УДК 51-77
ББК 22.18

СТОХАСТИЧЕКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ФОРМИРОВАНИЯ ГОРОДОВ

Васильева Т. П.[1], Мызникова Б. И.[2], Русаков С. В.[3]
(*Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь*)

Предложена математическая модель, включающая описание двух взаимодействующих подсистем городского хозяйства. Дана интерпретация результатов моделирования, полученных с помощью реальных статистических данных.

Ключевые слова: математическое программирование, вероятностная технология, городская система.

1. Введение

Эволюция городской системы определяется рядом условий экономического, политического, культурного, исторического характера. Ее стратегическое планирование должно учитывать, в числе первоочередных, обстоятельства, связанные с эффективным функционированием индустриальных объектов, влияющим на миграционные потоки, уровень взаимодействия с научно-образовательными центрами, состояние сети учреждений здравоохранения и многое другое.

В данной работе предложена математическая модель, включающая описание двух взаимодействующих подсистем – «насе-

---

[1] *Татьяна Павловна Васильева, аспирант (vasilyeva_09@mail.ru, тел. 89026447820).*
[2] *Бэла Исаковна Мызникова, кандидат физико-математических наук, доцент (тел. (342) 239-63-41).*
[3] *Сергей Владимирович Русаков, доктор физико-математических наук, профессор (тел. (342) 239-64-09).*

ление» и «градообразующая база». По результатам моделирования на основе реальных статистических данных построены матрицы вероятностей распределения потоков продукции между отраслевыми блоками и миграционных потоков.

2. Математическая модель городской системы хозяйства

2.1. МАКРОСИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ ГОРОДА

Город характеризуется множеством различных факторов, определяющих процессы, происходящие в его системе. Краткий аналитический обзор компьютерных технологий моделирования городского хозяйства приведен в [1, 2]. Стохастичность его эволюции является естественным качеством, которое необходимо учитывать при решении проблем муниципального управления, что делает город весьма специфическим объектом исследования.

Городская система относится к классу сложных динамических систем. Одно из направлений моделирования ее развития основано на концепциях социальной физики [5], интерпретирующей и изучающей целеустремленные системы с помощью общих физических закономерностей. Многие из них являются следствием фундаментальных экстремальных принципов [6]. Суть подхода состоит в том, что движение динамической системы рассматривается в направлении максимизации (минимизации) некоторого функционала. Экстремальные принципы не являются единственным основанием моделирования механизмов взаимодействия подсистем. Другим, не менее распространенным, подходом к построению моделей является феноменологический подход, предлагающий описание процессов в подсистемах городского хозяйства в виде балансовых уравнений. Можно ожидать, что наибольший эффект при моделировании города обеспечит сочетание какого-либо экстремального принципа с феноменологией изучаемых явлений [4].

2.2. МОДЕЛЬ ПОДСИСТЕМЫ «ГРАДООБРАЗУЮЩАЯ БАЗА»

Рассмотрим модель городской подсистемы, называемой в дальнейшем «градообразующая база» [9]. Эта подсистема включает объекты, распределенные по городской территории, которые могут быть объединены в группы, например, в соответствии с отраслевой принадлежностью: группы машиностроительных предприятий, предприятий строительной индустрии, научно-исследовательских и проектных организаций и т.п.

Объекты отраслей размещены на городской территории и могут изменяться с течением времени, поэтому показатели ее состояния зависят от пространственной переменной x и от времени t. Считается, что рассматриваемая подсистема включает группы объектов из A отраслей, обменивающихся произведенной продукцией через товарный рынок, который формирует соответствующие цены $p_1^*(x, t), \ldots, p_A^*(x, t)$. Каждая отрасль производит один продукт, количество которого характеризуется объемом выпуска $Y_i(x, t)$, $i = 1, 2, \ldots, A$, используя для этого основные фонды (производственные мощности) $M_i(x, t)$ и трудовые ресурсы $R_i^E(x, t)$.

Каждая отрасль для производства собственного продукта использует выпуск других отраслей, предприятия которых локализованы на территории города. Если технология требует употребления продукции отраслей, чьи предприятия расположены вне городской черты, то соответствующие районы считаются присоединенными к городу, что позволяет рассматривать данную подсистему как замкнутую (самодостаточную). Сделанные предположения соответствуют концепции межотраслевого баланса [7].

