УДК 65.012.122

МЕХАНИЗМЫ ОПЕРАТИВНОГО СОГЛАСОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫМИ СИСТЕМАМИ

I. СОГЛАСОВАННОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО ПРОИЗВОДСТВА

АШИМОВ А. А., БУРКОВ В. Н., ДЖАПАРОВ Б. А., КОНДРАТЬЕВ В. В.

(Алма-Ата, Москва)

Рассматривается задача оперативного согласованного планирования, обеспечивающая выполнение плана в двухуровневой активной системе непрерывного производства. На основе исследования свойств систем стимулирования активных производственных элементов предлагаются конструктивные способы построения множеств согласованных планов.

1. Введение

Проблема совершенствования механизма управления многогранна — это проблемы планирования, стимулирования, организации социалистического соревнования и др. Как показывает опыт, при совершенствовании управления производственными системами совместному анализу должны подвергаться все управленческие функции: информационное обеспечение, планирование, учет, оценка деятельности, регулирование и стимулирование. Попытки выделения, анализа и совершенствования лишь отдельных звеньев управленческого цикла не дают полного конечного эффекта, а в некоторых случаях вообще могут привести к результатам, далеким от ожидаемых. Например, разработка и внедрение информационной базы и систем оптимального планирования вне связи с оценкой деятельности и стимулирования может привести к тому, что назначаемые планы будут не согласованы с действующими на предприятии механизмами стимулирования. Следствием этого может быть появление выгодных, невыгодных работ. В результате планы по выгодной номенклатуре будут перевыполняться, по невыгодной — недовыполняться. Информация, получаемая от исполнительных звеньев производства, может давать искаженное представление об их возможностях, что, в свою очередь, снижает качество планов. В конечном итоге та или иная оптимизационная процедура может вообще не «прижиться» на предприятиях.

Совместный анализ математическими средствами всех основных функций и этапов управления в производственных системах потребовал разработки специального аппарата и моделей. На их разработку, в частности, было направлено развитие теории активных систем [1, 2].

Актуальной проблемой сегодняшнего дня является апробация и внедрение методов теории активных систем на реальных объектах народного хозяйства, формулирования методологии проведения такого рода работ. Данный цикл статей направлен на рассмотрение применения методов теории активных систем на реальном производственном объекте — при оперативном управлении основной производственной деятельностью свинцового завода (на примере Усть-Каменогорского свинцово-цинкового комбината им. В. И. Ленина).

В рамках подхода, развитого в теории активных систем, описание производственной системы дается посредством задания структуры, показателей состояния элементов системы, модели технологии и ограничений и механизма функционирования системы. Структура производственной системы задается ее структурными элементами и их связями между собой.

Показатели состояния представляют собой набор фазовых переменных, определяющих в рассматриваемой ситуации состояние системы в целом и ее элементов. Ограничения на фазовые показатели задаются с помощью модели ограничений. Механизмы функционирования представляют собой набор правил, функций, положений, регламентирующих действия всех элементов системы в процессе ее функционирования.

Технологический процесс получения чистого свинца из свинцовых концентратов представляет собой сложный комплекс переделов, носящий непрерывно-дискретный характер. Из всего многообразования задач оперативного управления свинцовым заводом в работе будут рассмотрены только два типовых примера, которые характерны не только для свинцовых заводов, но и для многих производственных систем с непрерывными и дискретными технологическими процессами соответственно.

В данной статье рассматриваются задачи оперативного управления технологическим процессом шихтоподготовки, представляющим собой вариант известной смесительной операции непрерывного производства. Во второй и третьей — задачи оперативного управления весьма типичным производством дискретного вида — рафинировочным производством. Применительно к названным объектам строятся механизмы оперативного согласованного управления, включающие процедуры согласованного планирования, механизмы оценки деятельности и стимулирования подразделений. Процедуру согласованного планирования можно рассматривать как развитие идей оптимального планирования в случаях, где существен учет интересов элементов, обеспечивающих реализацию плана. Конструктивно такие процедуры получаются путем добавления к задаче оптимального планирования дополнительных ограничений — условий согласования, обеспечивающих назначение элементам только тех планов, в выполнении которых они будут заинтересованы при действующих системах материального стимулирования. Теорию и обоснование эффективности таких процедур можно найти в [2].

Задача данной работы — показать один из первых примеров практической реализации методов согласованного управления в производственных системах, методологию построения механизмов оперативного согласованного управления производственными системами с привлечением методов теории активных систем.

2. Описание технологического процесса

Технологический процесс получения мягкого свинца из свинцовых концентратов пирометаллургическим способом [3] состоит в последовательном выполнении следующих операций: шихтоподготовка, агломерационный обжиг, плавка и рафинирование. Указанные операции выполняются соответственно в агломерационном, плавильном, рафинировочном цехе. Технологическая схема свинцового завода по получению мягкого свинца из свинцовых концентратов показана на рис. 1.

Исходное сырье (ИС) — свинцовые концентраты, флюсы, вторсырье — поступает в звенья хранения (склады сырья (СС)) из внешней среды. Для каждого вида сырья в звеньях хранения отводится отдельная емкость. Процесс шихтоподготовки (ШП) состоит в приготовлении смеси (сырой шихты (СШ)) заданного состава из имеющегося в наличии сырья — свинцовых концентратов и флюсов (известняк, железняк, кварц). Приготовление шихты производится штабельным способом в специальной емкости — шихтарнике [4], в котором одновременно могут находиться несколько штабелей. В штабель загружается также оборотный агломерат (ОА), возвращаемый с выхода агломерационного цеха, который, перемешиваясь с сырой шихтой, образует шихту агломерации (ША). Обеспечение непрерывности функционирования свинцового производства требует постоянного наличия в шихтарнике шихты агломерации, готовой к разгрузке (заданного состава).

