УДК 519.177+519.217.2+517.977.1
ББК 22.18

ДИСКРЕТНАЯ ПРОЦЕДУРА СОГЛАСОВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК С ПОМОЩЬЮ МИНИМАЛЬНОГО ЦИКЛА, ОБЪЕДИНЯЮЩЕГО БАЗОВЫЕ БИКОМПОНЕНТЫ[1]

Агаев Р. П.[2]
(*Учреждение Российской академии наук Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

Статья посвящена задаче дискретного согласования характеристик в многоагентных системах, в которых орграф влияний Γ *состоит только из несвязанных сильных компонент. Показано, что каждый блок предела правильной матрицы влияний для* Γ *пропорционален соответствующему блоку предела матрицы влияний для орграфа* Γ^h*, полученного из* Γ *объединением сильных компонент с помощью минимального цикла. Установлено, что итоговая матрица процедуры ортогональной проекции, примененной к орграфу влияний* Γ*, совпадает с пределом матрицы влияний для орграфа* Γ^h *при определенных весах дуг объединяющего цикла.*

Ключевые слова: многоагентные системы, децентрализованное управление, граф коммуникаций, консенсус, лапласовская матрица, матрица Кирхгофа, модель Де Гроота, управление.

---

[1] *Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 09-07-00371а и Программы Президиума РАН «Математическая теория управления».*

[2] *Рафиг Пашаевич Агаев, к.т.н., с.н.с.* (*agaraf@rambler.ru, Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел.* (*495*) *334-88-69*).

1. Введение

Согласно модели Де Гроота [8] если $s(0)=(s_1^0,\dots,s_n^0)^{\mathrm{T}}$ – вектор начальных мнений членов группы, а $s(k)=(s_1^k,\dots,s_n^k)^{\mathrm{T}}$ – вектор мнений после k-го шага согласования, то $s(k)=Ps(k-1),\ k=1,2,\dots,$ где P – стохастическая матрица влияний, элемент p_{ij} которой задает степень влияния мнения j-го агента на мнение i-го. В матричной форме модель Де Гроота имеет следующее представление:

(1) $$s(k)=P^k s(0),\quad k=1,2,\dots$$

Известно, что согласие достижимо при любых начальных мнениях в том и только том случае [8], если существует предельная матрица $P^\infty=\lim_{k\to\infty}P^k$ и все ее строки равны, что равносильно регулярности матрицы P.

Если матрица P нерегулярна, то согласие может быть достигнуто при векторах начальных мнений, принадлежащих определенному подпространству. В [3] получена характеризация этого подпространства и предложен метод ортогональной проекции, обобщающий процедуру Де Гроота. Показано, что небазовые агенты в методе ортогональной проекции, как и в процедуре Де Гроота, не влияют на конечный результат.

Статья имеет следующую структуру. После введения приведены основные определения и обозначения. В разделе 3 доказано, что нормированная матрица исходящих лесов является однородной относительно минимального цикла, объединяющего все базовые бикомпоненты. В разделе 4 установлено, что итоговая матрица процедуры ортогональной проекции совпадает с пределом матрицы влияний после объединения всех базовых бикомпонент минимальным объединяющим циклом с определенными весами дуг.

2. Основные термины и обозначения

Стохастической матрице P, входящей в модель Де Гроота, поставим в соответствие *орграф влияний* Γ с множеством вершин $V(\Gamma) = \{1, \ldots, n\}$, в котором при $p_{ij} > 0$ (т. е. если j-й агент влияет на i-го) от вершины j к вершине i проводится дуга (j, i) с весом $w_{ji} = p_{ij}$.

Матрица Кирхгофа $L = L(\Gamma) = (\ell_{ij})$ орграфа Γ определяется следующим образом: при $j \neq i$ полагают $\ell_{ij} = -w_{ji}$, если в Γ имеется дуга (j, i), и $\ell_{ij} = 0$ в противном случае; $\ell_{ii} = \sum\limits_{k \neq i} w_{ki},\ i, j = 1, \ldots, n$. Нередко вместо матрицы Кирхгофа строится *лапласовская матрица*. Она определяется соотношениями $\ell_{ij} = -w_{ij}$, если $j \neq i$, и $\ell_{ii} = -\sum_{k \neq i} \ell_{ik}$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Через I будем обозначать единичную матрицу.

