УДК 519.863
ББК 22.18 + 65.42

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ АГЕНТОВ В СИСТЕМЕ «ПРОИЗВОДИТЕЛЬ–ПОСРЕДНИК–КОНКУРЕНТНЫЙ РЫНОК»

Алгазин Г. И.[1], Алгазина Ю. Г.[2]
(*Алтайский государственный университет, г. Барнаул*)

Рассматривается проблема управления системой «производитель–посредник–рынок» с учетом ограниченности рационального поведения экономических агентов и несимметричной их информированности. Решаются задачи нахождения и аналитического исследования возможных равновесных состояний этой системы в условиях предположений Курно и Штакельберга. Получены новые результаты о взаимосвязи между прибылью фирмы-производителя и ростом посреднической сети на конкурентном рынке. Такие исследования могут представлять интерес при организации взаимодействия агентов и оптимизации посреднической сети.

Ключевые слова: производитель, торговые посредники, взаимодействие, модельные исследования, конкурентное равновесие, Курно, Штакельберг, стратегии гамма-один.

1. Введение

Формирование посреднической сети не всегда проходит обоюдовыгодно для производителей и посредников. Нередко этот процесс сопровождается конфликтами между ними и меж-

---

[1] *Геннадий Иванович Алгазин, зав. кафедрой, доктор физико-математических наук, профессор* (algazin@socio.asu.ru).
[2] *Юлия Геннадьевна Алгазина, кандидат экономических наук, доцент* (*algazina@inbox.ru*).

ду самими посредниками одной сети. Производитель заинтересован в максимальном объеме продаж и минимальном риске и поэтому в случае благоприятной конъюнктуры стремится к наращиванию числа посредников, работающих на данном рынке. Посредник, напротив, заинтересован в монопольном обслуживании территории. Поэтому очень важно выдержать оптимальный уровень развития системы в целом, при котором обеспечивается баланс интересов участников рынка.

Чтобы проанализировать проблему формирования посреднической сети более глубоко, необходимы математические исследования.

Объектом исследования в данной статье является конкурентный рынок однородного товара, в котором ограниченное число агентов-посредников занимается продвижением товара до потребителей без кооперации друг с другом.

В отечественной и зарубежной литературе, посвященной вопросам баланса интересов в модели такого рода, ведущее место занимает модель Курно. При этом различные авторы придавали большее значение разным аспектам применения модели Курно. Ряд авторов рассматривают модель, в которой все фирмы идентичны [6, 7, 17, 18, 22]. Другая группа авторов исследует равновесие на рынке, где не обязательна идентичность всех фирм-агентов, используя те ли иные предположения о свойствах обратной функции спроса, функций затрат и функций прибыли [13, 20, 21, 23, 26]. В ряде исследований внимание акцентировано на методах поиска решений [3, 14, 15, 19, 20, 21, 22]. Отечественные ученые рассматривают вместо стандартной гипотезы Курно гипотезы более общего вида [4] и модели олигополии с рынками производственных факторов [2]. В монографии [1] проведены модельные исследования франчайзинговых систем на рынке олигополии, в которых франчайзи-конкуренты не различаются как фирмы-производители, торговые точки или предприятия сферы услуг.

В значительном ряде публикаций в дополнение к модели Курно вводится модель фирмы, действующей по особым правилам [1, 3, 4, 7, 15, 24]. В отличие от фирм Курно, эта фирма, обладая возможностью первого хода, доминирует на конкурентном рынке, максимизируя собственную прибыль при явном учете реакции остальных фирм на изменение ее поведения. Остальные же фирмы, как и раньше, максимизируют собственную прибыль на основе принципа Курно–Нэша о неизменности поведения других фирм. Эту фирму-лидер называют еще фирмой Штакельберга, так как он первым ввел такую модель поведения [25].

В классическом подходе принципы поведения Курно и Штакельберга рассматриваются в применении к фирмам-производителям. В настоящей статье эти принципы реализованы в применении к фирмам-посредникам. Авторским расширением (но не пионерским, см., например, работы [1, 16]) традиционного модельного представления олигополистического рынка является введение в модель нового агента, который может существенно влиять на рынок, имея возможность регулирования через цену предложения товара (ниже в модели, используя для этого параметр k), активность и количество посредников на рынке. Этим «новым» агентом выступает фирма – производитель товара. Таким образом, вместо традиционной системы «производитель–рынок» рассматривается система «производитель–посредник–рынок».

Производитель, выступая в роли продавца, заинтересован в продаже товара по максимальной цене. Посредник, действуя в роли покупателя и продавца, заинтересован в приобретении товара у производителя по минимальной цене и реализации его на рынке по максимальной цене. Конфликтность интересов экономических агентов, конкурентность рынка и ограниченная этими факторами рациональность поведения агентов, а также несимметричная их информированность определяют выбор механизмов взаимодействия экономических агентов. При отсутствии каких-либо соглашений между производителем и посредником о выборе ими решений одной из реально возможных для описания поведения производителя в такого рода системах может служить модель скрытого управления, являющегося разновидностью рефлексивного управления [6, 9-12]. Очевидно, что в этой модели управляющий субъект (активный агент) – производитель, а управляемый субъект (пассивный агент) –

посредник. Критерием эффективности скрытого управления является выигрыш, получаемый активным агентом [9, 10]. В этой связи авторами статьи проведены специальные исследования зависимостей между развитием посреднической сети и прибылью производителя.

Поэтому проведенные исследования могут представлять интерес не только при расчете и изучении реакции каждой фирмы-посредника рынка на изменение активности ее конкурентов-посредников. Этот аспект работы, в основном, укладывается в рамки классических экономико-математических моделей олигополии. Так, близкие подходы можно найти в работах [1, 7, 16]. Новыми же аспектами исследования являются изучение механизмов повышения прибыли производителя под влиянием изменения тех или иных параметров (факторов) системы «производитель–посредник–рынок», связанного с развитием посреднической сети, а также анализ функционирования этой системы и оптимизация посреднической сети.

2. Описание модели

Ниже в работе рассматривается фрагмент рынка однородного товара, состоящего из одного его производителя и h торговых посредников. Посредник продает потребителю товар по цене p, покупая его у производителя по цене $(1 – k)p$. Таким образом, величина kp есть разница между ценой спроса и ценой предложения на этом рынке. Эта разница и формирует доход посредника.