Объем заложенного штабеля может обеспечивать потребность свинцового производства в шихте агломерации в течение трех — четырех суток.

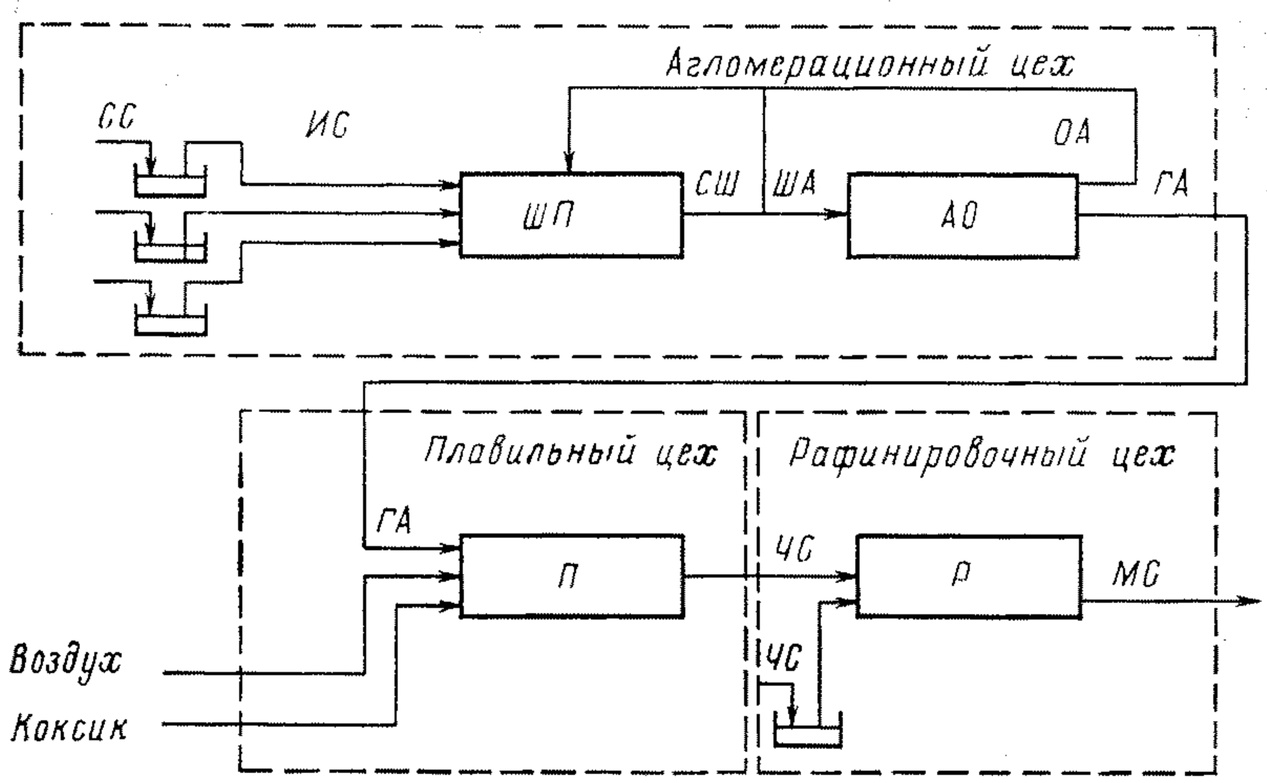

Рис. 1

Получаемый из шихты агломерации, после стадии агломерационного обжига (АО), агломерат дробится и разделяется на годный (ГА) и оборотный агломерат (ОА). Годный агломерат служит основным сырьем плавильного цеха, производящего черновой свинец (ЧС). Процессы агломерационного обжига и плавки (П) носят непрерывный характер.

Черновой свинец из плавильного цеха непрерывно поступает в наборный котел рафинировочного цеха. После наполнения наборного котла его содержимое перекачивается в рафинировочный котел для рафинирования (Р). В рафинировочный цех может поступать также черновой свинец из других предприятий в форме отлитых блоков, который загружается непосредственно в рафинировочный котел. Технология очистки (рафинирования) каждой партии чернового свинца состоит в последовательном удалении из него примесей: серы, теллура, мышьяка, сурьмы, олова, серебра, золота, кальция, магния, висмута. Глубина очистки партии зависит от марки выпускаемой партии. Процесс рафинирования может проходить одновременно в нескольких рафинировочных котлах, хотя для розлива этих партий используется только один разливочный котел. Содержание разливочного котла может быть разлито в форме чушек или блоков, на одной или двух разливочных машинах. В отличие от агломерационного и плавильного цехов процесс рафинирования носит дискретный характер.

Таким образом, технологический процесс получения мягкого свинца (МС) из свинцовых концентратов представляет собой сложный комплекс переделов, носящий непрерывно-дискретный характер.

