Управление большими системами
Специальный выпуск 30.1 «Сетевые модели в управлении»

УДК 519.179.2
ББК 22.176

ПОЛНЫЕ ДВУСТОРОННИЕ РЕСУРСНЫЕ СЕТИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ПРОПУСКНЫМИ СПОСОБНОСТЯМИ

Кузнецов О. П.[1]
(*Учреждение Российской академии наук*
Институт проблем управления РАН, Москва)
Жилякова Л. Ю.[2]
(*Педагогический институт ЮФУ, Ростов-на-Дону*)

Ресурсная сеть – потоковая модель, представленная ориентированным взвешенным графом, в котором любые две вершины либо несмежны, либо соединены парой противоположно ориентированных ребер. Ресурс располагается в вершинах, имеющих неограниченную емкость, веса ребер обозначают их пропускную способность. В дискретные моменты времени вершины обмениваются ресурсами по определенным правилам. Рассматриваются процессы динамического распределения ресурсов в полных сетях с произвольной пропускной способностью ребер и условия их стабилизации.

Ключевые слова: ресурсная сеть, пропускная способность, предельное состояние, аттрактор.

1. Введение

Ресурсная сеть, предложенная в [4], – это динамическая потоковая модель, в которой в дискретном времени происходит

---

[1] *Олег Петрович Кузнецов, доктор технических наук, профессор* (*olkuznes@ipu.rssi.ru*).
[2] *Людмила Юрьевна Жилякова, кандидат физико-математических наук*, (*zhilyakov@aaanet.ru*).

перераспределение ресурса при сохранении суммарного ресурса. Сеть представлена двусторонним ориентированным графом: смежные вершины соединены парой противоположно ориентированных ребер. Ребрам сети приписаны веса, означающие их пропускные способности. В отличие от классической потоковой модели Форда-Фалкерсона [5, 6] в которой ресурс течет от источников к стокам и находится в ребрах, в ресурсной сети направленность потока отсутствует, ресурс содержится в вершинах, и его распределение характеризует состояние сети. Потоковая сеть без источников и стоков предложена в [2], однако в ней, как и в модели Форда-Фалкерсона, за состояние принимается распределение ресурса по ребрам.

В работе [4] были исследованы полные однородные (с одинаковой пропускной способностью ребер) ресурсные сети без петель. В настоящей работе рассматриваются свойства полных ресурсных сетей с петлями и с различной пропускной способностью ребер. Исследуются условия сходимости процесса перераспределения ресурса, а также предельные состояния при разных величинах суммарного ресурса.

2. Основные определения

1.1. *Ресурсной сетью* называется ориентированный граф, вершинам v_i которого приписаны неотрицательные числа $q_i(t)$, изменяющиеся в дискретном времени t и называемые *ресурсами*, а ребрам (v_i, v_j) – положительные числа r_{ij}, постоянные во времени и называемые *пропускными способностями*; n – число вершин.

1.2. *Состоянием сети* в момент t будем называть вектор $Q(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t))$.

В каждый момент вершины передают по выходящим ребрам количество ресурса, зависящее от пропускных способностей ребер. Правила передачи ресурса удовлетворяют следующим условиям:

1) сеть замкнута, т. е. ресурсы извне не поступают и не расходуются;

2) ресурс, отдаваемый вершиной, вычитается из ее ресурса; ресурс, приходящий в вершину, прибавляется к ее ресурсу, т. е. выполнен *закон сохранения суммарного ресурса W*:

$$\forall t \ \sum_{i=1}^{n} q_i(t) = W \ .$$

1.3. Состояние $Q(t)$ называется *устойчивым*, если

$Q(t) = Q(t + 1) = Q(t + 2) = Q(t + 3) = \ldots$

Состояние $Q^* = (q_1^*, \ldots, q_n^*)$ называется *асимптотически достижимым* из состояния $Q(0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует t_ε такое, что для всех $t > t_\varepsilon$ $\left| q_i^* - q_i(t) \right| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Состояние сети называется *предельным*, если оно либо устойчиво, либо асимптотически достижимо.

1.4. Ресурсная сеть называется *однородной*, если все пропускные способности равны (обозначим их через r).

Несколько скорректируем правила функционирования однородной сети по сравнению с их формулировкой в [4]:

в момент t вершина v_i по каждому из своих m_i выходящих ребер отдает:

– r единиц ресурса, если $m_i r \le q_i(t)$ (правило 1);

– $\dfrac{q_i(t)}{m_i}$ в противном случае (правило 2).

1.5. Ресурс, выходящий из вершины v_i по ребру (v_i, v_j) в момент t, приходит в вершину v_j в момент $t + 1$.

Соответственно, будем считать, что этот ресурс на интервале $(t, t + 1)$ находится на ребре (v_i, v_j). Его величину назовем *выходным потоком* $f_{ij}(t)$.

Матрицей потока $F(t)$ назовем матрицу $\|f_{ij}(t)\|_{n\times n}$.

$\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t) = f_i^{out}(t)$ – *выходной поток* из вершины v_i в момент t (сумма элементов i-й строки матрицы $F(t)$); $f_i^{out}(t) \le r_i^{out}$.

Входным потоком $f_j^{in}(t + 1)$ в вершину v_j в момент $t + 1$ назовем сумму элементов j-го столбца $F(t)$:

$f_j^{in}(t+1) = \sum_{i=1}^{n} f_{ij}(t)$; кроме того, положим по определению $f_j^{in}(0) = 0$.

1.6. Пару ребер <$(v_i, v_j), (v_j, v_i)$> назовем *двусторонней парой*. Сеть, вершины которой соединены только двусторонними парами, назовем *двусторонней сетью*.

1.7. Двусторонняя сеть называется *полной*, если любые две вершины соединены двусторонней парой, и *симметричной*, если в каждой двусторонней паре пропускные способности одинаковы.

1.8. *Матрицей пропускной способности* сети будем называть матрицу $R = \|r_{ij}\|_{n\times n}$.