Базисной для исследования рынка будет являться модель, в которой интересы сторон представляются в виде целевых установок на максимизацию их прибыли. Эта модель включает:

– задачу фирмы-производителя:

$$(1)\quad \begin{cases} \Pi(p,Q,k) = (1-k)\cdot p\cdot Q - j\,(Q) \quad \to \max\limits_{Q,k}, \\ Q \in [0,\overline{Q}], \\ k \in [0,1]; \end{cases}$$

– задачу посредника r:

(2) $R_r(p, q_r, k) = k \cdot p \cdot q_r - \varphi_r(q_r) \quad \to \max_{q_r}, \quad r = 1, \ldots, h.$

Здесь q_r – это действие посредника r, представляющее объем реализованного им товара потребителям; $Q = \sum_{r=1}^{h} q_r$ – объем производимого товара, который затем полностью реализуется через посредников на рынке; $\overline{Q}$ – предельно возможный объем активности производителя; $\varphi(\cdot)$ – функция затрат производителя, а $\varphi_r(\cdot)$ – функции затрат посредников. Важно отметить, что в этой модели значение параметра k определяется фирмой-производителем.

В наших исследованиях будем полагать, что и функции затрат и цена продукции определяются следующими выражениями:

(3) $\varphi(Q) = c \cdot Q + d,$

(4) $\varphi_r(q_r) = c_r \cdot q_r + d_r, \quad r = 1, \ldots, h;$

(5) $p(Q) = a - b \cdot Q.$

Здесь цена продукции – линейная функция объема выпуска производителем (такие модели цен достаточно широко применяются в экономико-математических исследованиях, например в исследованиях рынка Эвансом (в частности, см. работу [7])); a – спрос на продукцию [6, 9, 16]; b – снижение цены при увеличении на единицу общего выпуска фирмой-производителем; издержки фирм (φ и φ_r) являются также линейными функциями, а c и c_r – предельные переменные издержки; d и d_r – постоянные издержки фирм. Как будет показано ниже, слагаемые-константы d и d_r не будут оказывать влияния на решение задач оптимизации производителя и посредников.

Оптимальный объем активности посредника определяется из условия

$$\frac{\partial R_r}{\partial q_r} = k \frac{\partial p}{\partial q_r} \cdot q_r + kp - c_r = 0.$$

Поэтому

(6) $$\frac{\partial p}{\partial q_r} = \frac{1}{q_r} \cdot \left(\frac{c_r}{k} - p \right).$$

Тогда по (5) с учетом (6) имеем

$$\frac{\partial p}{\partial q_r} = -b \cdot \frac{\partial Q}{\partial q_r} = \frac{1}{q_r} \cdot \left(\frac{c_r}{k} - a + b \cdot Q \right),$$

или

$$1 + \frac{\partial Q_{-r}}{\partial q_r} = \frac{1}{q_r} \cdot f_r - 1 - \frac{1}{q_r} \cdot Q_{-r},$$

где использованы обозначения:

(7) $$f_r = \frac{a - \dfrac{c_r}{k}}{b},$$

(8) $$Q_{-r} = \sum\nolimits_{j \neq r} q_j .$$

Получаем

$$q_r \cdot \left(2 + \frac{\partial Q_{-r}}{\partial q_r} \right) = f_r - Q_{-r},$$

и окончательно:

(9) $$q_r = \frac{f_r - Q_{-r}}{2 + \dfrac{\partial Q_{-r}}{\partial q_r}}$$ для $r = 1, \ldots, h$.

3. Равновесие Курно

В условиях конкуренции каждой фирме при определении своей рыночной стратегии необходимо принимать в расчет поведение конкурентов. Чтобы понять поведение конкурирующих фирм, Курно предложил сделать простое предположение относительно реакции каждой фирмы на поведение конкурентов, а именно: каждая фирма будет действовать так, как будто она не ожидает от своих конкурентов изменения объемов выпуска, даже если она сама сделает это (А. Курно «Исследование о математических принципах теории богатств», Париж, 1838 г.).

Далее, используя предположение Курно, будем считать, что каждая фирма-посредник устанавливает объем своих продаж так, как будто она ожидает, что другие посредники оставят свои объемы продаж неизменными.

Тогда, согласно определению дифференциалов, при $r = 1, \ldots, h$ имеем

$$dQ_{-r} = \sum_{j=1}^{h} \frac{\partial Q_{-r}}{\partial q_j} dq_j,$$

и из требования $dQ_{-r} = 0$ следует, что для r-й фирмы должны быть равны нулю не только dq_j ($j \neq r$), но и $\partial Q_{-r} / \partial q_r$, так как в противном случае при $dq_r \neq 0$ будет $dQ_{-r} \neq 0$. Итак, имеем

(10) $$\frac{\partial Q_{-r}}{\partial q_r} = 0, \quad r = 1, \ldots, h.$$

По (9) получим

$$q_r = \frac{f_r - Q_{-r}}{2},$$

или

(11) $$q_r = f_r - Q, \quad r = 1, \ldots, h.$$

Суммируя по индексу r левые и правые части полученных равенств (11), имеем:

$$\sum_{r=1}^{h} q_r = \sum_{r=1}^{h} f_r - hQ,$$

или

$$Q = \sum_{r=1}^{h} f_r - hQ,$$

и в итоге

$$Q = \frac{1}{h+1} \cdot \sum_{r=1}^{h} f_r.$$

Обозначим элементы полученного равновесного состояния для конкурентного по Курно рынка верхним индексом «K». Тогда подстановка формулы (7) в формулу Q дает формулу (12); подстановка формулы (12) в (5) дает формулу (13); формулу (14) получаем подстановкой в (11) формул (7) и (12); формула (15) получается последовательной подстановкой в выражение для прибыли производителя в (1) формул (3), (12) и (13); аналогичным образом (16) имеем после подстановки в выражение для прибыли посредника в (2) формул (4), (13) и (14).