В силу приведенных определений для орграфа Γ, отвечающего матрице P, имеем

$$L(\Gamma) = I - P. \tag{2}$$

С другой стороны, для любой матрицы Кирхгофа $L(\Gamma) = (\ell_{ij})$ взвешенного орграфа Γ (веса дуг – произвольные положительные числа) следующим образом определим стохастическую матрицу влияний:

$$P = I - \epsilon L, \tag{3}$$

где $\epsilon < \big(\max \ell_{ii}\big)^{-1}$.

Любой максимальный по включению сильный подграф орграфа называют его *сильной компонентой* или *бикомпонентой*. *Базовая бикомпонента* – такая бикомпонента, в которую не входят дуги извне. Через ν будем обозначать число базовых бикомпонент.

Будем говорить, что матрица A имеет предел, если A^m стремится к некоторой матрице при $m \to \infty$.

Если стохастическая матрица P орграфа влияний имеет предел P^{∞}, то

$$P^{\infty} = \bar{J}, \tag{4}$$

где $\bar{J} = (j_{kr})$ – нормированная матрица максимальных исходящих лесов соответствующего взвешенного орграфа Γ (следствие матричной теоремы о деревьях для цепей Маркова [6], см. также теорему 7 из [1]).

Элементы матрицы $\bar{J} = (j_{kr})$ определяются следующим образом:

$$j_{kr} = \frac{q_{kr}}{\sigma}, \tag{5}$$

где q_{kr} – вес множества максимальных исходящих из вершины r лесов, в которых вершина k достижима из r, σ – вес множества всех максимальных исходящих лесов в орграфе Γ.

Поскольку предел матрицы влияний равен нормированной матрице исходящих лесов орграфа влияний, этот предел можно определить рекурсивно как многочлен от L (см. [2, раздел 4]) с помощью метода Леверье-Фаддеева или же как (теорема 6 в [1])

$$\bar{J} = \lim_{\tau \to \infty} (I + \tau L)^{-1}. \tag{6}$$

Для матриц влияний, Кирхгофа и предела степеней матрицы влияний i-ю бикомпоненту обозначим соответственно через P_i, L_i и P_i^{∞}. В данном случае матрицы L и P^{∞} всей системы имеют вид

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & & & \\ & L_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_{\nu} \end{pmatrix}, \quad P^{\infty} = \begin{pmatrix} P_1^{\infty} & & & \\ & P_2^{\infty} & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_{\nu}^{\infty} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где блоки соответствуют базовым бикомпонентам, а не входящие в них элементы равны нулю.

Матрицы P_i^{∞} соответствуют сильно связным орграфам и представляются в виде

$$P_i^{\infty} = \mathbf{1}(\pi^i)^{\mathrm{T}}, \quad i = 1, \ldots, \nu, \tag{8}$$

где $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$, $(\pi^i)^{\mathrm{T}}$ – любая строка P_i^{∞}.

Через t^i обозначим сумму весов[3] всех остовных исходящих деревьев i-й бикомпоненты орграфа Γ, а через t_k^i – сумму весов тех из них, которые имеют корень в k-й вершине i-й бикомпоненты. Отметим, что согласно матричной теореме о деревьях (см., например, теорему 16.9′ в [7], где результат формулируется для матрицы L^{T} и невзвешенных орграфов) t_k^i равно алгебраическому дополнению любого элемента k-й строки матрицы L_i.

3. Однородность нормированных матриц исходящих лесов относительно минимального объединяющего цикла

В [3] для дискретных моделей был предложен метод согласования, сводящийся к 1) преобразованию вектора начальных мнений в вектор, принадлежащий определенной области, с помощью ортогональной проекции и 2) дальнейшей коррекции мнений посредством преобразования с использованием стохастической матрицы. В [4] было доказано, что любая сходящаяся процедура согласования может быть приближена процедурой Де Гроота, орграф влияний которой является гамильтоновым циклом. Но при этом воспроизводится лишь конечный результат, т.е. итоговый вектор влиятельностей агентов, матрица же связей между агентами может сильно отличаться от аппроксимируемой.