Из определения ресурсной сети вытекают следующие свойства матрицы R:

1. R – неотрицательная матрица: $\forall\ i, j\ \ r_{ij} \geq 0$,

2. $\forall\ i\ \ r_{ii} > 0$,

3. $\forall\ i, j\ \ (r_{ij} > 0 \Leftrightarrow r_{ji} > 0)$.

Для полной ресурсной сети матрица R является положительной.

1.9. *Суммарной пропускной способностью сети* r_{sum} назовем сумму проводимостей всех ее ребер: $r_{sum} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}$. Суммарную пропускную способность входных ребер вершины с номером i будем называть ее *входной пропускной способностью* и обозначать через $r_i^{in} = \sum_{j=1}^{n} r_{ji}$; суммарную пропускную способность выходных ребер, соответственно, назовем *выходной пропускной способностью* и обозначим через $r_i^{out} = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}$. Пропускная способность петли входит в обе суммы.

3. Однородные двусторонние полные сети с петлями

Полные однородные сети с петлями обладают следующими тремя свойствами, которые получаются из свойств 1-3, сформулированных в [4] для сетей без петель, заменой $r(n-1)$ на rn.

Свойство 1. Если для некоторого t' $q_i(t') = q_j(t')$, то для всех $t > t'$ $q_i(t) = q_j(t)$.

Свойство 2. Если для некоторого t' $q_i(t') \le rn$, то для всех $t > t'$ $q_i(t) \le rn$.

Свойство 3. Если для всех i $q_i(t) \ge rn$, то состояние $Q(t)$ устойчиво.

Будем считать, что вершины пронумерованы так, что

(1) $q_1(0) \ge \ldots \ge q_k(0) > q_{k+1}(0) \ge \ldots \ge q_n(0)$,

где $q_k(0) > rn$, а $q_{k+1}(0) \le rn$.

Назовем множество вершин, для которых $q_i(t) > rn$, зоной $Z^+(t)$, а множество вершин, для которых $q_i(t) \le rn$, – зоной $Z^-(t)$. Зона $Z^+(0)$ – это первые k вершин, а зона $Z^-(0)$ – остальные вершины.

Отрезок вектора $Q(t)$, содержащий только состояния вершин из $Z^+(t)$, обозначим $Q^+(t)$; отрезок $Q(t)$, соответствующий $Z^-(t)$, обозначим $Q^-(t)$.

Представим эти отрезки в следующем виде:

(2) $Q^+(t) = (rn + c_1(t), \ldots, rn + c_k(t))$,

$Q^-(t) = (rn - d_{k+1}(t), \ldots, rn - d_n(t)$,

где все $c_i > 0$, $d_i \ge 0$.

Введем обозначения[1]: $C(t) = \sum_{i=1}^{k} c_i(t)$; $D(t) = \sum_{i=k+1}^{n} d_i(t)$. Так как величина $D(t)$ – это ресурс, которого зоне Z^- не хватает до

---

[1] *В общем случае k – величина переменная, так как мощность $Z^+(t)$ может меняться (в дальнейшем увидим, что она может только убывать). Поэтому под k будем подразумевать $k(t)$, но писать $k(t)$ не будем, чтобы не загромождать обозначений.*

$rn(n-k)$, будем называть ее *дефицитом* в момент t, а величину $D(0)$ – *начальным дефицитом*. Величину $C(t)$ будем называть *профицитом* зоны Z^+ в момент t, а величину $C(0)$ – ее *начальным профицитом*.

Просуммировав компоненты $Q(0)$, получим:

(3) $\sum_{i=1}^{n} q_i(0) = W = rn^2 + C(0) - D(0)$,

откуда заключаем, что

(4) $C(t) - D(t) = const = p$ и $W = rn^2 + p$.

Пример: $n = 5$, $r = 2$, $rn = 10$, $W = 60$. $Q(0) = (20, 17, 9, 8, 6)$. Тогда $k = 2$, зона $Z^+(0)$ – первые две вершины; $c_1(0) = 10$, $c_2(0) = 7$, $C(0) = 17$, $d_3(0) = 1$, $d_4(0) = 2$, $d_5(0) = 4$, $D(0) = 7$, $p = 10$.

$$F^{out}(0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1{,}8 & 1{,}8 & 1{,}8 & 1{,}8 & 1{,}8 \\ 1{,}6 & 1{,}6 & 1{,}6 & 1{,}6 & 1{,}6 \\ 1{,}2 & 1{,}2 & 1{,}2 & 1{,}2 & 1{,}2 \end{pmatrix}; F^{in}(0) = 0.$$

Однородные сети с петлями в отличие от однородных сетей без петель обладают еще одним важным свойством:

Свойство 4: Для любых t, $s_i^{in}(t) = s_j^{in}(t)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Это следует из того, что каждая вершина по всем выходящим ребрам отдает одну и ту же величину ресурса. Поэтому для любого момента t все столбцы матрицы потока одинаковы. Это, в частности, видно из приведенной выше матрицы потока.

Лемма 1. Если в момент t вершины $v_{i1}, \dots, v_{im}$ ($m \le n$) находятся в зоне Z^-, то

$q_{i1}(t+1) = \dots = q_{im}(t+1)$.

Поскольку все вершины зоны Z^- в момент t отдают весь свой ресурс, то их ресурс в момент $t + 1$ равен поступающему к ним входному потоку. Тогда лемма верна в силу свойства 4.

Введем теперь следующие величины:

$f_+^{out}(t) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t)$ – суммарный выходной поток из $Z^+(t)$.

$F_-^{out}(t) = \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t)$ – суммарный выходной поток из $Z^-(t)$.

$f^{out}(t) = f_+^{out}(t) + f_-^{out}(t)$ – общий выходной поток.

Соответствующие входные потоки обозначим $f_+^{in}(t + 1)$, $f_-^{in}(t + 1)$, $f^{in}(t + 1)$.

Из модифицированного правила функционирования следует, что $f^{out}(t) = f^{in}(t + 1)$.

Имеем:

$f_+^{out}(t) = rkn$ (для всех вершин из $Z^+(t)$ выходной поток равен rn).