Межотраслевое взаимодействие через товарный рынок порождает потоки продуктов $y_{ki}(x, t)$, $k, i = 1, 2, \ldots, A$.

Произвольная i-я отрасль, $i = 1, 2, \ldots, A$, представляется совокупностью производственных единиц. Под производственной единицей понимается ячейка предприятия, производящая единицу продукции i-й отрасли. Эффективность соответствующего производственно-технологического процесса измеряется количеством работников λ_i, обеспечивающих выпуск единицы продукции. Тогда лучшей считается технология (λ_i^0), которая использует меньшее количество работников, а худшей – технология (λ_i^1), требующая более высоких затрат трудовых ресурсов. Переменная λ_i предполагается непрерывной.

Отсортируем все производственные единицы по технологическому уровню, т.е. по количеству работников, занятых в процессе производства единицы продукта. Получившееся распределение производственных единиц по технологиям, зависящее также от пространственной координаты и времени, обозначим $m_i(x, \lambda, t)$.

Из определения функции $m_i(x, \lambda, t)$ следует соотношение

$$(1)\quad \int_{\lambda_i^0}^{\lambda_i^1} m_i(x,\lambda,t)d\lambda = M_i(x,t)\,,$$

где $M_i(x, t)$ – общее количество производственных единиц i-й отрасли (производственная мощность отрасли), размещенных в точке x городской территории в момент времени t.

Введем функцию технологической структуры

$$(2)\quad \psi_i(x,\lambda,t) = \frac{m_i(x,\lambda,t)}{M_i(x,t)}\,,$$

характеризующую распределение долей производственных единиц по технологиям. Функция $\psi_i(x, \lambda, t)$ определена на интервале $\lambda_i^0 \le \lambda_i \le \lambda_i^1$ и нормирована по «технологической» переменной λ_i:

$$(3)\quad \int_{\lambda_i^0}^{\lambda_i^1} \psi_i(x,\lambda,t)d\lambda = 1\,.$$

Поскольку в рыночной экономике успешно функционируют только рентабельные производства, то не все производственные единицы с технологиями из интервала $\lambda_i^0 \le \lambda_i \le \lambda_i^1$ оказываются реально задействованными. Существует пороговый уровень рентабельности технологии λ_i^*, такой, что производственные единицы, уровень рентабельности которых больше, чем λ_i^*, не выживают в рыночных условиях.

Показатель рентабельности будем оценивать, исходя из уровня дохода и структуры затрат производственной единицы. В простейшем случае доход производственной единицы определяется рыночной ценой $p_i(x, t)$. Затраты отрасли обычно разделяют на производственные и непроизводственные. Производственные затраты связаны с потреблением в процессе производства части собственного выпуска, а также продукции других отраслей. В стоимостном выражении это означает, что производственные затраты равны суммарной стоимости продуктов всех отраслей, используемых производственными единицами i-ой отрасли. Введем величину

$$(4) \quad \tilde{y}_{ki}(x,t) = \frac{y_{ki}(x,t)}{M_i(x,t)},$$

описывающую количество продукта k-й отрасли, используемое производственной единицей i-й отрасли. Стоимостное выражение этой компоненты производственных затрат рассчитывается по правилу $p_k(x,t) \cdot \tilde{y}_{ki}(x,t)$. Непроизводственные затраты определяются заработной платой $s_i(x, t)$ и количеством работающих λ_i в производственной единице i-й отрасли.

Таким образом, уровень рентабельности производственной единицы i-й отрасли может быть определен из следующего условия:

$$(5) \quad p_i(x,t) - \sum_{k=1}^{A} p_k(x,t) \frac{y_{ki}(x,t)}{M_i(x,t)} - \lambda_i s_i(x,t) \geq 0\,.$$

Основные фонды $M_i(x, t)$ также имеют определенную динамику, обусловленную факторами старения и обновления. Считается, что скорость их старения пропорциональна размерам основных фондов в данный момент времени. Коэффициент пропорциональности обозначим β_i. Обновление основных фондов происходит за счет собственных средств отрасли и за счет внешних инвестиций. Часть собственного выпуска, которая направляется на обновление основных фондов, равна $b_iY_i(x, t)$.

