УДК 519
ББК 22.183.43 + 65в641

ОПТИМАЛЬНОЕ ДЕЛЕГИРОВАНИЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ЗАТРАТ, ПРЕДСТАВИМЫХ В ВИДЕ ВЫПУКЛЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Мишин С. П.[1]
(*Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления РАН, Москва*)

Рассмотрена задача минимизации функции затрат, представимой в виде выпуклой квадратичной формы, выбором оптимального делегирования – распределения управленческого воздействия, оказываемого на производственную подсистему, между менеджерами управленческой подсистемы, с учетом их сложной взаимосвязи, заключающейся в дублировании управлений друг друга. Математически данная постановка эквивалентна задаче оптимального распределения заданного объема выпуска между взаимосвязанными предприятиями с многопродуктовыми функциями затрат. Доказаны теоретические результаты, позволившие разработать и протестировать эффективный алгоритм решения, находящий оптимальное делегирование за небольшое количество итераций.

Ключевые слова: оптимальное делегирование управления, многопродуктовые функции затрат.

1. Введение

Бóльшая часть современной экономики состоит из иерархических организаций, которые позволяют повысить эффективность производства за счет разделения труда, порождая, в то же время, организационные издержки сложной *системы управления* с *иерар-*

---

[1] *Сергей Петрович Мишин, кандидат физико-математических наук* (*smishin78@mail.ru*).

хической структурой (*иерархией*), состоящей из менеджеров, которые управляют производственной системой.

В работе [3] выделены *производственная и управленческая подсистемы*, изображенные на рис. 1. *Исполнители* $w_1, \ldots, w_n$ производственной подсистемы W могут сложным образом влиять на затраты менеджеров (которые могут зависеть от характеристик отдельных исполнителей, их взаимодействия в *группах* размера 2, 3 и т.д.). Суть выделения подсистем состоит в том, что *влияние управленческой подсистемы на производственную ограничивается* p *видами управления – управленческого воздействия в объемах* $x = (x^1, \ldots, x^p)^T \geq 0$. В вектор x могут входить, например, такие виды управления как *обработка и передача информации, принятие решений, планирование и контроль, прием и увольнение, обучение и разъяснение, решение проблем* и т.п. Подход с выделением аддитивных объемных характеристик управленческого воздействия является достаточно общим, поскольку качественные, временн*ы*е и прочие показатели можно учесть, увеличивая размерность (см. [3]).

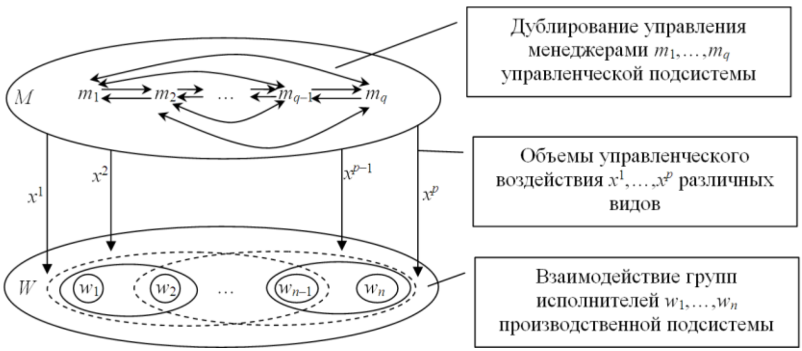

Рис. 1. Производственная и управленческая подсистемы

Критерий эффективности всей организации можно представить как функцию выручки за вычетом функции затрат производственной подсистемы W и функции затрат управленческой подсистемы M, причем первые две функции зависят только от управления x, но не от деталей организации подсистемы M (поскольку ее влияние на подсистему W ограничивается компонентами вектора x):

(1) $P(x, W, M) = S(x, W) - C_{prod}(x, W) - C_{manag}(x, W, M)$.

Иерархическая специфика организации определяется управленческой подсистемой, поэтому в [3] поставлена *задача об оптимальной организации – задача оптимизации управленческой подсистемы M, оказывающей заданное управленческое воздействие x с минимальными затратами*:

(2) $C^*_{manag}(x) = \min\limits_{M \in \mathrm{M}} C_{manag}(x, M)$,

где через M обозначено *множество допустимых организаций*, а подсистема $M^*(x) \in \mathrm{M}$, доставляющая минимум (2), *оптимальной организацией, реализующей x* (фиксированный аргумент W для краткости опускается). На рис. 1 задачу (2) можно проиллюстрировать как построение минимально затратной управленческой подсистемы M внутри верхнего эллипса при условии реализации управления x.

Задача об оптимальной организации (2) может включать в себя оптимизацию разнообразных характеристик управленческой подсистемы: количества и состава менеджеров, их взаимной подчиненности (вида иерархии), правил взаимодействия, стимулирования и т.п. В [3] рассматривается одна[1] из подзадач задачи об оптимальной организации (2): *задача об оптимальном делегировании в организации*: каждый из q менеджеров вносит свой вклад в управление x, то есть менеджерам $m_1, \ldots, m_q$ *делегированы* такие векторы управления $y_1, \ldots, y_q$, что выполнено *балансовое условие* $y_1 + \ldots + y_q = x$ и каждый менеджер оказывает неотрицательное управленческое воздействие ($y_1, \ldots, y_q \geq 0$, то есть неотрицательны все компоненты векторов). Для краткости распределение вектора x на сумму векторов $y_1, \ldots, y_q$ называется *делегированием*, а конкретный вектор y_i – *делегированием менеджера* m_i.

---

[1] *Общее исследование задачи об оптимальной организации проведено в* [3]. *Там же изложена одна из частных моделей совместной оптимизации производственной и управленческой подсистем.*

В настоящей работе задача об оптимальном делегировании решена для функций затрат менеджеров, представимых в виде выпуклых квадратичных форм. Как отмечено в разделе 2, квадратичные формы весьма часто используются в современных эконометрических моделях многопродуктовых функций затрат предприятия на выпуск набора продуктов в заданных объемах. Поэтому аппарат, предложенный в настоящей работе, может использоваться и для поиска оптимального распределения общего объема выпуска между предприятиями (отрасли, холдинга и т.п.), которые обмениваются продуктами производства по обобщенной модели многопродуктового межотраслевого баланса и описываются выпуклыми квадратичными формами.

В разделе 3 показано, что взаимодействие менеджеров в достаточно общем виде можно описать с помощью линейного дублирования, характеризующего вовлеченность одного менеджера в тот или иной вид управления, порученного другому менеджеру. Модель позволяет наглядно описывать разнообразные взаимоотношения сотрудников иерархической организации.

В разделе 4 поставлена задача об оптимальном делегировании – таком распределении общего управления (оказываемого на производственную подсистему) между менеджерами, которое минимизирует их суммарные затраты. Для функций затрат, представимых в виде квадратичных форм, задача об оптимальном делегировании является задачей квадратичного программирования, которую можно решать классическими численными методами (см., например, [4]). Однако за счет специфики задачи удается разработать более эффективные методы решения. В разделе 5 удается аналитически решить уравнения критической точки лагранжиана, зафиксировав произвольный состав компонент делегирования, которые могут быть положительными. В разделе 6 доказывается невырожденность соответствующей системы уравнений и единственность критической точки для случая строго выпуклых функций затрат и невырожденной матрицы дублирования. В разделе 7 показано, что на случайных исходных данных эти ограничения не являются обременительными, предложен и протестирован алгоритм, решающий задачу размерности до 1000 максимум за 15 итераций, на каждой из которых вычисляются матричные выражения, найденные аналитически. При этом количество итераций слабо возрастает с ростом размерности, что позволяет считать задачу об оптимальном делегировании полностью решенной. В заключении сформулированы основные результаты работы.

2. Функция затрат единственного менеджера

Если управленческая подсистема состоит из единственного менеджера m, оказывающего весь объем управленческого воздействия x, то функцию затрат менеджера $C_m(x) = C_{manag}(x, M)$ (равную функции затрат управленческой подсистемы) можно моделировать по аналогии с затратами любого предприятия, выпускающего заданный объем «продукции» x (под «продукцией» менеджера понимается оказанное им управленческое воздействие). Для этого используются универсальные *многопродуктовые функции затрат*, которые начали применяться в эконометрических исследованиях в 1970-х для учета разнообразия производимых продуктов, количества обслуживаемых заказчиков, размера территории и прочих аддитивных характеристик, влияющих на затраты.

