спектра орграфов. Теорема о равенстве размерности ядра лапласовской матрицы и лесной размерности орграфа. Критерий простоты нулевого собственного значения лапласовской матрицы орграфа — существование остовного входящего дерева. Теоремы о многоугольнике собственных значений нормированных лапласовских матриц и его асимптотике. Эти результаты существенны для анализа моделей управления многоагентными системами, в частности, — моделей распределенного согласования характеристик и достижения консенсуса.
- Критерий существенной цикличности орграфов с кольцевой структурой. Теорема о действительности корней многочленов, на единицу отличающихся от произведений многочленов Чебышева второго рода. Начало исследования существенной цикличности взвешенных орграфов.
- Набор нормативных требований к показателям близости вершин графов. Свойства ряда известных показателей близости. Область применения этих результатов — построение алгебраических индексов графов и анализ сетей различной природы.
- Теорема о двойственности понятий Σ -близость и расстояние. Область приложения — анализ данных.
- Новый показатель близости вершин графов — *относительная достижимость по лесам* — и семейство производных структурных индексов графов, построенные с помощью матричной теоремы о лесах. Свойства относительной достижимости по лесам. Область применения — анализ сетей различной природы.
- Класс лесных метрик графов. Свойства этих метрик, их вероятностная интерпретация, соотношения между лесными метриками и резисторной метрикой. Логарифмические лесные метрики, удовлетворяющие условию граф-геодезичности и обобща-

ющие резисторную метрику и метрику кратчайшего пути. Области применения — анализ сетей, химическая информатика.

- Метод проекции для согласования мнений агентов в случае, когда их матрица влияний, входящая в модель Де Гроота, — правильная, но не обязательно регулярная. Свойства метода и интерпретация итоговых весов агентов в терминах остовных исходящих деревьев в орграфе влияний. Понятие регуляризованного предела степеней стохастической матрицы.

Таким образом, проведено совместное исследование свойств орграфов и свойств лапласовских матриц, получены некоторые результаты в смежных разделах, разработаны подходы к применению этих результатов в управлении многоагентными системами, анализе сетей, теории алгебраических индексов графов.

В одной из работ А.К. Кельманса о матричной теореме о деревьях для взвешенных орграфов (см. теорему 1.2 на с. 20 и теорему 1.3) сказано: «Эта маленькая формула открывает целый мир возможностей» [228, с. 8]. Кельманс к тому времени занимался алгебраической теорией графов 35 лет. Наш опыт подтверждает: упомянутый «мир возможностей», действительно, существует, и в нем остаются еще неисследованные области, где нас ждут глубокие и полезные для практики результаты.

Список литературы

1. Агаев Р. П. Об исследовании и применении лапласовских спектров орграфов кольцевой структуры // *Автоматика и телемеханика*. — 2008. — № 2. — С. 3–16.
2. Агаев Р. П., Никифоров С. В., Андриюшина Н. А. О спектре матрицы смежности орграфа кольцевой структуры и его применении // *Проблемы управления*. — 2008. — № 4. — С. 11–15.
3. Агаев Р. П., Чеботарев П. Ю. Матрица максимальных исходящих лесов орграфа и ее применения // *Автоматика и телемеханика*. — 2000. — № 9. — С. 15–43.
4. Агаев Р. П., Чеботарев П. Ю. Остовные леса орграфа и их применение // *Автоматика и телемеханика*. — 2001. — № 3. — С. 108–133.
5. Агаев Р. П., Чеботарев П. Ю. О нахождении собственного проектора и компонент матрицы с помощью аннулирующего многочлена // *Автоматика и телемеханика*. — 2002. — № 10. — С. 3–12.
6. Агаев Р. П., Чеботарев П. Ю. Лапласовские спектры орграфов и их приложения // *Автоматика и телемеханика*. — 2005. — № 5. — С. 47–62.
7. Агаев Р. П., Чеботарев П. Ю. Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик (обзор базовых результатов) // *Управление большими системами*. — 2010. — Т. 30, № 1. — С. 470–505.
8. Агаев Р. П., Чеботарев П. Ю. Метод проекции в задаче о консенсусе и регуляризованный предел степеней стохастической матрицы // *Автоматика и телемеханика*. — 2011. — В печати.
9. Агаев Р. П., Чеботарев П. Ю. Представление дискретной процедуры согласования характеристик с помощью циклического орграфа // *Автоматика и телемеханика*. — 2011. — Статья представлена в журнал.
10. Агаев Р. П., Чеботарев П. Ю. Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик (обзор базовых результатов) // *Сетевые модели в управлении* / Под ред. Д. А. Новикова, О. П. Кузнецова, М. В. Губко. — Москва: Эгвес, 2011. — С. 8–43.
11. Барабанов И. Н., Коргин Н. А., Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г. Динамические модели информационного управления в социальных сетях // *Автоматика и телемеханика*. — 2010. — № 11. — С. 172–182.
12. Бианки В. А. Психологические аспекты функционирования власти в сетевых структурах // *Труды Международной научной конференции «Психология власти»*, Санкт-Петербург, 11–12 января 2005. — Санкт-Петербург: СПбГУ, 2005.
13. Блюмин С. Л. Мультиагентные системы: проблемы и протоколы согласия, псевдообращение лапласианов графов // *Системы управления и информационные технологии*. — 2007. — № 2 (28). — С. 4–9.
14. Блюмин С. Л. Теоретико-множественные и векторно-алгебраические аспекты проблем согласия в многоагентных системах // *Труды Международной научно-практической конференции «Теория активных систем–2007»*. — Москва, ИПУ РАН: 2007.

15. Блюмин С. Л. Инновации в содержании образовательных дисциплин: математическое моделирование приращений величин // *Инновационный Вестник Регион*. — 2008. — № 4. — С. 68–72.
16. Блюмин С. Л. Оргиперграфы: ориентации гипердуг, связи с орграфами // *Системы управления и информационные технологии*. — 2010. — Т. 42, № 4. — С. 8–13.
17. Блюмин С. Л. Полные гиперграфы. Спектры лапласианов. Мультиагентные системы // *Управление большими системами*. — 2010. — Т. 30. — С. 5–23.
18. Блюмин С. Л., Миловидов С. П. Явное выражение псевдообратной лапласиана двудольного графа // *Управление большими системами*. — 2007. — Т. 18. — С. 24–29.
19. Варшавский В. И., Поспелов Д. А. Оркестр играет без дирижера: размышления об эволюции некоторых технических систем и управлении ими. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.
20. Венцель А. Д., Фрейдлин М. И. О малых случайных возмущениях динамических систем // *Успехи математических наук*. — 1970. — Т. 25. — С. 3–55.
21. Венцель А. Д., Фрейдлин М. И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. — Москва: Наука, 1979.
22. Вольский В. И. Правила выбора лучших вариантов на ориентированных графах и графах-турнирах // *Автоматика и телемеханика*. — 1987. — № 3. — С. 3–17.
23. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — 2 изд. — Москва: Наука, 1966. — 576 с.
24. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. — М.: Наука, 1971.
25. Губанов Д. А., Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г. Модели влияния в социальных сетях // *Управление большими системами*. — 2009. — Т. 27. — С. 205–281.
26. Губанов Д. А., Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г. Социальные сети. Модели информационного влияния, управления и противоборства. — М.: Физматлит, 2010.
27. Джунусов И. А., Фрадков А. Л. Синхронизация в сетях линейных агентов с обратными связями по выходам // *Автоматика и телемеханика*. — 2011. — В печати.
28. Дмитриев Н., Дынкин Е. О характеристических числах стохастической матрицы // *Доклады Академии Наук СССР*. — 1945. — Т. 49. — С. 159–162.
29. Дмитриев Н., Дынкин Е. Характеристические корни стохастических матриц // *Известия Академии наук СССР*. — 1946. — Т. 10. — С. 167–184.
30. Дрбоглав В. В., Голендер В. Е. Сравнение эффективности топологических индексов в задаче идентификации химических структур // VII Всес. конф. «Использование вычислительных машин в химических исследованиях и спектроскопии молекул». Тезисы докладов / Под ред. А. Б. Розенблита. — Рига: Октябрь 1986. — С. 219–220.
31. Дрбоглав В. В., Голендер В. Е. Топологические индексы, основанные на методе потенциалов графа // VII Всес. конф. «Использование вычислительных машин в химических исследованиях и спектроскопии молекул». Тезисы докладов / Под ред. А. Б. Розенблита. — Рига: Октябрь 1986. — С. 217–218.

32. *Епишин Ю. В.* Алгоритм проверки с помощью графа линейной модели на устойчивость // *Известия высших учебных заведений. Электроника.* — 2007. — № 5. — С. 53–58.
33. *Зыков А. А.* Теория конечных графов. — Новосибирск: Наука (Сибирское отделение), 1969.
34. *Кельманс А. К.* О числе деревьев графа. I // *Автоматика и телемеханика.* — 1965. — Т. 26, № 12. — С. 2194–2204.
35. *Кельманс А. К.* О числе деревьев графа. II // *Автоматика и телемеханика.* — 1966. — Т. 27, № 2. — С. 56–65.
36. *Кельманс А. К.* О свойствах характеристического многочлена графа // *Кибернетика — на службу коммунизму* / Под ред. акад. А. И. Берга. — М.-Л.: Энергия, 1967. — С. 27–41.
37. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972.
38. *Корепанов В. О., Новиков Д. А.* Метод рефлексивных разбиений в моделях группового поведения и управления // *Проблемы управления.* — 2011. — № 1. — С. 21–32.
39. *Ланкастер П.* Теория матриц. — Москва: Наука, 1978.
40. *Мак-Миллан В. Д.* Динамика твердого тела. — Москва: ИЛ, 1951.
41. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. — Москва: Наука, 1972.
42. *Паниотто В. И.* Анализ структуры межличностных отношений // *Математические методы анализа и интерпретации социологических данных.* — М.: Наука, 1989. — С. 121–162.
43. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. — Москва: Наука, 1983.
44. *Пригарина Т. А., Чеботарев П. Ю.* Методы экспертных оценок и определение предпочтительности объектов // *Экспертные оценки в социологических исследованиях.* Гл. VIII / Под ред. В. И. Паниотто. — Киев: Наукова думка, 1990. — С. 190–225.
45. *Пригарина Т. А., Чеботарев П. Ю., Шмерлинг Д. С.* Анализ нечисловой информации // *Математические методы в социально-экономических исследованиях* / Под ред. С. М. Ермакова, В. Б. Меласа. — СПб: Петрополис, 1996. — С. 123–138.
46. *Пригарина Т. А., Чеботарев П. Ю., Шмерлинг Д. С.* Парные сравнения объектов (аналитический обзор) // *Научно-техническая информация. Серия 2. Информационные процессы и системы.* — 1996. — № 2. — С. 20–25, 32.
47. *Розенблит А. Б., Голендер В. Е.* Логико-комбинаторные методы в конструировании лекарств. — Рига: Зинатне, 1983. — С. 150–163.
48. *Станкевич М. И., Станкевич И. В., Зефирова Н. С.* Топологические индексы в органической химии // *Успехи химии.* — 1988. — Т. 57, № 3. — С. 337–366.
49. *Татт У.* Теория графов. — М.: Мир, 1988.

50. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. — 2 изд. — Москва–Ленинград: Физматгиз, 1963.
51. Фуртат И. Б. Консенсусное управление линейной динамической сетью по выходу с компенсацией возмущений // *Мехатроника, автоматизация, управление*. — 2011. — № 4. — С. 12–18.
52. Харари Ф. Теория графов. — М.: Мир, 1973.
53. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. — Москва: Мир, 1977.
54. Хевик Т., Гледич Н. П. Структурные параметры графов. Теоретическое исследование // *Математика в социологии: моделирование и обработка информации* / Под ред. А. Аганбегяна, Х. Блейлока, Ф. Бородкина, Р. Будона, В. Канекки. — Москва: Мир, 1977. — С. 151–169.
55. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989.
56. Цветкович Д., Дуб М., Захс Х. Спектры графов: теория и применение. — Киев: Наукова думка, 1984. — Перевод с англ.: D.M. Cvetković, M. Doob, H. Sachs. *Spectra of Graphs*. New York: Academic Press, 1980.
57. Чеботарев П. Ю. Неполные парные сравнения и метод строчных сумм. — 1988. — Деп. в ВИНТИ 26.02.88., № 1576-B88. — С. 1–40.
58. Чеботарев П. Ю. Агрегирование неполных предпочтений // III Всесоюзная конференция «Методы социологических исследований». — Т. 5. — Москва: ИС АН СССР, 1989. — С. 59–62.
59. Чеботарев П. Ю. Метод оценивания объектов по неполному набору парных сравнений // *Комплексный подход к анализу данных в социологии*. — Москва: ИС АН СССР, 1989. — С. 79–93.
60. Чеботарев П. Ю. Метод строчных сумм и приводящие к нему модели // *Сборник трудов ВНИИ системных исследований*. — 1989. — № 3. — С. 94–110.
61. Чеботарев П. Ю. Обобщение метода строчных сумм для неполных парных сравнений // *Автоматика и телемеханика*. — 1989. — № 8. — С. 125–137.
62. Чеботарев П. Ю. Ранжирование объектов в аддитивной модели парных сравнений со случайными факторами // IV Всес. конф. «Применение многомерного стат. анализа в экономике и оценке качества продукции». Тезисы докладов. — Ч. 1. — Тарту: Тартуский университет, 1989. — С. 33–34.
63. Чеботарев П. Ю. Методы лапласовской теории оргграфов в децентрализованном управлении // *Дифференциальные уравнения*. — 2009. — № 2. — С. 280–281.
64. Чеботарев П. Ю. Новый класс метрик для вершин графа // *Материалы X Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения»* / Под ред. О. Касим-Заде. — Москва, МГУ: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2010. — С. 331–333.
65. Чеботарев П. Ю., Агаев Р. П. Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц оргграфов // *Автоматика и телемеханика*. — 2009. — № 3. — С. 136–151.

66. Чеботарев П. Ю., Агаев Р. П. Уточнение к статье «О нахождении собственного проектора и компонент матрицы» // *Автоматика и телемеханика*. — 2011. — № 3. — С. 173.
67. Чеботарев П. Ю., Шамис Е. В. Матричная теорема о лесах и измерение связей в малых социальных группах // *Автоматика и телемеханика*. — 1997. — № 9. — С. 124–136.
68. Чеботарев П. Ю., Шамис Е. В. О двойственности метрик и Σ -близостей // *Автоматика и телемеханика*. — 1998. — № 4. — С. 204–209.
69. Чеботарев П. Ю., Шамис Е. В. О мерах близости вершин графов // *Автоматика и телемеханика*. — 1998. — № 10. — С. 113–133.
70. Чеботарев П. Ю., Шамис Е. В. Некоторые свойства лесной метрики графа // *Автоматика и телемеханика*. — 2000. — № 8. — С. 137–146.
71. Abdesselam A. The Grassmann-Berezin calculus and theorems of the matrix-tree type // *Advances in Applied Mathematics*. — 2004. — Vol. 33, no. 1. — Pp. 51–70.
72. Agaev R., Chebotarev P. On the spectra of nonsymmetric Laplacian matrices // *Linear Algebra and its Applications*. — 2005. — Vol. 399. — Pp. 157–168.
73. Agaev R., Chebotarev P. Which digraphs with ring structure are essentially cyclic? // *Advances in Applied Mathematics*. — 2010. — Vol. 45, no. 2. — Pp. 232–251.
74. Agaev R. P., Chebotarev P. Y. The matrix of maximum out forests of a digraph and its applications // *Automation and Remote Control*. — 2000. — Vol. 61, no. 9. — Pp. 1424–1450.
75. Agaev R. P., Nikiforov S. V., Andryushina N. A. Ring structure digraphs: spectrum of adjacency matrix and application // *Automation and Remote Control*. — 2010. — Vol. 71, no. 6. — Pp. 1149–1157.
76. Altman A., Tennenholtz M. An axiomatic approach to personalized ranking systems // Proceedings of the 20th International Joint Conference on Artificial Intelligence, Hyderabad, India, January 6–12, 2007 (IJCAI-2007) / Ed. by M. M. Veloso. — 2007. — Pp. 1187–1192. <http://www.ijcai.org/papers07/Papers/IJCAI07-192.pdf>.
77. Altmann M. Reinterpreting network measures for models of disease transmission // *Social Networks*. — 1993. — Vol. 15. — Pp. 1–17.
78. Anantharam V., Tsoucas P. A proof of the Markov chain tree theorem // *Statistics & Probability Letters*. — 1989. — Vol. 8. — Pp. 189–192.
79. Anderson, Jr. W. N., Morley T. D. Eigenvalues of the Laplacian of a graph: University of Maryland Technical report TR-71-45: October 1971.
80. Anderson, Jr. W. N., Morley T. D. Eigenvalues of the Laplacian of a graph // *Linear and Multilinear Algebra*. — 1985. — Vol. 18. — Pp. 141–145.
81. Bapat R. B. Linear estimation in models based on a graph // *Linear Algebra and its Applications*. — 1999. — Vol. 302-303. — Pp. 223–230.

82. *Bapat R. B.* Resistance distance in graphs // *The Mathematics Student*. — 1999. — Vol. 68. — Pp. 87–98.
83. *Bapat R. B.* On the first passage time of a simple random walk on a tree // *Statistics & Probability Letters*. — 2011. — Vol. 81, no. 10. — Pp. 1552–1558.
84. *Bapat R. B., Constantine G.* An enumerating function for spanning forests with color restrictions // *Linear Algebra and its Applications*. — 1992. — Vol. 173. — Pp. 231–237.
85. *Bapat R. B., Grossman J. W., Kulkarni D. M.* Matrix tree theorem // *Encyclopaedia of Mathematics* / Ed. by M. Hazewinkel. — Berlin-Heidelberg: Springer, 2001. — Vol. 31. — Pp. 7–22.
86. *Bapat R. B., Gupta S.* Resistance distance in wheels and fans // *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*. — 2010. — Vol. 41, no. 1. — Pp. 1–13.
87. *Bapat R. B., Kulkarni D. M.* Minors of some matrices associated with a tree // *Algebra and its Applications* / Ed. by D. V. Huynh, S. K. Jain, S. R. Lopez-Permouth. — Providence, RI: American Mathematical Society, 2000. — Pp. 45–66.
88. *Bapat R. B., Pati S.* Algebraic connectivity and the characteristic set of a graph // *Linear and Multilinear Algebra*. — 1998. — Vol. 45. — Pp. 247–273.
89. *Barabási A.-L.* *Linked: The New Science of Networks*. — Cambridge, MA: Perseus Publishing, 2002.
90. *Ben-Israel A., Charnes A.* Contributions to the theory of generalized inverses // *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*. — 1963. — Vol. 11, no. 3. — Pp. 667–699.
91. *Ben-Israel A., Greville T. N. E.* *Generalized Inverses: Theory and Applications*. — New York: Wiley, 1974. — (2nd Edition: New York: Springer, 2003).
92. *Benchettara N., Kanawati R., Rouveirol C.* Calcul de recommandations par prédiction de liens dans un graphe biparti // *Actes de l'Atelier AGS: Apprentissage et Graphes pour les Systèmes complexes*. — Lyon: Université Lyon 1, 2009. — Pp. 33–42.
93. *Bendito E., Carmona A., Encinas A., Gesto J.* Characterization of symmetric M-matrices as resistive inverses: Preprint. — Barcelona, Spain: Universitat Politècnica de Catalunya. Departament de Matemàtica Aplicada III, 2007. <https://upcommons.upc.edu/eprints/bitstream/2117/1168/2/Inv-matrices.pdf>.
94. *Benjafield J. G.* The golden section and American psychology, 1892-1938 // *Journal of the History of the Behavioral Sciences*. — 2010. — Vol. 46, no. 1. — Pp. 52–71.
95. *Berman A., Plemmons R.* *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*. — New York: Academic Press, 1979. — (2nd edition: SIAM, 1994).
96. *Berman A., Shaked-Monderer N.* Non-negative matrices and digraphs // *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*. — New York: Springer, 2009. — Pp. 6239–6252.
97. *Berman A., Zhang X.-D.* A note on degree antiregular graphs // *Linear and Multilinear Algebra*. — 2000. — Vol. 47. — Pp. 307–311.