(12) $$Q^K = \frac{1}{(h+1)b}\left(ha - \frac{\sum_{r=1}^{h} c_r}{k} \right);$$

$$(13)\quad p^K = \frac{1}{h+1}\left(a + \frac{\sum_{r=1}^{h} c_r}{k}\right);$$

$$(14)\quad q_r^K = \frac{1}{(h+1)b}\left(a + \frac{\sum_{r=1}^{h} c_r - (h+1)c_r}{k}\right),\quad r = 1,\ldots,h;$$

$$(15)\quad \begin{cases} \Pi^K = \dfrac{1-k}{(h+1)^2 b}\left(a + \dfrac{\sum_{r=1}^{h} c_r}{k}\right)\left(ha - \dfrac{\sum_{r=1}^{h} c_r}{k}\right) - \\ - \dfrac{c}{(h+1)b}\left(ha - \dfrac{\sum_{r=1}^{h} c_r}{k}\right) - d; \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} R_r^K = \dfrac{k}{(h+1)^2 b}\left(a + \dfrac{\sum_{r=1}^{h} c_r}{k}\right)\left(a + \dfrac{\sum_{r=1}^{h} c_r - (h+1)c_r}{k}\right) - \\ - \dfrac{c_r}{(h+1)b}\left(a + \dfrac{\sum_{r=1}^{h} c_r - (h+1)c_r}{k}\right) - d_r,\quad r = 1,\ldots,h; \end{cases}$$

$$(17)\quad s_r^K = \frac{1-k}{(h+1)^2 b}\left(a + \frac{\sum_{r=1}^{h} c_r}{k}\right)\left(a + \frac{\sum_{r=1}^{h} c_r - (h+1)c_r}{k}\right), r = 1,\ldots,h.$$

Здесь σ_r^K – стоимость товара, закупленного посредником у фирмы-производителя. Она рассчитывается по формуле $(1 - k)pq$, где p определяется по (13), а q – по (14). В теории активных систем величина $\sigma_r^K \times k/(1 - k)$ может интерпретироваться как стимулирование, т.е. вознаграждение, выплачиваемое производителем (заказчиком) посреднику (исполнителю) [8].

Для изучения различных возможностей проектирования систем отношений между участниками конкурентного рынка рассмотрим расчет параметра k, определяющего величину стоимости σ_r^K, на основе теоретико-игровых стратегий Γ_1 (гамма-один), известных также как стратегии Штакельберга. Этот вариант расчета дает наиболее выгодное для фирмы-производителя значение этого параметра при условии, что посредники действуют оптимальным для себя образом.

Из условия $\partial \Pi^K / \partial k = 0$, где Π^K определяется по (15), после несложных преобразований приходим к следующему «неполному» кубическому уравнению для определения $k_{\Gamma_1}^K$:

$$(18)\ \frac{a}{h}k^3 + \left(a - \frac{a}{h} + c + \bar{c} + \frac{\bar{c}}{h}\right)k - 2\bar{c} = 0.$$

Здесь использовано обозначение $\bar{c} = \frac{\sum_{r=1}^{h} c_r}{h}$ – среднее значение предельных переменных издержек фирм-посредников.

Таким образом, параметр скидки цены спроса $k_{\Gamma_1}^K$, вычисленный по (18) на основе стратегий Γ_1 для состояния равновесия Курно, зависит только от средних предельных переменных издержек посредников ($\bar{c}$), предельных переменных издержек производителя (c), числа самих посредников (h) и параметра a – цены продукции при нулевом выпуске производителем. В связи с этим этот параметр может не изменяться достаточно продолжительный период и быть приемлемым для регулирования отношений между участниками франшизы при их согласии на стратегии Γ_1.

Тогда соответствующие элементы равновесного состояния для конкурентного по Курно рынка, когда его участники следуют стратегиям Γ_1, определяются по (12)–(17) при $k = k_{\Gamma_1}^K$.

Если $\bar{c} = 0$, то и $k_{\Gamma_1}^K = 0$, т.е. производителю выгодно продавать посредникам товар по цене потребителей, а сами посредники не будут иметь прибыли.

Более подробные и специальные исследования механизмов типа Γ_1 и Γ_1 с фиксированными платежами [5] при взаимодействии активного агента (производитель, франчайзер) и пассивных агентов (посредников, франчайзи) на похожей модели можно найти в работах [1, 16].

Далее рассмотрим задачу оптимизации числа посредников. В математических выкладках будем исходить из того, что все посредники несут одинаковые предельные переменные издержки, т.е. $c_r = e$, $r = 1, \ldots, h$.

Согласно (1)–(2) общая (суммарная) прибыль рассматриваемых участников рынка (производителя и посредников) определяется выражением

(19) $\Delta = p(Q)Q - j(Q) - \sum_{r=1}^{h} j_r(q_r)$,

или с учетом (3) и (4) имеем

(20) $\Delta = p(Q)Q - cQ - d - \sum_{r=1}^{h} (c_r q_r + d_r)$.

Для определения оптимального числа посредников на рынке в состоянии равновесия Курно с точки зрения максимизации общей (суммарной) прибыли решаем уравнение $\partial\Delta^K/\partial h = 0$, где Δ^K определяется на основе (20), (12)–(14).

После ряда преобразований приходим к следующему его решению

(21) $$h_{\Delta}^{K} = \frac{a - c - e}{a - \left(2e/k - c - e\right)}.$$

Если предельные переменные издержки c_r посредников равны нулю, то

$$h_{\Delta}^{K} = \frac{a - c}{a + c},$$

и в лучшем случае будет необходимость только в одном посреднике.

Для определения оптимального числа посредников с точки зрения максимизации общего дохода от реализованной продукции ($H^K = p^K Q^K$) решаем уравнение $\partial H^K/\partial h = 0$, где p^K и Q^K определяются по (12) и (13). После ряда несложных преобразований приходим к следующему его решению:

(22) $$h_{н}^{K} = \frac{a}{a - 2e/k}.$$

Здесь чем выше предельные переменные издержки посредников, тем больше нужно посредников на рынке. Если предельные переменные издержки посредников равны нулю, то оптимально иметь только одного посредника.

Для определения оптимального числа посредников с точки зрения максимизации прибыли производителя Π^K решаем уравнение $\partial \Pi^K / \partial h = 0$, где Π^K определяется по (15). Это уравнение имеет следующее решение:

$$(23)\quad h_{\Pi}^K = \frac{a - c/(1-k)}{a - 2e/k + c/(1-k)}.$$

Наблюдается та же закономерность: чем выше предельные переменные издержки посредников, тем больше нужно посредников на рынке.