3. Постановка задачи оперативного согласованного планирования шихтоподготовки

Основной задачей дробильно-шихтовочного отделения является приготовление шихты требуемого качественного состава в количестве, обеспечивающем выполнение плана агломерационного цеха по выдаче годного агломерата. В практике управления производственными системами широко известны и всесторонне изучены модели и методы решения задач приготовления оптимальной шихты (смеси) [5, 6]. Однако одно дело определить план, а другое — обеспечить его выполнение.

Реализация плана по закладке штабеля осуществляется бригадами шихтовщиков, посменно обслуживающих процесс шихтоподготовки. Обычно закладка одного штабеля происходит в течение нескольких смен, что, в свою очередь, требует детализации плана закладки штабеля по сменам, т. е. в виде сменных заданий бригад. Заметим, что закладка очередного штабеля начинается после окончания закладки предыдущего и в течение смены отделение обслуживается только одной бригадой, «экономическое

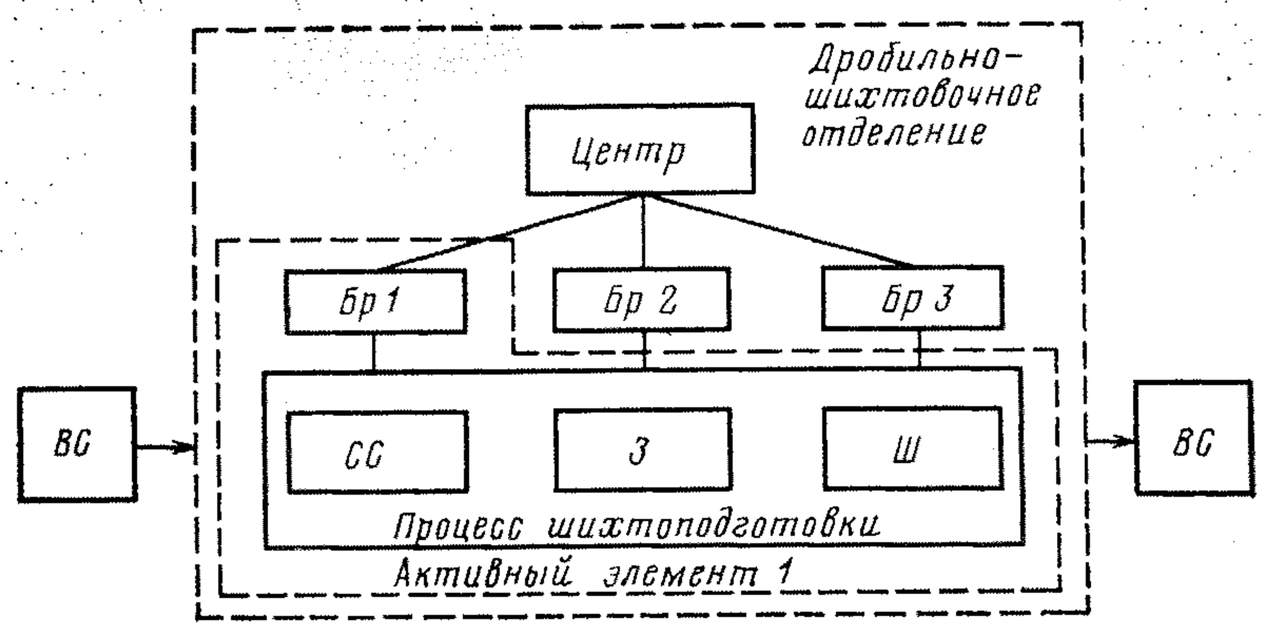

Рис. 2

поведение» которой определяется ее экономическими интересами, представимыми в виде функции от сменного задания и его фактического выполнения.

Таким образом, дробильно-шихтовочное отделение можно представить в виде двухуровневой активной производственной системы, в которой в качестве центра выступает руководство агломерационного цеха и дробильно-шихтовочного отделения, а активными производственными элементами являются бригады (Бр) шихтовщиков совместно с технологическим процессом загрузки (З) штабеля. Элемент «внешняя среда» (ВС) учитывает связи дробильно-шихтовочного отделения с другими процессами (поставкой сырьевых компонентов, разгрузкой штабеля и т. д.). Структурная схема дробильно-шихтовочного отделения приведена на рис. 2.

Состояние производственной системы задается состоянием штабеля (Ш), которое к концу ν-й смены определяется вектором $\bar{y}_\nu=\{\bar{y}_{\nu j}\}$, где $\bar{y}_{\nu j}$ — объем загруженного в штабель j-го концентрата с начала его закладки, $j\in J$, J — множество концентратов, $\nu=\overline{1, V}$, V — количество смен, необходимых для закладки штабеля. Состояние производственного элемента к концу ν-й смены описывается вектором состояния $y_\nu=\{y_{\nu j}\}$, где $y_{\nu j}$ — объем загруженного в штабель в ν-ю смену j-го концентрата. Множество возможных состояний производственного элемента в ν-й смене V_ν определяется технологическими ограничениями производства:

$$(3.1)\qquad 0\leqslant y_{\nu j}\leqslant q_{\nu j},\quad j\in J;\quad \sum_{j\in J} y_{\nu j}\leqslant R;\quad \sum_{j\in J} t_j y_{\nu j}\leqslant T;\quad y_{\nu j}\leqslant R_j,\quad j\in J_1\subset J,$$

где $q_{\nu j}$ — наличие j-го концентрата на складах в ν-й смене, R — нормативный суммарный объем загрузки сырья за смену, t_j — трудоемкость закладки j-го вида концентрата, T — продолжительность одной смены, R_j — нормативы загрузки за смену j-го вида концентрата.