98. *Berman K. A.* A graph theoretical approach to handicap ranking of tournaments and paired comparisons // *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*. — 1980. — Vol. 1, no. 3. — Pp. 359–361.
99. *Biggs N.* Algebraic Graph Theory. — Cambridge: Cambridge University Press, 1974. — (2nd edition: 1993).
100. *Biggs N.* Algebraic potential theory on graphs // *Bulletin of the London Mathematical Society*. — 1997. — Vol. 29. — Pp. 641–682.
101. *Biggs N.* International finance // *Graph Connections* / Ed. by L. W. Beineke, R. J. Wilson. — Oxford: Oxford University Press, 1997. — Pp. 261–279.
102. *Blanchard P., Dawin J., Volchenkov D.* Markov chains or the game of structure and chance. From complex networks, to language evolution, to musical compositions // *The European Physical Journal – Special Topics*. — 2010. — Vol. 184, no. 1. — Pp. 1–82.
103. *Blanchard P., Krüger T., Volchenkov D.* Random Graphs and Random Walks: An introduction to the stochastic analysis of complex networks. — Berlin-Heidelberg: Springer, 2010. — 398 pp.
104. *Blanchard P., Volchenkov D.* Random Walks and Diffusions on Graphs and Databases: An Introduction. — Berlin-Heidelberg: Springer, 2011. — 262 pp.
105. *Boesch F. T., Prodinger H.* Spanning tree formulas and Chebyshev polynomials // *Graphs and Combinatorics*. — 1986. — Vol. 2, no. 1. — Pp. 191–200.
106. *Boley D., Ranjan G., Zhang Z.-l.* Commute Times for a Directed Graph using an Asymmetric Laplacian: Computer Science and Engineering Technical Report TR 10-005. — Minneapolis, MN: Department of Computer Science and Engineering, University of Minnesota, 2010. — 24 pp.
107. *Bollobás B.* Modern Graph Theory. — New York: Springer, 1998.
108. *Borchardt C. W.* Ueber eine der Interpolation entsprechende Darstellung der Eliminations-Resultante // *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. — 1860. — Vol. 57. — Pp. 111–121.
109. *Borg I., Groenen P. J. F.* Modern Multidimensional Scaling: Theory and Applications. — 2nd edition. — Springer, 2005.
110. *Borgatti S. P.* Identifying sets of key players in a network // *Proceedings of the Conference on Integration of Knowledge Intensive Multi-Agent Systems*. — 2003. — Pp. 127–131.
111. *Borkar V., Varaiya P.* Asymptotic agreement in distributed estimation // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 1982. — Vol. 27. — Pp. 650–655.
112. *Borrelli F., Keviczky T.* Distributed LQR design for identical dynamically decoupled systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2008. — Vol. 53, no. 8. — Pp. 1901–1912.
113. *Brualdi R. A.* Spectra of digraphs // *Linear Algebra and its Applications*. — 2010. — Vol. 432. — Pp. 2181–2213.

114. *Buchanan M.* Nexus: Small Worlds and the Groundbreaking Science of Networks. — New York, NY: W. W. Norton, 2002.
115. *Buckley F., Harary F.* Distance in Graphs. — Redwood City, CA: Addison-Wesley, 1990.
116. *Callut J., Françoisse K., Saerens M., Dupont P.* Semi-supervised classification from discriminative random walks // Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases European Conference, ECML PKDD 2008, Antwerp, Belgium, September 15–19, 2008, Proceedings, Part I / Ed. by W. Daelemans, B. Goethals, K. Morik. — Vol. 5211 of *Lecture Notes in Computer Science / Lecture Notes on Artificial Intelligence*. — Berlin-Heidelberg: Springer, 2008. — Pp. 162–177.
117. *Campbell S. L., Meyer, Jr. C. D.* Generalized Inverses of Linear Transformations. — London: Pitman, 1979.
118. *Campbell S. L., Meyer, Jr. C. D., Rose N. J.* Applications of the Drazin inverse to linear systems of differential equations with singular constant coefficients // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. — 1976. — Vol. 31. — Pp. 411–425.
119. *Cao Y.* Decentralized Coordination Of Multiple Autonomous Vehicles: Ph.D. thesis / Department of Electrical and Computer Engineering, Utah State University. — 2010. — 208 pp.
120. *Cao Y., Li Y., Ren W., Chen Y.* Distributed coordination of networked fractional-order systems // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*. — 2010. — Vol. 40, no. 2. — Pp. 362–370.
121. *Cao Y., Ren W.* LQR-based optimal linear consensus algorithms // 2009 American Control Conference. — St. Louis, MO, USA: 2009. — Pp. 5204–5209.
122. *Cao Y., Ren W.* Sampled-data formation control under dynamic directed interaction // 2009 American Control Conference. — Hyatt Regency Riverfront, St. Louis, MO, USA: AACC, 2009. — Pp. 5186–5191.
123. *Cao Y., Ren W.* Containment control with multiple stationary or dynamic leaders under a directed interaction graph // Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference. — Shanghai, P.R. China: 2010. — Pp. 3014–3019.
124. *Cao Y., Ren W.* Distributed coordination of fractional-order systems with extensions to directed dynamic networks and absolute/relative damping // Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference. — Shanghai, P.R. China: 2010. — Pp. 7125–7130.
125. *Cao Y., Ren W.* Distributed formation control for fractional-order systems: Dynamic interaction and absolute/relative damping // *Systems & Control Letters*. — 2010. — Vol. 59, no. 3-4. — Pp. 233–240.
126. *Cao Y., Ren W.* Multi-vehicle coordination for double-integrator dynamics under fixed undirected/directed interaction in a sampled-data setting // *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. — 2010. — Vol. 20, no. 9. — Pp. 987–1000.
127. *Cao Y., Ren W.* Optimal linear-consensus algorithms: An LQR perspective // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*. — 2010. — Vol. 40, no. 3. — Pp. 819–830.

128. Cao Y., Ren W. Sampled-data discrete-time coordination algorithms for double-integrator dynamics under dynamic directed interaction // *International Journal of Control*. — 2010. — Vol. 83, no. 3. — Pp. 506–515.
129. Cao Y., Stuart D., Ren W. Co-ordinated collective motion patterns in a discrete-time setting with experiments // *IET Control Theory & Applications*. — 2010. — Vol. 4, no. 11. — Pp. 2579–2591.
130. Catral M., Neumann M., Xu J. Proximity in group inverses of M-matrices and inverses of diagonally dominant M-matrices // *Linear Algebra and its Applications*. — 2005. — Vol. 409. — Pp. 32–50.
131. Caughman J. S., Veerman J. J. P. Kernels of directed graph Laplacians: Working paper. — Portland, OR: Portland State University, 2005.
132. Caughman J. S., Veerman J. J. P. Kernels of directed graph Laplacians // *Electronic Journal of Combinatorics*. — 2006. — Vol. 13. — P. 1–R39.
133. Chaiken S. A combinatorial proof of the all minors matrix tree theorem // *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*. — 1982. — Vol. 3, no. 3. — Pp. 319–329.
134. Chaiken S., Kleitman D. J. Matrix tree theorems // *Journal of Combinatorial Theory, Series A*. — 1978. — Vol. 24. — Pp. 377–381.
135. Chebotarev P. Spanning forests of digraphs and limiting probabilities of Markov chains // *Electronic Notes in Discrete Mathematics*. — 2002. — Vol. 11. — Pp. 108–116.
136. Chebotarev P. Laplacian matrices and essentially cyclic weighted digraphs // Abstracts of the 13th Conference of the International Linear Algebra Society. — Amsterdam: Free University of Amsterdam, 2006. — Pp. 60–61.
137. Chebotarev P. Spanning forests and the golden ratio // *Discrete Applied Mathematics*. — 2008. — Vol. 156, no. 5. — Pp. 813–821.
138. Chebotarev P. Comments on “Consensus and cooperation in networked multi-agent systems” // *Proceedings of the IEEE*. — July 2010. — Vol. 98, no. 7. — Pp. 1353–1354.
139. Chebotarev P. A class of graph-geodetic distances generalizing the shortest-path and the resistance distances // *Discrete Applied Mathematics*. — 2011. — Vol. 159, no. 5. — Pp. 295–302.
140. Chebotarev P. The graph bottleneck identity // *Advances in Applied Mathematics*. — 2011. — Vol. 46. — In press.
141. Chebotarev P. The walk distances in graphs: arXiv preprint math.CO/1103.2059: 2011. <http://arxiv.org/abs/1103.2059>.
142. Chebotarev P., Agaev R. Forest matrices around the Laplacian matrix // *Linear Algebra and its Applications*. — 2002. — Vol. 356. — Pp. 253–274.
143. Chebotarev P., Agaev R. Matrices of forests and the analysis of digraphs: arXiv preprint math.co/0508171: 2005. — 18 pp. <http://arxiv.org/abs/math/0508171>.
144. Chebotarev P., Agaev R. When is the Laplacian spectrum of a weighted digraph real? // International GAMM-SIAM Conference on Applied Linear Algebra. — Düsseldorf: University of Düsseldorf, 2006. — P. 29.

145. *Chebotarev P., Shamis E.* The forest metrics for graph vertices // *Electronic Notes in Discrete Mathematics*. — 2002. — Vol. 11. — Pp. 98–107.
146. *Chebotarev P. Y.* Aggregation of preferences by the generalized row sum method // *Mathematical Social Sciences*. — 1994. — Vol. 27. — Pp. 293–320.
147. *Chebotarev P. Y., Agaev R. P.* The matrix of maximum out forests and structural properties of systems modeled by digraphs // *Modelling and Simulation of Systems, MOSIS-2000, 34th Spring Int. Conf.* — Vol. 1. — Ostrava: Univ. of Ostrava, 2000. — Pp. 101–106.
148. *Chebotarev P. Y., Shamis E.* On the proximity measure for graph vertices provided by the inverse Laplacian characteristic matrix // Abstracts of the conference “Linear Algebra and its Applications”. — Manchester, UK: University of Manchester, 1995. — Pp. 6–7. <http://www.ma.man.ac.uk/~higham/laa95/abstracts.ps>.
149. *Chebotarev P. Y., Shamis E.* Constructing an objective function for aggregating incomplete preferences // *Econometric Decision Models, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Vol. 453 / Ed. by A. Tangian, J. Gruber. — Berlin: Springer, 1997. — Pp. 100–124.
150. *Chebotarev P. Y., Shamis E.* Incomplete preferences and indirect scores: Working Paper 365.97. — Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona and Institut d’Anàlisi Econòmica, CSIC, 1997. <http://hdl.handle.net/10068/287960>.
151. *Chebotarev P. Y., Shamis E.* Characterizations of scoring methods for preference aggregation // *Annals of Operations Research*. — 1998. — Vol. 80. — Pp. 299–332.
152. *Chebotarev P. Y., Shamis E. V.* Matrix-forest theorems: arXiv paper math.co/0602575: arXiv, 1995. <http://arxiv.org/abs/math.co/0602575>.
153. *Chebotarev P. Y., Shamis E. V.* On the proximity measure for graph vertices provided by the inverse Laplacian characteristic matrix // 5th Conference of the International Linear Algebra Society. — Atlanta: Georgia State University, 1995. — Pp. 30–31.
154. *Chebotarev P. Y., Shamis E. V.* Preference fusion when the number of alternatives exceeds two: Indirect scoring procedures // *Journal of the Franklin Institute*. — 1999. — Vol. 336. — Pp. 205–226. — Erratum, *J. Franklin Inst.*, 1999, vol. 336, pp. 747–748.
155. *Chen J., Safro I.* Algebraic distance on graphs: Preprint anl/mcs-p1696-1009: Mathematics and Computer Science Division, Argonne National Laboratory, Argonne, IL, 2009. — *SIAM Journal on Scientific Computing* (under revision). — 29 pp. <http://www.mcs.anl.gov/~safro/papers/algdist-full.pdf>.
156. *Chen J., Safro I.* A measure of the connection strengths between graph vertices with applications: arXiv preprint cs.DM/0909.4275v1: 2009. — Accepted at International Conference on Computational Science, 2011. — 12 pp. <http://arXiv.org/abs/0909.4275>.
157. *Chen J., Safro I.* A measure of the local connectivity between graph vertices // *Procedia Computer Science*. — 2011. — Pp. 1–10. — International Conference on Computational Science, ICCS 2011.
158. *Chen W. K.* Applied Graph Theory, Graphs and Electrical Networks. — 2 edition. — Amsterdam: North-Holland, 1976.