$f_-^{out}(t) = rn(n - k) - D(t)$ (все вершины из $Z^-(t)$ отдают весь свой ресурс).

$f^{out}(t) = rkn + rn(n - k) - D(t) = rn^2 - D(t)$.

В силу свойства 4 общий входной поток делится между всеми вершинами поровну. Поэтому

$$f_+^{in}(t + 1) = \frac{k}{n} f^{out}(t) = \frac{k}{n} (rn^2 - D(t)) = rkn - \frac{k}{n} D(t).$$

$$f_-^{in}(t + 1) = \frac{n-k}{n} f^{out}(t) = \frac{n-k}{n} (rn^2 - D(t)).$$

Для $Z^+(t + 1)$ назовем дивергенцией величину $Div\, Z^+(t + 1) = f_+^{in}(t + 1) - f_+^{out}(t)$. Получим:

$$Div\, Z^+(t + 1) = rkn - \frac{k}{n} D(t) - rkn = -\frac{k}{n} D(t).$$

Соответственно, $Div\, Z^-(t + 1) = \frac{k}{n} D(t)$.

Это означает, что в течение интервала $(t, t + 1)$ из Z^+ в Z^- перетекает ресурс $\frac{k}{n} D(t)$.

Если в момент $t + 1$ Z^+ не меняется, то

$$Q^+(t + 1) = (rn + c_1(t) - \frac{D(t)}{n}, \ldots, rn + c_k(t) - \frac{D(t)}{n}),$$

$$Q^-(t + 1) = (\frac{f^{in}(t+1)}{n}, \ldots, \frac{f^{in}(t+1)}{n}) =$$

$$= (rn - \frac{D(t)}{n}, \ldots, rn - \frac{D(t)}{n}),$$

откуда

$$(5)\quad D(t+1) = \frac{n-k}{n} D(t) = D(t)(1 - \frac{k}{n}) = D(0)(1 - \frac{k}{n})^t,$$

$$f_+^{out}(t+1) = rkn;$$

$$f_-^{out}(t+1) = rn(n-k) - \frac{n-k}{n} D(t).$$

$$f^{out}(t+1) = rn^2 - \frac{n-k}{n} D(t).$$

Тогда приращение потока:

$$\Delta f^{out}(t+1) = f^{out}(t+1) - f^{out}(t) = \frac{k}{n} D(t) = Div\, Z^-(t+1).$$

Теперь можно сформулировать теорему, являющуюся аналогом теоремы 3 в [4]:

Теорема 1. *Для однородной двусторонней полной сети с петлями с числом вершин* $n > 2$:

1) *если суммарный ресурс* W *сети не превосходит* $T = rn^2$, *то при любом начальном состоянии сети ее предельным состоянием является вектор* $(\frac{W}{n}, \frac{W}{n}, \ldots, \frac{W}{n})$;

2) *если* $W > rn^2$, *то при любом начальном состоянии сети, в котором хотя бы в двух вершинах ресурсы не равны, выравнивание не происходит, т. е. в предельном состоянии также не во всех вершинах ресурсы будут равны.*

Рассмотрим 4 случая.

1. Зона $Z^+(0)$ пуста.
2. Зона $Z^+(0)$ непуста, $W < rn^2$
3. Зона $Z^+(0)$ непуста, $W = rn^2$.
4. $W > rn^2$.

Случай, когда зона $Z^-(0)$ пуста, рассматривать не будем, потому что в этом случае все потоки равны и начальное состояние устойчиво.

Случай 1: Зона $Z^+(0)$ пуста. Тогда в силу леммы 1 выравнивание происходит за один такт.

Случай 2. Зона $Z^+(0)$ непуста, $W < rn^2$.

Из (5) следует, что при неизменном k $\lim\limits_{t\to\infty} D(t) = 0$. Но при $W < T$ из (3) и (4) видно, что $p < 0$, и $D(t) = 0$ не достигается. Поскольку в силу (4) с уменьшением $D(t)$ уменьшается и $C(t)$, то наступит такой момент t', где впервые $C(t')$ настолько мало, что хотя бы одна вершина из $Z^+(t')$ перейдет в $Z^-(t')$ и по лемме 1 в момент $t' + 1$ выровняет свой ресурс со всеми остальными вершинами Z^-. Дальше пойдет тот же процесс с изменившимся k. Поскольку при $W < rn^2$ $C(t) < D(t)$, то наступит момент t'', когда $C(t'') = 0$, все вершины перейдут в Z^-, в момент $t'' + 1$ произойдет выравнивание и предельное состояние будет достигнуто.

Случай 3. Зона $Z^+(0)$ непуста, $W = rn^2$. В этом случае $p = 0$, $D(t)$ и $C(t)$ одновременно стремятся к нулю и, как видно из (2), $\lim\limits_{t\to\infty} Q(t) = (rn, \dots, rn)$. Но при этом в любой конечный момент времени $D(t) \neq 0$, следовательно, $C(t) \neq 0$; поэтому, по крайней мере одна вершина будет оставаться в Z^+ и предельное состояние будет достигнуто асимптотически.

Случай 4. $W > rn^2$. В силу свойства 2 вершины, попавшие в зону Z^-, выйти из нее не могут. Так как $\lim\limits_{t\to\infty} D(t) = 0$, то $\lim\limits_{t\to\infty} Q^-(t) = (rn, \dots, rn)$, $W - rn^2 = p$ и $\lim\limits_{t\to\infty} C(t) = p$. Величина p распределится между вершинами из Z^+, в каждой из которых ресурс будет оставаться больше, чем rn, на конечную величину, т. е. выравнивания не произойдет.

Конкретная характеристика предельных состояний для случая 4 описывается теоремой 2, которая является аналогом теоремы 4 в [4].