Предположим, что матрица влияний P имеет предел. Пусть при этом орграф влияний $\Gamma(V, E)$ состоит только из базовых бикомпонент. Подграфы, соответствующие бикомпонентам, обозначим через $\Gamma_1(V_1, E_1), \ldots, \Gamma_\nu(V_\nu, E_\nu)$; каждый из них – сильный. Поскольку общий орграф влияний не содержит остовного исходящего дерева, согласие в системе достигается не для любого

[3] *Вес дерева определяется как произведение весов всех его дуг.*

вектора начальных мнений.

В каждой k-й бикомпоненте зафиксируем произвольную вершину v_k, $k = 1, \ldots, \nu$. Эти вершины соединим минимальным циклом $H = (e_1, \ldots, e_\nu)$, где $e_i = (v_i, v_{i+1})$, $i = 1, \ldots, \nu$ и $v_{\nu+1} = v_1$. Такой цикл соединяет бикомпоненты в одну. Полученный орграф обозначим через $\Gamma^h(V, E_h)$ (рис.1). В силу связности $\Gamma^h(V, E_h)$ последовательность степеней его матрицы влияний имеет предел – матрицу с одинаковыми строками. Эту регулярную положительную матрицу обозначим через $\bar{J}^{(h)}$ и представим в следующем блочном виде

$$\bar{J}^{(h)} = \begin{pmatrix} \bar{J}_1^{(h)} & * & * & * \\ * & \bar{J}_2^{(h)} & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & \bar{J}_s^{(h)} \end{pmatrix},$$

где все блоки, включая блоки, обозначенные $*$ – состоят из положительных чисел.

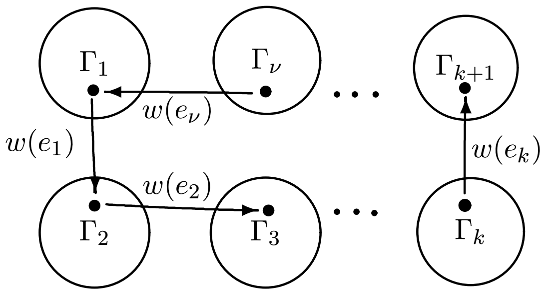

Рис. 1.

Предложение 1. *Для матрицы* $\bar{J}^{(h)} = (j_{kr}^{(h)})$, *определенной выше, каждая функция* $j_{kr}^{(h)}(w(e_1), \ldots, w(e_\nu))$ *являет-*

ся однородной 0-й степени[4]*, т.е.* $j_{kr}^{(h)}(xw(e_1),\ldots,xw(e_\nu)) = j_{kr}^{(h)}(w(e_1),\ldots,w(e_\nu))$ *для любого* $x \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство предложения 1. Рассмотрим матрицу Кирхгофа $L^{(h)}$ орграфа влияний Γ^h.

Пусть q_r – суммарный вес деревьев, исходящих из вершины r в Γ^h. Пусть r принадлежит базовой бикомпоненте k. Тогда

$$q_r = t_r^k \prod_{s=0}^{\nu-2} \big(w(e_{k+s}) t_{v_{k+s+1}}^s\big),$$

где t_r^k, как и ранее, – сумма весов остовных исходящих деревьев k-й бикомпоненты орграфа Γ, в которых r является корнем[5].

Поскольку для всех $r \in \{1,\ldots,n\}$ и любого $x \in \mathbb{R}_+$

$$t_r^k \prod_{s=0}^{\nu-2} \big(xw(e_{k+s}) t_{v_{k+s+1}}^s\big) = x^{\nu-1} t_r^k \prod_{s=0}^{\nu-2} \big(w(e_{k+s}) t_{v_{k+s+1}}^s\big)$$

и вес множества всех исходящих деревьев t орграфа Γ^h равен $\sum_{r=1}^n q_r$, согласно (5) имеем

$$j_{kr}^{(h)}(xw(e_1),\ldots,xw(e_\nu)) = q_r t^{-1} = j_{kr}^{(h)}(w(e_1),\ldots,w(e_\nu)).$$

$\square$

Предложение 2. *Каждый блок* $\bar{J}_k^{(h)}$ *матрицы* $\bar{J}^{(h)}$ *пропорционален соответствующему блоку* P_k^∞ *матрицы* P^∞.