159. *Chipman J. S.* Estimation and aggregation in econometrics: An application of the theory of generalized inverses // *Generalized Inverses and Applications* / Ed. by M. Nashed. — New York: Academic Press, 1976. — Pp. 549–769.
160. *Chung F.* Laplacians and the Cheeger inequality for directed graphs // *Annals of Combinatorics*. — 2005. — Vol. 9. — Pp. 1–19.
161. *Chung F., Zhao W.* PageRank and random walks on graphs // *Fete of Combinatorics and Computer Science* / Ed. by G. O. H. Katona, A. Schrijver, T. Szonyi. — Berlin: Springer, 2010. — Pp. 43–62.
162. *Chung F. R. K.* *Spectral Graph Theory*. — Providence, RI: American Mathematical Society, 1994. — Vol. 17 of *Colloquium Publications*.
163. *Coates C.* Flow-graph solutions of linear algebraic equations // *IRE Transactions on Circuit Theory*. — 1959. — Vol. 6. — Pp. 170–187.
164. *Corbacho E., Tarieladze V., Vidal R.* Metric structures on graphs // *Proceedings of International Functional Analysis Meeting in Valencia, June 7–11, 2010*. — Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, Spain: 2010.
165. *Crowell R. H.* Forests and determinants // *Bulletin of the American Mathematical Society*. — 1956. — Vol. 62, no. 2. — Pp. 149–150.
166. *Cucker F., Smale S.* On the mathematics of emergence // *Japanese Journal of Mathematics*. — 2007. — Vol. 2, no. 1. — Pp. 197–227.
167. *Cvetković D. M., Doob M., Gutman I., Torôgasev A.* *Recent Results in the Theory of Graph Spectra*. — Amsterdam: Elsevier, 1988. — 306 pp.
168. *Cvetković D. M., Rowlinson P., Simić S.* *Eigenspaces of Graphs*. — Cambridge: Cambridge University Press, 1997. — 258 pp.
169. *Dalkey N. C., Helmer O.* An experimental application of the Delphi method to the use of experts // *Management Science*. — 1963. — Vol. 9. — Pp. 458–467.
170. *DeGroot M. H.* Reaching a consensus // *Journal of American Statistical Association*. — 1974. — Vol. 69, no. 345. — Pp. 118–121.
171. *Deza M. M., Deza E.* *Encyclopedia of Distances*. — Berlin–Heidelberg: Springer, 2009.
172. *Doyle P. G., Snell J. L.* *Random Walks and Electric Networks*. — Washington D. C.: Mathematical Association of America, 1984. — <http://arxiv.org/abs/math/0001057> (version of 2000).
173. *Duan H.-G., Wang Y., Fan Y.-Z.* On Laplacian spectral radius of a digraph // *College Mathematics*. — 2007. — Vol. 23, no. 4. — Pp. 24–28. — In Chinese.
174. *Eckart C., Young G.* The approximation of one matrix by another of lower rank // *Psychometrika*. — 1936. — Vol. 1, no. 3. — Pp. 211–218.
175. *Edson M., Yayenie O.* A new generalization of Fibonacci sequence and extended Binet’s formula // *Integers*. — 2009. — Vol. 9, no. 6. — Pp. 639–654.
176. *Erdős P. L.* A new bijection on rooted forests // *Discrete Mathematics*. — 1993. — Vol. 111. — Pp. 179–188.

177. Eriksson K. An easy bijective proof of the matrix-forest theorem // *Australasian Journal of Combinatorics*. — 1995. — Vol. 12. — Pp. 301–303.
178. Estrada E. *The Structure of Complex Networks. Theory and Applications*. — Oxford: Oxford University Press, 2011.
179. Fang L., Antsaklis P. J. On communication requirements for multiagent consensus seeking // *Networked Embedded Sensing and Control* / Ed. by P. J. Antsaklis, P. Tabuada. — Berlin: Springer, 2006. — Vol. 331 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. — Pp. 53–67.
180. Fiedler M. Bounds for eigenvalues of doubly stochastic matrices // *Linear Algebra and its Applications*. — 1972. — Vol. 5. — Pp. 299–310.
181. Fiedler M. Algebraic connectivity of graphs // *Czechoslovak Mathematical Journal*. — 1973. — Vol. 23, no. 98. — Pp. 298–305.
182. Fiedler M. A property of eigenvectors of nonnegative symmetric matrices and its application to graph theory // *Czechoslovak Mathematical Journal*. — 1975. — Vol. 25, no. 100. — Pp. 619–633.
183. Fiedler M. Moore-Penrose involutions in the classes of Laplacians and simplices // *Linear and Multilinear Algebra*. — 1995. — Vol. 39. — Pp. 171–178.
184. Fiedler M. Geometry of the Laplacian // *Linear Algebra and its Applications*. — 2005. — Vol. 403. — Pp. 409–413.
185. Fiedler M., Sedláček J. O W -basích orientovaných grafů // *Časopis pro Pěstování Matematiky*. — 1958. — Vol. 83. — Pp. 214–225.
186. Forman R. Determinants of Laplacians on graphs // *Topology*. — 1993. — Vol. 32, no. 1. — Pp. 35–46.
187. Fouss F., Françoisse K., Yen L., Pirotte A., Saerens M. An experimental investigation of graph kernels on collaborative recommendation and semisupervised classification: Working paper. — Louvain-la-Neuve, Belgium: Information Systems Research Unit (ISYS), Université catholique de Louvain, 2009. — 39 pp.
188. Fouss F., Pirotte A., Renders J.-M., Saerens M. A novel way of computing dissimilarities between nodes of a graph, with application to collaborative filtering and subspace projection of the graph nodes: Tech. rep. — Louvain-la-Neuve, Belgium: Information Systems Research Unit (ISYS), Université catholique de Louvain, 19 December 2005. — 39 pp.
189. Fouss F., Pirotte A., Renders J.-M., Saerens M. A novel way of computing similarities between nodes of a graph, with application to collaborative filtering and subspace projection of the graph nodes: Working paper. — Louvain-la-Neuve, Belgium: Information Systems Research Unit (ISYS), Université catholique de Louvain, 2006. — 42 pp.
190. Fouss F., Pirotte A., Renders J.-M., Saerens M. Random-walk computation of similarities between nodes of a graph with application to collaborative recommendation // *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*. — 2007. — Vol. 19, no. 3. — Pp. 355–369.

191. *Fouss F., Pirotte A., Renders J.-M., Saerens M., Yen L.* A novel way of computing dissimilarities between nodes of a graph, with application to collaborative filtering and subspace projection of the graph nodes: Working Paper 06/08. — Louvain-la-Neuve, Belgium: Louvain School of Management, Université catholique de Louvain, 2006. — 42 pp.
192. *Fouss F., Yen L., Pirotte A., Saerens M.* An experimental investigation of graph kernels on a collaborative recommendation task // Sixth International Conference on Data Mining (ICDM'06). — 2006. — Pp. 863–868.
193. *Freidlin M. I., Wentzell A. D.* Random Perturbations of Dynamical Systems. — New York: Springer, 1984.
194. *Freschi V.* Improved biological network reconstruction using graph laplacian regularization // *Journal of Computational Biology*. — 2011. — Vol. 18, no. 8. — Pp. 1–10.
195. *Friedkin N. E.* Theoretical foundations for centrality measures // *American Journal on Sociology*. — 1991. — Vol. 96. — Pp. 1478–1504.
196. *Galaskiewicz J., Wasserman S.* Social networks analysis. Concepts, methodology, and directions for the 1990s // *Sociological Methods & Research*. — 1993. — Vol. 22, no. 1. — Pp. 3–22.
197. *Garrison W. L.* Connectivity of the interstate highway system // *Papers and Proceedings of the Regional Science Association*. — 1960. — Vol. 6. — Pp. 121–137.
198. *Garrison W. L., Marble D. F.* The structure of transportation networks: Tech. rep. — Washington D.C.: US Department of Commerce. Office of Technical Services, 1961.
199. *Godsil C., Royle G.* Algebraic Graph Theory. — New York: Springer, 2001. — 439 pp.
200. *Golender V. E., Drboglav V. V., Rosenblit A. B.* Graph potentials method and its application for chemical information processing // *Journal of Chemical Information and Computer Sciences*. — 1981. — Vol. 21. — Pp. 196–204.
201. *Gori M., Pucci A.* A random-walk based scoring algorithm with application to recommender systems for large-scale e-commerce // WEBKDD'06, August 20, 2006, Philadelphia, Pennsylvania, USA. — Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione, University of Siena, Via Roma, 56. Siena, Italy: 2006. — 8 pp.
202. *Gower J. C.* Some distance properties of latent root and vector methods used in multivariate analysis // *Biometrika*. — 1966. — Vol. 53, no. 3–4. — P. 325.
203. *Grone R.* On the geometry and Laplacian of a graph // *Linear Algebra and its Applications*. — 1991. — Vol. 150. — Pp. 160–178.
204. *Grone R., Merris R.* The Laplacian spectrum of a graph II // *SIAM Journal on Discrete Mathematics*. — 1994. — Vol. 7, no. 2. — Pp. 221–229.
205. *Grone R., Merris R., Sunder V. S.* The Laplacian spectrum of a graph // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. — 1990. — Vol. 11, no. 2. — Pp. 218–238.
206. *Guan Z., Wu J., Zhang Q., Singh A., Yan X.* Assessing and ranking structural correlations in graphs // 2011 ACM SIGMOD/PODS Conference. — Athens, Greece: ACM, 2011. — 12 pp.