При построении многопродуктовой функции затрат главной проблемой является недостаточность данных для достоверной статистической оценки большого количества параметров. Несмотря на разработку специальных методов «обхода» этой проблемы (например, Positive Mathematical Programming [12]), до последнего десятилетия в основном удавалось статистически идентифицировать только иллюстративные двух- трехпродуктовые функции затрат. Ситуация кардинально изменилась в 2000-е годы в связи с качественным скачком уровня информатизации экономики, позволяющим накапливать достаточное количество статистических данных.

В качестве универсальной математической формы зависимости затрат от объемов выпуска $x^1,\ldots, x^p$ наиболее часто рассматривается *квадратичная форма*:

(3) $C_m(x) = 0.5(Ax, x) + (b, x) + C_m^f$,

где A – матрица квадратичных коэффициентов размера $p \times p$, b – p-мерный вектор линейных коэффициентов, C_m^f – постоянная часть затрат, а запись $(\cdot, \cdot)$ здесь и ниже используется как *скалярное произведение*. Функция (3) состоит из квадратичной части $0.5(Ax, x) = 0.5\sum_{k,l} a^{k,l} x^k x^l$, линейной части $(b, x) = \sum_k b^k x^k$ и постоянных затрат C_m^f, не зависящих от объемов управления. Матрица A считается симметричной $a^{k,l} = a^{l,k}$ (иначе можно заменить на $(a^{k,l} + a^{l,k})/2$ без изменения функции затрат).

Преимущества квадратичных форм обосновываются во многих эконометрических работах (см., в частности, [5]). В математизированных исследованиях показывается, что квадратичная форма дает лучшее качество аппроксимации, чем ряд других (см., например, [9]). В отраслевых исследованиях квадратичная форма используется повсеместно (поисковая система «Google» по запросу фразы «multi-output quadratic cost function» выдает более миллиона ссылок). Отметим, например, что в исследовании коммунального хозяйства [11] проанализированы шесть работ, в пяти из которых использовалась квадратичная форма. В любой отрасли с возможностью выбора множества выпускаемых продуктов можно без труда найти прикладные исследования, обосновывающие преимущества применения квадратичной формы (например, в сельском хозяйстве [8, 10]; телекоммуникациях и связи [6, 14]; транспорте [15]; образовании [7]).

В настоящей работе рассматриваются выпуклые функции затрат вида (3). Содержательно выпуклость соответствует аспециализации. Например, выгоднее поручить каждому из двух менеджеров планирование и контроль половины исполнителей, чем поручать одному менеджеру планирование, а второму – контроль исполнения этих планов.

3. Функция затрат управленческой подсистемы

Увеличение количества менеджеров приводит к усложнению управленческой подсистемы. Чем она сложнее, тем большую долю управления, реализуемого одними менеджерами, вынуждены *дублировать* другие менеджеры. При единственном виде управления $p = 1$ коэффициент $d_{i,j}$ показывает, какую долю управления y_j, делегированного менеджеру m_j, вынужден повторять («дублировать») менеджер m_i, то есть задана *матрица дублирования* $D = (d_{i,j})$ размера $q \times q$. При нескольких видах управления $p > 1$ коэффициент $d_{i,j}^{k,l}$ показывает, какую долю управления вида l менеджера m_j дублирует менеджер m_i при управлении вида k. Соответственно, пара менеджеров m_i, m_j характеризуется матрицей $D_{i,j} = (d_{i,j}^{k,l})$ размера $p \times p$, а вся *матрица дублирования* $D = (D_{i,j})$ состоит из q^2 таких блоков.

Модель с линейным дублированием не ограничивает общности, поскольку рассматриваются широкие классы функций затрат, возможно увеличение размерности управления и замена переменных, поэтому можно описать и нелинейное дублирование, и любую функцию затрат, зависящую от составного вектора делегирования y.[1]

В результате вместо функции затрат $C_m(x)$ единственного менеджера рассматривается *функция затрат управленческой подсистемы* M: $C_{manag}(x, D, y) = C_{m_1}(\tilde{y}_1) + \ldots + C_{m_q}(\tilde{y}_q)$, равная сумме функций затрат q менеджеров, зависящих от *нагрузок с учетом дублирования* менеджерами делегирований друг друга (формально $\tilde{y} = Dy$, где вектор делегирования y составлен из векторов делегирования менеджеров $y_1, \ldots, y_q$, а вектор $\tilde{y}$ составлен из векторов нагрузки менеджеров $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_q$). Функция $C_{manag}(x, D, y)$ зависит от своих аргументов неявным образом, с учетом равенств $\tilde{y} = Dy$, $y_1 + \ldots + y_q = x$, подобная запись используется ниже для удобства и единообразия изложения.

Обратная матрица D^{-1}, называемая *матрицей продуктивности*, представляет собой обобщение леонтьевской модели межотраслевого баланса. Элементы D^{-1} (возможно, отрицательные)

---

[1] *Подробнее см.* [2].

характеризуют объемы различных видов управленческого воздействия различных менеджеров, которые дополнительно требуются для того, чтобы данный менеджер оказал единицу объема управленческого воздействия данного вида. Эта дополнительная нагрузка соответствует организационным издержкам сложной подсистемы управления, например, необходимости контроля подчиненных и отчетов перед начальниками. При $p = 1$ сумма $\hat{d}_i$ элементов i-го столбца D^{-1} характеризует *продуктивность менеджера* m_i, то есть вклад единицы нагрузки в итоговое «чистое» управление x, оказываемое на производственную подсистему: $\hat{d}_1\tilde{y}_1 + ... + \hat{d}_q\tilde{y}_q = x$. В многомерном случае $\hat{D}_1\tilde{y}_1 + ... + \hat{D}_q\tilde{y}_q = x$, где $\hat{D}_i$ – сумма i-х блоков D^{-1} размера $p \times p$ – *матрица продуктивности менеджера* m_i.

4. Задача об оптимальном делегировании

С учетом вида функции затрат управленческой подсистемы, определенной в предыдущем разделе, задача *об оптимальном делегировании* имеет вид:

(4) $$C^*_{manag}(x, D) = \min_{y_1 \geq 0, \ldots y_q \geq 0:\, y_1 + \ldots + y_q = x} C_{manag}(x, D, y) = \min_{y_1 \geq 0, \ldots y_q \geq 0:\, y_1 + \ldots + y_q = x} \sum_{i=1}^{q} C_{m_i}(D_i y).$$

Лагранжиан задачи (4) имеет следующий вид:

$$L = \sum_{i=1}^{q} C_{m_i}(D_i y) + \sum_{k=1}^{p} \lambda^k (x^k - y_1^k - .. - y_q^k) + \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{q} \theta_i^k (-y_i^k).$$

В [3] для выпуклых функций затрат доказано, что $y \geq 0$[1] – оптимальное делегирование, доставляющее минимум в задаче (4), тогда и только тогда, когда найдутся такие коэффициенты Лагранжа $\lambda = (\lambda^1, ..., \lambda^p)^T \in R^p$, $\theta_i = (\theta_i^1, ..., \theta_i^p)^T \in R_+^p$, которые совместно с делегированием y являются *критической точкой*, то есть удовлетворяют условиям:

---

[1] *Здесь и ниже подобные векторные неравенства понимаются покоординатно, то есть* $y \geq 0$ *означает* $y_1 \geq 0, ..., y_q \geq 0$.

(5) $D^T g = \overline{\lambda} + \theta$,

(6) $y_1 + \ldots + y_q = x$,

(7) $\theta_i^k y_i^k = 0$ для всех $i = \overline{1, q}$, $k = \overline{1, p}$,

где через $g = (\nabla C_{m_1}(\tilde{y}_1)^T, ..., \nabla C_{m_q}(\tilde{y}_q)^T)^T$ обозначен вектор-столбец, составленный из стоящих «друг под другом» векторов градиентов; через $\overline{\lambda} = (\lambda^T, ..., \lambda^T)^T$ – вектор, составленный из q повторяющихся векторов λ, $\theta = (\theta_1^T, ..., \theta_q^T)^T$ – вектор, составленный из векторов $\theta_1 \geq 0$, …,$\theta_q \geq 0$. Выражение (5) означает *равенство нулю производных лагранжиана* задачи (4); (6) – *условие баланса*, (7) – *условие дополняющей нежесткости*, связывающее компоненту делегирования $y_i^k \geq 0$ с соответствующим ей коэффициентом $\theta_i^k \geq 0$ (решения с $\theta_1 = 0$ будем называть *внутренними*, прочие решения – *краевыми*).

Также в [3] для строго выпуклых функций и $detD \neq 0$ доказано, что целевая функция $C_{manag}(x, D, y)$ задачи (4) строго выпукла по y, оптимальное делегирование y единственно и только для него найдутся такие коэффициенты $\lambda \in R^p$, $\theta_i \in R_+^p$, которые совместно с делегированием y являются критической точкой (выполнены (5), (6), (7)).