Теорема 2. *Если $W > rn^2$, то предельным состоянием сети является вектор*

(6) $Q^* = (q_1(0) - w^*, \dots, q_l(0) - w^*, rn, \dots, rn)$,

где

(7) $l = k$ и $w^* = \dfrac{D(0)}{k}$, если $c_k(0) \geq \dfrac{D(0)}{k}$;

в противном случае $l \leq k$ – наибольшее целое число, такое, что

(8) $c_l(0) \geq w^*$,

(9) $w^* = \dfrac{C_l(0) - p}{l}$,

где $C_l(0) = \sum_{i=1}^{l} c_i(0)$.

Как было показано выше, в каждый момент t ресурс каждой вершины зоны $Z^+(t)$ уменьшается на одинаковую величину. Поэтому для всех вершин v_i из $Z^+(t)$ величина $w(t) = q_i(0) - q_i(t)$ одинакова. Отсюда, в частности, имеем

(10) $q_k(t) = q_k(0) - w(t) = rn + c_k(0) - w(t)$.

Рассмотрим два случая, соответствующие условиям теоремы.

Случай 1. $c_k(0) \geq \dfrac{D(0)}{k}$. В доказательстве случая 4 теоремы 1 уже было отмечено, что $\lim_{t\to\infty} Q^-(t) = (rn, \ldots, rn)$. Поэтому суммарный ресурс зоны $Z^-(t)$ в пределе возрастет на величину $D(0)$, и по закону сохранения на эту же величину уменьшится суммарный ресурс зоны $Z^+(t)$. Если $c_k(0) \geq \dfrac{D(0)}{k}$, то из каждой вершины Z^+ в пределе будет вычтена величина $w^* = \lim_{t\to\infty} w(t) = \dfrac{D(0)}{k}$ и при этом наименьшая из величин c_k останется положительной, а, значит, мощность Z^+ не изменится, т. е. $l = k$.

Случай 2. $c_k(0) < \dfrac{D(0)}{k}$. Тогда в некоторый момент t выполнится условие $c_k(0) - w(t) \leq 0$, вершина v_k (и, может быть, некоторые другие вершины из Z^+) перейдет в зону Z^-, и начнется процесс уменьшения мощности $Z^+(t)$, который в некоторый момент t^* закончится возникновением заключительной зоны Z_l^+. Состояние $Q(t^*)$ сети можно рассматривать как новое начальное состояние сети с зонами Z_l^+, Z_l^- и с начальным дефицитом $D_l(t^*)$. Так как l с момента t^* не уменьшается, то выполняются условия случая 1 с заменой k на l. Поэтому равенство (6) выполняется. Величины l и w^* определятся следующим образом. Просуммировав в (6) компоненты Q^*, по закону сохранения получим $W = rn^2 + C_l(0) - w^*l$.

Используя (4), получим уравнение $rn^2 + p = rn^2 + C_l(0) - w^*l$, откуда получим (9). Условие (8) необходимо для того, чтобы c_l осталась в зоне Z_l^+.

4. Несимметричные двусторонние полные сети

4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Введем дополнительные определения, касающиеся несимметричных сетей.

Из 1.7 следует, что матрица пропускных способностей симметричной сети тоже является симметричной. В симметричной сети имеет место равенство:

(11) $r_i^{in} = r_i^{out}$.

Однако для выполнения (11) симметричность матрицы не является необходимым условием.

Ресурсную сеть с несимметричной матрицей R назовем *квазисимметричной*, если для всех i условие (11) выполняется, и *несимметричной,* если для некоторого i оно не выполняется.

Введем обозначение $\Delta r_i = r_i^{in} - r_i^{out}$.

Вершины несимметричной сети разделим на три класса:

1) *вершины-приемники*, для которых $\Delta r_i > 0$;
2) *вершины-источники*, $\Delta r_i < 0$;
3) *нейтральные вершины*, $\Delta r_i = 0$.

В симметричных и квазисимметричных сетях все вершины *нейтральны*. Несимметричная сеть обладает как минимум одним источником и одним приемником.

Пусть среди n вершин сети имеется l приемников, k источников и $n - l - k$ нейтральных вершин. Будем считать, что приемники имеют номера от 1 до l, источники – от $l + 1$ до $l + k$, нейтральные вершины – от $l + k + 1$ до n.

Правила, по которым происходит распределение ресурса в несимметричной сети, отличны от 1.4 и имеют следующий вид:

В момент $t + 1$ вершина v_i в ребро v_m отдает:

– r_{im} единиц ресурса, если $q_i(t)\, q_i(t) > r_i^{out}$ (правило 1);

– $\frac{r_{im}}{r_i^{out}} q_i(t)$ в противном случае (правило 2).

В этом разделе рассматриваются *несимметричные двусторонние полные сети с петлями* (НДП-сети).

Для их анализа используются результаты теории матриц и дискретных цепей Маркова [1, 3].

4.2. СВОЙСТВА НДП-СЕТЕЙ

Свойства однородных сетей, описанные в [4], в несимметричных сетях в общем случае не сохраняются. Свойства 1 и 2 переносятся на вершины-источники и нейтральные вершины.

Свойство 1а. Если для вершин v_i, v_j $(i, j > l)$ в некоторый момент t' выполняется $q_i(t') = q_j(t')$ и при этом: 1) $q_i(t') \le r_i^{out}$, $q_j(t') \le r_j^{out}$, 2) $r_{mi} = r_{mj}$ для любого m, то для всех $t > t'$ $q_i(t) = q_j(t)$. При таких условиях с момента t обе вершины отдают весь свой ресурс, а получают одинаковый ресурс. Выходные пропускные способности этих вершин могут быть любыми.

Свойство 2а. Если для некоторого t' $q_i(t') \le r_i^{in}$, то для всех $t > t'$ $q_i(t) \le r_i^{in}$ $(i > l)$.

Свойство 5. В процессе функционирования несимметричной сети ресурс в нейтральных вершинах может временно стабилизироваться, а затем снова изменяться.

Определения зон $Z^+(t)$ и $Z^-(t)$ для НДП-сетей изменяются. Зоной $Z^-(t)$ назовем множество вершин, для которых $q_i(t) \le r_i^{out}$, зоной $Z^+(t)$ – множество вершин, для которых $q_i(t) > r_i^{out}$. Из свойства 1а следует, что источники и нейтральные вершины, попав в $Z^{-}(t)$, не смогут ее покинуть, так как для них $r_i^{in} \le r_i^{out}$.