Продолжая анализ рынка в состоянии равновесия Курно, отметим следующее. Из неравенства

$$\frac{\partial Q^K}{\partial h} = \frac{1}{(h+1)^2 b}\left(a - \frac{e}{k}\right) > 0$$

следует, что с ростом числа посредников растет и выпуск товара производителем. Но вместе с тем

$$\frac{\partial q_r^K}{\partial h} = -\frac{1}{(h+1)^2 b}\left(a - \frac{e}{k}\right) < 0,$$

т.е. падает количество проданных каждым посредником товаров. Таким образом, рост выпуска обеспечивается исключительно за счет новых посредников.

Поясним, откуда следует эти неравенства. Первое, истинность этих неравенств вытекает из формулы (12) для количества производимого товара и того, что это количество не может быть отрицательно. Второе, истинность вытекает также и из того, что прибыль посредников не может быть отрицательной. Действительно, по (2), (4) и (5) имеем

$$R_r = kpq_r - j_r(q_r) = k(a - bQ)q_r - c_r q_r - d_r =$$

$$= kq_r\left(a - \frac{c_r}{k}\right) - kbQq_r - d_r.$$

Первый член в последней формуле должен быть больше нуля, чтобы прибыль посредника не была отрицательной.

Далее выпуск производителя падает с ростом средних и суммарных предельных переменных издержек посредников, так как

$$\frac{\partial Q^K}{\partial e} = -\frac{h}{(h+1)bk} < 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial Q^K}{\partial\left(\sum_{r=1}^{h} c_r\right)} = -\frac{1}{(h+1)bk} < 0.$$

Цена товара растет с ростом средних и суммарных предельных переменных издержек посредников –

$$\frac{\partial p^K}{\partial e} = \frac{h}{(h+1)k} > 0,\ \frac{\partial p^K}{\partial\left(\sum_{r=1}^{h} c_r\right)} = \frac{1}{(h+1)k} > 0\,,$$

но падает с ростом числа посредников –

$$\frac{\partial p^K}{\partial h} = -\frac{1}{(h+1)^2}\left(a - \frac{e}{k}\right) < 0\,.$$

С ростом числа посредников падает стоимость закупленного посредником товара у производителя –

$$\frac{\partial s_r^K}{\partial h} = -\frac{1-k}{(h+1)^3 \cdot b}\left(2a + \frac{(h-1)}{k}\right)\left(a - \frac{e}{k}\right) < 0$$

и прибыль посредника –

$$\frac{\partial R_r^K}{\partial h} = -\frac{2k}{(h+1)^3 b}\left(a - \frac{e}{k}\right)^2 < 0, \quad r = 1, \ldots, h.$$

4. Равновесие Штакельберга

Допустим, что первая фирма-посредник полагает, что все другие фирмы-посредники будут действовать по Курно. Тогда из $dq_{-r} = 0$ и $dQ_{-r} = 0$ при $r = 2, \ldots, h$ имеем $\partial Q_{-r}/\partial q_r = 0$, а также

$$q_r = \frac{f_r - Q_{-r}}{2},$$

где f_r определяется по (7).

Из последнего равенства следует

$$\frac{\partial q_r}{\partial q_1} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial Q_{-r}}{\partial q_1} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial Q}{\partial q_1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial q_r}{\partial q_1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial Q_{-1}}{\partial q_1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial q_r}{\partial q_1},$$

или

$$\frac{\partial q_r}{\partial q_1} = -1 - \frac{\partial Q_{-1}}{\partial q_1},\ r = 2, \ldots, h.$$

Суммируя левые и правые части последних равенств по r при $r = 2, \ldots, h$, получаем

$$\frac{\partial Q_{-1}}{\partial q_1} = -(h-1) - (h-1)\cdot\frac{\partial Q_{-1}}{\partial q_1},$$

(24) $\dfrac{\partial Q_{-1}}{\partial q_1} = -\dfrac{h-1}{h}.$

Тогда

(25) $q_1 = \dfrac{f_1 - Q_{-1}}{2 - \dfrac{h-1}{h}},$

или

$$q_1 = \frac{h\cdot(f_1 - Q + q_1)}{h+1},$$

(26) $q_1 = hf_1 - hQ.$

Имеем также при $r = 2, \ldots, h$

(27) $q_r = f_r - Q,$

Суммируя левые и правые части равенств (27) по r ($r = 2, \ldots, h$), а затем с (26), получаем

$$Q = (h-1)f_1 + \sum_{r=1}^{h} f_r - (2h-1)Q.$$

Используя ранее введенные обозначения (см. (7)) для f_1 и f_r, получаем формальное выражение для Q.

Обозначим соответствующее равновесное по Штакельбергу решение верхним индексом «S». Тогда:

(28) $Q^S = \dfrac{1}{2hb}\left((2h-1)a - \dfrac{\sum_{r=1}^{h} c_r + (h-1)c_1}{k}\right);$

(29) $p^S = \dfrac{1}{2h}\left(a + \dfrac{\sum_{r=1}^{h} c_r + (h-1)c_1}{k}\right);$

(30) $q_1^S = \dfrac{1}{2b}\left(a + \dfrac{\sum_{r=1}^{h} c_r - (h+1)c_1}{k}\right);$