В настоящей статье рассматриваются функции затрат q менеджеров $C_{m_i}(\tilde{y}_i) = 0.5 \cdot (A_i \tilde{y}_i, \tilde{y}_i) + (b_i, \tilde{y}_i) + C_{m_i}^f$, $i = \overline{1, q}$ (см. выражение (3)), где матрицы A_i симметричны, $\tilde{y} = Dy$. Градиент определяется выражением $\nabla C_{m_i}(\tilde{y}_i) = A_i \tilde{y}_i + b_i$, что легко проверяется с учетом симметричности матрицы A_i. Также предполагаются выполненными условия $x^k > 0$ для всех $k = \overline{1, p}$, поэтому найдется хотя бы один менеджер m_i, которому делегировано управление вида k: $y_i^k > 0$.[1]

Для квадратичных форм в условии (5) вектор градиентов $g = A\tilde{y} + b$, где вдоль главной диагонали матрицы A размера

---

[1] *В* [2] *показана применимость полученных результатов и для* $x^k \geq 0$.

$pq \times pq$ записаны матрицы $A_1, \ldots, A_q$,[1] а остальные элементы нулевые, вектор b составлен из векторов $b_1,\ldots,b_q$. С учетом $\tilde{y} = Dy$ условие (5) примет вид $D^T(ADy + b) = \overline{\lambda} + \theta$ или, после раскрытия скобок:

(8) $D^T ADy - \theta = \overline{\lambda} - D^T b$.

При нахождении критической точки условия (8) равенства нулю производных лагранжиана представляют собой систему из pq линейных уравнений относительно неизвестных y, λ, θ. Балансовые условия (6) дают еще p линейных уравнений относительно y. Единственными нелинейными уравнениями будут условия дополняющей нежесткости (7). Однако если каким-либо образом задан состав компонент делегирования, которые могут быть ненулевыми (обозначим вектор этих компонент через $y_{>0}$), то в силу (7) соответствующие компоненты вектора θ будут нулевыми: $\theta_{>0} = 0$. Для нулевых же компонент делегирования $y_{=0} = 0$ соответствующие $\theta_{=0}$ могут выбираться произвольно с сохранением условий (7).

Таким образом, если некоторым образом заданы номера ненулевых компонент делегирования, то система уравнений критической точки (5), (6), (7) превращается в систему из $pq + p$ линейных уравнений относительно $pq + p$ неизвестных $y_{>0}$, $\theta_{=0}$, λ. Если эта система невырождена, то можно однозначным образом определить все переменные $y_{>0}$, $\theta_{=0}$, λ, чему посвящен раздел 5. В разделе 6 показано, что система невырождена, в частности, в строго выпуклом случае (при положительно определенной A и $detD \neq 0$). Если в результате решения системы уравнений все компоненты $y_{>0}$, $\theta_{=0}$ оказались неотрицательными, то найдена критическая точка. В противном случае сделанный выбор нену-

[1] *Формально все результаты справедливы для произвольной матрицы A, описывающей любую квадратичную форму, зависящую от всех pq компонент вектора нагрузки* $\tilde{y} = Dy$. *Однако в рамках рассматриваемой модели ненулевыми могут быть только элементы в блоках вдоль главной диагонали матрицы A, взаимосвязь менеджеров описывается матрицей D.*

левых компонент делегирования не дает критической точки. В разделе 7 предложен алгоритм поиска набора компонент $y_{>0}$, приводящего к критической точке, которая и будет оптимальным делегированием в силу выпуклости функций затрат.

5. Решение уравнений критической точки

В настоящем разделе явно найдено делегирование y и коэффициенты Лагранжа λ, θ, которые совместно с y являются критической точкой, то есть удовлетворяют условиям (5), (6) и (7). При этом предполагается заданным состав компонент делегирования $y_{>0}$, которые могут быть ненулевыми, соответствующие компоненты вектора θ равны нулю: $\theta_{>0} = 0$. Для оставшихся компонент делегирования выполнено $y_{=0} = 0$, соответствующие $\theta_{=0}$ могут выбираться ненулевыми. Эти предположения обеспечивают выполнение условий (7). Поскольку рассматривается случай $x^k > 0$ для всех $k = \overline{1,q}$, должно найтись хотя бы одно i, для которого y_i^k входит в $y_{>0}$ (иначе у всех менеджеров управление вида k равно нулю, условия (6) нарушены). Ниже рассматривается только такой состав компонент $y_{>0}$, поскольку только в этом случае может найтись критическая точка.

Для нахождения критической точки ниже решается линейная система уравнений (8) (которая для квадратичных форм эквивалентна (5)) и балансовых условий (6). Поэтому ниже проводятся преобразования, позволяющие выявить условия невырожденности линейной системы уравнений (6), (8), в случае выполнения которых явно найдены единственные значения $y_{>0}$, $\theta_{=0}$, обеспечивающие выполнение уравнений (6), (8). Если найденные компоненты векторов $y_{>0}$, $\theta_{=0}$ неотрицательны, то найдена критическая точка. В противном случае дополнительные условия $y_{=0} = 0$, $\theta_{>0} = 0$ приводят к несовместности условий критической точки с ограничениями неотрицательности $y \geq 0$, $\theta \geq 0$, и, следовательно, к отсутствию критической точки с выбранными компонентами делегирования $y_{>0}$.

Введем несколько дополнительных технических обозначений, упрощающих явное решение системы уравнений (6), (8).

Для упрощения уравнений (8) через z обозначим вектор, скомбинированный из компонент $y_{>0}$, $\theta_{=0}$, которые могут быть ненулевыми: $z_i^k = y_i^k$, если y_i^k входит в вектор $y_{>0}$, и $z_i^k = \theta_i^k$ в противном случае. Кроме того, через F обозначим матрицу, в которой столбец с номером $(i - 1)p + k$ равен соответствующему столбцу матрицы D^TAD, если y_i^k входит в вектор $y_{>0}$, и соответствующему столбцу матрицы $-E_{pq}$ в противном случае, где E_{pq} – единичная матрица размера $pq \times pq$. Тогда с учетом $y_{=0} = 0$ и $\theta_{>0} = 0$ имеем $D^T ADy - \theta = Fz$, поэтому ниже используется следующий вид системы уравнений (8):

(9) $Fz = \overline{\lambda} - D^T b$.

Для решения системы уравнений (9) обозначим через $(D^TAD)_{>0}$ главную подматрицу D^TAD, стоящую на пересечении строк и столбцов, соответствующих компонентам $y_{>0}$ (имеющих номера $(i - 1)p + k$ для y_i^k, входящих в $y_{>0}$). Столбцы и строки D^TAD, соответствующие оставшимся компонентам $y_{=0}$, не влияют на значение квадратичной части затрат менеджеров $0.5(D^TADy, y) = 0.5(ADy, Dy) = 0.5\sum_i (A_i\tilde{y}_i, \tilde{y}_i) = 0.5((D^TAD)_{>0}y_{>0}, y_{>0}) = 0.5(Fy, y)$.[1] Однако на решение может влиять $(D^TAD)_{=0}$ – прямоугольная подматрица D^TAD, стоящая на пересечении строк, соответствующих нулевому делегированию $y_{=0}$ и столбцов, соответствующих положительному делегированию $y_{>0}$.

Для иллюстрации введенных матричных обозначений рассмотрим пример, в котором компоненты $y_{>0}$ стоят в начале вектора y, а компоненты $y_{=0}$ – в конце. В этом случае выполнено:

---

[1] *В первом равенстве использовано правило переброски матрицы в квадратичной форме* (*см.* [1]). *Выражение D^TADy не зависит от столбцов D^TAD, которые соответствуют $y_{=0} = 0$* (*умножаются на нулевые компоненты*), *а вся квадратичная форма* (D^TADy, y) *не зависит и от соответствующих строк, что обосновывает третье равенство* $0.5(D^TADy, y) = 0.5((D^TAD)_{>0}y_{>0}, y_{>0})$. *Четвертое равенство следует из вида матрицы F.*

$$(10)\quad F = \begin{pmatrix} (D^T AD)_{>0} & 0 \\ (D^T AD)_{=0} & -E_{=0} \end{pmatrix},$$

где через $E_{=0}$ обозначена единичная матрица соответствующего размера.

Следующая лемма позволяет разрешить систему уравнений (9) относительно z при любом фиксированном λ.