Внешние инвестиции обозначим $I_i(x, t)$. Тогда в линейном приближении динамику основных средств можно описать следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dM_i(x,t)}{dt} = \beta_i M_i(x,t) + b_i Y_i(t) + I_i(x,t)\,. \tag{6}$$

Важным параметром, от которого зависит уровень рентабельности, а следовательно, и объем выпуска и количество занятых в процессе производства, является рыночная цена $p_i(x, t)$ продукта, выпускаемого производственной единицей i-й отрасли. Проблема формирования рыночной цены довольно сложна, поскольку этот показатель зависит от комплексного влияния рыночных факторов. В ходе моделирования будем предполагать, что отрасли являются участниками рынка и равновесная рыночная цена устанавливается достаточно быстро. Равновесные цены на товарном рынке обычно определяются из условий баланса доходов и расходов отрасли. В этом смысле условия равновесия выводятся аналогично условиям рентабельности производственной единицы. Однако структура расходов отрасли отличается от той, которая типична для производственной единицы. В частности, производственные расходы отрасли включают расходы на обновление производства. Считается, что эти расходы реализуются из собственных средств отрасли, т.е. из ее дохода. Расходы на инновации рассчитываются по правилу $b_i p_i(x, t) Y_i(x, t)$, где b_i – доля дохода, расходуемая на обновление производства. Остальные компоненты производственных и непроизводственных издержек те же, что и в определяющем соотношении для рентабельности производственной единицы.

В отсутствие прибыли баланс доходов и расходов отраслей описывается следующей системой линейных алгебраических уравнений:

$$(1-b_i)p_i(x,t)Y_i(x,t) - \sum_{k=1}^{A} p_k(x,t)y_{ki}(x,t) - R_i^E(x,t)s_i(x,t) = 0\,, \tag{7}$$

$i = 1, \ldots, A$.

Представим систему (7) в векторно-матричной форме:

$$G(x,t)p(x,t) = r(x,t)\,, \tag{8}$$

где введены следующие обозначения:

$$G(x,t) =$$

(9) $$= \begin{bmatrix} (1-b_1)Y_1 - y_{11}(x,t) & -y_{12}(x,t) & \cdots & -y_{1A}(x,t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -y_{A1}(x,t) & -y_{A2}(x,t) & \cdots & (1-b_A)Y_A - y_{AA}(x,t) \end{bmatrix},$$

$$r(x,t) = \begin{pmatrix} R_1^E(x,t)s_1(x,t) \\ \vdots \\ R_A^E(x,t)s_A(x,t) \end{pmatrix}.$$

Решение системы (7) – вектор равновесных цен – имеет вид

(10) $p^*(x,t) = G^{-1}(x,t)r(x,t)$.

Условия (5) и выражение (10) определяют уровень рентабельности производственной единицы и равновесные цены реализуемой продукции.

В модели (5), (10) все отрасли взаимосвязаны через потоки продукции $y_{ki}(x, t)$ и используемые в процессе производства доли выпусков $Y_i(x, t)$, $i = 1, 2, \ldots, A$, которые, в свою очередь, зависят от уровней рентабельности λ_i^* производственных единиц и цен $p_i^*(x,t)$.

Рыночный межотраслевой обмен произведенной продукцией носит случайный характер с элементами внешнего регулирования, что обусловлено невозможностью планирования спроса на продукт отрасли, конъюнктурой рынка, стратегией менеджеров и другими причинами.

В соответствии со стохастической концепцией рынка, доли выпуска k-й отрасли могут случайным образом, с априорной вероятностью $a_{ki}(x, t)$, попасть в технологический процесс i-й отрасли. Наличие априорных вероятностей вносит элемент регуляризации в товарный обмен. Они зависят от текущего состояния выпусков отраслей, т.е. $a_{ki}(x, t) = a_{ki}(x; Y_1, \ldots, Y_A)$, и предопределяют возможное распределение продукта одной отрасли среди продукции других отраслей. В качестве вероятностной характеристики указанного распределительного процесса может быть использована энтропийная функция:

(11) $H(y,Y)=\sum_{k,i=1}^{A} y_{ki}(x,t)\ln\frac{y_{ki}(x,t)}{a_{ki}(Y(x,t))}$,

где $y(x, t) = [y_{ki}(x, t) \mid k, i = 1, \ldots, A]$ – матрица потоков продуктов, которыми обмениваются отрасли. Компоненты этой матрицы должны удовлетворять следующим ограничениям:

(12) $\sum_{i=1}^{A} y_{ki}(x,t)\le Y_k(x,t)$, $k=1,\ldots,A$.