(31) $q_r^S = \dfrac{1}{2hb}\left(a + \dfrac{\sum_{r=1}^{h} c_r - 2hc_r + (h-1)c_1}{k}\right), \quad r = 2, \ldots, h;$

$$(32)\quad \begin{cases} \Pi^S = \dfrac{1-k}{4h^2 b}\left(a+\dfrac{\sum_{r=1}^h c_r+(h-1)c_1}{k}\right)\left((2h-1)a-\dfrac{\sum_{r=1}^h c_r+(h-1)c_1}{k}\right)- \\ -\dfrac{c}{2hb}\left((2h-1)a-\dfrac{\sum_{r=1}^h c_r+(h-1)c_1}{k}\right)-d; \end{cases}$$

$$(33)\quad \begin{cases} R_1^S = \dfrac{k}{4hb}\left(a+\dfrac{\sum_{r=1}^h c_r+(h-1)c_1}{k}\right)\left(a+\dfrac{\sum_{r=1}^h c_r-(h+1)c_1}{k}\right)- \\ -\dfrac{c_1}{2b}\left(a+\dfrac{\sum_{r=1}^h c_r-(h+1)c_1}{k}\right)-d_1; \end{cases}$$

$$(34)\quad \begin{cases} R_r^S = \dfrac{k}{4h^2 b}\left(a+\dfrac{\sum_{r=1}^h c_r+(h-1)c_1}{k}\right)\left(a+\dfrac{\sum_{r=1}^h c_r-2hc_r+(h-1)c_1}{k}\right)- \\ -\dfrac{c_r}{2hb}\left(a+\dfrac{\sum_{r=1}^h c_r-2hc_r+(h-1)c_1}{k}\right)-d_r, \quad r=2,\ldots,h; \end{cases}$$

$$(35)\quad s_1^S = \frac{1-k}{4hb}\left(a+\frac{\sum_{r=1}^h c_r+(h-1)c_1}{k}\right)\left(a+\frac{\sum_{r=1}^h c_r-(h+1)c_1}{k}\right);$$

$$(36)\quad \begin{cases} s_r^S = \dfrac{1-k}{4h^2 b}\left(a+\dfrac{\sum_{r=1}^h c_r+(h-1)c_1}{k}\right)\left(a+\dfrac{\sum_{r=1}^h c_r-2hc_r+(h-1)c_1}{k}\right), \\ r=2,\ldots,h. \end{cases}$$

Аналогичным образом из условия $\partial\Pi^S/\partial k = 0$ можно провести расчеты параметра k на основе игр Γ_1. При этом выходит, что, наряду с первой фирмой-посредником, по Штакельбергу будет действовать также и производитель. Найденное значение этого параметра обозначим как $k_{\Gamma_1}^S$. Тогда соответствующие показатели равновесного состояния для конкурентного по Штакельбергу рынка, когда его участники следуют стратегиям Γ_1, определяются по (28)–(36) при $k = k_{\Gamma_1}^S$.

Для определения оптимального числа посредников на рынке в состоянии равновесия Штакельберга также могут приниматься во внимание различные критерии. С точки зрения максимизации общей (суммарной) прибыли оптимальное число посредников находится из решения уравнения

$$\frac{\partial \Delta^S}{\partial h} = 0, \quad \Delta^S = p^S Q^S - cQ^S - d - \sum\nolimits_{r=1}^{h} (c_r q_r^S + d_r);$$

максимизации общего дохода от реализованной продукции – из уравнения

$$\frac{\partial H^S}{\partial h} = 0, \quad H^S = p^S Q^S ;$$

максимизации прибыли производителя – из уравнения $\partial \Pi^S / \partial h = 0$, где Π^S определяется по (32).

Так, оптимальное число посредников с точки зрения максимизации общего дохода от реализованной продукции H^S определяется как

(37) $h_H^S = \dfrac{ka - e}{ka - 2e}.$

По (37) при равенстве нулю предельных переменных издержек посредников оптимально иметь одного посредника.

Оптимальное число посредников с точки зрения максимизации прибыли фирмы-производителя продукции Π^S определяется по формуле

(38) $h_\Pi^S = \dfrac{a - e/k}{a - 2e/k + c/(1-k)}.$

Из неравенства

$$\frac{\partial Q^S}{\partial h} = \frac{1}{h^2 b}\left(a - \frac{e}{k}\right) > 0$$

следует, что в состоянии равновесия Штакельберга с ростом числа посредников также растет выпуск товара производителем; количество проданных товаров не изменяется для первого посредника, но падает для других посредников –

$$\frac{\partial q_1^S}{\partial h} = 0, \frac{\partial q_r^S}{\partial h} = -\frac{1}{2h^2 b}\left(a - \frac{e}{k}\right) < 0, r = 2, \ldots, h.$$

Поэтому рост общего выпуска обеспечивается исключительно за счет новых посредников. С ростом же числа посредников цена товара падает –

$$\frac{\partial p^S}{\partial h} = -\frac{1}{2h^2}\left(a - \frac{e}{k}\right) < 0,$$

падают стоимость товара, закупленного каждым посредником у производителя –

$$\frac{\partial s_1^S}{\partial h} = -\frac{1-k}{4h^2 b}\left(a - \frac{e}{k}\right) < 0, \frac{\partial s_r^S}{\partial h} = -\frac{1-k}{2h^3 b}\left(a - \frac{e}{k}\right)^2 < 0, r = 2, \ldots, h,$$

и их прибыль –

$$\frac{\partial R_1^S}{\partial h} = -\frac{k}{4h^2 b}\left(a - \frac{e}{k}\right)^2 < 0, \frac{\partial R_r^S}{\partial h} = -\frac{k}{2h^3 b}\left(a - \frac{e}{k}\right)^2 < 0, r = 2, \ldots, h.$$

С ростом предельных переменных издержек посредников падает выпуск производителя, так как

$$\frac{\partial Q^S}{\partial e} = -\frac{2h-1}{2hbk} < 0,$$

но растет цена товара –

$$\frac{\partial p^S}{\partial e} = \frac{2h-1}{2hk} > 0.$$

5. Неравновесие Штакельберга

Пусть остальные фирмы, так же, как и первая, будут действовать по Штакельбергу, т.е. каждая фирма считает, что все другие действуют по Курно. Такая ситуация называется неравновесием по Штакельбергу [7].