Центр устанавливает сменное задание бригаде $x_\nu=\{x_{\nu j}\}$, учитывая технологические ограничения производства: обеспечение заданной массы $M=\sum_{j\in J} M_j$ и состава $\{M_j\}$ штабеля к концу планируемого периода. Таким образом, на множество X_ν возможных планов производственных элементов на ν-ю смену накладываются технологические ограничения:

$$(3.2)\qquad x_{\nu j}+\tilde{x}_{\nu j}=M_j-y_{(\nu-1)j};\quad 0\leqslant x_{\nu j}+\tilde{x}_{\nu j}\leqslant Q_{\nu j};\quad \sum_{j\in J}\tilde{x}_{\nu j}\leqslant R(V-\nu);$$

$$\sum_{j\in J} t_j\tilde{x}_{\nu j}\leqslant T(V-\nu);\quad \tilde{x}_{\nu j}\leqslant R_j(V-\nu),\quad j\in J_1\subset J,$$

где $x_{\nu j}$ — задание по закладке j-го концентрата на ν-ю смену, $\tilde{x}_{\nu j}$ — планируемый объем закладки j-го концентрата на оставшиеся $(V-\nu)$ смен,

$Q_{\nu j}$ — прогнозируемый объем поставок j-го вида сырья в течение V смен, начиная с ν-й смены.

Функционирование системы в ν-й смене происходит следующим образом: сначала центр назначает производственному элементу сменное задание $x_\nu \in X_\nu$, после чего производственный элемент выбирает состояние y_ν из множества Y_ν возможных состояний, исходя из своих экономических интересов. Такое активное поведение бригады часто приводит к невыполнению ими плана x_ν, внося тем самым элемент неопределенности для центра в управлении технологическим процессом закладки штабеля. Необходимость устранения этой неопределенности приводит к необходимости применения методов оперативного согласованного планирования, т. е. планировать сменные объемы загрузки свинцовых концентратов, исходя из реальной обстановки на производстве и учитывая интересы бригады. Система стимулирования бригады в ν-й смене имеет вид:

$$f(x_\nu, y_\nu) = h(\{c_j\}, y_\nu) - \chi(x_\nu, y_\nu), \tag{3.3}$$

где $h(\{c_j\}, y_\nu)$ — сдельный заработок бригады, c_j — стоимость закладки единицы j-го концентрата,

$$\chi(x_\nu, y_\nu) = \begin{cases} \sigma > 0, & y_\nu \not\geqslant x_\nu, \\ (\alpha, x_\nu - y_\nu), & y_\nu \geqslant x_\nu, \ \alpha > 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

есть функция штрафа, по существу представляющая функцию поощрения за перевыполнение плановых показателей, производственный элемент за невыполнение плана хотя бы по одной компоненте штрафуется на величину $\sigma > 0$, а при перевыполнении плана поощряется. Величина поощрения линейно зависит от величины перевыполнения плана и коэффициента поощрения $\alpha = \{\alpha_j\}$ за перевыполнение по каждой компоненте.

В процессе функционирования системы центр представляет ряд целей, часть которых, например снижение себестоимости шихты, стабильность штабелей по составу и др., можно учесть при определении оптимального состава штабеля, а другие — при оперативном планировании. Так, при оперативном планировании производства важное значение имеет планирование одинакового по стоимости объема работ бригадам в течение месяца.

Задача оперативного согласованного планирования производства заключается в определении сменного задания x_ν бригаде, обеспечивающего минимум целевой функции центра:

$$\Phi(x_\nu, x_\nu) = \left[B(\nu) + \mu - \sum_{j \in J} c_j x_{\nu j} \right]^2 \to \min; \tag{3.5}$$

$$x_\nu \in X_\nu; \tag{3.6}$$

$$x_\nu \in S_\nu, \tag{3.7}$$

где $B(\nu)$ — разность фактического заработка бригады и среднего за предыдущие смены с начала месяца,

$$S_\nu = \{x_\nu \mid f(x_\nu, x_\nu) \geqslant f(x_\nu, y_\nu) \ \ \forall y_\nu \in Y_\nu\} \tag{3.8}$$

есть множество согласованных планов производственного элемента в ν-ю смену, X_ν — множество возможных планов в ν-й смене, определяемое ограничениями (3.1)—(3.2), μ — средний заработок производственного элемента за одну смену.

Задачу оперативного согласованного планирования шихтоподготовки (3.5)—(3.8) можно рассматривать как задачу математического программирования, и для ее решения можно применить известные методы оптимизации. Последние предполагают, однако, каноническое описание ограничений задачи в виде систем неравенств. Ограничение же (3.7) задачи (3.5)—(3.7) в этом смысле неконструктивно, и, прежде чем перейти к ее решению, необходимо конструктивно в канонической форме описать множество S_ν согласованных планов элемента.