Реализуемое распределение потоков продуктов среди A отраслей определяется следующей задачей максимизации энтропии:

(13) $y^*(x,t)=\arg\max(H(y,Y)\,|\,y\in D(Y))$,

где допустимое множество D определяется системой неравенств (12).

Таким образом, построена замкнутая модель градообразующей базы, в формировании которой использована комбинация макросистемного и феноменологического подходов. Входными переменными в этой модели являются внешние инвестиции $I_1, \ldots, I_A$ и заработные платы $s_1, \ldots, s_A$ в отраслях производственно-технологического сектора экономики города.

2.3. МОДЕЛЬ ПОДСИСТЕМЫ «НАСЕЛЕНИЕ»

Эта подсистема занимает особое положение в городской системе, поскольку ее элементами являются люди, обладающие собственными целями и интересами. Поэтому предполагается, что целенаправленное изменение состояния подсистемы «население» осуществляется косвенно, посредством изменений состояния других городских подсистем.

Рассмотрим задачу о распределении населения по N регионам. Считается, что между регионами происходит обмен людскими ресурсами. В результате возникают миграционные потоки y_{nj} (n, j – номера регионов), при этом $y_{nj} > 0$. Состояние миграционного процесса характеризуется матрицей потоков $Y(t) = [y_{nj}(t) \mid n, j = 1, \ldots, N]$. Интенсивность миграционных потоков может изменяться во времени в зависимости от состояния регионов (экономического, экологического и др.). Однако считается, что при возникновении каких-либо условий, стимулирующих такие изменения, новое состояние миграционного процесса устанавливается достаточно быстро, а именно, быстрее, чем происходят изменения в процессе воспроизводства. Эта особенность миграции позволяет использовать методику макросистемного моделирования динамических процессов, которая изложена при описании подсистемы «градообразующая база».

Полагая, что миграционный процесс имеет стохастическую природу, для характеристики возможных его состояний введем функцию энтропии:

$$(14)\quad H(y,Y) = -\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} y_{nj} \ln \frac{y_{nj}}{a_{nj}},$$

где a_{nj} – априорные вероятности перемещения жителя из n-го региона в регион с номером j, при этом $a_{nj} > 0$. Эти вероятности зависят от факторов, определяющих интерес к перемене региона проживания. Ресурсные возможности приема новых жителей регионов ограничены. Поэтому миграционные потоки y_{nj} должны удовлетворять следующим условиям:

$$(15)\quad \sum_{n=1}^{N} y_{nj} \le F(j,t),\ \ j = 1,\ldots,N,$$

где $F(j, t)$ – предельное количество населения, которое может принять регион j.

Поскольку миграционный процесс протекает достаточно быстро, его стационарное состояние $Y^*(t)$ может быть определено следующим образом:

$$(16)\quad Y^*(t) = \arg\max\left\{H(Y)\middle|Y \in D\right\},$$

где D – допустимое множество, описанное выше.

Таким образом, к моделированию подсистемы «население», аналогично подсистеме «градообразующая база», применим макросистемный подход, использующий энтропию в качестве характеристики распределения элементов подсистемы.

2.4. РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Опишем решение задачи (13) максимизации энтропии для подсистемы «градообразующая база», функция цели которой определяется выражением (11), а условия допустимости решения – балансовыми ограничениями (12). Модель (11)–(13) представляет собой оптимизационную задачу нелинейного программирования. Как известно [8], относительный оптимум задачи математического программирования, при определенных условиях, совпадает с абсолютным экстремумом функции Лагранжа исходной задачи:

$$(17)\quad L(y,\lambda) = -H(y,Y) + \sum_{i=1}^{A} \lambda_i \left[Y_i(x,t) - \sum_{k=1}^{A} y_{ki}(x,t) \right] =$$
$$- \sum_{k,i=1}^{A} y_{ki}(x,t) \ln \frac{y_{ki}(x,t)}{a_{ki}(Y(x,t))} + \sum_{k=1}^{A} \lambda_k \left[Y_k(x,t) - \sum_{i=1}^{A} y_{ki}(x,t) \right],$$

где λ_k – неизвестные множители.