Лемма 1. *Определитель матрицы F с точностью до знака равен определителю матрицы* $(D^TAD)_{>0}$, *в случае невырожденности которой матрица F^{-1} имеет следующий вид*:

1. *столбцы матрицы F^{-1}, соответствующие компонентам $y_{=0}$, совпадают со столбцами матрицы F* (*или* $-E_{pq}$);

2. *главная подматрица* $(F^{-1})_{>0}$, *стоящая на пересечении строк и столбцов, соответствующих компонентам* $y_{>0}$, *равна* $(F^{-1})_{>0} = ((D^T AD)_{>0})^{-1}$;

3. *прямоугольная подматрица* $(F^{-1})_{=0}$, *стоящая на пересечении строк, соответствующих компонентам* $y_{=0}$, *и столбцов, соответствующих* $y_{>0}$, *равна* $(F^{-1})_{=0} = (D^T AD)_{=0}((D^T AD)_{>0})^{-1}$;

4. *в примере* (10) $F^{-1} = \begin{pmatrix} ((D^T AD)_{>0})^{-1} & 0 \\ (D^T AD)_{=0}((D^T AD)_{>0})^{-1} & -E_{=0} \end{pmatrix}$.

Доказательство. При построении матрицы F столбцы D^TAD меняются на столбцы единичной матрицы (с отрицательным знаком). В формуле разложения $detF$ по любому столбцу, соответствующему $y_{=0}$, остается только один элемент, с точностью до знака равный определителю подматрицы F, в которой вычеркнут этот столбец и соответствующая строка. Действуя аналогичным образом, в результате вычеркнем из F все столбцы единичной матрицы и соответствующие строки, получив (с точностью до знака) $det((D^TAD)_{>0})$. Поэтому определитель матрицы F с точностью до знака равен определителю матрицы $(D^TAD)_{>0}$: $detF = \pm det((D^TAD)_{>0})$. Причем эти матрицы являются вырожденными или невырожденными одновременно. В случае невырожденности матрицы $(D^TAD)_{>0}$ существует матрица F^{-1}. Осталось доказать свойства 1-4.

Рассмотрим частный случай, в котором матрица F имеет вид (10). По правилу умножения блочных матриц вместо обычного умножения элементов строки на элементы столбца и сложения результатов можно по той же формуле перемножать блоки и складывать результаты, используя при этом матричное умножение и сложение блоков (см., например, [1]). В результате выполнено равенство (иногда называемое формулой Фробениуса):

$$FF^{-1} = \begin{pmatrix} (D^T AD)_{>0} & 0 \\ (D^T AD)_{=0} & -E_{=0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ((D^T AD)_{>0})^{-1} & 0 \\ (D^T AD)_{=0}((D^T AD)_{>0})^{-1} & -E_{=0} \end{pmatrix} = E_{pq},$$

где E_{pq} – единичная матрица размера $pq \times pq$. Свойство 4 доказано.

Свойства 1-3, по сути, показывают, что и в общем случае матрица F^{-1} имеет аналогичный вид с точностью до одновременной перестановки строк и столбцов. Докажем это формально. Определим перестановку $\sigma(\cdot)$ чисел $(1, 2, \ldots, pq)$. Величина $\sigma(t)$ определяет позицию, в которой после перестановки будет стоять столбец t исходной матрицы F. Все значения t можно однозначно представить в виде $t = (i - 1)p + k$, где $i = \overline{1, q}$ определяет номер блока, а $k = \overline{1, p}$ определяет номер столбца в этом блоке. Если y_i^k входит в вектор $y_{>0}$ ($y_i^k \in y_{>0}$), то положим $\sigma((i-1)p+k) = 1 + \sum_{j,l:(j-1)p+l<(i-1)p+k,\, y_j^l \in y_{>0}} 1$, то есть единица плюс количество предыдущих столбцов F (имеющих номера $(j - 1)p + l < (i - 1)p + k$), которые соответствуют $y_{>0}$ ($y_j^l \in y_{>0}$). Если же y_i^k входит в вектор $y_{=0}$ ($y_i^k \in y_{=0}$), то положим $\sigma((i-1)p+k) = pq - \sum_{j,l:(j-1)p+l>(i-1)p+k,\, y_j^l \in y_{=0}} 1$, то есть pq минус количество последующих столбцов F (имеющих номера $(j - 1)p + l > (i - 1)p + k$), которые соответствуют $y_{=0}$ ($y_j^l \in y_{=0}$).

Определим матрицу перестановки P_σ (см., например, [1]), у которой в строке t стоит единица в столбце $\sigma(t)$, остальные нули, $t = \overline{1, pq}$. Тогда в матрице FP_σ в столбце $\sigma(t)$ будет стоять столбец t исходной матрицы F. Поэтому умножение справа на матрицу P_σ сдвигает (без изменения порядка) столбцы F, соответствующие $y_{>0}$, в начало матрицы, а столбцы, соответствующие

$y_{=0}$ – в конец. Аналогично, в матрице $P_\sigma^T F$ в строке $\sigma(t)$ будет стоять строка t исходной матрицы F. В результате матрица $P_\sigma^T F P_\sigma$ имеет вид (10), а обратная матрица $(P_\sigma^T F P_\sigma)^{-1}$, соответственно, имеет вид, приведенный в свойстве 4 леммы. Очевидно, выполнено $P_\sigma^T P_\sigma = E$, то есть матрица перестановки ортогональна ($P_\sigma^{-1} = P_\sigma^T$), откуда следует равенство $P_\sigma^T F^{-1} P_\sigma = (P_\sigma^T F P_\sigma)^{-1}$. Таким образом, после аналогичной перестановки строк и столбов F^{-1} полученная матрица равна $(P_\sigma^T F P_\sigma)^{-1}$, то есть имеет вид, приведенный в свойстве 4 леммы.

В результате доказано, что в общем случае матрица F^{-1} имеет вид, приведенный в свойстве 4 леммы, с точностью до одновременной перестановки строк и столбцов (соответствующих $y_{>0}$ – в начало матрицы, соответствующих $y_{=0}$ – в конец). Поэтому справедливы свойства 1-3, что и доказывает лемму. ■

Лемма 1 показывает, что при любом фиксированном λ система уравнений (9) (эквивалентная (8) с дополнительными условиями $y_{=0} = 0$, $\theta_{>0} = 0$) может быть однозначно разрешена относительно z тогда и только тогда, когда матрица $(D^TAD)_{>0}$ является невырожденной: $det((D^TAD)_{>0}) \neq 0$. В этом случае $det\,F \neq 0$, поэтому (9) примет вид:

(11) $z = F^{-1}(\overline{\lambda} - D^T b)$.

Для окончательного решения системы уравнений (6), (8) (с $y_{=0} = 0$, $\theta_{>0} = 0$), определяющих критическую точку, осталось найти p неизвестных $\lambda^1, \ldots, \lambda^p$ с помощью балансовых условий (6). Определим *суммирующую матрицу* S как прямоугольную матрицу из p строк и pq столбцов, состоящую из q единичных матриц размера $p \times p$: $S = (E_p, \ldots, E_p)$. Тогда $Sy = y_1 + y_2 + \ldots + y_q$, поэтому балансовые условия (6) имеют вид $Sy = x$.

Введем несколько обозначений, связанных с фиксированием компонент делегирования $y_{>0}$, которые могут быть ненулевыми. Через $\hat{S}$ обозначим матрицу S, у которой обнулены столбцы, соответствующие $y_{=0}$. Через $S_{>0}$ обозначим подматрицу, состоящую из столбцов S, соответствующих $y_{>0}$ ($S_{>0}$ равна $\hat{S}$ с удаленными нулевыми столбцами). Через $S_{=0}$ обозначим подматрицу, состоящую из столбцов S, соответствующих $y_{=0}$. В результате выполнено $Sy = x$, $\hat{S}z = x$, $S^T\lambda = \overline{\lambda}$ (поскольку $\overline{\lambda} = (\lambda^T,...,\lambda^T)^T$, см. выражение (5)). Умножая (11) на $\hat{S}$ докажем, что из системы (6), (8) следуют p уравнений:

(12) $\hat{S}F^{-1}(S^T\lambda - D^Tb) = x$.