Теорема 3. *В НДП-сети для любого начального состояния* $Q(0) = (q_1(0), q_2(0), \dots q_n(0))$ *и любого суммарного ресурса* W *существует такой момент времени* t', *что*

(12) $\forall t > t' \;\; q_i(t) < r_i^{in}$, $i > l$.

Из свойства 2а следует, что источники и нейтральные вершины, находящиеся в начальном распределении в зоне $Z^{-}(0)$, так в ней и останутся. Для них неравенство (12) выполнится с момента $t' = 0$. Рассмотрим отдельно источники и нейтральные вершины из $Z^{+}(0)$.

1. Для вершин-источников формула (12) следует из неравенства: $r_i^{in} < r_i^{out}$, $i = l + 1, \dots, l + k$. Если для вершины-источника с номером m $q_m(0) > r_m^{out}$, эта вершина будет функционировать по правилу 1, т.е. отдавать за каждый такт по r_m^{out} единиц ресурса. Принять же она может только $r_m^{in} < r_m^{out}$. Поэтому за каждый такт ее ресурс будет уменьшаться на некоторую ограниченную снизу величину r': $r' \ge |\Delta r_m| = \left| r_m^{in} - r_m^{out} \right|$.

Таким образом, как бы ни был велик начальный ресурс в этой вершине, за конечное число тактов она перейдет на правило 2.

Как только источник перейдет на правило 2, его петля получит ресурса меньше, чем ее пропускная способность r_{mm}, которая входит одним из слагаемых в r_m^{in} , и выполнится неравенство (12).

2. Докажем выполнение (12) для нейтральных вершин. Поскольку сеть полная, то, как только хотя бы один источник перейдет на правило 2, все нейтральные вершины, функционирующие по правилу 1, начнут отдавать ресурс больше, чем получать. А это означает, что через конечное число тактов для любой нейтральной вершины v_i ее ресурс $q_j(t)$ удовлетворит

условию (12). Номер такта, когда для последней из этих вершин выполнится условие (12), и обозначим t'.

По теореме 3 все источники и нейтральные вершины перейдут в зону $Z^{-}(t)$, однако условие (12) более сильно.

4.3. ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ СЕТИ ПРИ $W = 1$

Если в полной несимметричной сети суммарный ресурс $W = 1$, а суммарная пропускная способность сети больше единицы, то процесс распределения ресурса представляет собой регулярную цепь Маркова, а вектор состояний $Q^1(t)$ соответствует вероятностному вектору.

Такая сеть будет функционировать по правилу 2, и вектор состояния для нее задается рекуррентной формулой:

(13) $Q^1(t+1) = Q^1(t)\cdot R'$, где

(14) $$R' = \begin{pmatrix} \frac{r_{11}}{r_1^{out}} & \frac{r_{12}}{r_1^{out}} & \ldots & \frac{r_{1n}}{r_1^{out}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{r_{n1}}{r_n^{out}} & \frac{r_{n2}}{r_n^{out}} & \ldots & \frac{r_{nn}}{r_n^{out}} \end{pmatrix}.$$

R' – регулярная стохастическая матрица, полученная из положительной матрицы пропускной способности R нормированием строк.

Непосредственно из результатов, полученных для регулярных цепей Маркова [1, 3], следует, что:

1) для любой полной двусторонней сети с петлями существует матрица предельных вероятностей $\lim\limits_{h\to\infty}(R')^h = (R')^{\infty}$;

2) для любого начального распределения единичного ресурса вектор предельного распределения Q^{1*} существует, единственен и находится по формуле:

$Q^{1*} = Q^1(0)\cdot(R')^{\infty}$;

3) кроме того, для любого $t > 0$ верно:

(15) $Q^{1*} = Q^1(t)\cdot(R')^{\infty}$;

4) Матрица $(R')^{\infty}$ состоит из n строк Q^{1*}: $(R')^{\infty} = \xi\, Q^{1*}$, где ξ – вектор-столбец, состоящий из n единиц.

$$(16)\ (R')^{\infty} = \begin{pmatrix} q_1^{1*} & q_2^{1*} & \dots & q_n^{1*} \\ q_1^{1*} & q_2^{1*} & \dots & q_n^{1*} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1^{1*} & q_2^{1*} & \dots & q_n^{1*} \end{pmatrix}.$$

5) Вектор Q^{1*} является левым собственным вектором матрицы R' с собственным числом $\lambda = 1$:

(17) $Q^{1*}\cdot R' = Q^{1*}$;

6) Вектор, состоящий из любой координаты Q^{1*} (любой столбец матрицы (16)) является правым собственным вектором матрицы R';

7) Q^{1*} является левым собственным вектором матрицы $(R')^{\infty}$: $Q^{1*}\cdot(R')^{\infty} = Q^{1*}$. Чтобы получить это равенство, достаточно осуществить предельный переход в (13).

Замечание. Из пункта 2) следует, что предельное состояние сети с единичным ресурсом единственно и не зависит от начального распределения ресурса по вершинам.

4.4. ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ СЕТИ ПО ПРАВИЛУ 2. ПОРОГОВОЕ ЗНАЧЕНИЕ РЕСУРСА T

Рассмотрим функционирование сети при $W \neq 1$. По теореме 3 существует такой момент времени t', после которого все источники и нейтральные вершины функционируют по правилу 2. Пусть значение W таково, что и вершины-приемники также функционируют по правилу 2, т. е. находятся в зоне $Z^{-}(t)$. Такая величина W всегда существует: например, при $W < \min\limits_i r_i^{out}$, ни одна вершина заведомо не может оказаться в $Z^{+}(t)$.