В этом случае по (24) как для первой фирмы, так и для всех остальных будут выполняться соотношения

(39) $\dfrac{\partial Q_{-r}}{\partial q_r} = -\dfrac{h-1}{h}, \quad r = 1, \ldots, h;$

и согласно (9) имеем, что

$$q_r = \frac{f_r - Q_{-r}}{2 - \dfrac{h-1}{h}} = \frac{h}{h+1}(f_r - Q + q_r).$$

Далее следует:

(40) $q_r = h(f_r - Q), \quad r = 1, \ldots, h.$

Суммируя по r левые и правые части равенств (40), получаем

$$Q = h\sum_{r=1}^{h} f_r - h^2 Q; \quad Q = \frac{h}{(h^2+1)b}\left(ha - \frac{\sum_{r=1}^{h} c_r}{k}\right).$$

Обозначим элементы полученного неравновесного по Штакельбергу состояния конкурентного рынка верхним индексом «$\bar{S}$». Тогда последовательно используя (7), (5), (40), а также формальные выражения доходов участников в задачах (1) и (2), получаем следующие соотношения:

$$(41)\quad Q^{\bar{S}} = \frac{h}{(h^2+1)b}\left(ha - \frac{\sum_{r=1}^{h} c_r}{k}\right);$$

$$(42)\quad p^{\bar{S}} = \frac{1}{h^2+1}\left(a + \frac{h\sum_{r=1}^{h} c_r}{k}\right);$$

$$(43)\quad q_r^{\bar{S}} = \frac{h}{(h^2+1)b}\left(a + \frac{h\sum_{r=1}^{h} c_r - (h^2+1)c_r}{k}\right), r = 1, \ldots, h;$$

$$(44)\quad \begin{cases} \Pi^{\bar{S}} = \dfrac{h(1-k)}{(h^2+1)^2 b}\left(a + \dfrac{h\sum_{r=1}^{h} c_r}{k}\right)\left(ha - \dfrac{\sum_{r=1}^{h} c_r}{k}\right) - \\ - \dfrac{hc}{(h^2+1)b}\left(ha - \dfrac{\sum_{r=1}^{h} c_r}{k}\right) - d; \end{cases}$$

$$(45)\quad \begin{cases} R_r^{\bar{S}} = \dfrac{hk}{(h^2+1)^2 b}\left(a + \dfrac{h\sum_{r=1}^{h} c_r}{k}\right)\left(a + \dfrac{h\sum_{r=1}^{h} c_r - (h^2+1)c_r}{k}\right) - \\ - \dfrac{hc_r}{(h^2+1)b}\left(a + \dfrac{h\sum_{r=1}^{h} c_r - (h^2+1)c_r}{k}\right) - d_r, \quad r = 1, \ldots, h; \end{cases}$$

$$(46)\quad \begin{cases} s_r^{\bar{S}} = \dfrac{h(1-k)}{(h^2+1)^2 b}\left(a + \dfrac{h\sum_{r=1}^{h} c_r}{k}\right)\left(a + \dfrac{h\sum_{r=1}^{h} c_r - (h^2+1)c_r}{k}\right), \\ r = 1, \ldots, h. \end{cases}$$

Когда отношения производителя и посредников строятся на основе теоретико-игровых стратегий Г$_1$, значение параметра скидки цены k для точки неравновесия Штакельберга находится из условия $\partial\Pi^{\bar{S}} \big/ \partial k = 0$, где $\Pi^{\bar{S}}$ определяется по (44). Соответствующие показатели функционирования рынка находятся из (41)–(46) при $k = k^{\bar{S}}_{\Gamma_1}$.

Оптимальное число посредников на данном рынке может быть найдено из условий:

$$\frac{\partial\Delta^{\bar{S}}}{\partial h} = 0, \quad \Delta^{\bar{S}} = p^{\bar{S}}Q^{\bar{S}} - cQ^{\bar{S}} - d - \sum\nolimits_{r=1}^{h}(c_r q^{\bar{S}}_r + d_r),$$

если критерием числа посредников является максимизация общей (суммарной) прибыли производителя и посредников;

$$\frac{\partial H^{\bar{S}}}{\partial h} = 0, \text{ где } H^{\bar{S}} = p^{\bar{S}}Q^{\bar{S}},$$

если критерием числа посредников является максимизация общего дохода от реализованной продукции;

$$\frac{\partial\Pi^{\bar{S}}}{\partial h} = 0,$$

где $\Pi^{\bar{S}}$ определяется по (44)) – при максимизации прибыли производителя.

Рассмотрим подробнее случай, когда число посредников определяется по критерию максимизации дохода. Уравнение

$$\frac{\partial H^{\bar{S}}}{\partial h} = 0$$

после ряда несложных преобразований дает искомое решение:

$$(47)\quad \left(h^{\bar{S}}_{H}\right)^2 = \frac{a}{a - \dfrac{2e}{k}}.$$

Рассмотрим также случай определения оптимального числа посредников по критерию максимизации дохода производителя:

$$(48)\quad \left(h^{\bar{S}}_{\Pi}\right)^2 = \frac{a - c \big/ (1-k)}{a - 2e \big/ k + c \big/ (1-k)}.$$

Переходя к анализу рынка в состоянии неравновесия Штакельберга, отметим, что с ростом числа посредников также растет выпуск товара производителем. Это следует из неравенства

$$\frac{\partial Q^{\bar{S}}}{\partial h} = \frac{2h}{(h^2+1)^2 b}\left(a - \frac{e}{k}\right) > 0;$$

однако для посредников количество проданных товаров падает

$$\frac{\partial q_r^{\bar{S}}}{\partial h} = -\frac{h^2-1}{(h^2+1)^2 b}\left(a - \frac{e}{k}\right) \le 0.$$

Поэтому рост выпуска товара обеспечивается исключительно за счет новых посредников. С ростом числа посредников также падают цена товара

$$\frac{\partial p^{\bar{S}}}{\partial h} = -\frac{2h}{h^2+1}\left(a + \frac{(h^2-1)e}{k}\right) < 0$$

и прибыль каждого посредника –

$$\frac{\partial R_r^{\bar{S}}}{\partial h} = -\frac{k(3h^2-1)}{(h^2+1)^3 b}\left(a - \frac{e}{k}\right)^2 < 0,\ r = 1,\ldots,h.$$

С ростом числа посредников может неоднозначно вести себя стоимость товара, закупленного каждым посредником у производителя, так как

$$\frac{\partial s_r^{\bar{S}}}{\partial h} = \frac{h(1-k)}{(h^2+1)^3 b}\left[(1-h^2)\left(a - \frac{e}{k}\right) + \frac{(h^2+1)^2 e}{k}\right]\left(a - \frac{e}{k}\right), r = 1,\ldots,h.$$

При $h = 1$ последнее выражение положительно, т.е. стоимость закупленного товара растет; при небольших значениях h знак выражения зависит от соотношения между параметрами a, e, k и при значительных значениях h очевидно, что опять последнее выражение положительно, что означает рост стоимости товара, закупаемого каждым посредником у производителя.