4. Построение множества согласованных планов

Будем опускать для краткости индекс ν. Весьма распространенными на практике системами стимулирования производственных элементов являются системы, содержащие линейные

$$(4.1) \qquad h(c, y) = (c, y) = \sum_{j \in J} c_j y_j$$

или квадратичные

$$(4.2) \qquad h(c, y) = {}^1/_2 (Qy, y) + (d, y)$$

функции выигрыша с функцией штрафов вида (3.4), когда множества X, Y — выпуклые многогранники задаются системой линейных неравенств $X = Y = \{y \mid Ay \leqslant b,\ y \geqslant 0,\ A = \{a_i\},\ a_i = \{a_{ij}\},\ b = \{b_i\},\ i = \overline{1, m},\ j = 1, n\}$.

1. Предположим, что система стимулирования бригад шихтовщиков содержит линейную функцию выигрыша (4.1) и функцию штрафа (3.4).

Теорема 1. Пусть $\chi(x, y) = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant K} \{\chi_k(x, y)\}$, где $\chi_k(x, y)$ — также функция штрафа, которой соответствует множество согласованных планов

$$S_{\chi_k} = \{x \mid h(x) = \max_{y \in Y} (h(y) - \chi_k(x, y)\}.$$

Тогда $S_\chi = \bigcap\limits_{k=1}^{K} S_{\chi_k}$.

Доказательство теоремы 1 дано в приложении.

Нетрудно убедиться в том, что функция штрафа вида (3.4) получается из двух функций штрафов:

$$\chi_1(x, y) = \begin{cases} \infty & y \not\geqslant x, \\ (\alpha, x - y), & y \geqslant x,\ \alpha \geqslant 0 \end{cases}$$

и

$$\chi_2(x, y) = \begin{cases} \sigma > 0, & y \neq x, \\ 0, & y = x, \end{cases}$$

путем взятия операций минимума, т. е. $\chi(x, y) = \min(\chi_1(x, y), \chi_2(x, y))$. Тогда согласно теореме 1 множество S_χ согласованных планов производственного элемента получается как пересечение двух множеств S_{χ_1} и S_{χ_2} согласованных планов элемента, соответствующих функциям штрафа $\chi_1(x, y)$ и $\chi_2(x, y)$, $S_\chi = S_{\chi_1} \cap S_{\chi_2}$.

Теперь для того, чтобы построить множество согласованных планов бригады шихтовщиков, достаточно определить множества S_{χ_1} и S_{χ_2}. Множество S_{χ_2} согласованных планов строится следующим образом. Сначала решается задача линейного программирования

$$(4.3) \qquad h(y) = (c, y) \to \max,$$

$$(4.4) \qquad Ay \leqslant b;\ y \geqslant 0.$$

Пусть y^* — оптимальное решение задачи (4.3), (4.4). Тогда множество S_{χ_2} задается системой линейных неравенств:

$$Ay \leqslant b;\ y \geqslant 0;\ h(y) \geqslant h(y^*) - \sigma.$$

Теперь, используя теорию двойственности для задач линейного программирования, можно выписать следующую систему линейных неравенств, определяющую множества S_{χ_2} согласованных планов: $(b, \lambda) = (c, z)$; $z \geqslant 0$; $Az \leqslant b$; $\lambda \geqslant 0$; $y \geqslant 0$; $Ay \leqslant b$; $(c, y) \geqslant (c, z) - \sigma$, где λ — вектор двойственных переменных, $\lambda = \{\lambda_i\}$, z — вспомогательный вектор той же размерности, что и y, z, $y \in Y$.

Определим теперь множества S_{χ_1} согласованных планов. Пусть Y — ограниченное множество с непустой внутренностью, т. е. $\operatorname{int} Y \neq \varnothing$. Пока-

жем, что множество S_{χ_1} согласованных планов будет находиться на границе множества Y допустимых состояний. Действительно, если $x \in \operatorname{int} Y$, то $x \notin S_{\chi_1}$, так как элементу, получившему такой план, будет невыгодно его выполнить из-за того, что, взяв реализацию $y = x + \varepsilon \mathbf{1} \in Y$, $\varepsilon > 0$, где $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$ — единичный вектор той же размерности, что x, он получит выигрыш $f(x, y) = h(y) + \chi(x, y) = h(x + \varepsilon \mathbf{1}) + \alpha(y - x) = h(x + \varepsilon \mathbf{1}) + (\alpha, \varepsilon \mathbf{1}) = h(x) + (c + \alpha, \varepsilon \mathbf{1}) > h(x)$. Отсюда видно, что план $x \in \operatorname{int} Y$ не является согласованным, т. е. $x \notin S_{\chi_1}$.

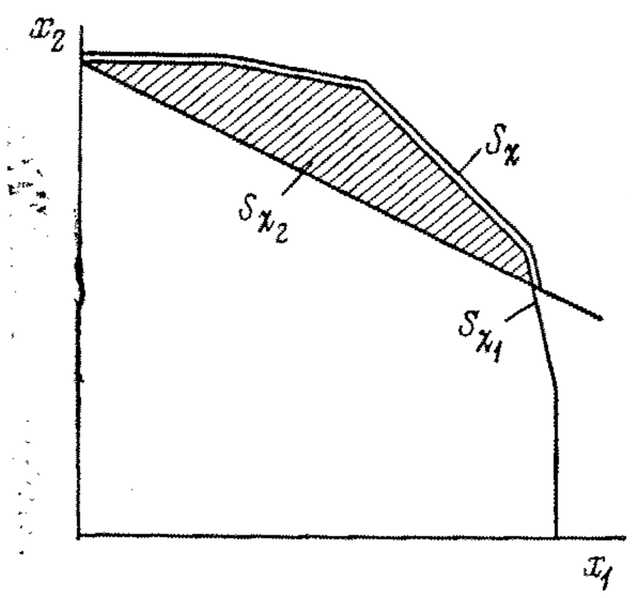

Рис. 3

В приложении доказано, что множество S_{χ_1} согласованных планов будет состоять из таких подмножеств Γ_l границы множества Y, которые описываются системой линейных неравенств вида