Теорема 4. *В НДП-сети для любого ресурса W, при котором, начиная с некоторого момента t', все вершины переходят в зону $Z^{-}(t)$, для любого начального распределения $Q(0)$ вектор предельного состояния Q^{*}:*

1) *существует*;

2) *единственен*;

3) *является левым собственным вектором стохастической матрицы* R' (14) *и предельной матрицы* $(R')^{\infty}$ (16) *с собственным числом* $\lambda = 1$: $Q^* = Q^* \cdot R'$ *и* $Q^* = Q^* \cdot (R')^{\infty}$.

По условию теоремы существует момент t', начиная с которого все вершины окажутся в зоне Z^- и начнут функционировать по правилу 2. Тогда для любого $t \geq t'$ функционирование сети описывается формулой:

(18) $Q(t + 1) = Q(t) \cdot R'$,

где R' – стохастическая матрица (15).

Для любого k верно:

(19) $Q(t + k) = Q(t) \cdot (R')^k$.

Поскольку $(R')^{\infty}$ существует, в правой части (19) можно осуществить предельный переход:

$$Q(t) \lim_{k \to \infty} (R')^k = Q(t)(R')^{\infty}.$$

Тогда и в левая часть (19) сходится к некоторому предельному вектору:

(20) $Q^* = Q(t) \cdot (R')^{\infty}$.

Таким образом, вектор предельного состояния существует и может быть найден из любого промежуточного состояния $Q(t)$ $(t \geq t')$. Так как (20) верно для любого $t \geq t'$, осуществив еще один предельный переход, получим:

$Q^* = Q^* \cdot (R')^{\infty}$.

Отсюда следует, что Q^* – левый собственный вектор матрицы $(R')^{\infty}$ с собственным числом $\lambda = 1$.

Поскольку Q^* существует, перейдем к пределу при $t \to \infty$ слева и справа непосредственно в равенстве (18). Получим:

$Q^* = Q^* \cdot R'$, т. е. Q^* – левый собственный вектор матрицы R' с собственным числом $\lambda = 1$. По теореме Фробениуса [1] этот вектор единственен. Таким образом, доказаны все утверждения теоремы.

При функционировании сети по правилу 2 вектор предельного состояния является собственным вектором матрицы R'. Но поскольку положительный собственный вектор матрицы R'

единственен [1], все векторы предельного состояния попарно линейно зависимы; их координаты пропорциональны. Для двух значений ресурса W_1 и W_2 справедливо:

$$\frac{Q_1^*}{W_1} = \frac{Q_2^*}{W_2}.$$

Тогда для каждого значения W, при котором все вершины сети функционируют по правилу 2, координаты вектора предельного состояния Q^* можно выразить через вектор Q^{1*}:

(21) $Q^* = Q^{1*} \cdot W$.

Теорема 5. *В НДП-сети существует пороговое значение суммарного ресурса T такое, что при $W \le T$ все вершины, начиная с некоторого t', переходят в зону $Z^-(t)$; при $W > T$ зона $Z^+(t)$ непуста для любого t. Для каждой конфигурации сети T единственно и не зависит от суммарного ресурса W и его начального распределения $Q(0)$.*

Из теоремы 3 следует, что через конечное число тактов все источники и нейтральные вершины оказываются в зоне $Z^-(t)$. Тогда при достаточно большом суммарном ресурсе в зоне $Z^+(t)$ могут оказаться лишь приемники. При $W > r_{sum}$ хотя бы одна из таких вершин гарантированно окажется в $Z^+(t)$.

Рассмотрим вектор предельного состояния как функцию от W: $Q^* = Q^*(W)$. Из (11) следует, что координаты $Q^*(W)$ растут пропорционально W пока все вершины остаются в зоне Z^-. Как только при увеличении W ресурс в одной из вершин достигает значения r_i^{out}, она переходит на правило 1, и при дальнейшем росте W соотношение (21) перестает выполняться. Обозначим величину суммарного ресурса, при котором первая из вершин в предельном состоянии получает ресурс, равный r_i^{out}, через T.

Поскольку $Q^*(W)$ единственно для каждого $W \le T$ и не зависит от $Q(0)$, T – единственно.

Обозначим вектор предельного состояния при $W = T$ через $\widetilde{Q} = (\widetilde{q}_1, \widetilde{q}_2, ..., \widetilde{q}_n)$. При $W = T$ существует хотя бы одна вершина, для которой верно: $\tilde{q}_i = r_i^{out}$. В НДП-сети такой вершиной может быть только приемник.

4.5.ПОТОК РЕСУРСА

4.5.1. $W \le T$

Если $W \le T$, вся сеть при достаточно больших t функционирует по правилу 2, и ресурс в вершинах состоит только из вновь пришедшего, т. е. $Q(t) = F^{in}(t)$. С другой стороны, по правилу 2 вершины отдают весь свой ресурс, значит: $F^{out}(t + 1) = Q(t)$. Из теоремы 4 предел $Q(t)$ при $W \le T$ существует и равен Q^*. Тогда пределы: $\lim_{t\to\infty} F^{in}(t)$ и $\lim_{t\to\infty} F^{out}(t)$ тоже существуют. Таким образом, при функционировании сети по правилу 2 выполняется:

(22) $F^{in*} = F^{out*} = Q^*$.

Из доказательства теоремы 5 следует, что при $W = T$ по крайней мере один приемник в предельном состоянии имеет ресурс, равный его выходной пропускной способности. Будем полагать, что он имеет номер 1. Тогда $\tilde{q}_1 = r_1^{out}$.

4.5.2. $W > T$

В несимметричных сетях, в отличие от симметричных и однородных, динамика потока зависит от начального состояния. Поток может изменяться как монотонно, так и немонотонно.

Рассмотрим процесс стабилизации сначала для монотонно возрастающего потока.

