УДК 62-50

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КРИТЕРИАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Н. КУЛЖАБАЕВ

(Москва)

Рассматривается один подход к решению задачи критериального управления активными системами [1]. Идея метода проиллюстрирована на простых примерах.

Задача критериального управления заключается в определении целевых функций активных элементов (АЭ), обеспечивающих максимум критерия эффективности Ц при фиксированном законе управления (терминология теории активных систем следует работам [1, 2]). Идея предлагаемого подхода состоит в следующем. Пусть известен вид оптимального решения задачи в зависимости от параметров модели. Путем введения новых управляющих переменных в оптимальное решение получаем после некоторых преобразований совокупность целевых функций АЭ. Показано, что применение закона открытого управления (ОУ) обеспечивает при гипотезе слабого влияния абсолютную оптимальность полученного механизма функционирования. Обсуждаются условия применимости подхода и на ряде примеров иллюстрируется его эффективность.

1. Постановка задачи

Рассмотрим двухуровневую активную систему (АС), состоящую из центра (Ц) и n активных элементов. Обозначим x_i — план i-го АЭ, $x=\{x_i\}$ — план АС, $X(r)$ — множество возможных планов, $r=\{r_i\}$ — параметры модели АС, $\Phi(x, r)$ — целевая функция центра. Обозначим далее через $W_i=f_i(\mu, x_i, r_i)$ $(i=1\div n)$ целевую функцию i-го АЭ, где $\mu=\{\mu_j\}$ $(j=1\div m)$ — управление в системе. Функционирование АС происходит следующим образом.

1. На этапе формирования данных каждый АЭ сообщает Ц оценку s_i вектор-параметра r_i из множества Ω_i допустимых значений (встречный способ формирования данных).

2. На этапе планирования Ц определяет план $x(s)$ и управление $\mu(s)$. В работе рассматривается закон открытого управления, при котором $x(s)$ и $\mu(s)$ определяются в результате решения задачи согласованного планирования

$$(1)\qquad \max_{x\in X(s)} \Phi(x, s)$$

при условиях совершенного согласования

$$(2)\qquad f_i(\mu, x_i, s_i)=\max_z f_i(\mu, z, s_i)\quad (i=1\div n).$$

Как известно [1, 2], достоинством закона ОУ является достоверность сообщаемой информации в ситуации равновесия при гипотезе слабого влияния, т. е. $s^*=r$. Поэтому критерий эффективности функционирования Ц можно записать в виде

$$(3)\qquad K_W=\min_{r\in\Omega}\Phi(x(r),r),\quad \text{где}\quad \Omega=\prod_{i=1}^{n}\Omega_i.$$

Как легко видеть, K_W однозначно определяется заданием совокупности целевых функций $W=\{W_i\}$ (если, конечно, задача (1), (2) имеет решение при любых $r\in\Omega$).

Задача критериального управления: определить W, максимизирующие K_W. В работах [1—3] приведены примеры решения задачи для ряда частных случаев. Ниже дается описание общего подхода.

2. Метод решения

Для упрощения описания примем, что x_i и r_i — скалярные величины. Обозначим $x_i^0(r)=\xi_i(r)$ $(i=1\div n)$ — решение задачи оптимального планирования: $\max\Phi(x,r)$ при $x\in X(r)$. Сделаем замену переменных $\mu(r)=\{\mu_j(r)\}$ таким образом, чтобы $x_i^0(r)$ можно было представить как функцию только новых переменных $\{\mu_j\}$ и параметра r_i:

$$(4)\qquad x_i^0=\eta_i(\mu,r_i)$$

(это всегда можно сделать, положив, например, $\mu_j=r_j$, $j\neq i$). Легко видеть, что (4) является необходимым и достаточным условием максимума по x_i функции

$$(5)\qquad f_i(\mu,x_i,r_i)=\eta_i(\mu,r_i)x_i-{}^1/_2x_i^2\qquad(i=1\div n).$$

Теорема. Совокупность целевых функций (5) определяет оптимальное решение задачи критериального управления.

Доказательство. Как уже отмечалось выше, применение закона ОУ обеспечивает в ситуации равновесия при гипотезе слабого влияния достоверность оценок $s^*=r$. В этом случае условия равновесия совпадут с условиями согласования и будут иметь вид (4). Заметим теперь, что в решении задачи согласованного планирования $\mu^*=\mu(r)$ и, следовательно,

$$(6)\qquad x_i^*=\eta_i(\mu^*,r_i)=\eta_i(\mu(r),r_i)=\xi_i(r)=x_i^0(r),$$

т. е. равновесный план является решением задачи оптимального планирования. Это доказывает теорему.

Замечание 1. В практических задачах параметры r_i часто имеют смысл показателей эффективности производства. В этом случае зависимости $\mu(r)$ следует определять таким образом, чтобы $\eta_i(\mu,r_i)$ были возрастающими функциями r_i.

Замечание 2. Если $\mu(s)$ зависит от s_i, то следует проверять правомерность гипотезы слабого влияния, доказывая, например, теоремы о слабом влиянии, при достаточно большом числе элементов [1, 3].