$$(a_i, x) = b_i, \ i \in m(\Gamma_l); \ x \in Y,$$

где $m(\Gamma_l)$ — подмножество номеров $\{1, 2, \ldots, m\}$ ограничений (4.4), соответствующих множеству Γ_l, причем векторы a_i, $i \in m(\Gamma_l)$ матрицы ограничений (4.4) такие, что в n-мерном евклидовом пространстве E^n существует вектор β со всеми положительными координатами, для которого справедливо разложение по векторам a_i, $i \in m(\Gamma_l)$ с неотрицательными коэффициентами

$$\lambda_i : \beta = \sum_{i \in m(\Gamma_l)} \lambda_i a_i, \ \lambda_i \geqslant 0, \ \lambda_i \in E^1.$$

Тем самым выяснена структура подмножества S_{χ_1} согласованных планов для механизмов функционирования с системой стимулирования, содержащей линейные функции выигрыша. Она выглядит следующим образом:

$$S_{\chi_1} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_L,$$

где Γ_l — подмножество границы множества Y допустимых состояний, удовлетворяющее системе вида (3.1). Теперь, используя теорему 1, получим, что множество S_χ согласованных планов производственного элемента имеет вид

$$S_\chi = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_L, \text{ где } S_l = \Gamma_l \cap S_{\chi_2}.$$

Пример 1. Пусть $h(y) = y_1 + 2y_2$; $\chi(x, y) = \begin{cases} 4, & y \not\geqslant x, \\ 0, & y \geqslant x, \end{cases}$ множество Y задается системой

$$0 \leqslant y_1 \leqslant 10, \ 0 \leqslant y_2 \leqslant 10, \ y_1 + 3y_2 \leqslant 33, \ 3y_1 + y_2 \leqslant 33, \ y_1 + y_2 \leqslant 15.$$

Легко показать, что при оптимальном решении y^* значение целевой функции $h(y^*) = 15$. Множества S_{χ_2}, S_{χ_1}, S_χ представлены на рис. 3.

2. Рассмотрим теперь систему стимулирования $w = \langle h, \chi \rangle$ производственного элемента с функцией выигрыша (4.2), где матрица Q отрицательно определена, а множество $Y = E^n$. В этом случае множество согласованных планов элемента также представляет собой пересечение двух множеств $S_\chi = S_{\chi_1} \cap S_{\chi_2}$.

Способ построения множества S_{χ_2} здесь такой же, как и в предыдущем пункте. Для этого вначале ищем $h(y^*) = \max h(y)$ по $y \in E^n$. Тогда множество S_{χ_2} будет определяться неравенством $h(x) \geqslant h(y^*) - \sigma = -{}^1/_2 (Q^{-1} d, d) - \sigma$.

Теорема 2. Пусть $h(y)$ — выпуклая вверх дифференцируемая функция, $\chi(x, y) = \max(b, y - x)$ по $b \in B$, B — замкнутое выпуклое множество, $Y = E^n$. Тогда необходимым и достаточным условием согласованности плана x является условие $\nabla h(x) \in B$, где $\nabla h(x)$ — градиент функции $h(x)$.

Доказательство теоремы 2 дано в приложении. Теоремы 1 и 2 доказаны авторами совместно с М. З. Арслановым [7].

Для нахождения множества S_{χ_1} воспользуемся теоремой 2. С этой целью функцию $\chi_1(x, y)$ можно представить в виде

$$\chi_1(x, y) = \max_{b \in B} (b, y-x),$$

где

$$B = \{b \mid b \in E^n,\ b \geqslant \alpha\}.$$

Отсюда следует, что $x \in S_{\chi_1}$ в том и только в том случае, когда $Qx \geqslant \alpha$.

Окончательно множество S_χ согласованных планов задается системой неравенств

$$Qx \geqslant \alpha,\ {}^1/_2(Qx, x) + (\alpha, x) \geqslant -{}^1/_2(Q^{-1}d, d) - \sigma.$$

Пример 2. Пусть $h(y) = -{}^1/_2(y_1^2 + y_2^2)$, $y = \{y_1, y_2\}$, $x = \{x_1, x_2\}$,

$$\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2\}, \qquad \chi(x, y) = \begin{cases} \sigma, & y \not\geqslant x, \\ \alpha_1(x_1 - y_1) + \alpha_2(x_2 - y_2), & y \geqslant x. \end{cases}$$

Тогда множества S_χ согласованных планов определятся системой

$$x_1^2/2 + x_2^2/2 \leqslant \sigma;\ x_1 \geqslant \alpha_1,\ x_2 \geqslant \alpha_2.$$

Если $\alpha_1^2/2 + \alpha_2^2/2 > \sigma$, то множество S_χ оказывается пустым. Условие ${}^1/_2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \leqslant \sigma$ является необходимым и достаточным для непустоты множества S_χ согласованных планов.