Теорема 6. *В НДП-сети, в которой $\tilde{q}_1 = r_1^{out}$ для любого $W > T$ и начального распределения $Q(0) = (W, 0, \ldots, 0)$:*

1) *предельный поток f^* существует и равен T;*

2) *предельное состояние Q^* существует;*

3) *зона $Z^{+*} = \lim_{t\to\infty} Z^+(t)$ содержит одну вершину v_1;*

4) *координаты вектора предельного состояния Q^*, начиная со второй, для любого $W > T$ совпадают с координатами $\tilde{Q}$:*

$$Q^* = \left(\left(W - \sum_{i=2}^{n} \tilde{q}_i \right), \tilde{q}_2, ..., \tilde{q}_n \right) = \left(\left(W - T + r_1^{out} \right), \tilde{q}_2, ..., \tilde{q}_n \right).$$

Рассмотрим два начальных состояния:

$Q_T(0) = (T, 0, \ldots, 0)$ и $Q(0) = (W, 0, \ldots, 0)$ $(W > T)$.

Нетрудно показать, что входные и выходные потоки в сети для этих двух начальных состояний полностью совпадают на каждом такте; векторы состояния отличаются только ресурсом в первой вершине.

Предельное состояние для $W = T$ существует и описывается вектором: $\tilde{Q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, ..., \tilde{q}_n)$. Тогда при $W = T$ существуют и предельные входящий и исходящий потоки $\tilde{F}^{in}$ и $\tilde{F}^{out}$, и из (22) следует, что $\tilde{F}^{in} = \tilde{F}^{out} = \tilde{Q}$. Но поскольку поток для $W > T$ на каждом такте совпадает с потоком при $W = T$, он также сходится к значению $\tilde{Q}$. Кроме того, равенство потоков означает, что при $W > T$ все вершины, кроме первой, функционируют по правилу 2, и, следовательно, для каждого t координаты векторов $Q(t)$ и $Q_T(t)$, начиная со второй, совпадают, и ресурсы в этих вершинах сходятся к тем же предельным значениям $\tilde{q}_i$. Поскольку в сети выполняется закон сохранения, то ресурс в первой вершине тоже имеет предельное значение и равен $W - \sum_{i=2}^{n} \tilde{q}_i$.

Тем самым доказаны все четыре утверждения теоремы.

Предельное состояние описывается вектором:

$$Q^* = \left(\left(W - \sum_{i=2}^{n} \tilde{q}_i \right), \tilde{q}_2, ..., \tilde{q}_n \right) = \left(\left(W - T + r_1^{out} \right), \tilde{q}_2, ..., \tilde{q}_n \right).$$

Потоки в сети при $W = T$ и $W > T$ совпадают.

Так как при $W = T$ все вершины функционируют по правилу 2, и суммарный поток равен суммарному ресурсу, для любого $W > T$ выполнится: $f^* = \sum_{j=1}^{n} \tilde{q}_j = T$.

Из теоремы 6 следует, что если в начальном распределении ресурс находится в вершине, способной при $W = T$ набрать ресурс, равный своей выходной пропускной способности, то ни одна другая вершина уже не перейдет на правило 1, и только эта вершина в предельном состоянии окажется в зоне Z^{+*}.

Вершины, в предельном состоянии принадлежащие Z^{+*}, будем называть *аттракторами*.

Если в сети существует несколько вершин, для которых выполняется равенство $\tilde{q}_i = r_i^{out}$, то при $W > T$ такая сеть не будет эргодической системой: вершина, содержащая весь ресурс в начальном распределении, окажется единственным аттрактором.

Вершины, для которых выполняется $\tilde{q}_i = r_i^{out}$, назовем *потенциальными аттракторами*.

Теорему 6 можно обобщить на любое количество потенциальных аттракторов.

Теорема 7. *В НДП-сети, в которой* $\tilde{q}_i = r_i^{out}$, $i = 1, \ldots, L$, *для* $W > T$ *и начального распределения* $Q(0) = (W_1, \ldots, W_L, 0, \ldots, 0)$, *где* $W_i > r_i^{out}$:

1) *предельный поток существует:* $F^{in*} = F^{out*} = \tilde{Q}$ *и* $f_{sum}^* = T$;

2) *предельное состояние* Q^* *существует и единственно;*

3) *зона* $Z^{+*} = \lim\limits_{t\to\infty} Z^+(t)$ *содержит вершины* $v_1, \ldots, v_L$;

4) *координаты вектора предельного состояния* Q^**, начиная с* $(L + 1)$*-й, для любого* $W > T$ *совпадают с координатами* $\tilde{Q}$: $Q^* = \left(q_1^*, \ldots, q_L^*, \tilde{q}_{L+1}, \ldots, \tilde{q}_n\right)$.

Для доказательства теоремы о предельном состоянии сформулируем вспомогательные утверждения. Следующая теорема показывает, что зона $Z^+(t)$ притягивает потенциальные аттракторы подобно тому, как зона $Z^-(t)$ притягивает нейтральные вершины и источники (теорема 3). Однако зона $Z^+(t)$ слабее: не все потенциальные аттракторы могут в нее попасть.

Теорема 8. *Если при $W > T$ для потенциального аттрактора НДП-сети v_i существует такой момент времени t', что $v_i \in Z^+(t')$, то для всех $t > t'$ $v_i \in Z^+(t)$. Иными словами, при $W > T$ аттрактор, оказавшись в зоне $Z^+(t)$, не может ее покинуть.*

Теорема 9. *В НДП-сети с суммарным ресурсом $W > T$ существует такой момент t'', начиная с которого зона $Z^+(t)$ стабилизируется.*

Теорема 10. *В НДП-сети при любом начальном распределении $Q(0) = (q_1(0), q_2(0), \dots q_n(0))$ ресурса $W > T$:*

1) *предельный поток f^* существует и равен T;*

2) *предельное состояние Q^* существует;*

3) *для всех вершин, у которых в предельном состоянии при $W = T$, $\tilde{q}_j < r_j^{out}$, для любого $W > T$ выполняется: $q_j^* = \tilde{q}_j$. Излишек ресурса распределяется между аттракторами.*

Из теоремы 9 следует, что существует момент времени t'', при котором зона $Z^+(t)$ стабилизировалась. Пусть вершин, при $t > t''$ находящихся в $Z^+(t)$, L штук. Перенумеруем вершины так, чтобы аттракторы имели номера от 1 до L.

Рассмотрим вектор выходного потока $F^{out}(t)$, $t > t''$.