---

[4] *Функция* $f(x_1,...,x_n)$ *от* n *аргументов называется однородной функцией* m*-й степени, если при умножении всех ее аргументов на множитель* μ *функция приобретает этот же множитель* m*-й степени, т.е. если тождественно выполняется равенство* $f(\mu x_1,...,\mu x_n) = \mu^m f(x_1,...,x_n)$.

[5] *Если индекс* $k+s$ *больше* ν*, то вместо него используется* $k+s \bmod \nu$*. Аналогично, если* $k+s+1$ *больше* ν*, то используется* $k+s+1 \bmod \nu$.

Доказательство предложения 2. Не уменьшая общности, докажем, что первые блоки $P_1^\infty = (p_{kr}^{(1)})$ и $\bar{J}_1^{(h)} = (j_{kr}^{(1)})$ пропорциональны. Поскольку каждый блок состоит из одинаковых строк, для элементов первой строки матрицы P_1^∞ согласно (4) и (5) имеет место:

$$\frac{p_{1r}^{(1)}}{p_{1k}^{(1)}} = \frac{t_r^1}{t_k^1}.$$

Пропорциональность двух матриц P_1^∞ и $\bar{J}_1^{(h)}$ следует из соотношения элементов первой строки матрицы $\bar{J}_1^{(h)}$:

$$\frac{j_{1r}^{(1)}}{j_{1k}^{(1)}} = \frac{t_r^1 \prod_{s=2}^{\nu} w(e_{s-1}) t_{v_s}^s}{t_k^1 \prod_{s=2}^{\nu} w(e_{s-1}) t_{v_s}^s} = \frac{t_r^1}{t_k^1}.$$

$\square$

Отметим, что при объединении базовых бикомпонент была использована одна вершина из каждой бикомпоненты. Будет ли справедливым предложение 2, если вместо минимального цикла задействовать более одной вершины хотя бы в одной бикомпоненте? Построенные примеры показывают, что при увеличении длины цикла предложение 2, вообще говоря, перестает быть верным.

4. Метод ортогональной проекции как частный случай процедуры минимального объединяющего цикла

Следующее предложение позволяет добавлением минимального числа дуг построить орграф влияний агентов, реализующий предельную матрицу влияний, совпадающую с матрицей процедуры ортогональной проекции для исходного орграфа влияний.

Предложение 3. *Пусть* $\Gamma(V, E)$ *и* $\Gamma^h(V, E_h)$ *– орграфы, определенные выше. Тогда для некоторого минимального цикла*

$H = (e_1, \ldots, e_\nu)$, соединяющего все базовые бикомпоненты, при определенных весах дуг $w(e_1), \ldots, w(e_\nu)$, предел матрицы влияний $P^{(h)}$, соответствующей орграфу $\Gamma^h(V, E_h)$ (см.формулу (3)), совпадает с итоговой матрицей процедуры ортогональной проекции при орграфе влияний $\Gamma(V, E)$.

Доказательство предложения 3. Рассмотрим весовой вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ процедуры ортогональной проекции [3]

$$\overset{\infty}{P} = P^\infty S = \mathbf{1}\alpha^{\mathrm{T}}. \tag{9}$$

Предположим, что матрица $\bar{J}^{(h)}$ определена с помощью матрицы Кирхгофа $L^{(h)}$). Поскольку ранг матрицы $\bar{J}^{(h)}$ равен единице (предложение 11 из [1]), рассмотрим ее первую строку $j_{11}^{(h)}, \ldots, j_{1n}^{(h)}$. Для совпадения матриц $\bar{J}^{(h)}$ и $\overset{\infty}{P}$ согласно предложению 2 достаточно выполнение следующего равенства:

$$\frac{j_{1v_r}^{(h)}}{j_{1v_k}^{(h)}} = \frac{\alpha_{1v_r}}{\alpha_{1v_k}}, \quad k = 1, \ldots, \nu. \tag{10}$$