Определим матрицу $G = ((D^TAD)_{>0})^{-1}_{pq\times pq}$, размер которой равен $pq \times pq$, главная подматрица, стоящая на пересечении строк и столбцов, соответствующих $y_{>0}$, совпадает с $((D^TAD)_{>0})^{-1}$, остальные элементы нулевые. Через $G_{>0}$ обозначим главную подматрицу G, соответствующую $y_{>0}$: $G_{>0} = ((D^TAD)_{>0})^{-1}$. Из вида матрицы F^{-1} (см. лемму 1, в частности, свойство 4) следует $\hat{S}F^{-1} = SG$ (слева ненулевые столбцы $\hat{S}$ умножаются на $((D^TAD)_{>0})^{-1}$). Соответствующую матрицу размера $p \times pq$ обозначим через $\hat{G} = SG = (\hat{G}_1,...,\hat{G}_q) = (\sum_i G_{i,1},...,\sum_i G_{i,q})$. В j-м блоке (размера $p \times p$) стоит сумма j-х блоков матрицы G: $\hat{G}_j = \sum_i G_{i,j}$. Наконец, сумму всех блоков матрицы $\hat{G}$ (равную сумме всех блоков матрицы G) обозначим через

(13) $\overline{G} = \hat{G}S^T = \sum_j \hat{G}_j = \sum_{i,j} G_{i,j} = SGS^T = S_{>0}((D^TAD)_{>0})^{-1}S^T_{>0}$,

где последнее равенство следует из вида матрицы $G = ((D^TAD)_{>0})^{-1}_{pq\times pq}$, нулевые строки и столбцы которой можно не складывать. Матрица $\overline{G}$ размера $p \times p$ строится следующим образом: обращается главная подматрица $(D^TAD)_{>0}$, соответствующая $y_{>0}$, добавляются нулевые строки и столбцы, соответствующие $y_{=0}$, и суммируются блоки размера $p \times p$.

Используя введенные обозначения, запишем $\hat{S}F^{-1} = SG = \hat{G}$, откуда $\hat{S}F^{-1}S^T = SGS^T = \overline{G}$. Поэтому с учетом (12) докажем, что из системы (6), (8) следуют p уравнений:

(14) $\overline{G}\lambda = x + \hat{G}D^Tb$.

Следующая лемма позволяет разрешить систему уравнений (14) относительно λ, в результате чего можно найти явные аналитические выражения для неизвестных $y_{>0}$, $\theta_{=0}$.

Лемма 2. *Система линейных уравнений* (6), (8) *и условий* $y_{=0} = 0$, $\theta_{>0} = 0$ *невырождена тогда и только тогда, когда* $\det((D^T AD)_{>0}) \neq 0$, $\det \overline{G} = \det(S_{>0}((D^T AD)_{>0})^{-1} S_{>0}^T) \neq 0$. *В случае невырожденности выполнены следующие свойства*:

1. $\lambda = (\overline{G})^{-1}(x + S_{>0}G_{>0}(D^T b)_{>0})$, *векторы* $y_{>0}$, $\theta_{=0}$ *определяются выражениями*:

(15) $y_{>0} = (S_{>0}G_{>0})^T(\overline{G})^{-1}x + \{(S_{>0}G_{>0})^T(\overline{G})^{-1}(S_{>0}G_{>0}) - G_{>0}\}(D^T b)_{>0}$,

(16) $\theta_{=0} = (D^T AD)_{=0}\, y_{>0} - S_{=0}^T(\overline{G})^{-1}(x + S_{>0}G_{>0}(D^T b)_{>0}) + (D^T b)_{=0}$,

где $(D^T b)_{>0}$ *– подвектор* $D^T b$, *соответствующий* $y_{>0}$, $(D^T b)_{=0}$ *– подвектор, соответствующий* $y_{=0}$;

2. *если в свойстве* 1 *среди компонент* $y_{>0}$, $\theta_{=0}$ *есть отрицательные, то при условиях* $y_{=0} = 0$, $\theta_{>0} = 0$ *не существует критической точки*;

3. *если в свойстве* 1 *компоненты* $y_{>0}$, $\theta_{=0}$ *неотрицательны, то найденные* y, λ, θ [1] *являются критической точкой, в которой затраты управленческой подсистемы равны*:

(17)
$$C_{manag}(x, D) = 0.5((\overline{G})^{-1}x, x) + ((\overline{G})^{-1}S_{>0}G_{>0}(D^T b)_{>0}, x) +$$
$$+ 0.5(\{(S_{>0}G_{>0})^T(\overline{G})^{-1}(S_{>0}G_{>0}) - G_{>0}\}(D^T b)_{>0}, (D^T b)_{>0}) + C^f.$$

где через $C^f = \sum_i C_{m_i}^f$ *обозначена сумма постоянных затрат всех менеджеров*;

4. *матрицы* $G_{>0} = ((D^T AD)_{>0})^{-1}$, $\overline{G} = S_{>0}G_{>0}S_{>0}^T$, $(\overline{G})^{-1}$ *симметричны и зависят только от столбцов матрицы* D, *соответствующих компонентам делегирования* $y_{>0}$.

Доказательство. Из леммы 7 следует, что при $\det((D^T AD)_{>0}) = 0$ система уравнений (9) (эквивалентная (8) с учетом условий $y_{=0} = 0$, $\theta_{>0} = 0$) либо несовместна, либо имеет бесконечное множество решений z. Аналогично, при $\det \overline{G} = 0$ система уравнений (14) (следующая из (6), (8) и условий $y_{=0}=0$, $\theta_{>0}=0$) либо несовместна, либо имеет бесконечно много решений λ.

---

[1] *Векторы* y *и* θ *получаются из* $y_{>0}$, $\theta_{=0}$ *добавлением нулевых компонент векторов* $y_{=0} = 0$, $\theta_{>0} = 0$.

Если система линейных уравнений (6), (8) и условий $y_{=0} = 0$, $\theta_{>0} = 0$ невырождена, то z и λ должны определяться единственным образом, поэтому выполнено $\det((D^T AD)_{>0}) \neq 0$, $\det \overline{G} = \det(S_{>0}((D^T AD)_{>0})^{-1} S_{>0}^T) \neq 0$. Обратно, если эти условия выполнены, то из системы уравнений (14) однозначно определяется λ, после чего из системы уравнений (9) однозначно определяется z, поэтому система линейных уравнений (6), (8) и условий $y_{=0} = 0$, $\theta_{>0} = 0$ невырождена. Осталось доказать свойства 1-4 в предположении невырожденности.

Докажем свойство 4. В матрице $(D^TAD)_{>0}$ остаются только строки, соответствующие $y_{>0}$, поэтому при умножении слева на D^T имеют значение только соответствующие строки D^T, то есть столбцы D, соответствующие $y_{>0}$. Аналогично, при умножении справа на D имеют значение только столбцы D, соответствующие $y_{>0}$ (остальные столбцы в $(D^TAD)_{>0}$ вычеркиваются). Поэтому матрица $G_{>0} = ((D^TAD)_{>0})^{-1}$, а также $\overline{G} = S_{>0}G_{>0}S_{>0}^T$ и $(\overline{G})^{-1}$ зависят только от столбцов матрицы D, соответствующих компонентам делегирования $y_{>0}$. Матрица D^TAD симметрична в силу симметричности матрицы A: $(D^TAD)^T=(D)^T(A)^T(D^T)^T$. Поэтому симметрична и главная подматрица $(D^TAD)_{>0}$, и, следовательно, симметрична и обратная к ней матрица $G_{>0}$ (операции транспонирования и обращения можно менять местами, см., например, [1], поэтому выполнено $(G_{>0})^T = (((D^T AD)_{>0})^T)^{-1} = G_{>0}$). Таким образом, симметричны матрицы $\overline{G} = S_{>0}G_{>0}S_{>0}^T$ и $(\overline{G})^{-1}$, что и доказывает свойство 4.

Докажем свойство 1. При $\det \overline{G} \neq 0$ из (14) имеем $\lambda = (\overline{G})^{-1}(x + \hat{G}D^T b)$. Из обозначений перед выражением (13) имеем $\hat{G} = SG = S_{>0}G_{>0}$ (нулевые строки G можно не суммировать при умножении слева на S), поэтому $\hat{G}D^T b = S_{>0}G_{>0}(D^T b)_{>0}$ (нулевые столбцы G, а, следовательно, и $S_{>0}G_{>0}$, можно игнорировать при умножении на вектор D^Tb, заменив его вектором $(D^Tb)_{>0}$ с компонентами, соответствующими $y_{>0}$). Подставляя найденное $\lambda = (\overline{G})^{-1}(x + S_{>0}G_{>0}(D^T b)_{>0})$ в уравнения (11) и учитывая $S^T\lambda = \overline{\lambda}$ (см. обозначения перед выражением (12)), найдем вектор z:

(*) $\lambda = (\overline{G})^{-1}(x + S_{>0}G_{>0}(D^Tb)_{>0})$, $z = F^{-1}\{S^T(\overline{G})^{-1}(x + S_{>0}G_{>0}(D^Tb)_{>0}) - D^Tb\}$.