В соответствии с теоремой Каруша–Джона [8], необходимые условия экстремума функции Лагранжа приводят к системе уравнений:

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial L(y,Y)}{\partial y_{ki}} = 0, \\ \lambda_k (Y_k(x,t) - \sum\limits_{i=1}^{A} y_{ki}(x,t)) = 0, \\ \lambda_k \geq 0, \\ k,i = 1,\ldots,A. \end{cases}$$

Решение данной системы имеет вид:

$$(19)\quad y_{ki} = a_{ki} \frac{Y_{ki}}{\sum\limits_{i=1}^{A} a_{ki}(Y(x,t))},\ k,i = 1,\ldots,A$$

Для найденной критической точки проверка достаточного условия локального максимума состоит в исследовании отрицательной определенности матрицы Гессе, элементами которой являются вторые производные функции Лагранжа, вычисленные в критической точке. Критерием отрицательной определенности матрицы является чередование знаков ее главных миноров, начиная с минуса. Поскольку матрица Гессе для функции Лагранжа задачи (11)–(13) представляет собой диагональную матрицу, элементы которой отрицательны:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial {y_{ki}}^2}(y_{ki^*}, \lambda^*) = -\frac{1}{y_{ki}} = -1 \Bigg/ \left[a_{ki} \frac{Y_k}{\sum_{i=1}^{A} a_{ki}(Y(x,t))} \right] < 0, \quad (20)$$

то достаточное условие экстремума также выполняется.

Таким образом, с помощью (19) можно найти распределение потоков продукции между отраслями региона согласно принятым априорным вероятностям. Аналогичное решение имеет задача для подсистемы «население».

3. Стохастическое моделирование региональной подсистемы

Для иллюстрации возможностей описанного подхода применим его к моделированию ситуации в ряде регионов Российской Федерации. Отметим, что для построения матриц вероятностей рассматривается промежуток времени до экономического кризиса 2008 г. в России, поскольку стационарное состояние исследуемых процессов возможно только в условиях стабильного развития страны. При этом данные рассматривались на временном интервале 2000–2006 гг., на котором и было установлено стационарное состояние, то есть на данном периоде значения приведенных далее матриц меняются незначительно.

Выделим следующие отраслевые блоки: отрасли промышленности (машиностроение, энергетика и т.п.; объем выпуска Y_1), обслуживающие отрасли (транспорт и связь, жилищно-коммунальное хозяйство и т.п.; объем выпуска Y_2), социальная сфера (здравоохранение, образование и т.п.; объем выпуска Y_3).

Для определения матрицы вероятностей распределения продукции между тремя указанными отраслевыми блоками будем использовать прием районирования технологических коэффициентов межотраслевого баланса, построенного для национальной экономики, что является своего рода привязкой общегосударственных коэффициентов к изучаемому региону. Такой метод используется в ситуациях, когда данных прямых обследований недостаточно для оценки коэффициентов прямых затрат и необходимо привлекать макроэкономическую информацию [3].

Начиная с 1992 года Госкомстат России публикует межотраслевые балансы в концепции системы национальных счетов [10], представляющие собой симметричные таблицы «Затраты–выпуск». По столбцам отражается стоимостный состав валового выпуска отраслей экономики по элементам промежуточного потребления и добавленной стоимости, а по строкам – направления использования ресурсов каждой отрасли.