Пусть t – вес множества всех исходящих деревьев орграфа Γ^h. Тогда согласно (5)

$$j_{1v_r}^{(h)} = \frac{\prod_{s=1}^{\nu} w(e_s) t_{v_s}^s}{w(e_{r-1})t} \quad (w(e_0) \equiv w(e_\nu))$$

и

$$\frac{j_{1v_r}^{(h)}}{j_{1v_k}^{(h)}} = \frac{w(e_{k-1})}{w(e_{r-1})}. \tag{11}$$

Положим $w(e_\nu) = 1$ и определим веса других дуг e_k по формуле

$$w(e_k) = \frac{\alpha_{v_1}}{\alpha_{v_{k+1}}}, \quad k = 1, \ldots, \nu - 1. \tag{12}$$

Стохастическая матрица влияний $P^{(h)}$ определяется по формуле (3):

$$P^{(h)} = I - \epsilon L^{(h)},$$

где $\epsilon < \left(\max \ell_{ii}^{(h)}\right)^{-1}$.

Поскольку предел матрицы $P^{(h)}$ совпадает с $\bar{J}^{(h)}$, в силу (11) и (12) этот предел совпадает и с итоговой матрицей процедуры ортогональной проекции при орграфе влияний $\Gamma(V, E)$.

$\square$

Замечание 1. В предложении 3 веса добавленных дуг были вычислены с помощью компонент весового вектора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ процедуры ортогональной проекции. Согласно формуле (П.6) из [3] для компонент вектора α имеет место

$$\frac{\alpha_k}{\alpha_r} = \frac{t_k^i}{t_r^j} \cdot \frac{W_j}{W_i}, \tag{13}$$

где W_i – определитель матрицы T_i, полученной из L_i заменой первого столбца вектором π^i, i и j номера компонент, которым соответственно принадлежат вершины k и r.

Из (12) и (13) получим:

$$w(e_k) = \frac{t_{v_1}^1}{W_1} \cdot \frac{W_{k+1}}{t_{v_{k+1}}^{k+1}}, \quad k = 1, \ldots, \nu - 1. \tag{14}$$

Предложение 4. *Пусть диагональные элементы $p_{v_r v_r}$, $r{=}1, \ldots, \nu$, матрицы влияний P положительны и все базовые бикомпоненты объединены минимальным циклом $H{=}(e_1, \ldots, e_\nu)$. Тогда при некоторых значениях весов дуг $w^o(e_1), \ldots, w^o(e_\nu)$, предел матрицы влияний $P^{(h)}$, отличающейся от P только теми элементами, которые соответствуют добавленным дугам, и диагональными элементами, совпадет с итоговой матрицей метода ортогональной проекции для P.*

Доказательство предложения 4. Пусть веса дуг вычислены как в предложении 3. Согласно предложению 1 умножение весов всех дуг, входящих в минимальный цикл, на одно и то же число не влияет на нормированную матрицу исходящих лесов. Поэтому переопределим значения $w^o(e_1), \ldots, w(e_\nu^o)$ следующим образом:

$$w^o(e_i) = \theta\Big(\max_{1 \leqslant k \leqslant \nu} w(e_k)\Big)^{-1} \cdot w(e_i), \tag{15}$$

где $0 < \theta < \min_{1 \leqslant k \leqslant \nu} p_{v_r v_r}$.

Для орграфа влияний $\Gamma^h(V, E_h)$ построим матрицу $P^{(h)}$. Пусть L' – матрица Кирхгофа для $\Gamma'(V, H)$. Заметим, что $P^{(h)} = P - L'$ и является стохастической.