207. Gutman I., Xiao W. Generalized inverse of the Laplacian matrix and some applications // *Bulletin de l'Académie serbe des sciences et des arts. Classe des sciences mathématiques et naturelles. Sciences mathématiques.* — 2004. — Vol. 129, no. 29. — Pp. 15–23.
208. Hage P., Harary F. *Structural Models in Anthropology.* — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1983.
209. Hall K. M. An r -dimensional quadratic placement algorithm // *Management Science.* — 1970. — Vol. 17, no. 3. — Pp. 219–229.
210. Hao H., Barooah P. Asymmetric control achieves size-independent stability margin in 1-D flocks: Tech. rep.: Department of Mechanical and Aerospace Engineering, University of Florida, 2011. — 8 pp.
211. Harary F., Norman R. Z., Cartwright D. *Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs.* — New York - London - Sydney: John Wiley & Sons, 1965.
212. Harte R. E. Spectral projections // *Irish Mathematical Society Newsletter.* — 1984. — Vol. 11. — Pp. 10–15.
213. Hartwig R. E. More on the Souriau-Frame algorithm and the Drazin inverse // *SIAM Journal on Applied Mathematics.* — 1976. — Vol. 31. — Pp. 42–46.
214. Hartwig R. E., Levine J. Applications of the Drazin inverse to the Hill cryptographic system, Part III // *Cryptologia.* — 1981. — Vol. 5. — Pp. 67–77.
215. Ho N., van Dooren P. On the pseudo-inverse of the Laplacian of a bipartite graph // *Applied Mathematics Letters.* — 2005. — Vol. 18, no. 8. — Pp. 917–922.
216. Horton F. E. *Geographic Studies of Urban Transportation and Networks Analysis.* — Evanston, Ill: Dept. of Geography, Northwestern University, 1968.
217. Ibarra H., Andrews S. B. Power, social-influence, and sense making — effects of network centrality and proximity on employee perceptions // *Administrative Science Quarterly.* — 1993. — Vol. 38. — Pp. 277–303.
218. Ito T. Link Analysis with Kernel Metrics: Ph.D. thesis / Dept. of Information Processing, Graduate School of Information Science, Nara Institute of Science and Technology. — 2007.
219. Jackson M. O. *Social and Economic Networks.* — Princeton, NJ: Princeton University Press, 2008.
220. Jadbabaie A. On geographic routing without location information // Proc. IEEE Conf. on Decision and Control. — The Bahamas: 2004.
221. Jadbabaie A., Lin J., Morse A. S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules // *IEEE Transactions on Automatic Control.* — 2003. — Vol. 48, no. 6. — Pp. 988–1001.
222. Johns J., Mahadevan S. Constructing basis functions from directed graphs for value function approximation // Proceedings of the 24th International Conference on Machine Learning (ICML). — 2007. — Pp. 385–392.
223. Johns J. T. Basis Construction and Utilization for Markov Decision Processes Using Graphs: Ph.D. thesis / University of Massachusetts, Amherst. — 2010.

224. Jones B. D., Pittel B. G., Verducci J. S. Tree and forest weights and their application to nonuniform random graphs // *The Annals of Applied Probability*. — 1999. — Vol. 9, no. 1. — Pp. 197–215.
225. Kasteleyn P. W. Graph theory and crystal physics // *Graph Theory and Theoretical Physics* / Ed. by F. Harary. — London: Academic Press, 1967. — Pp. 43–110.
226. Katz L. A new status index derived from sociometric analysis // *Psychometrika*. — 1953. — Vol. 18, no. 1. — Pp. 39–43.
227. Kawamura Y., Nakao H., Arai K., Kori H., Kuramoto Y. Phase synchronization between collective rhythms of globally coupled oscillator groups: Noiseless nonidentical case // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2010. — Vol. 20, no. 4. — Pp. 043110–8 (8 pp.).
228. Kelmans A., Pak I., Postnikov A. Tree and forest volumes of graphs: Rutcor Research Report 47-99. — Piscataway: Rutgers Center for Operations Research, Rutgers University, December 1999.
229. Kelmans A. K., Chelnokov V. M. A certain polynomial of a graph and graphs with an extremal number of trees // *Journal of Combinatorial Theory, Series B*. — 1974. — Vol. 16. — Pp. 197–214.
230. Keviczky T., Borrelli F., Balas G. J. Distributed predictive control: Synthesis, stability and feasibility // *Cooperative Control of Distributed Multi-Agent Systems* / Ed. by J. S. Shamma. — John Wiley & Sons, Ltd., 2007. — Pp. 79–108.
231. Kim Y., Mesbahi M. On maximizing the second smallest eigenvalue of a state-dependent graph Laplacian // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2006. — Vol. 51. — Pp. 116–120.
232. Kirchhoff G. Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird // *Annalen Physik Chemie*. — 1847. — Vol. 72. — Pp. 497–508.
233. Kirchhoff G. On the solution of the equations obtained from the investigation of the linear distribution of Galvanic currents // *IRE Transactions on Circuit Theory*. — 1958. — Vol. 5. — Pp. 4–8.
234. Kirkland S. J., Moliterno J. J., Neumann M. The sharpness of a lower bound on the algebraic connectivity for maximal graphs // *Linear and Multilinear Algebra*. — 2001. — Vol. 48. — Pp. 237–246.
235. Kirkland S. J., Neumann M. On group inverses of M-matrices with uniform diagonal entries // *Linear Algebra and its Applications*. — 1999. — Vol. 296, no. 1-3. — Pp. 153–170.
236. Kirkland S. J., Neumann M., Shader B. L. Distances in weighted trees and group inverse of Laplacian matrices // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. — 1997. — Vol. 18, no. 4. — Pp. 827–841.
237. Klein D. J. Graph geometry, graph metrics & Wiener // *Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*. — 1997. — Vol. 35. — Pp. 7–27.
238. Klein D. J. Centrality measure in graphs // *Journal of Mathematical Chemistry*. — 2010. — Vol. 47, no. 4. — Pp. 1209–1223.

239. Klein D. J., Randić M. Resistance distance // *Journal of Mathematical Chemistry*. — 1993. — Vol. 12. — Pp. 81–95.
240. Klemm K., Serrano M., Eguiluz V., Miguel M. Dynamical influence: how to measure individual contributions to collective dynamics in complex networks: arXiv preprint physics.soc-ph/1002.4042: 2010. — 6 pp. <http://arxiv.org/abs/1002.4042>.
241. Koliha J. J. Block diagonalization // *Mathematica Bohemica*. — 2001. — Vol. 126. — Pp. 237–246.
242. Koliha J. J., Straškraba I. Power bounded and exponentially bounded matrices // *Applications of Mathematics*. — 1999. — Vol. 44, no. 4. — Pp. 289–308.
243. Komachi M. Graph-Theoretic Approaches to Minimally-Supervised Natural Language Learning: Ph.D. thesis / Department of Information Processing, Graduate School of Information Science, Nara Institute of Science and Technology. — 2010.
244. Komachi M., Kudo T., Shimbo M., Matsumoto Y. Semantic drift in espresso-style bootstrapping: Graph-theoretic analysis and evaluation in word sense disambiguation // *Transactions of the Japanese Society for Artificial Intelligence*. — 2010. — Vol. 25, no. 2. — Pp. 233–242.
245. Komachi M., Nagata M., Matsumoto Y. NAIST-NTT system description for patent translation task at NTCIR-7 // *Proceedings of NTCIR-7 Workshop*, December 16–19, 2008, Tokyo, Japan. — 2008.
246. Kunegis J., Lommatzsch A. Learning spectral graph transformations for link prediction // *ICML'09: Proceedings of the 26th Annual International Conference on Machine Learning*. — NY, USA: ACM, 2009. — 8 pp.
247. Kunegis J., Lommatzsch A., Bauckhage C. Alternative similarity functions for graph kernels // *Proceedings of 19th International Conference on Pattern Recognition*, December 8–11, 2008. — Tampa, FL, USA: 2008. — 4 pp.
248. Kunegis J., Lommatzsch A., Bauckhage C. The slashdot zoo: Mining a social network with negative edges // *Proceedings of the 18th International conference on World wide web*, Madrid, Spain. — NY, USA: ACM, 2009. — Pp. 741–750.
249. Kunegis J., Said A., Umbrath W. White Paper: The Universal Recommender. A Recommender System for Semantic Networks: arXiv preprint cs.IR/0909.3472v1: 2009. — 17 pp. <http://arXiv.org/abs/0909.3472>.
250. Kunegis J., Schmidt S., Lommatzsch A., Lerner J., Luca E. W. D., Albayrak S. Spectral analysis of signed graphs for clustering, prediction and visualization // *Proceedings of the Tenth SIAM International Conference on Data Mining*. — Columbus, OH: SIAM, 2010. — Pp. 559–570.
251. Kunz M. On topological and geometrical distance matrices // *Journal of Mathematical Chemistry*. — 1993. — Vol. 13. — Pp. 145–151.
252. Lafferriere G., Williams A., Caughman J. S., Veerman J. J. P. Decentralized control of vehicle formations // *Systems and Control Letters*. — 2005. — Vol. 54, no. 9. — Pp. 899–910.