Для экономики России в разрезе трех указанных отраслевых блоков по данным Госкомстата за 2003 год [10] построим матрицу $y_{РФ}$ потоков продукции и матрицу $Y_{РФ}$ выпусков (в стоимостном выражении, тыс. руб.):

$$(21)\quad y_{РФ} = \begin{pmatrix} 3620489904 & 2073951469 & 240082224 \\ 2134963423 & 3354036982 & 254483242 \\ 4697961 & 9974228 & 22494534 \end{pmatrix},$$

$$Y_{РФ} = \begin{pmatrix} 5934523597 \\ 5743483647 \\ 37166723 \end{pmatrix}.$$

Элемент y_{ki} показывает, сколько продукции k-го отраслевого блока необходимо для производства продукции отраслевого блока номер i. С помощью (19) получим матрицу вероятностей распределения продукции:

$$(22)\quad a_{РФ} = \begin{pmatrix} 0{,}61071 & 0{,}3495 & 0{,}0405 \\ 0{,}3717 & 0{,}5840 & 0{,}0443 \\ 0{,}1264 & 0{,}2684 & 0{,}6052 \end{pmatrix}.$$

Значения элементов этой матрицы практически постоянны в рамках анализируемого промежутка времени, равного 6 годам.

Проанализируем показатели по видам экономической деятельности в Пермском крае в 2006 году [11]. По данным Госкомстата России, матрица выпусков продукции по рассматриваемым отраслевым блокам (в млрд. руб.) имеет следующий вид:

(23) $$Y_{\text{Перм}} = \begin{pmatrix} 466{,}6 \\ 199{,}5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Используя матрицу вероятностей (22), найдем матрицу потоков продукции в тех же денежных единицах:

(24) $$y_{\text{Перм}} = \begin{pmatrix} 284{,}660 & 163{,}064 & 18{,}876 \\ 74{,}158 & 116{,}503 & 8{,}839 \\ 0{,}885 & 1{,}879 & 4{,}237 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получен аналитический инструмент, позволяющий оценить потребности рассматриваемых блоков отраслей в продукции друг друга, применительно к любому региону России, что особенно актуально в ситуации, когда нет опубликованной информации о межотраслевом балансе в региональном разрезе. С другой стороны, данный подход является альтернативой прямому обследованию состояния предприятий, которое не всегда возможно.

Обсудим результаты моделирования подсистемы «население». Рассмотрим процесс миграции населения между федеральными округами Российской Федерации. Госкомстат ежегодно публикует данные внутрироссийской миграции по территориям прибытия и выбытия населения в виде симметричной таблицы. В таблице 1 приведено число мигрантов по федеральным округам за 2004 год [12].

Таблица 1. Внутрироссийская миграция по территориям прибытия и выбытия за 2004 г., тыс. чел.

	Ц.	С.-З.	Юж.	Пр.	Ур.	С.	Д.
Цен.	311,2	17,1	13,8	14,7	6,1	6,3	4,5
С.-З.	25,6	126,5	7,6	9,3	2,9	2,8	1,8
Юж.	33,7	9,7	22,2	10,4	10,1	6,0	3,7
Пр.	36,7	11,7	11,6	331,3	25,2	6,7	3,6
Ур.	14,2	5,1	10,3	22,4	145,4	8,3	1,5
Сиб.	19,5	6,8	10,5	9,2	11,3	315,0	9,1
Дал.	16,3	4,7	7,1	5,6	2,6	9,9	91,7

Недиагональные элементы каждого столбца таблицы 1 характеризуют соответствующий федеральный округ с точки зрения его потенциальной привлекательности для проживания, а элементы строк – наоборот, в смысле потенциальной готовности жителей переехать в другой округ. Элементы, стоящие вдоль главной диагонали таблицы, представляют численность населения округа за вычетом эмигрировавших. Общее число выбывших жителей из указанных федеральных округов сведено в таблице 2.

Таблица 2. Число жителей, выбывших из федеральных округов России в 2004 г., тыс. чел.

Центральный ф. о.	373,7
Северо-Западный ф. о.	176,4
Южный ф. о.	295,2
Приволжский ф. о.	426,7
Уральский ф. о.	207,0
Сибирский ф. о.	381,3
Дальневосточный ф. о.	137,9