Поскольку, нормированная матрица исходящих деревьев для $\Gamma^h(V, E_h)$ совпадает с пределом матрицы $P^{(h)}$, очевидно, что последняя совпадает также с итоговой матрицей ортогональной проекции для P. $\square$

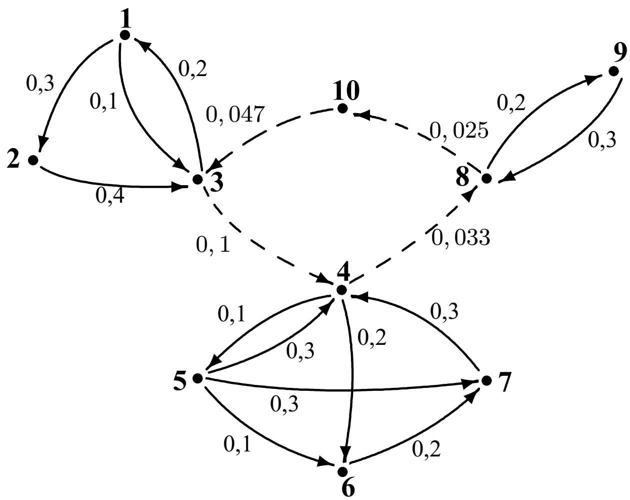

Рис. 2.

$w^o(e_1) \approx 0,1$, $w^o(e_2) \approx 0,033$, $w^o(e_3) \approx 0,025$, $w^o(e_4) \approx 0,047$.

Пример. Применим предложения 3 и 4 к орграфу влияний, приведенному на рис. 2, где для простоты не показаны петли. Вначале предположим, что нет дуг, соединяющих вершины 3, 4, 8, 10. Тогда подграфы Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 соответственно на множествах вершин $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6, 7\}$, $\{8, 9\}$, $\{10\}$, являются базовыми бикомпонентами.

Определим стохастическую матрицу влияний для соответствующего орграфа влияний.

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определим матрицу P^{∞} по одному из вышеуказанных способов (например, по формуле (6)):

$$P^{\infty} = \bar{J} = \begin{pmatrix} 0,517 & 0,276 & 0,207 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,517 & 0,276 & 0,207 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,517 & 0,276 & 0,207 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,139 & 0,722 & 0,056 & 0,083 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,139 & 0,722 & 0,056 & 0,083 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,139 & 0,722 & 0,056 & 0,083 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,139 & 0,722 & 0,056 & 0,083 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь предположим, что базовые бикомпоненты соединены циклом $3 \to 4 \to 8 \to 10 \to 3$. На рис. 2 эти связи указаны пунктирными дугами. Полученный орграф обозначим через Γ^h. Определим веса добавленных дуг таким образом, что нормированная матрица исходящих лесов $\bar{J}^h = (j^h_{kr})$ была равна $\overset{\infty}{P}$ – итоговой матрице процедуры ортогональной проекции.

По формуле (14) вычислим $w(e_k)$. Для этого положим $w(e_4) = 1$ и определим матрицы:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0,5172 & 0 & -0,2 \\ 0,2759 & 0,3 & 0 \\ 0,2069 & -0,4 & 0,5 \end{pmatrix}; T_2 = \begin{pmatrix} 0,1389 & -0,3 & 0 & -0,3 \\ 0,7222 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0,0556 & -0,1 & 0,3 & 0 \\ 0,0833 & -0,3 & -0,2 & 0,5 \end{pmatrix};$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0,4 & -0,3 \\ 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим $W_1 = \det(T_1) = 0,1121$, $W_2 = \det(T_2) = 0,0595$, $W_3 = \det(T_3) = 0,26, W_4 = 1$.

Применив матричную теорему о деревьях для матриц L_i определяем следующие значения: $t^1_3 = 0,06$; $t^2_4 = 0,015$; $t^3_8 = 0,2$.

Итак, $w(e_1) = 2,1237$, $w(e_2) = 0,696$, $w(e_3) = 0,5354$ $w(e_4) = 1$.

По формуле (15) определим $w^o(e_1), \ldots, w^o(e_\nu)$. Положив θ=0,1, находим $\max_{k\in\{1,\ldots,\nu\}} w(e_k) = 2,1237$. Далее находим:

$w^o(e_1) = 0{,}1 \cdot 2,1237^{-1} \cdot 2,1237 \approx 0,1$;

$w^o(e_2) = 0{,}1 \cdot 2,1237^{-1} \cdot 0,696 \approx 0,033$;

$w^o(e_3) = 0{,}1 \cdot 2,1237^{-1} \cdot 0,5354 \approx 0,025$;

$w^o(e_4) = 0{,}1 \cdot 2,1237^{-1} \cdot 1 \approx 0,047$.

Эти значения приведены на рис. 2.