253. Lancaster P., Tismenetsky M. The Theory of Matrices. — 2nd edition. — New York: Academic Press, 1985. — 570 pp.
254. Langville A. N., Meyer C. D. Google's PageRank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings. — Princeton, NJ: Princeton University Press, 2006.
255. Lannes A. Phase calibration on interferometric graphs // *Journal of the Optical Society of America — A*. — 1999. — Vol. 16. — Pp. 443–454.
256. Lawton J. R., Beard R. W., Young B. A decentralized approach to formation maneuvers // *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. — 2003. — Vol. 19, no. 6. — Pp. 933–941.
257. Leighton T., Rivest R. L. Estimating a probability using finite memory // *Foundations of Computation Theory*. — Berlin-Heidelberg: Springer, 1983. — Vol. 158/1983. — Pp. 255–269.
258. Leighton T., Rivest R. L. The Markov chain tree theorem: Computer Science Technical Report MIT/LCS/TM-249. — Cambridge, Mass.: Laboratory of Computer Science, MIT, 1983.
259. Leighton T., Rivest R. L. Estimating a probability using finite memory // *IEEE Transactions on Information Theory*. — 1986. — Vol. 32, no. 6. — Pp. 733–742.
260. Lenart C. A generalized distance in graphs and centered partitions // *SIAM Journal on Discrete Mathematics*. — 1998. — Vol. 11, no. 2. — Pp. 293–304.
261. Li H.-H., Su L. The Laplacian spectrum of some digraphs obtained from the wheel // *Discussiones Mathematicae Graph Theory*. — 2011. — In press.
262. Li Z., Liu X., Lin P., Ren W. Consensus of linear multi-agent systems with reduced-order observer-based protocols // *Systems & Control Letters*. — 2011. — Vol. 60, no. 7. — Pp. 510–516.
263. Lin Z., Francis B., Maggiore M. Necessary and sufficient graphical conditions for formation control of unicycles // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2005. — Vol. 50, no. 1. — Pp. 121–127.
264. Liu C. J., Chow Y. Enumeration of forests in a graph // *Proceeding of the American Mathematical Society*. — 1981. — Vol. 83, no. 3. — Pp. 659–663.
265. Liu K., Fang B., Zhang W. Speak the same language with your friends: augmenting tag recommenders with social relations // *Proceedings of the 21st ACM Conference on Hypertext and Hypermedia*. — Toronto, Ontario, Canada: ACM, 2010. — Pp. 45–50.
266. Lü L. Prediction of complex network link status and prospects: Tech. rep.: 2010. — In Chinese. <http://www.sciencetimes.com.cn/upload/blog/file/2010/4/201043023485176287...pdf>.
267. Lü L., Zhoua T. Link prediction in complex networks: A survey: arXiv preprint physics.soc-ph/1010.0725v1: 2010. — 44 pp. <http://arXiv.org/abs/1010.0725>.
268. Luna B., Ugalde E. Dominant vertices in regulatory networks dynamics // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2008. — Vol. 237. — Pp. 2685–2695.

269. *Lyritsis A., Papadopoulos A. N., Manolopoulos Y.* TAGs: Scalable threshold-based algorithms for proximity computation in graphs // Proceedings of the 14th International Conference on Extending Database Technology (EDBT). — Uppsala, Sweden: 2011. — 12 pp.
270. *Mackiewicz A., Ratajczak W.* Towards a new definition of topological accessibility // *Transportation Research. Part B: Methodological*. — 1996. — Vol. 30, no. 1. — Pp. 47–79.
271. *Mahadevan S.* Learning representation and control in Markov decision processes: New frontiers // *Foundations and Trends in Machine Learning*. — 2008. — Vol. 1, no. 4. — Pp. 403–565.
272. *Mahadevan S.* Learning Representation and Control in Markov Decision Processes. — Now Publishers Inc., 2009.
273. *Mantrach A., van Zeebroeck N., Francqb P., Shimbo M., Bersini H., Saerens M.* Semi-supervised classification and betweenness computation on large, sparse, directed graphs // *Pattern Recognition*. — 2011. — Vol. 44, no. 6. — Pp. 1212–1224.
274. *Mantrach A., Yen L., Callut J., Françoisse K., Shimbo M., Saerens M.* The sum-over-paths covariance kernel: A novel covariance measure between nodes of a directed graph // *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. — 2010. — Vol. 32, no. 6. — Pp. 1112–1126.
275. *Markovski J.* Real and Stochastic Time in Process Algebras for Performance Evaluation: Ph.D. thesis / Eindhoven University of Technology. — 2008. — 217 pp.
276. *Markovski J., Trčka N.* Lumping Markov chains with silent steps // Third International Conference on the Quantitative Evaluation of Systems – (QEST'06). — Riverside, CA, USA: IEEE Computer Society, 2006. — Pp. 221–232.
277. *Markovski J., Trčka N.* Aggregation methods for Markov reward chains with fast and silent transitions // 14th GI/ITG Conference – Measurement, Modelling and Evaluation of Computer and Communication Systems. — Dortmund: 2008. — 15 pp.
278. *Marsaglia G., Styan G. P. H.* Equalities and inequalities for ranks of matrices // *Linear and Multilinear Algebra*. — 1974. — Vol. 2. — Pp. 269–292.
279. *Marshall J. A., Fung T., Broucke M. E., D'Eleuterio G. M. T., Francis B. A.* Experiments in multirobot coordination // *Robotics and Autonomous Systems*. — 2006. — Vol. 54, no. 3. — Pp. 265–275.
280. *Masuda N., Kawamura, Kori H.* Analysis of relative influence of nodes in directed networks // *Physical Review*. — 2009. — Vol. E 80, no. 4. — P. 046114 (10 pp.).
281. *Masuda N., Kawamura Y., Kori H.* Analysis of relative influence of nodes in directed networks: arXiv preprint physics.soc-ph/0907.0901v1: 2009. — 26 pp. <http://arXiv.org/abs/0907.0901>.
282. *Masuda N., Kawamura Y., Kori H.* Impact of hierarchical modular structure on ranking of individual nodes in directed networks // *New Journal of Physics*. — 2009. — Vol. 11. — P. 113002 (21 pp.).
283. *Masuda N., Kawamura Y., Kori H.* Collective fluctuations in networks of noisy components // *New Journal of Physics*. — 2010. — Vol. 12. — P. 093007 (15 pp.).

284. Masuda N., Kori H. A dynamics-based centrality for directed networks // *Physical Review*. — 2010. — Vol. E 82. — P. 056107 (11 pp.).
285. Matni N. Stability of Switched Systems with Switching Delay: Application to Remote Operation of Aircraft under Distributed Control. — Master's thesis, The University of British Columbia, The Faculty of Graduate Studies (Electrical and Computer Engineering), Vancouver, Canada, August 2010. — 85 pp.
286. Maybee J. S., Olesky D. D., van den Driessche P., Wiener G. Matrices, digraphs, and determinants // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. — 1989. — Vol. 10, no. 4. — Pp. 500–519.
287. Meng Z., Cao Y., Ren W. Stability and convergence analysis of multi-agent consensus with information reuse // *International Journal of Control*. — 2010. — Vol. 83, no. 5. — Pp. 1081–1092.
288. Meng Z., Ren W., Cao Y., You Z. Some stability and boundedness conditions for second-order leaderless and leader-following consensus with communication and input delays // *American Control Conference (ACC) / IEEE*. — Baltimore, MD: IEEE, 2010. — Pp. 574–579.
289. Meng Z., Ren W., Cao Y., You Z. Leaderless and leader-following consensus with communication and input delays under a directed network topology // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*. — 2011. — Vol. 41, no. 1. — Pp. 75–88.
290. Merris R. An edge version of the matrix-tree theorem and the Wiener index // *Linear and Multilinear Algebra*. — 1989. — Vol. 25. — Pp. 291–296.
291. Merris R. Laplacian matrices of graphs: A survey // *Linear Algebra and its Applications*. — 1994. — Vol. 197–198. — Pp. 143–176.
292. Merris R. A survey of graph Laplacians // *Linear and Multilinear Algebra*. — 1995. — Vol. 39. — Pp. 19–31.
293. Merris R. Doubly stochastic graph matrices // *Publikacije Elektrotehnickog Fakulteta Univerziteta U Beogradu, Serija: Matematika*. — 1997. — Vol. 8. — Pp. 64–71.
294. Merris R. Doubly stochastic graph matrices II // *Linear and Multilinear Algebra*. — 1998. — Vol. 45. — Pp. 275–285.
295. Merris R. Laplacian graph eigenvectors // *Linear Algebra and its Applications*. — 1998. — Vol. 278. — Pp. 221–236.
296. Mesbahi M., Egerstedt M. Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks. — Princeton, NJ: Princeton University Press, 2010. — 413 pp.
297. Meyer, Jr. C. D. Limits and the index of a square matrix // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. — 1974. — Vol. 26. — Pp. 469–478.
298. Meyer, Jr. C. D. The role of the group generalized inverse in the theory of finite Markov chains // *SIAM Review*. — 1975. — Vol. 17, no. 3. — Pp. 443–464.
299. Meyer, Jr. C. D., Stadelmaier M. W. Singular M-matrices and inverse positivity // *Linear Algebra and its Applications*. — 1978. — Vol. 22. — Pp. 139–156.

300. *Milman B., Gavrilova Y.* Analysis of citation and cocitation in chemical-engineering // *Scientometrics*. — 1993. — Vol. 27. — Pp. 53–74.
301. *Mizruchi M. S.* Social network analysis: Recent achievements and current controversies // *Acta Sociologica*. — 1994. — Vol. 37. — Pp. 329–343.
302. *Mizruchi M. S., Galaskiewicz J.* Networks of interorganizational relations // *Sociological Methods & Research*. — 1993. — Vol. 22, no. 1. — Pp. 46–70.
303. *Mohar B.* The Laplacian spectrum of graphs // *Graph Theory, Combinatorics and Applications* / Ed. by Y. Alavi, G. Chartrand, O. Oellermann, A. Schwenk. — New York: Wiley, 1991. — Pp. 871–898.
304. *Mohar B.* Laplace eigenvalues of graphs — a survey // *Discrete Mathematics*. — 1992. — Vol. 109. — Pp. 171–183.
305. *Mohar B.* Some applications of Laplace eigenvalues of graphs // *Graph Symmetry: Algebraic Methods and Applications* / Ed. by G. Hahn, G. Sabidussi. — Kluwer, 1997. — Pp. 225–275.
306. *Monsuur H.* Characterizations of the 3-cycle count and backward length of a tournament // *European Journal of Operational Research*. — 2005. — Vol. 164, no. 3. — Pp. 778–784.
307. *Monsuur H., Storcken T.* Centers in connected undirected graphs: An axiomatic approach // *Operations Research*. — 2004. — Vol. 52, no. 1. — Pp. 54–64.
308. *Monsuur H., Storcken T.* Centrality orderings in social networks // *Chapters in Game Theory, in honor of Stef Tijs* / Ed. by P. Borm, H. J. M. Peters. — Berlin-Heidelberg: Springer, 2004. — Vol. 31 of *Theory and Decision Library C*. — Pp. 157–181.
309. *Moon J. W.* Counting Labelled Trees. — Montreal: Canadian Mathematical Congress, 1970.
310. *Moon J. W.* Some determinant expansions and the matrix-tree theorem // *Discrete Mathematics*. — 1994. — Vol. 124. — Pp. 163–171.
311. *Moon J. W.* On the adjoint of a matrix associated with trees // *Linear and Multilinear Algebra*. — 1995. — Vol. 39, no. 1–2. — Pp. 191–194.
312. *Moon J. W., Pullman N. J.* Tournaments and handicaps // *Information Processing 68 (Proc. IFIP Congress, Edinburgh, 1968)*. — Amsterdam: North-Holland, 1969. — Pp. 219–223. — vol. 1: Mathematics, Software.
313. *Moon J. W., Pullman N. J.* On generalized tournament matrices // *SIAM Review*. — 1970. — Vol. 12. — Pp. 384–399.
314. *Moreau L.* Stability of continuous-time distributed consensus algorithms // *Proc. IEEE Conf. Decision Control*. — Paradise Island, Bahamas: 2004. — Pp. 3998–4003.
315. *Moreau L.* Stability of multiagent systems with time-dependent communication links // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2005. — Vol. 50, no. 2. — Pp. 169–182.
316. *Moretti P., Baronchelli A., Barrat A., Pastor-Satorras R.* Complex networks and glassy dynamics: walks in the energy landscape: arXiv preprint cond-mat.stat-mech/1101.3490v1: 2011. — 26 pp. <http://arXiv.org/abs/1101.3490>.