Используя полученную информацию в качестве исходной для моделирования подсистемы «население», построим матрицу вероятностей миграции населения между рассматриваемыми федеральными округами:

$$(25)\quad a_{\text{нас}} = \begin{pmatrix} 0{,}833 & 0{,}046 & 0{,}037 & 0{,}039 & 0{,}016 & 0{,}017 & 0{,}012 \\ 0{,}145 & 0{,}717 & 0{,}043 & 0{,}053 & 0{,}016 & 0{,}016 & 0{,}010 \\ 0{,}114 & 0{,}033 & 0{,}751 & 0{,}035 & 0{,}034 & 0{,}020 & 0{,}012 \\ 0{,}086 & 0{,}027 & 0{,}027 & 0{,}776 & 0{,}059 & 0{,}016 & 0{,}008 \\ 0{,}068 & 0{,}024 & 0{,}050 & 0{,}108 & 0{,}702 & 0{,}040 & 0{,}007 \\ 0{,}051 & 0{,}018 & 0{,}027 & 0{,}024 & 0{,}030 & 0{,}826 & 0{,}024 \\ 0{,}118 & 0{,}034 & 0{,}052 & 0{,}041 & 0{,}019 & 0{,}072 & 0{,}665 \end{pmatrix}.$$

Значения элементов данной матрицы с течением времени также изменяются незначительно. С ее помощью по формуле (19) можно получить распределение миграционных потоков между рассматриваемыми федеральными округами.

4. Заключение

Проведенное исследование процесса градоформирования с помощью стохастического подхода демонстрирует возможности инструмента моделирования в виде матриц вероятностей распределений продукции производственно-технологического сектора экономики и миграции населения между федеральными округами. Применение разработанной методики к анализу конкретных ситуаций позволяет изучить актуальные социально-экономические процессы и явления, в частности, описать стационарные состояния в ряде функциональных сфер городского хозяйства.

Литература

1. ВАСИЛЬЕВА Т.П., МЫЗНИКОВА Б.И. *Математическое моделирование процесса градоформирования: детерминированный подход* // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. – 2010. – №5(108). – С. 171–179.
2. ВАСИЛЬЕВА Т.П., МЫЗНИКОВА Б.И., РУСАКОВ С.В. *О возможности моделирования процесса градообразования с помощью клеточных автоматов* // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. – 2011. – №6–2(138). – С. 128–134.
3. *Моделирование социо-эколого-экономической системы региона.* [под ред. В.И. Гурман, Е.В. Рюминой]. М.: Наука, 2003. – 175 с.
4. ЕМЕЛЬЯНОВ С.В., ПОПКОВ Ю.С., ОЛЕЙНИК А.Г., ПУТИЛОВ В.А. *Информационные технологии регионального управления*. – М.: УРСС, 2004. – 400 с.
5. ЗОТОВ А.Ф., МЕЛЬВИЛЬ Ю.К. *Буржуазная философия середины XIX – начала XX века* – М.: Высшая школа, 1988. – 520 с.
6. ЛАВЕНДА Б. *Статистическая физика. Вероятностный подход*: пер. с англ. – М.: Мир, 1999. – 432 с.

7. ЛЕОНТЬЕВ В.В. *Межотраслевая экономика*. – М.: Экономика, 1997. – 315 с.
8. ЛУТМАНОВ С.В. *Курс лекций по методам оптимизации*. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 363 с.
9. РЕСИН В.И., ПОПКОВ Ю.С. *Вероятностные технологии в управлении развитием города*. – М: УРСС, 2003. – 352 с.
10. *Система таблиц «Затраты–выпуск» России за 2003 г.* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.gks.ru/doc_2006/Zatrat06.zip (дата обращения: 01.07.2010).
11. *Регионы России. Социально-экономические показатели. 2007.* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.gks.ru/doc_2007/region/soc-pok.zip (дата обращения: 01.07.2010).
12. *Демографический ежегодник России. 2005.* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.gks.ru/doc_2005/DEMO.zip (дата обращения: 01.07.2010).

STOCHASTIC MODELS OF URBAN DEVELOPMENT

Tatyana Vasilyeva, Perm state national research university, Perm, Candidate (vasilyeva_09@mail.ru, (902) 644-78-20).
Bela Myznikova, Perm state national research university, Perm, Cand.Sci., assistant professor ((342) 239-63-41).
Sergey Rusakov, Perm state national research university, Perm, Doctor of Science, professor ((342) 239-64-09).

Abstract: *An approach to stochastic modeling of interaction between two subsystems of an urban economy is developed and applied to the analysis of real-world statistical data.*

Keywords: mathematical programming, probability technology, urban system.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Д. А. Новиковым