Для орграфа Γ^h, приведенного на рис. 2, построим матрицу Кирхгофа L' и определим матрицу $P^{(h)} = P - L'$.

Предел матрицы влияний $P^{(h)}$ имеет следующее представление.

$(P^{(h)})^\infty = \mathbf{1} \cdot$ (0,1827; 0,0974; 0,0731; 0,0344; 0,1789; 0,0138; 0,0206; 0,1050; 0,1575; 0,1365).

Матрица $(P^{(h)})^\infty$ совпадает с $\overset{\infty}{P}$.

5. Заключение

В работе доказано, что итоговая матрица процедуры ортогональной проекции, применяемой к орграфу влияний Γ, совпадает с пределом матрицы влияний для орграфа Γ^h, который получен из Γ объединением всех сильных компонент с помощью минимального цикла. При этом веса всех дуг, входящих в минимальный цикл, определяются однозначно с точностью до множителя, а сам цикл содержит по одной вершине из каждой бикомпоненты. Если все сильные компоненты соединить минимальным циклом из дуг с произвольными весами, то соответствующая матрица влияний также будет иметь предел. Этот предел в общем случае не совпадет с матрицей ортогональной проекции, но его строки являются, как и в методе проекции, выпуклыми комбинациями линейно независимых строк матрицы P^{∞}.

В работе не изучалось влияние порядка бикомпонент в объединяющем их минимальном цикле. Скорее всего, при объединении бикомпонент не имеет значения, из какой бикомпоненты приходит дуга в данную бикомпоненту, важен лишь вес дуги и вершина, в которую дуга входит. Предложенный метод может быть интерпретирован как процедура управления со стороны «центра», и было бы интересно сравнить результаты, приведенные в разделе 3 «Динамические модели информационного управления. Анализ» работы [5], с результатами настоящей работы. Указанное сравнение выходит за рамки данной статьи и требует отдельного исследования.

Литература

1. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Матрица максимальных исходящих лесов орграфа и ее применения* // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 9. – С. 15–43.

2. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Остовные леса орграфа и их применение* // Автоматика и телемеханика. – 2001. – № 3. – С. 108–133.
3. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Метод проекции в задаче о консенсусе и регуляризованный предел степеней стохастической матрицы* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 12. – (в печати).
4. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Представление дискретной процедуры согласования характеристик с помощью циклического орграфа* // Автоматика и телемеханика. – 2012. – (в печати).
5. БАРАБАНОВ И.Н., КОРГИН Н.А., НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Динамические модели информационного управления в социальных сетях* // Автоматика и телемеханика. – 2010 № 11. – С. 172–182.
6. ВЕНТЦЕЛЬ А.Д., ФРЕЙДЛИН М.И. *О малых случайных возмущениях динамических систем* // Успехи мат. наук. – 1970. – Т. 25. – С. 3–55.
7. ХАРАРИ Ф. *Теория графов*. – М.: Мир, 1973. – 300 с.
8. DeGROOT M.H. *Reaching a consensus* // J. Amer. Statist. Assoc. – 1974. – Vol. 69, No. 345. – P. 118–121.

DISCRETE CONSENSUS CONVERGENCE PROCEDURE VIA MINIMAL CYCLE COMBINING STRONG COMPONENTS

Rafig Agaev, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Candidate of Science, senior researcher (agaraf@rambler.ru, Moscow, Profsoyuznaya str., 65, (495)334-88-69).

Abstract: This paper is devoted to consensus problems in discrete multi-agent systems whose communication digraphs consist of disjoint strong components. It is shown that any block in the power limit of a decomposable and aperiodic influence matrix P *of a digraph* Γ *is proportional to the corresponding block in the power limit of the influence matrix of the digraph* Γ^h *obtained from* Γ *by combining the strong components by means of a minimal cycle. It is proved that for some arc weights in this minimal cycle, the power limit of the influence matrix of* Γ^h *coincides with the resulting matrix of the orthogonal projection procedure applied to* Γ.

Keywords: multi-agent systems, decentralized control, communication digraph, consensus, Laplacian matrix, Kirchhoff matrix, DeGroot model, control.

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Д. А. Новиковым