В состоянии неравновесия Штакельберга с ростом предельных переменных издержек посредников падает выпуск производителя, так как

$$\frac{\partial Q^{\bar{S}}}{\partial e} = -\frac{h^2}{(h^2+1)k} < 0,$$

но цена товара растет:

$$\frac{\partial p^{\bar{s}}}{\partial e} = \frac{h^2}{(h^2+1)k} > 0.$$

6. Общие выводы

В заключение добавим ряд общих содержательных выводов, относящихся к взаимосвязи между прибылью производителя и ростом числа посредников в его сети.

1. Во всех трех случаях (равновесия Курно и Штакельберга, неравновесия Штакельберга) наблюдается ∩-образная форма зависимости между прибылью производителя и числом посредников. Это дает основания для предположения об оптимальном ограниченном числе посредников для производителя в его посреднической сети на конкурентном рынке. Вычислительные эксперименты для подобных систем показали, что после оптимума идет достаточно медленное монотонное понижение прибыли производителя [1].

Видимо, такого рода зависимость объясняется тем, что в условиях ограниченности рационального поведения и несимметричной информированности агентов при малом числе посредников действие факторов, «положительно» влияющих на прибыль производителя, превалирует над «отрицательно» влияющими. А при значительном числе посредников наблюдается обратная картина.

В этом плане могут представлять интерес те параметры системы «производитель–посредник–рынок», изменения которых (в большую или меньшую сторону) с ростом числа посредников всегда положительно связаны с прибылью производителя. Поэтому далее остановимся на этом вопросе подробнее.

2. Во всех трех случаях повышение цены предложения (т.е. уменьшение параметра k) приводит к повышению прибыли производителя и положительно связано с увеличением числа посредников.

Так для равновесия Курно повышение прибыли производителя можно подтвердить подстановкой соотношения для оптимального числа посредников (23) в соотношение для определения прибыли (15) при $c_r = e$, $r = 1, \ldots, h$. Тогда имеем, что прибыль составит

(49) $$\Pi^K = \frac{1-k}{4b}\left(a - \frac{c}{1-k}\right)^2 - d.$$

Тогда знак производной (49) по k доказывает данное утверждение о повышении прибыли, а именно

$$\frac{\partial \Pi^K}{\partial k} = -\frac{1}{4b}\left(a - \frac{c}{1-k}\right)\left(a + \frac{c}{1-k}\right) < 0.$$

Кроме того, по (23) следует

$$\frac{\partial h_{\text{п}}^K}{\partial k} = -\frac{2c\left(a - e/k\right)}{\left[(1-k)a - 2e(1-k)/k + c\right]^2} < 0,$$

т.е. оптимальное число посредников убывает с увеличением k. Итак, показано, что в случае равновесия Курно повышение цены предложения приводит к повышению прибыли производителя и положительно связано с увеличением числа посредников (примечание: уменьшение параметра k имеет свои границы, так как при малых его значениях функции для h могут иметь особенности).

Аналогичным образом рассматриваются и другие случаи.

3. Следует отметить интересный факт, что во всех трех случаях прибыль производителя для оптимального числа посредников составляет одну и ту же величину, определяемую формулой (49).

Поэтому для завершения доказательства вывода 2 представляет смысл здесь привести только производные выражений (38) и (48)

$$\frac{\partial h_{\text{п}}^S}{\partial k} = -\frac{c/(1-k)^2 \cdot \left(a - e/k\right) + ae/k^2}{\left[a - 2e/k + c/(1-k)\right]^2} < 0,$$

$$\frac{\partial\left(h_{\text{П}}^{\bar{S}}\right)^2}{\partial k} = -\frac{2c\left(a - e/k\right)}{\left[(1-k)a - {2e(1-k)}/{k} + c\right]^2} < 0.$$

4. Во всех трех случаях повышение активности производителя (т.е. объема производства товара Q) приводит к повышению прибыли производителя и положительно связано с ростом посреднической сети.

С одной стороны, по (1), (3) и (5) имеем

$$\Pi = (1-k)(a-bQ)Q - cQ - d, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial Q} = (1-k)\left(a - \frac{c}{1-k}\right) > 0.$$

Последнее неравенство следует из того, что прибыль производителя не может быть отрицательной:

$$\Pi = (1-k)aQ - (1-k)bQ^2 - cQ - d =$$

$$= (1-k)Q\left(a - \frac{c}{1-k}\right) - (1-k)bQ^2 - d.$$

Если первая составляющая последней формулы будет отрицательной или равной нулю, то и прибыль будет отрицательной. Таким образом, показано, что с ростом Q растет прибыль производителя.

С другой стороны, выше было показано, что для всех трех случаев с ростом числа посредников растет выпуск Q и этот рост выпуска обеспечивается исключительно за счет новых посредников.

5. Во всех трех случаях снижение цены товара p приводит к повышению прибыли производителя и положительно связано с увеличением числа посредников. Этот вывод непосредственно следует из предыдущего, так как по (5) $p = a - bQ$. Впрочем, это утверждение можно также подтвердить и приведенными выше соотношениями для $\frac{\partial p^K}{\partial h}, \frac{\partial p^S}{\partial h}$ и $\frac{\partial p^{\bar{S}}}{\partial h}$, показывающими, что цена товара снижается с ростом числа посредников.

7. Заключение

В статье описывается модель функционирования рынка однородного товара, состоящего из одного производителя и ряда конкурирующих друг с другом торговых посредников. На основе этой модели получены аналитические оценки ряда основных характеристик рынка в условиях конкурентного равновесия Курно, конкурентного равновесия Штакельберга и неравновесия Штакельберга, включающих: объем производства товара; объем закупаемого у производителя и реализованного потребителям товара каждым посредником; рыночная цена продукции; прибыль производителя и посредников и др. Предложены математические модели организации отношений между производителем и посредниками на основе теоретико-игрового подхода с применением стратегий Γ_1. Осуществлена постановка и приведено решение задачи оптимизации числа посредников на региональном конкурентном рынке по различным критериям: максимизация общей (суммарной) прибыли производителя и посредников; максимизация общего (суммарного) дохода; максимизация прибыли производителя. Проведен анализ рынка в состоянии равновесия Курно, равновесия Штакельберга и неравновесия Штакельберга.