317. *Myrvold W.* Counting k -component forests of a graph // *Networks*. — 1992. — Vol. 22. — Pp. 647–652.
318. *Myrvold W., Wood K. L. B.* Counting spanning out-trees in multidigraphs. — 2000. — Working paper of Department of Computer Science, University of Victoria, B.C., Canada. <http://citeseer.ist.psu.edu/296109.html>.
319. *Navigli R., Lapata M.* Graph connectivity measures for unsupervised word sense disambiguation // *Proceedings of the 20th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-07)*. — 2007. — Pp. 1683–1688.
320. *Newman M. W.* The Laplacian Spectrum of Graphs. — Master's thesis, Department of Mathematics, University of Manitoba, Winnipeg, Canada, July 2000.
321. *Nystuen J., Dacey M.* A graph theory interpretation of nodal regions // *Papers and Proceedings of the Regional Science Association*. — 1961. — Vol. 7. — Pp. 29–42.
322. *Olfati-Saber R., Fax J. A., Murray R. M.* Consensus and cooperation in networked multi-agent systems // *Proceedings of the IEEE*. — 2007. — Vol. 95, no. 1. — Pp. 215–233.
323. *Olfati-Saber R., Fax J. A., Murray R. M.* Reply to “Comments on “Consensus and cooperation in networked multi-agent systems”” // *Proceedings of the IEEE*. — July 2010. — Vol. 98, no. 7. — Pp. 1354–1355.
324. *Olfati-Saber R., Murray R. M.* Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2004. — Vol. 49, no. 9. — Pp. 1520–1533.
325. *Topics in Algebraic Graph Theory* / Ed. by L. W. Beineke, R. J. Wilson. — Cambridge: Cambridge University Press, 2004. — 276 pp.
326. *Pattison P.* Algebraic Models for Social Networks. — Cambridge: Cambridge University Press, 1993. — 310 pp.
327. *Pattison T.* Graph representation, centrality and partitioning based on Cohen distance: Preprint. — Salisbury, Australia: Defence Science & Technology Organisation, January 2000. — 19 pp.
328. *Pick G.* Über die Wurzeln der charakteristischen Gleichungen von Schwingungsproblemen // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*. — 1922. — Vol. 2. — Pp. 353–357.
329. *Ponstein J.* Self-avoiding paths and the adjacency matrix of a graph // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. — 1966. — Vol. 14. — Pp. 600–609.
330. *Popov A., Werner H.* A robust control approach to formation control // *Proceedings of the 2009 European Control Conference*. — Budapest, Hungary: 2009. — Pp. 4428–4433.
331. *Preciado V. M., Verghese G. C.* Synchronization in generalized Erdos-Renyi networks of nonlinear oscillators // *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*. — Seville, Spain: 2005. — Pp. 4628–4633.
332. *Propp J. G., Wilson D. B.* How to get a perfectly random sample from a generic Markov chain and generate a random spanning tree of a directed graph // *Journal of Algorithms*. — 1998. — Vol. 27. — Pp. 170–217.

333. *Pucci A., Gori M., Maggini M.* A random-walk based scoring algorithm applied to recommender engines // *Advances in Web Mining and Web Usage Analysis, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 4811, WebKDD 2006, LNAI 4811* / Ed. by O. N. et. al. — Berlin / Heidelberg: Springer, 2007. — Pp. 127–146.
334. *Ranjan G., Aanjaneya M., Zhang Z. L.* Walks, Commutes and Detours on Graphs: A Geometric Perspective: Tech. rep.: Dept. of Computer Science and Engineering, University of Minnesota, 2010. — Preprint submitted to Elsevier.
335. *Ranjan G., Zhang Z.-L.* On Connected Bi-partitions of a Graph: Tech. rep.: Dept. of Computer Science and Engineering, University of Minnesota, 2010.
336. *Ranjan G., Zhang Z.-L.* On Random Eccentricity In Complex Networks: Tech. rep.: Dept. of Computer Science and Engineering, University of Minnesota, 2010. — 26 pp.
337. *Regmi A., Sandoval R., Byrne R., Tanner H., Abdallah C.* Experimental implementation of flocking algorithms in wheeled mobile robots // *Proc. American Control Conf.* — Portland, OR: 2005. — Pp. 4917–4922.
338. *Ren W.* Collective motion from consensus with Cartesian coordinate coupling – Part I: Single-integrator kinematics // *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control, Cancun, Mexico, Dec. 9–11, 2008.* — IEEE, 2008. — Pp. 1006–1011.
339. *Ren W.* Collective motion from consensus with Cartesian coordinate coupling // *IEEE Transactions on Automatic Control.* — 2009. — Vol. 54, no. 6. — Pp. 1330–1335.
340. *Ren W.* Consensus tracking under directed interaction topologies: Algorithms and experiments // *IEEE Transactions on Control Systems Technology.* — 2010. — Vol. 18, no. 1. — Pp. 230–237.
341. *Ren W., Atkins E.* Second-order consensus protocols in multiple vehicle systems with local interactions // *Proc. AIAA Guidance, Navigation, Control Conf.* — San Francisco, CA: 2005. — Paper AIAA-2005-6238.
342. *Ren W., Beard R. W.* Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies // *IEEE Transactions on Automatic Control.* — 2005. — Vol. 50, no. 5. — Pp. 655–661.
343. *Ren W., Beard R. W.* *Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control: Theory And Applications.* — London: Springer, 2008.
344. *Ren W., Beard R. W.* *Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control: Theory And Applications.* — London: Springer, 2008.
345. *Ren W., Beard R. W., Atkins E. M.* Information consensus in multivehicle cooperative control // *IEEE Control Systems Magazine.* — 2007. — Vol. 27, no. 2. — Pp. 71–82.
346. *Ren W., Beard R. W., Kingston D. B.* Multi-agent Kalman consensus with relative uncertainty // *Proc. American Control Conf.* — Portland, OR: 2005. — Pp. 1865–1870.
347. *Ren W., Beard R. W., McLain T. W.* Coordination variables and consensus building in multiple vehicle systems // *Proceedings of the Block Island Workshop on Cooperative Control.* — *Lecture Notes in Control and Information Sciences.* — Springer, 2005. — Pp. 171–188.

348. *Ren W., Cao Y.* Convergence of sampled-data consensus algorithms for double-integrator dynamics // Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control, Cancun, Mexico, Dec. 9–11, 2008. — IEEE, 2008. — Pp. 3965–3970.
349. *Ren W., Cao Y.* Distributed Coordination of Multi-agent Networks: Emergent Problems, Models, and Issues. — London: Springer, 2011.
350. *Reynolds C. W.* Flocks, herds, and schools: A distributed behavioral model // *Computer Graphics*. — 1987. — Vol. 21, no. 4. — Pp. 25–34.
351. *Riethmüller C.* A Maintenance Model for Systems with Phase-type Distributed Times to Failure: Ph.D. thesis / Fakultät für Mathematik der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg. — 2010. — 112 pp.
352. *Rodríguez-Velázquez J. A., Kamišalić A., Domingo-Ferrera J.* On reliability indices of communication networks // *Computers & Mathematics with Applications*. — 2009. — Vol. 58, no. 7. — Pp. 1433–1440.
353. *Rothblum U. G.* Computation of the eigenprojection of a nonnegative matrix at its spectral radius // Stochastic Systems: Modeling, Identification and Optimization II / Ed. by R. J.-B. Wets. — Amsterdam: North-Holland, 1976. — Vol. 6 of *Mathematical Programming Study*. — Pp. 188–201.
354. *Rothblum U. G.* A representation of the Drazin inverse and characterizations of the index // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. — 1976. — Vol. 31, no. 4. — Pp. 646–648.
355. *Rothblum U. G.* Expansions of sums of matrix powers // *SIAM Review*. — April 1981. — Vol. 23, no. 2. — Pp. 143–164.
356. *Roy S.* Complexity Theoretic Aspects of Planar Restrictions and Obliviousness: Ph.D. thesis / State University of New Jersey. — New Brunswick, Rutgers, NJ, 2006.
357. *Safro I., Brandt A., Ron D.* Algebraic distance and its applications to combinatorial scientific computing problems // Abstracts of SIAM Workshop on Combinatorial Scientific Computing. — Seaside, CA: SIAM, 2009. — 3 pp.
358. *Schwartz T.* The Logic of Collective Choice. — New York: Columbia University Press, 1986.
359. *Schwenk A. J.* The adjoint of the characteristic matrix of a graph // *Journal of Combinatorics, Information & System Sciences*. — 1991. — Vol. 16, no. 1. — Pp. 87–92.
360. *Seary A. J., Richards W. D.* Partitioning networks by eigenvectors // Proceedings of International Conference on Social Networks. — Vol. 1. — London: University of Greenwich Press, 1996. — Pp. 47–58.
361. *Shamis E.* Graph-theoretic interpretation of the generalized row sum method // *Mathematical Social Sciences*. — 1994. — Vol. 27. — Pp. 321–333.
362. *Shang M.-S., Jin C.-H., Zhou T., Zhang Y.-C.* Collaborative filtering based on multi-channel diffusion // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2009. — Vol. 388, no. 23. — Pp. 4867–4871.
363. *Sharpe G. E., Styan G. P. H.* Circuit duality and the general network inverse // *IEEE Transactions on Circuit Theory*. — 1965. — Vol. 12. — Pp. 22–27.