5. Решение задачи согласованного планирования

В зависимости от вида системы стимулирования производственных элементов и целевой функции центра возможны следующие способы решения задачи (3.5)–(3.7).

Пусть функция выигрыша элемента $h(y) = (c, y) = \sum_{j \in J} c_j y_j$, функция штрафа имеет вид (3.4).

Если целевая функция центра $\Phi(x, x)$ линейна, то оптимальный согласованный план находится как решение следующей задачи линейного программирования:

$$\Phi(x, x) \to \max \text{ по } x \in \operatorname{conv}(S_\chi),$$

где $\operatorname{conv}(S_\chi)$ — выпуклая оболочка множества S_χ. Здесь использован тот факт, что оптимальное решение задачи линейного программирования находится в одной из вершин многогранника решений.

Если целевая функция центра $\Phi(x, x)$ нелинейна, то можно отдельно решить L задач вида

$$\Phi(x, x) \to \max,\ x \in S_l,$$

каждая из которых имеет многогранное множество ограничений, затем сравнить все L решений и выбрать из них наилучшее, $l = \overline{1, L}$.

Перейдем теперь к решению задачи оперативного согласованного планирования шихтоподготовки (3.5)–(3.7). Применение вышеизложенных результатов приводит к следующим двум задачам ($L = 2$):

(5.1) $\qquad \Phi(x_\nu, x_\nu) \to \min$ по $x_\nu \in X_\nu;\ x_\nu \in S_\nu^1$,

(5.2) $\qquad \Phi(x_\nu, x_\nu) \to \min$ по $x_\nu \in X_\nu;\ x_\nu \in S_\nu^2$.

Множество S_ν согласованных планов элемента в ν-й смене равно объединению двух множеств $S_{\nu 1}$ и $S_{\nu 2}$: $S_\nu = S_{\nu 1} \cup S_{\nu 2}$, где $S_{\nu 1} = \Gamma_{\nu 1} \cap S_{\chi_1}$, $S_{\nu 2} = \Gamma_{\nu 2} \cap S_{\chi_2}$. Множество $S_{\nu 1}$ описывается системой

$$\sum_{j \in J} x_{\nu j} = R; \qquad \sum_{j \in J} c_j x_{\nu j} \geqslant h^* - \sigma,$$

а множество $S_{\nu 2}$ определяется системой

$$\sum_{j\in J} t_j x_{\nu j}=T, \qquad \sum_{j\in J} c_j x_{\nu j}\geqslant h^*-\sigma,$$

где h^* — значение функции выигрыша производственного элемента при оптимальном решении задачи линейного программирования: $\sum_{j\in J} c_j y_{\nu j}\to$ $\to\max$ по $y_\nu\in Y_\nu$. Стандартным преобразованием задачи квадратичного программирования (5.1), (5.2) сводятся к задаче линейного программирования, после чего для их решения можно использовать, например, симплекс-метод. Наилучшее из решений этих задач и дает решение исходной задачи, оперативного согласованного планирования шихтоподготовки.

Авторы выражают благодарность сотрудникам Усть-Каменогорского свинцово-цинкового комбината им. В. И. Ленина Куленову А. С., Слободкину Л. В., Естаеву Д. Е., Шабрину А. Т., Бересневу А. А. за плодотворное сотрудничество.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Следующая лемма определяет свойства элементов множества S_{χ_1}.

Лемма. Для согласования допустимого плана x в смысле $x\in S_{\chi_1}$ необходимо и достаточно, чтобы конус $E_+{}^n=\{z,\ z\geqslant 0\}$, помещенный в точку x, своим острием пересекался с множеством Y в единственной точке x.

Доказательство леммы. Необходимость. Пусть точка $x_0\in S_{\chi_1}$. Тогда конус возможных направлений $K(x_0)$ в этой точке не может содержать вектор $p\in E^n$ со всеми неотрицательными координатами. В противном случае при плане x элементу было бы выгодно выбрать реализацию $y=x+\varepsilon p\in Y$ при некотором $\varepsilon>0$, так как $f(x,\ y)=$ $=h(y)-\chi(x,\ y)=h(x+\varepsilon p)-\chi_1(x,\ x+\varepsilon p)=h(x)+h(\varepsilon p)+\varepsilon(\alpha,\ p)=h(x)+\varepsilon(c+\alpha,\ p)>h(x)$.

Следовательно, по теореме об отделяющей гиперплоскости существует вектор β, $\beta\neq 0$, такой, что $(\beta,\ x)>(\beta,\ y)$, $x\in E_+{}^n/\{0\}$, $y\in K(x_0)$. Отсюда следует, что $(\beta,\ x)>0$ и $\beta>0$. Кроме того, $\forall y\in K(x_0):(\beta,\ y)\leqslant 0$. Поэтому из свойства выпуклых конусов имеем

$$\beta\in -K^*(x_0)=\left\{\sum_{i\in m(\Gamma_l)}\lambda_i a_i \,|\, (a_i, x_0)=b_i,\ \lambda_i\geqslant 0,\ i\in m(\Gamma_l)\right\}.$$

Достаточность. Пусть точка x_0 такая, что конус возможных направлений $K(x_0)$ не содержит вектора со всеми неотрицательными координатами. Тогда $x_0\in S_{\chi_1}$. В самом деле, предположим противное: $x_0\notin S_{\chi_1}$. Значит, $\exists y\in Y$

$$h(y)-\chi_1(x_0,\ y)>h(x_0).$$

Ясно, что $y\geqslant x_0$. Но вектор $y-x_0$ не принадлежит $K(x_0)$. Получили противоречие. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Теорему достаточно доказать для случая $k=2$. Доказательство проведем в два этапа.