Для доказательства свойства 1 осталось найти выражения $y_{>0}$, $\theta_{=0}$, пользуясь выражением (*) для z, в котором F^{-1} умножается на некоторый вектор. При расчете компонент z, равных компонентам $y_{>0}$, используются только строки F^{-1}, соответствующие $y_{>0}$. При этом с учетом вида матрицы F^{-1} (см. лемму 1, в частности, пример свойства 4) можно учитывать только столбцы, соответствующие $y_{>0}$ (остальные значения в этих строках нулевые). Поэтому в (*) можно заменить z на $y_{>0}$, F^{-1} на $G_{>0} = ((D^TAD)_{>0})^{-1}$, $S^T(\overline{G})^{-1}$ на $S^T_{>0}(\overline{G})^{-1}$, D^Tb на $(D^Tb)_{>0}$:

(**) $y_{>0} = G_{>0}\{S^T_{>0}(\overline{G})^{-1}(x + S_{>0}G_{>0}(D^Tb)_{>0}) - (D^Tb)_{>0}\}$.

С учетом симметричности матрицы $G_{>0}$ (свойство 4) из (**) следует выражение $y_{>0}$ в свойстве 1.

Для расчета оставшихся компонент вектора z – компонент $\theta_{=0}$ – также воспользуемся видом матрицы F^{-1} и выражением (*). В примере свойства 4 леммы 1 часть матрицы F^{-1}, используемая при расчете $\theta_{=0}$, имеет вид $\left((D^TAD)_{=0}G_{>0} \quad -E_{=0}\right)$, а в общем случае отличается лишь перестановкой столбцов. Согласно (*) эта матрица умножается на некоторый вектор $\xi = \{S^T(\overline{G})^{-1}(x + S_{>0}G_{>0}(D^Tb)_{>0}) - D^Tb\}$, компоненты которого можно разделить на компоненты $\xi_{>0}$, соответствующие $y_{>0}$, и компоненты $\xi_{=0}$, соответствующие $y_{=0}$. Поэтому $\theta_{=0} = (D^TAD)_{=0}G_{>0}\xi_{>0} - \xi_{=0}$. При расчете $y_{>0}$ уже найдено $G_{>0}\xi_{>0} = y_{>0}$. (см. выражение (**)). Для поиска $\xi_{=0}$ заменим $S^T(\overline{G})^{-1}$ на $S^T_{=0}(\overline{G})^{-1}$, D^Tb на $(D^Tb)_{=0}$ (подвектор D^Tb, соответствующий $y_{=0}$):

$\theta_{=0} = (D^TAD)_{=0}\,y_{>0} - S^T_{=0}(\overline{G})^{-1}(x + S_{>0}G_{>0}(D^Tb)_{>0}) + (D^Tb)_{=0}$, что и доказывает свойство 1.

Таким образом, задавшись некоторыми номерами компонент делегирования, которые могут быть ненулевыми (введя дополнительные условия $y_{=0} = 0$ и $\theta_{>0} = 0$), в невырожденном случае из уравнений (6), (8) векторы $y_{>0}$, $\theta_{>0}$ однозначно определяются выражениями (15) и (16). Если компоненты $y_{>0}$, $\theta_{=0}$ неотрицательны, то после добавления нулевых компонент найдем единственные y, λ, θ, которые удовлетворяют системе уравнений (5) (эквивалентной (8)) и (6), а также условиям дополняющей нежесткости (7) и условиям $y_{=0} = 0$, $\theta_{>0} = 0$. Поэтому найденные y, λ и θ являются критической точкой. Если же среди компонент $y_{>0}$, $\theta_{=0}$ есть отрицательные, то в силу единственности найденного решения при условиях $y_{=0} = 0$, $\theta_{>0} = 0$ не существует критической точки, что доказывает свойство 2.

Для доказательства свойства 3 осталось рассчитать затраты в критической точке y, λ, θ в случае неотрицательности компонент $y_{>0}$, $\theta_{=0}$. Выпишем в явном виде суммарные затраты менеджеров. Из выражения (8) (эквивалентного (5) и (9)) следует $D^T(ADy+b)=\overline{\lambda}+\theta$. Умножим слева на y^T и заметим, что $y^T D^T=(Dy)^T=\tilde{y}^T$, из (6) следует $y^T\overline{\lambda}=(\lambda,x)$, а из (7) следует $y^T\theta=0$. В результате $\tilde{y}^T A\tilde{y}+\tilde{y}^T b=(\lambda,x)$ или $0.5(A\tilde{y},\tilde{y})+(b,\tilde{y})=0.5(\lambda,x)+0.5(b,\tilde{y})$. Слева записаны суммарные переменные затраты менеджеров, поэтому в итоге имеем:

$$C_{managr}(x,D,y)=0.5((\lambda,x)+(\tilde{y},b))+C^f\text{, где } C^f=\sum\nolimits_i C^f_{m_i}.$$

Обозначив через $D_{col>0}$ подматрицу матрицы D, составленную из столбов, соответствующих $y_{>0}$, можно записать $\tilde{y}=D_{col>0}y_{>0}$, а с учетом выражения (15) в свойстве 1:

$$\tilde{y}=D_{col>0}(S_{>0}G_{>0})^T(\overline{G})^{-1}x+D_{col>0}\{(S_{>0}G_{>0})^T(\overline{G})^{-1}(S_{>0}G_{>0})-G_{>0}\}(D^Tb)_{>0}.$$

При вычислении $(\tilde{y},b)$ можно воспользоваться правилом переброски в квадратичной форме (см., например, [1]), учитывая симметричность матрицы $(\overline{G})^{-1}$ (см. свойство 1) и равенство $D^T_{col>0}b=(D^Tb)_{>0}$:

$(b,D_{col>0}(S_{>0}G_{>0})^T(\overline{G})^{-1}x)=((\overline{G})^{-1}S_{>0}G_{>0}(D^Tb)_{>0},x)$. В итоге:

$$(\tilde{y},b)=((\overline{G})^{-1}S_{>0}G_{>0}(D^Tb)_{>0},x)+(\{(S_{>0}G_{>0})^T(\overline{G})^{-1}(S_{>0}G_{>0})-G_{>0}\}(D^Tb)_{>0},(D^Tb)_{>0}).$$

С учетом выражения для λ (см. свойство 1) имеем $(\lambda,x)=((\overline{G})^{-1}x,x)+((\overline{G})^{-1}S_{>0}G_{>0}(D^Tb)_{>0},x)$. Подставляя полученные результаты в выражение $C_{manag}(x, D, y)$, в результате докажем выражение (17) для затрат управленческой подсистемы (см. свойство 3). Лемма доказана. ■

Лемма 2 позволяет аналитически найти критическую точку или показать ее отсутствие при любых фиксированных компонентах делегирования $y_{>0}$, которые могут быть ненулевыми. Если компоненты векторов $y_{>0}$, $\theta_{=0}$ в свойстве 1 неотрицательны, то по свойству 3 найдена критическая точка, затраты в которой определяются выражением (17). Иначе по свойству 2 при заданных $y_{>0}$ критической точки не существует, поэтому не может быть оптимума (см. раздел 4). Также лемма 2 позволяет доказать в разделе 6, что в строго выпуклом случае при $detD \neq 0$ имеет место невырожденный случай, а выражения (15) и (16) свойства 1 позволяют построить в разделе 7 эффективный алгоритм выбора компонент делегирования $y_{>0}$, дающих критическую точку (которая в выпуклом случае оптимальна).

6. Невырожденность уравнений критической точки

Если функции затрат менеджеров строго выпуклы и $detD \neq 0$, то целевая функция $C_{manag}(x, D, y)$ строго выпукла по y, существует единственное оптимальное делегирование и только для этого делегирования найдутся коэффициенты Лагранжа, дающие критическую точку (см. раздел 4). Следующая теорема, опирающаяся на леммы 1 и 2 раздела 5, позволяет показать, что и при любых фиксированных компонентах делегирования $y_{>0}$, которые могут быть ненулевыми, однозначно определяются значения $y_{>0}$, $\theta_{=0}$ (в случае неотрицательности компонент которых найдена критическая точка).