3. Примеры решения задач критериального управления

1. Распределение ресурсов [3]:

$$\Phi(x,r)=\sum_{i=1}^{n}2r_i\sqrt{x_i}\to\max_x$$

при условиях $x\geqslant0$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i=R.$

Оптимальное решение задачи:

(7) $$x_i^0 = \frac{r_i^2}{\sum\limits_{j=1}^{n} r_j^2} R.$$

Введем переменную $\mu = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} r_j^2/R}$. Преобразуем (7) к виду

$$r_i/\sqrt{x_i} - \mu = 0.$$

Интегрируя по x_i, получаем

(8) $$f_i(\mu, x_i, r_i) = 2r_i\sqrt{x_i} - \mu x_i \qquad (i=1\div n).$$

Такие целевые функции и рассматривались в [3].

2. Управление сложными проектами [1]:

$$\Phi(x, r) = \max_i \frac{r_i}{x_i} \to \min_x$$

при условиях $x \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = R$.

Оптимальное решение задачи

(9) $$x_i^0 = \frac{r_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} f_j} R \qquad (i=1\div n).$$

Введем переменную $\mu = R \Big/ \sum\limits_{j=1}^{n} r_j$. После преобразования (9) и интегрирования получим

$$f_i(\mu, x_i, r_i) = \mu x_i - \frac{1}{2r_i} x_i^2 \qquad (i=1\div n).$$

Два рассмотренных примера были подробно исследованы в работах [1, 3], где доказаны и условия слабого влияния, обосновывающие правомерность гипотезы слабого влияния при достаточно большом числе элементов.

Рассмотрим один новый пример.

3. Рассмотрим АС из n элементов с последовательной технологией

$$x_i = \alpha_{i-1} x_{i-1}, \qquad \alpha_i > 0 \qquad (i=2\div n),$$

$$\Phi(x, r) = c x_n - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2r_i} x_i^2,$$

где c — цена готовой продукции, $(1/2r_i)x_i^2$ — затраты на производство промежуточного продукта i в количестве x_i. Оптимальное решение задачи

$$x_i^0 = c\beta_n \Big/ \sum_{j=1}^{n} (\beta_j^2/r_j), \qquad x_i^0 = \beta_i x_1,$$

$$\beta_i = \prod_{j=1}^{i-1} \alpha_j \qquad (i=2\div n), \qquad \beta_1 = 1.$$

Заметим, что в данном случае очевидное введение переменной $\mu = c\beta_n \Big/ \sum_{j=1}^{n} (\beta_j^2/r_j)$, приводящее к целевым функциям

$$f_i(\mu, x_i, r_i) = \mu x_i - \frac{1}{2\beta_i} x_i^2, \tag{10}$$

является неприемлемым, так как нарушается требование возрастания f_i по r_i. Введем переменные

$$\mu_i = \sum_{j \neq i}^{n} \frac{\beta_j^2}{r_j} \qquad (i=1 \div n).$$

Имеем

$$x_i = \frac{c\beta_i\beta_n}{\mu_i + \beta_i^2/r_i} = \eta_i(\mu_i, r_i) \qquad (i=1 \div n).$$

Теперь $\eta_i(\mu_i, r_i)$ – возрастающая функция r_i и, следовательно,

$$f_i(\mu_i, x_i, r_i) = \frac{c\beta_n}{\mu_i + \beta_i^2/r_i} x_i - \frac{1}{2\beta_i} x_i^2$$

является решением задачи критериального управления. Гипотеза слабого влияния здесь, очевидно, выполняется, так как $\mu_i(r)$ не зависит от r_i. Интересно отметить, что в ситуации равновесия $s^* = r$ имеет место

$$\frac{c\beta_n}{\mu_i + \beta_i^2/r_i} = \frac{c\beta_n}{\sum_{j=1}^{n} (\beta_j^2/r_j)} = \mu, \qquad f_i(\mu_i, x_i, r_i) = \mu x_i - \frac{1}{2\beta_i} x_i^2,$$

что формально совпадает с (10).

Описанный метод может быть применен и для случая, когда x_i и r_i заданы в векторной форме $(i=1 \div n)$.

Автор выражает искреннюю благодарность А. Ашимову и В. Н. Буркову за внимание и полезные обсуждения работы.

Поступила в редакцию
4 мая 1977 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Бурков В. Н.* Основы математической теории активных систем. «Наука», 1977.
2. *Бурков В. Н.* Теория активных систем. Systems Science, v. 2, No. 1, 2, pp. 23–55, Wroclaw, Technical University, 1976.
3. *Бурков В. Н., Опойцев В. И.* Метаигровой подход к управлению иерархическими системами. Автоматика и телемеханика, № 1, стр. 103–114, 1974.

ON ONE APPROACH TO THE CRITERIAL MANAGEMENT PROBLEM

N. KULZHABAEV

One approach to solution of the criterial management problem for active systems is described [1]. The underlying idea is illustrated with simple examples.