Получены новые результаты, относящиеся к взаимосвязи между прибылью производителя и ростом числа посредников в его сети. Показано, что во всех трех случаях: 1) наблюдается $\cap$-образная форма зависимости между прибылью производителя и числом посредников; 2) повышение цены предложения (т.е. уменьшение параметра k) приводит к повышению прибыли производителя и положительно связано с увеличением числа посредников; 3) повышение активности производителя (т. е. объема производства товара Q) приводит к повышению прибыли производителя и положительно связано с ростом посреднической сети; 4) снижение цены товара p приводит к повышению прибыли производителя и положительно связано с увеличением числа посредников.

Литература

1. АЛГАЗИН Г.И., АЛГАЗИНА Д.Г. *Моделирование многоагентных франчайзинговых систем*: монография. – Барнаул: АлтГУ, 2009. – 91 с.
2. БУЛАВСКИЙ В.А. *Модель олигополии с рынками производственных факторов* // Экономика и математические методы. – 1999. – Т. 35, №4. – С. 78–86.
3. БУЛАВСКИЙ В.А., КАЛАШНИКОВ В.В. *Метод однопараметрической прогонки для исследования состояния равновесия* // Экономика и математические методы. – 1994. – Т. 30, вып. 4. – С. 129–138.
4. БУЛАВСКИЙ В.А., КАЛАШНИКОВ В.В. *Равновесие и обобщенных моделях Курно и Штакельберга* // Экономика и математические методы. – 1995. – Т. 31, вып. 4. – С. 151–163.
5. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Игры с непротивоположными интересами*. – М.: Наука, 1976. – 328 с.
6. ДЮСУШЕ О.М. *Статическое равновесие Курно-Нэша и рефлексивные игры олигополии: случай линейных функций спроса и издержек* // Экономический журнал ВШЭ. – 2006.– №1. – С. 3–32.
7. КОЛЕМАЕВ В.А. *Математическая экономика*: учеб. для вузов. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 240 с.
8. НОВИКОВ Д.А. *Стимулирование в организационных системах*. – М.: СИНТЕГ, 2003. – 312 с.
9. НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Прикладные модели информационного управления*. – М.: ИПУ РАН, 2004. – 129 с.
10. НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Рефлексивные игры*. – М.: СИНТЕГ, 2003. – 149 с.
11. CAMERER C.F., HO T.-H., CHONG J.-K. *Cognitive Hierarchy Theory of One-shot Games* // CalTech working paper. – 2002. – 39 p.
12. COSTA-GOMES M.A., IRIBERRI N., CRAWFORD V.P. *Comparing Models of Strategic Thinking in Van Huyck, Battalio, and Beil's Coordination Games* // Journal of the European

Economic Association. – April–May 2009. – Vol.7(2–3). – P. 365–376.
13. FRANK C.R., QUANDT R.E. *On the Existence of Cournot Equilibrium* // International Economic Review. – 1963. – Vol. 5.
14. HARKER P.T.A *Variational Inequality Approach for the Determination of Oligopolistic Market Equilibrium* // Mathematical Programming. – 1984. – Vol. 30, №1. – P. 105–111.
15. HARKER P.T., CHOI S.-C. *A Penalty Function Approach for Mathematical Programs with Variational Inequality Constraints* // Information and Decision Technologies. – 1991. – Vol. 17.
16. HEGJI C.E., MOORE E.C. *On the Economics of Manufactures and Dealers: A Reexamination* // Southwestern Economic Review. – 2006. – P. 107–120.
17. McMANUS M. *Numbers and Size in Cournot Oligopoly* // Yorkshire Bulletin Social and Economic Research. – 1962. – Vol. 14.
18. McMANUS M. *Equilibrium, Numbers and Size in Cournot Oligopoly* // Yorkshire Bulletin Social and Economic Research. – 1964. – Vol. 16.
19. METZLER C., HOBBS B.S., PANG J.-S. *Nash-Cournot Equilibria in Power Markets on a Linearized DC network with Arbitrage: Formulations and Properties* // Networks and Spatial Economics. – 2003. – Vol. 3, №2. – P. 123–150.
20. NOVSHEK W. *On the Existence of Cournot Equilibrium // Review Economic Studies*. – 1985. – Vol. 5(1), №168.
21. OKUQUCHI K. *Quasi- competitiveness and Cournot Oligopoly* // Review Economic Studies. – 1973. – Vol. 40.
22. ROBERTS J., SONNENSCHEIN H. *On the Existence of Cournot Equilibrium Without Concave Profit Functions* // Journal Economic Theory. – 1976. – Vol. 13.
23. RUFFIN R.J. *Cournot Oligopoly and Competitive Behaviour* // Review Economic Studies. – 1971. – Vol. 38(4), №116.
24. SHERALI H.D., SOYSTER A.L., MURPHY F.H. *Stackelberg-Nash-Cournot Equilibria: Characterizations and Computations* // Operatios Research. – 1983. – Vol. 31, №2.

25. STACKELBERG H. *Marktform und Gleichgewicht*. – Vienna: Julius Springer, 1934.
26. SZIDAROVSZKY F., YAKOWITZ S. *A New Proof of the Existence and Uniqueness of the Cournot Equilibrium* // International Economic Review. – 1977. – Vol. 18, №3.

MODELLING BEHAVIOUR OF ECONOMIC AGENTS IN «MANUFACTURER- MEDIATOR -COMPETITIVE MARKET» SYSTEM

Gennady Algazin, Altai State University, Barnaul, Doctor of Science, professor (algazin@socio.asu.ru).
Julia Algazina, Altai State University, Barnaul, Cand.Sc. associated professor (algazina@inbox.ru).

Abstract: *The management problem is considered for a "manufacturer-mediator-market" system. The model accounts for asymmetric information and limited rationality of economic agents. Cournot and Stackelberg equilibria are calculated and analyzed. The relation is studied between the profit of a manufacturing firm and the size of its distribution network in a competitive market. Applications include agents' interactions organization and distribution network optimization.*

Keywords: manufacturing firm, distributors, interaction, mode-based approach, competitive equilibrium, Cournot, Stackelberg, gamma-one strategy.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В. Д. Богатырёвым