Теорема 1. *Если* $x^1 > 0, \ldots, x^p > 0$, *функции затрат менеджеров строго выпуклы* (*матрицы* $A_1, \ldots, A_q$ *положительно определены*) *и* $detD \neq 0$, *то при любом фиксированном составе компонент* $y_{>0}$,[1] *которые могут быть ненулевыми, матрицы* D^TAD,

---

[1] *Выполнение условий* $x^1 > 0, \ldots, x^p > 0$ *необходимо для справедливости лемм* 1 *и* 2 (*обобщение см. в* [2]). *Поэтому, как и выше, в теореме*

$(D^TAD)_{>0}$, $G_{>0} = ((D^TAD)_{>0})^{-1}$, $\overline{G} = S_{>0}G_{>0}S^T_{>0}$, $(\overline{G})^{-1}$ *в лемме* 2 *симметричны и положительно определены, поэтому выполнены условия невырожденности, значения* λ, y, θ *однозначно определяются свойством* 1 *леммы* 2.

Доказательство. Матрица D^TAD симметрична в силу симметричности A. Квадратичная форма $0.5(D^TADy, y) = 0.5(ADy, Dy) = = 0.5(A\tilde{y}, \tilde{y})$ определяет квадратичную часть затрат менеджеров: (правило переброски, см., например, в работе [1]). В случае неотрицательной определенности матрицы A (которая эквивалентна выпуклости функций затрат менеджеров, см., например, [13]) матрица D^TAD также неотрицательно определена, поскольку $(A\tilde{y}, \tilde{y}) \geq 0$. Положительная определенность матрицы A (которая эквивалентна строгой выпуклости функций затрат менеджеров, см., например, [13]) совместно с дополнительным условием $\det D \neq 0$ влечет положительную определенность матрицы D^TAD, поскольку $\tilde{y} = Dy \neq 0$ при $y \neq 0$, следовательно $(A\tilde{y}, \tilde{y}) > 0$.

Доказанная выше положительная определенность матрицы D^TAD влечет то же свойство и для любой главной подматрицы $(D^TAD)_{>0}$. Отсюда $\det (D^TAD)_{>0} > 0$, поэтому существует обратная матрица $G_{>0} = ((D^TAD)_{>0})^{-1}$. Симметричность $G_{>0} = ((D^TAD)_{>0})^{-1}$ доказана в лемме 2, положительную определенность легко показать непосредственно: для любого $u \neq 0$ выполнено $((D^TAD)_{>0}\, u, u) = ((G_{>0})^{-1}u, u) > 0$, для любого $v \neq 0$ выполнено $G_{>0}v \neq 0$, поэтому выполнено $((G_{>0})^{-1}G_{>0}v, G_{>0}v) > 0$, откуда $(v, G_{>0}v) > 0$, что и доказывает положительную определенность.

Симметричность $\overline{G}$ доказана в лемме 2. Докажем положительную определенность. Рассмотрим p-мерный вектор $u \neq 0$ и квадратичную форму $(\overline{G}u, u) = (S_{>0}G_{>0}S^T_{>0}u, u)$. Введем обозначе-

---

рассматриваются только такие $y_{>0}$, *при которых для любого* $k = \overline{1, p}$ *найдется хотя бы одно* i, *для которого* y_i^k *входит в* $y_{>0}$ (*иначе у всех менеджеров управление вида* k *равно нулю, условия баланса* (6) *нарушены*).

ние $v = S_{>0}^T u$. С использованием правила переброски (верного и для прямоугольной матрицы $S_{>0}$, см., например, [1]) $(\overline{G}u, u) = (S_{>0} G_{>0} S_{>0}^T u, u) = (G_{>0} v, v)$.

В силу $x^k > 0$ в разделе 5 ненулевые компоненты $y_{>0}$ выбираются только таким образом, чтобы критическая точка могла существовать (могли быть разрешены балансовые уравнения (6)), то есть для любого k нашлось бы такое i, что y_i^k входит в $y_{>0}$. Поэтому в k-м столбце i-о блока матрицы S стоит единица в строке k и этот столбец входит в $S_{>0}$.

В силу $u \neq 0$ для некоторого k выполнено $u^k \neq 0$. По доказанному выше в $S_{>0}$ найдется столбец, в котором k-й элемент равен единице, остальные нулю. Соответствующая компонента $S_{>0}^T u$ равна $u^k \neq 0$, поэтому $v = S_{>0}^T u \neq 0$. Поэтому положительная определенность $G_{>0}$ влечет $(\overline{G}u, u) = (G_{>0} v, v) > 0$, то есть матрица $\overline{G}$ положительно определена. Выше доказано, что в этом случае обратная матрица $(\overline{G})^{-1}$ также положительно определена.

В лемме 2 условия невырожденности $\det((D^T AD)_{>0}) \neq 0$, $\det \overline{G} \neq 0$ выполнены, поскольку определители положительно определенных матриц положительны. Следовательно, выполнены свойства 1-4 леммы 2 (в частности, симметричность матрицы $(\overline{G})^{-1}$). Теорема доказана. ■

Теорема 1 показывает, что положительность суммарного управления, строгая выпуклость функций затрат менеджеров и невырожденность матрицы дублирования достаточны для того, чтобы при любом выборе компонент делегирования $y_{>0}$,[1] которые могут быть ненулевыми, значения λ, y, θ однозначно определялись свойством 1 леммы 2 (см. раздел 5). Если выполнено $y \geq 0$, $\theta \geq 0$, то найдена критическая точка (свойство 3 леммы 2), которая и является единственным решением задачи об оптимальном делегировании (см. раздел 4), минимальные затраты

---

[1] *Кроме выбора* $y_1^k = ... = y_q^k = 0$, *заведомо исключенного из-за отсутствия критической точки.*

определяются выражением (17) (свойство 3 леммы 2). Иначе при выбранном $y_{>0}$ не существует критической точки (свойство 3 леммы 2), и необходимо некоторым образом менять набор $y_{>0}$.

7. Алгоритм поиска оптимального делегирования

Результаты предыдущих разделов позволяют предложить следующий **алгоритм решения задачи об оптимальном делегировании для выпуклых функций затрат, представимых в виде квадратичных форм**:

1. на первом шаге выберем $y_{>0} = y_1$, то есть ненулевыми могут быть только компоненты делегирования первого менеджера[1] (соответственно $y_{=0} = (y_2^T, ..., y_q^T)^T = 0$, $\theta_{>0} = \theta_1 = 0$, а компоненты $\theta_{=0} = (\theta_2^T, ..., \theta_q^T)^T$ могут быть ненулевыми),

2. на очередном шаге с учетом условий $y_{=0} = 0$, $\theta_{>0} = 0$ найдем y, θ в соответствии с выражениями (15), (16) (свойство 1 леммы 2),

3. если $y \geq 0$, $\theta \geq 0$, то найдено оптимальное решение, минимальные затраты определяются выражением (17) (свойство 3 леммы 2), алгоритм завершен,

4. иначе добавим в дополнительные условия $y_{=0} = 0$ те компоненты вектора y, которые оказались отрицательными, и исключим из $y_{=0} = 0$ те компоненты вектора y, которые соответствуют отрицательным компонентам θ, после чего перейдем на шаг 2.

Для анализа практической применимости алгоритма достаточно проанализировать его поведение на случайных исходных данных. Численные эксперименты показывают, что максимальное количество шагов алгоритма наблюдается, если элементы

---

[1] *Описанные ниже результаты тестирования алгоритма на случайных данных не изменятся, если на первом шаге выбирать не первого, а любого другого менеджера. Если выбирать внутреннее делегирование* $y_{>0} = y$, $\theta = 0$, *то количество шагов алгоритма отличается незначительно* (*в пределах* 10%).

матриц D, A [1)] и векторов b, x распределены одинаково, например, равномерно на отрезке [0; 1]. Сдвиг и масштабирование отрезков в среднем незначительно снижает количество шагов.[2]

Невырожденность матрицы D специально не проверялась в силу нулевой вероятности генерации вырожденной матрицы. Генерировалась неотрицательно определенная матрица A. Ее строгая положительная определенность также не проверялась. Для контроля погрешности в случае плохо обусловленных матриц проводилась подстановка найденного решения в условия равенства нулю производных лагранжиана (5) и балансовые условия (6) (см. раздел 4). Во всех проведенных численных экспериментах алгоритм нашел решение с погрешностью меньше 10^{-7}.

Основным фактором, влияющим на количество шагов алгоритма, является размерность задачи pq. При изменении соотношения p и q результаты меняются не более чем на 20%, причем число шагов близко к максимальному при небольшом p, при котором решение может быть «максимально краевым» (с максимальным количеством нулевых компонент делегирования). Результаты тестирования алгоритма для $p = 1$ и q от 2 до 100 приведены на рис. 2. В каждой точке алгоритм запускался многократно до тех пор, пока среднее число шагов не стабилизоровалось (менялось при очередном запуске не более чем на 1%).