Пусть $x\in S_\chi$, тогда $x\in S_{\chi_1}\cap S_{\chi_2}$. В самом деле, по определению S_χ для $\forall y\in Y: h(x)\geqslant$ $\geqslant h(y)-\min(\chi_1(x,\ y),\ \chi_2(x,\ y))$. Это неравенство эквивалентно двум неравенствам: $h(y)-h(x)\leqslant\chi_1(x,\ y)$ для $\forall y\in Y$; $h(y)-h(x)\leqslant\chi_2(x,\ y)$ для $\forall y\in Y$. Но первое неравенство эквивалентно $x\in S_{\chi_1}$, а второе $x\in S_{\chi_2}$. Значит, действительно $x\in S_{\chi_1}\cap S_{\chi_2}$.

Доказательство того, что из условия $x\in S_{\chi_1}\cap S_{\chi_2}$ следует $x\in S_\chi$, выполняется аналогично.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Достаточность. Пусть $\nabla h(x)\in B$. Возьмем реализацию $y=x+\Delta x$, тогда $f(x,\ y)=h(x+\Delta x)-\chi(\Delta x)\leqslant h(x)+(\Delta x,\ \nabla h(x))-\chi(\Delta x)$ в силу выпуклости вверх функции $h(y)$. По определению функции штрафа для $\forall b\in B$: $\chi(\Delta x)\geqslant$ $\geqslant(b,\ \Delta x)$, в том числе и при $b=\nabla h(x)$. Поэтому $f(x,\ y)\leqslant h(x)+(\Delta x,\ \nabla h(x))-$ $-(\nabla h(x),\ \Delta x)=h(x)=f(x,\ x)$. Отсюда следует, что $x\in S_\chi$.

Необходимость. Пусть $x\in S_\chi$, но $\nabla h(x)\notin B$. Поскольку B — замкнутое выпуклое множество и $\nabla h(x)\notin B$, то по теореме об отделяющей гиперплоскости [8] существует y_0, такой, что для $\forall b\in B$ имеет место $(\nabla h(x),\ y_0)>(b,\ y_0)$ и, следовательно, для $y_0:(\nabla h(x), y_0)>\max\limits_{b\in B}(b, y_0)$.

Кроме того, так как B — замкнутое множество, то в силу ограниченности сверху линейной функции $(b,\ y_0)$ $\max(b,\ y_0)$ по $b\in B$ достигается. Значит, существует $\alpha>0$, такое, что $(\nabla h(x),\ y_0)-\alpha>\chi(y_0)$. В силу однородности функции штрафа $\chi(y)$ для $\forall\varepsilon>0$ имеет место

$$(\nabla h(x),\ \varepsilon y_0)-\alpha\varepsilon>\chi(\varepsilon y_0). \tag{П.1}$$

Выберем $y=x+\varepsilon y_0$ при достаточно малом $\varepsilon>0$. Тогда

$$f(x, y)=h(x+\varepsilon y_0)-\chi(\varepsilon y_0)=h(x)+(\nabla h(x), \varepsilon y_0)+o(\varepsilon)-\chi(\varepsilon y_0),$$

где $o(\varepsilon)$ – бесконечно малая высшего порядка, чем ε. В силу (П.1) получим $f(x, x+\varepsilon y_0)>h(x)+\alpha\varepsilon+o(\varepsilon)$. Но это значит, что для некоторого $\varepsilon_0>0$ имеет место $f(x, x+\varepsilon_0 y_0)>h(x)$, что противоречит условию $x\in S_\chi$. Необходимость доказана, а с ней и вся теорема.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бурков В. Н.* Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977.
2. *Бурков В. Н., Кондратьев В. В.* Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981.
3. *Лоскутов Ф. М.* Металлургия свинца. М.: Металлургия, 1965.
4. *Слободкин Л. В.* Подготовка и агломерация свинцового сырья. М.: Металлургия, 1972.
5. *Дудников Е. Е., Цодиков Ю. М.* Типовые задачи оперативного управления непрерывным производством. М.: Энергия, 1979.
6. *Данилин Л. А., Преде Л. В.* Алгоритм расчета шихты для печей обжига сульфидного цинкового концентрата в кипящем слое.– Изв. вузов. Цв. металлургия. М.: 1978, № 5, с. 15–18.
7. *Ашимов А. А., Арсланов М. З., Джапаров Б. А.* Методы построения множеств согласованных планов в активных системах.– В кн.: Материалы VIII всесоюз. семинара-совещания: Управление большими системами. Алма-Ата, 1983, с. 57–58.
8. *Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М.* Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука, 1975.

Поступила в редакцию
8.XII.1983

CURRENT COORDINATED MANAGEMENT MECHANISMS FOR INDUSTRIAL SYSTEMS

I. COORDINATED SCHEDULING OF CONTINUOUS PROCESSES

ASHIMOV A. A., BURKOV V. N., DZHAPAROV B. A., KONDRAT'EV V. V.

The paper is concerned with current coordinated scheduling which would ensure that a two-level active cintinuous production system meets the planned targets. Studies of properties of incentives for active production elements suggest constructive ways to design sets of coordinated schedules.