Первые L координат этого вектора стабилизировались: они равны суммарным пропускным способностям вершин:

$F^{out}(t + 1) = (r_1^{out}, \dots, r_L^{out}, q_{L+1}(t), \dots, q_n(t))$.

Для каждой вершины v_i $(i > L)$ рассмотрим два случая: $q_i(t) > \tilde{q}_i$ и $q_i(t) \le \tilde{q}_i$.

Если $q_i(t) \le \tilde{q}_i$, ресурс в вершине будет возрастать, пока не выполнится равенство: $q_i(t) = \tilde{q}_i$, так как координаты вектора предельного состояния при $W > T$ не могут быть меньше соответствующих координат при $W = T$. Если начальное состояние сети таково, что весь ресурс находится в аттракторах (теоремы 6-7), $q_i(t)$ будет сходиться к $\tilde{q}_i$ снизу.

Пусть t''' – такой момент времени, что $q_i(t''') > \tilde{q}_i - \varepsilon$ для всех $i > L$.

Пусть $t > t'''$ и существует вершина, для которой $q_m(t) > \tilde{q}_m$.

По теореме 7 существует предельное состояние сети $Q^* = \left(q_1^*,...,q_L^*,\tilde{q}_{L+1},...,\tilde{q}_n\right)$, и входной и выходной потоки совпадают. Заметим, что аттракторы отдают по полной пропускной способности в каждое ребро и выходной поток у них увеличиться не может.

Тогда если $q_m(t) > \tilde{q}_m$, входной поток в аттракторах превосходит выходной, дивергенция аттракторов положительна, дивергенция вершины v_m отрицательна. Последовательность $q_m(t)$ монотонно убывает и ограничена снизу величиной $\tilde{q}_m$.

Поэтому $\forall\ i > L\ \ q_i(t) \to \tilde{q}_i$.

Тем самым, доказаны все утверждения теоремы. Предельное состояние Q^* существует и не зависит от начального; следовательно, существует предельный поток, причем $F^{in*} = F^{out*} = \tilde{Q}$ и $s^*_{sum} = T$.

5. Практические приложения

Ресурсная сеть лежит в основе модели распространения загрязнений и других химических веществ, а также пассивных гидробионтов в водной среде. Топология сети представляет собой регулярную двумерную решетку, если строится модель распространения вещества по поверхности воды, или трехмерную решетку, если вещество распространяется в толще воды с учетом глубин. Вершинам поставлено в соответствие количество вещества на заданной площади; пропускные способности ребер соответствуют перетокам. Они зависят от существующих течений в моделируемой акватории, скорости ветра, стратификации воды и ряда других гидрологических параметров.

В ресурсной сети процесс перераспределения происходит без учета физических свойств ресурса. При моделировании распространения вещества кроме параметров окружающей среды важны параметры самого вещества: его плотность, растворимость в воде, химическая активность, скорость оседания. Чтобы модель адекватно отражала характер и скорость распространения веществ, необходимо иметь возможность настраивать ее в зависимости от свойств вещества и среды. Кроме того, поскольку модель масштабируема и может охватывать как малые, так и большие площади, такты внутреннего времени модели будут соответствовать различным интервалам реального времени, и распространение вещества будет моделироваться с разной точностью.

Управление в модели осуществляется несколькими различными способами.

1. Для изменения свойств проводимости среды, и, соответственно, изменения скорости распространения вещества, используется коэффициент пропорциональности пропускных способностей. С его помощью перераспределение можно ускорить или замедлить. Все пропускные способности в базе данных умножаются на этот коэффициент.

2. Для изменения инерционности системы отдельно увеличивается или уменьшается пропускная способность петель. Чем она больше, тем больше ресурса возвращается в вершину. В терминах модели это означает, что большая часть вещества не покидает заданную площадь.

3. Если вещество оседает с высокой скоростью, необходим переход работы сети на новое правило, согласно которому ресурс распределяется не равномерно по всем ребрам, а сначала попадает в петлю. При этом вершина удерживает ресурс, равный пропускной способности петли, и соответствующее количество вещества остается на заданной площади.

Модель имитирует распределение вещества на заданной акватории в течение заданного времени. Результатом работы модели является оперативный прогноз распространения вещества в результате выброса.

Литература

1. ГАНТМАХЕР Ф.Р. *Теория матриц.* – М.: Физматлит. 2004. – 560 с.
2. ЕРЗИН А.И., ТАХОНОВ И.И. *Равновесное распределение ресурсов в сетевой модели* // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2005. – т. VIII, №3(23). – С. 58–68.
3. КЕМЕНИ Дж., СНЕЛЛ Дж. *Конечные цепи Маркова.* – М.: Наука. 1970. – 272 с.
4. КУЗНЕЦОВ О.П. *Однородные ресурсные сети I. Полные графы.* // Автоматика и телемеханика. – 2009. – №11. – с. 136–147.
5. ФОРД Л.Р., ФАЛКЕРСОН Д. *Потоки в сетях.* – М.: Мир, 1966. – 276 с.
6. AHUJA R.K., MAGNATI T.L., ORLIN J.B. *Network Flows: Theory, Algorithms and Applications.* – Prentice Hall, New Jersey, 1993.

COMPLETE BIDIRECTIONAL NETWORKS OF ARBITRARY CONDUCTIVITY

Oleg Kuznetsov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (Moscow, Profsoyuznaya st., 65).

Ludmila Zhilyakova, Pedagogical Institute SFedU, Rostov-on-Don, Cand. Sc., (Rostov-on-Don, Dneprovskiy lane, 116, zhilyakov@aaanet.ru).

Abstract: *The resource network is a flow model represented by an oriented weighted graph in which any two vertices are either not adjacent or connected by a pair of oppositely directed edges. Vertices can contain unlimited amount of resource. The weights of edges indicate the ability to conduct resource from one vertex to the other. The processes of the dynamic distribution of resources in bidirec-*

tional complete networks with arbitrary capacity and their stabilization conditions are considered.

Keywords: resource network, network capacity, limit state, attractor.

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Д. А. Новиковым