Для случаев $q = 2$, $p = 1, 2, \ldots, 50$ и $p \approx q$, $pq = 2, 3, \ldots, 100$, характер роста числа шагов аналогичен рис. 2 ($p \approx q$ с точностью до разложения размерности задачи pq на

---

[1] *Матрица A_i симметрична и положительно определена тогда и только тогда, когда она представима в виде* $A_i = B_i^T B_i$ (см. [1]), *где B_i – невырожденная матрица. Для генерации случайных матриц A_i генерировалась матрица B_i, а затем вычислялась* $A_i = B_i^T B_i$, *что сдвигает распределение элементов A_i, однако существенно не влияет на количество шагов алгоритма, поскольку оно слабо зависит от распределения.*

[2] *В пределах* 20%, *включая и сдвиг элементов D, A, b в область отрицательных чисел.*

целые множители; строго говоря, размерность задачи изменялась от двух до 100, количество менеджеров q вычислялось как корень из размерности, округленный до целого, а затем увеличивалось до первого целого p, при котором pq равно размерности).

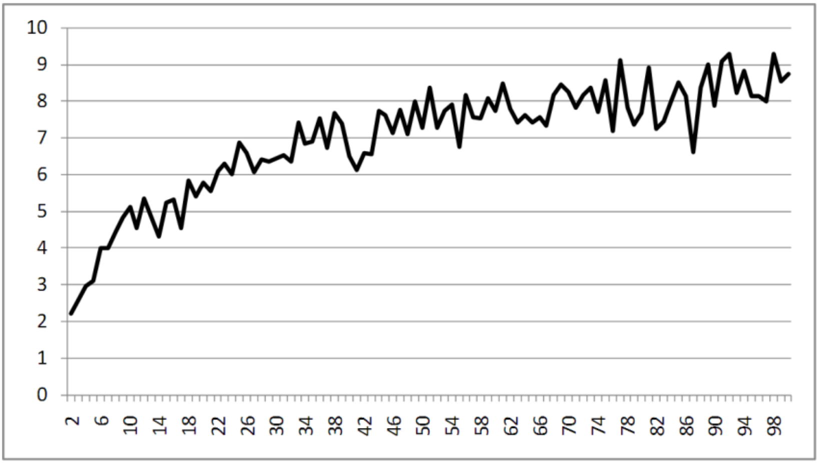

Рис.2. Количество шагов алгоритма в зависимости от размерности задачи pq

Из рис. 2 видно, что рост числа шагов алгоритма с ростом размерности замедляется. Это позволяет предположить, что при любой разумной размерности[1] задача будет решаться не более чем за 10-20 шагов. Данное предположение подтверждается тестами при $q = 500$, показывающими, что алгоритм решает задачу приблизительно за 12 шагов. Таким образом, *на практике задача об оптимальном делегировании в выпуклом случае решается путем* 10-20 *вычислений выражений* (15), (16) (свойство 1 леммы 2).

Заметим, что число шагов алгоритма снижается при приближении матриц A, D к диагональным, поскольку решение «приближается» к внутреннему – растет количество ненулевых компонент делегирования. Теоретически можно предположить,

[1] *Численные эксперименты проводились при pq не более* 1000.

что возможна и обратная ситуация – специально подобранные матрицы, приводящие к перебору всех вариантов ненулевых компонент делегирования (к числу шагов порядка 2^{pq}). Однако практически во всех описанных выше численных экспериментах число шагов было меньше 15. Крайне редко имело место зацикливание алгоритма (повторение набора $y_{>0}$). Данную ситуацию можно не отслеживать специально: если алгоритм сделал 20 шагов и не пришел к критической точке, достаточно начать его заново, допустив на первом шаге положительность компонент делегирования только второго менеджера (выбрав $y_{>0} = y_2$ вместо $y_{>0} = y_1$). Этой модификации достаточно для практического решения задачи об оптимальном делегировании.

8. Заключение

В целом настоящая работе показывает, что при выпуклых затратах менеджеров задача об оптимальном делегировании для квадратичных форм решается с помощью 10-20 вычислений выражений (15), (16) (свойство 1 леммы 2) если размерность задачи pq остается разумной (порядка 1000).

Незначительное количество шагов алгоритма позволяет «встраивать» разработанные методы поиска оптимального делегирования в решение более сложных задач минимизации затрат управленческой подсистемы выбором иерархии, типов и состава менеджеров, стимулирования и т. п.

Кроме того, разработанные методы решения могут использоваться для поиска оптимального распределения общего объема выпуска между предприятиями (отрасли, холдинга и т.п.), которые обмениваются продуктами производства по обобщенной модели многопродуктового межотраслевого баланса и описываются выпуклыми функциями затрат, представимыми в виде квадратичных форм.

Литература

1. БОСС В. *Лекции по математике: линейная алгебра*. Том 3. – М.: КомКнига, 2005.

2. МИШИН С.П. *Модели и методы оптимизации иерархических организаций*: Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. – М.: ИПУ РАН, 2011.
3. МИШИН С.П. *Свойства оптимального делегирования управления в организации* // Управление большими системами. – 2011. – Выпуск 34. – С. 165–199.
4. ПОЛЯК Б.Т. *Введение в оптимизацию*. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
5. BAUMOL W.J., PANZAR J.C., AND WILLIG R. *Contestable Markets and the Theory of Industry Structure*. – San Diego, CA: Harcourt Bracejovanovich, 1982.
6. BLOCH H., MADDEN G. AND SAVAGE S.J. *Economies of Scale and Scope in Australian Telecommunications* // Review of Industrial Organization. – 2001. – No 18. – P. 219–227.
7. COHN E., RHINE S. AND SANTOS M. *Institutions of Higher Education as Multi-Product Firms: Economies of Scale and Scope* // The Review of Economics and Statistics. – 1989. – V. 71. – No 2. – P. 284–290.
8. DUONG T.M., MCLAREN N.K., ZHAO X. *Multi-output Broadacre Agricultural Production: Estimating a Cost Function Using Quasi-Micro Farm Level Data from Australia* / Proceedings of AARES 52nd Annual Conference, February 5-8, 2008, Canberra, Australia (http://purl.umn.edu/6009).
9. FARE R., MARTINS-FILHO C., VARDANYAN M. *On Functional Form Representation of Multi-Output Production Technologies* // Journal of Productivity Analysis. – 2010. – No 33. – P. 81–96.
10. POLOME P., FERNAGUT P.P., HARMIGNIE B., O. DE FRAHAN, BRUNO H. *Multi-input Multi-output Farm-level Cost Function: A Comparison of Least Squares and Entropy Estimators* / Proceedings of European Association of Agricultural Economists, International Congress, August 23-27, 2005, Copenhagen, Denmark (http://purl.umn.edu/24727).
11. FILIPPINI M., FARSI M. *Cost Efficiency and Scope Economies in Multi-output Utilities in Switzerland* / Study on behalf of the State Secretariat for Economic Affairs SECO. Berne, 2008.

12. HOWITT R.E. *Positive mathematical programming* // American Journal of Agricultural Economics. –1995. – V. 77. – No 2. – P. 329–342.
13. ROCKAFELLAR R.T. *Convex Analysis*. – N.J., Princeton: Princeton University Press, 1970.
14. ROLLER L.H. *Proper Quadratic Cost Functions with an Application to the Bell System* // Review of Economics and Statistics. – 1990. – V. 72. – P. 202 – 210.
15. TOVAR B., JARA-DIAZ S.R., TRUJILLO L. *A Multioutput Cost Function for Port Terminals: Some Guidelines for Regulation.* Paper provided by The World Bank in its series Policy Research Working Paper Series with number 3151. 2003 (http://www-wds.worldbank.org/servlet/WDSContentServer /WDSP/IB/2003/10/27/000160016_20031027124418/Rendered/ PDF/wps3151.pdf).

OPTIMAL DELEGATION OF AUTHORITY FOR CONVEX MULTI-OUTPUT QUADRATIC COST FUNCTIONS

Sergei Mishin, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (smishin78@mail.ru).

Abstract: *We minimize a multi-output quadratic cost function by choosing optimal delegation of authority (DoA). DoA means distribution of management actions needed for a production subsystem between managers with complicated duplication of each others' efforts. Formally this problem is equivalent to optimization of a production volume distribution between firms with complicated exchange of products and multi-output cost functions. We prove analytical results and use them to develop and test an efficient algorithm, which solves the optimal delegation problem with a small number of iterations.*

Keywords: optimal delegation of authority, multi-output cost functions.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.А. Ворониным