364. *Shier D. R.* Network Reliability and Algebraic Structures. — New York: Oxford University Press, 1991.
365. *Shimbo M., Ito T., Matsumoto Y.* Evaluation of kernel-based link analysis measures on research paper recommendation // Proceedings of the 7th ACM/IEEE Joint Conference on Digital Libraries. — ACM Press, N.Y., 2007. — Pp. 354–355.
366. *Shimbo M., Ito T., Mochihashi D., Matsumoto Y.* On the properties of von Neumann kernels for link analysis // *Machine Learning*. — 2009. — Vol. 75. — Pp. 37–67.
367. *Simeon B., Führer C., Rentrop P.* The Drazin inverse in multibody system dynamics // *Numerische Mathematik*. — 1993. — Vol. 64, no. 4. — Pp. 521–539.
368. *Simon H. D., Sohn A., Biswas R.* HARP: A dynamic spectral partitioner // *Journal of Parallel and Distributed Computing*. — 1998. — Vol. 50. — Pp. 88–103.
369. *So W.* Rank one perturbation and its application to the Laplacian spectrum of a graph // *Linear and Multilinear Algebra*. — 1998. — Vol. 46. — Pp. 193–198.
370. *Stephenson K., Zelen M.* Rethinking centrality: Methods and examples // *Social Networks*. — 1989. — Vol. 11. — Pp. 1–37.
371. *Styan G. P. H., Subak-Sharpe G. E.* Inequalities and equalities associated with the Campbell-Youla generalized inverse of the indefinite admittance matrix of resistive networks // *Linear Algebra and its Applications*. — 1997. — Vol. 250. — Pp. 349–370.
372. *Sylvester J. J.* On the change of systems of independent variables // *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*. — 1857. — Vol. 1. — Pp. 42–56. — Reprinted in *Collected Mathematical Papers*, Cambridge, 2: 65–85 (1908).
373. *Taaffe E. J., Gauthier H. L.* Geography of Transportation. — Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1973.
374. *Takacs L.* Enumeration of rooted trees and forests // *Mathematical Scientist*. — 1993. — Vol. 18. — Pp. 1–10.
375. *Tang J., Liang D., Wang N., Fan Y. Z.* A Laplacian spectral method for stereo correspondence // *Pattern Recognition Letters*. — 2007. — Vol. 28, no. 12. — Pp. 1391–1399.
376. *Tang M.* Graph Metrics and Dimension Reduction: Ph.D. thesis / School of Informatics and Computing, Indiana University. — Bloomington, IN, 2010.
377. *Teranishi Y.* Laplacian spectra and invariants of graphs // *Discrete Mathematics*. — 2002. — Vol. 257, no. 1. — Pp. 183–189.
378. *Teranishi Y.* The number of spanning forests of a graph // *Discrete Mathematics*. — 2005. — Vol. 290, no. 2–3. — Pp. 259–267.
379. *Teufl E., Wagner S.* Spanning forests, electrical networks, and a determinant identity // Proceedings of the 21st International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC 2009). — Hagenberg, Austria: DMTCS, 2009. — Pp. 847–858.
380. *Tizghadam A., Leon-Garcia A.* On random walks in direction-aware network problems // *ACM SIGMETRICS Performance Evaluation Review*. — 2010. — Vol. 38, no. 2. — Pp. 9–11. — Special issue on the Workshop on Mathematical Performance Modeling and Analysis (MAMA 2010).

381. *Torgerson W. S.* Multidimensional scaling: I. Theory and method // *Psychometrika*. — 1952. — Vol. 17, no. 4. — Pp. 401–419.
382. *Torgerson W. S.* Theory and Methods of Scaling. — Oxford: Wiley, 1958. — XIII+460 pp.
383. *Tsitsiklis J. N., Athens M.* Convergence and asymptotic agreement in distributed decision problems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 1984. — Vol. 29. — Pp. 690–696.
384. *Tutte W. T.* The dissection of equilateral triangles into equilateral triangles // *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. — 1948. — Vol. 44. — Pp. 463–482.
385. *Udrea G.* Catalan's identity and Chebyshev polynomials of the second kind // *Portugaliae Mathematica*. — 1995. — Vol. 52. — Pp. 391–397.
386. *Veerman J. J. P., Lafferriere G., Caughman J., Williams A.* Flocks and formations // *Journal of Statistical Physics*. — 2005. — Vol. 121, no. 5–6. — Pp. 901–936.
387. *Veerman J. J. P., Stošić B. D., Tangerman F. M.* Automated traffic and the finite size resonance // *Journal of Statistical Physics*. — 2009. — Vol. 137, no. 1. — Pp. 189–203.
388. *Volchenkov D.* Random walks and flights over connected graphs and complex networks (review) // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2011. — Vol. 16, no. 1. — Pp. 21–55.
389. *von Luxburg U., Radl A., Hein M.* Hitting times, commute distances and the spectral gap for large random geometric graphs: arXiv preprint cs.DS/1003.1266v1: 2010. — 16 pp. <http://arXiv.org/abs/1003.1266>.
390. *Wasserman S., Faust K.* Social Network Analysis: Methods and Application. — Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
391. *Wei Y.* A characterization and representation of the Drazin inverse // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. — 1996. — Vol. 17, no. 4. — Pp. 744–747.
392. *Wentzell A. D., Freidlin M. I.* On small random perturbations of dynamical systems // *Russian Mathematical Surveys*. — 1970. — Vol. 25, no. 1. — Pp. 1–55.
393. *Wilkinson J. H.* Note on the practical significance of the Drazin inverse // *Recent Applications of Generalized Inverses* / Ed. by S. Campbell. — London: Pitman, 1982. — Pp. 82–99.
394. *Wu C. W.* Algebraic connectivity of directed graphs // *Linear and Multilinear Algebra*. — 2005. — Vol. 53, no. 3. — Pp. 203–223.
395. *Wu C. W.* On Rayleigh-Ritz ratios of a generalized Laplacian matrix of directed graphs // *Linear Algebra and its Applications*. — 2005. — Vol. 402. — Pp. 207–227.
396. *Wu C. W.* Identical synchronization in networks of coupled nonlinear circuits and systems: IBM Research Report RC23848 (W0601-093): IBM Research Division, Thomas J. Watson Research Center, 2006. [http://domino.research.ibm.com/library/cyberdig.nsf/papers/AFE805A34F8B26838525710A0050D6E0/\\$File/rc23848.pdf](http://domino.research.ibm.com/library/cyberdig.nsf/papers/AFE805A34F8B26838525710A0050D6E0/$File/rc23848.pdf).
397. *Wu C. W.* Synchronization in Complex Networks of Nonlinear Dynamical Systems. — Singapore: World Scientific, 2007.
398. *Wu C. W.* Evolution and dynamics of complex networks of coupled systems // *IEEE Circuits and Systems Magazine*. — 2010. — Vol. 10, no. 3. — Pp. 55–63.

399. Xiao L., Boyd S. Fast linear iterations for distributed averaging // *Systems and Control Letters*. — 2004. — Vol. 53. — Pp. 65–78.
400. Xu Y., Hao J., Lau R., Ma J., Xu W., Zhao D. A personalized researcher recommendation approach in academic contexts: Combining social networks and semantic concepts analysis // 14th Pacific Asia Conference on Information Systems (PACIS 2010). — Taipei, Taiwan: Association for Information Systems, 2010. — Pp. 1516–1527.
401. Yen L., Fouss F., Decaestecker C., Francq P., Saerens M. Link-based community detection with the sigmoid commute-time kernel: A comparative study: Working paper. — Louvain-la-Neuve, Belgium: Information Systems Research Unit (ISYS), Université catholique de Louvain, 2008.
402. Yen L., Fouss F., Decaestecker C., Francq P., Saerens M. Graph nodes clustering with the sigmoid commute-time kernel: A comparative study // *Data & Knowledge Engineering*. — 2009. — Vol. 68. — Pp. 338–361.
403. Yen L., Saerens M., Mantrach A., Shimbo M. A family of dissimilarity measures between nodes generalizing both the shortest-path and the commute-time distances // The 14th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery & Data Mining. — 2008. — Pp. 785–793.
404. Young G. F., Scardovi L., Leonard N. E. Robustness of noisy consensus dynamics with directed communication // Proceedings of the American Control Conference. — Baltimore, MD: 2010. — 6 pp.
405. Zarei M., Samani K. A., Omid G. R. Complex eigenvectors of network matrices give better insight into the community structure // *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment (An IOP and SISSA journal)*. — 2009. — P. 10018 (20 pp.).
406. Zhang L. A characterization of the Drazin inverse // *Linear Algebra and its Applications*. — 2001. — Vol. 335. — Pp. 183–188.
407. Zhang X.-D. A note on doubly stochastic graph matrices // *Linear Algebra and its Applications*. — 2005. — Vol. 407. — Pp. 196–200.
408. Zhang X.-D. Doubly stochastic graph matrices // Proceedings of the 2007 International Conference on Graph Theory and Combinatorics & Fourth Cross-strait Conference on Graph Theory and Combinatorics — (2007 IC & 4th CSC) GTC / National Taiwan University. — Taipei, Taiwan: 2007. — Pp. 118–120.
409. Zhang X.-D. Algebraic connectivity and doubly stochastic tree matrices // *Linear Algebra and its Applications*. — 2009. — Vol. 430. — Pp. 1656–1664.
410. Zhang X.-D. Vertex degrees and doubly stochastic graph matrices // *Journal of Graph Theory*. — 2011. — Vol. 66. — Pp. 104–114.
411. Zhang X.-D., Wu J.-X. Doubly stochastic matrices of trees // *Applied Mathematics Letters*. — 2005. — Vol. 18. — Pp. 339–343.
412. Zhang Y., Yong X., Golin M. J. Chebyshev polynomials and spanning tree formulas for circulant and related graphs // *Discrete Mathematics*. — 2005. — Vol. 298. — Pp. 334–364.
413. Zhou T., Lu L., Zhang Y.-C. Predicting missing links via local information // *The European Physical Journal, Series B: Condensed Matter and Complex Systems*. — 2009. — Vol. B-71. — Pp. 623–630.