Управление большими системами
Специальный выпуск 30.1 «Сетевые модели в управлении»

УДК 519.179.1
ББК 22.176

ОРГИПЕРГРАФЫ: МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ[1]

Блюмин С. Л.[2]
(*Липецкий государственный технический университет, Липецк*)

Предложено формирование матриц инцидентности оргиперграфов с использованием корней из единицы подходящих степеней для ориентации гиперточек и гипердуг. Сформированы также матрицы валентности и смежности и лапласианы для оргиперграфов и их дуальных.

Ключевые слова: оргиперграфы, корни из единицы, матрица инцидентности, матрица валентности, матрица смежности, лапласиан.

1. Введение

Графы широко применяются в математическом моделировании для описания и исследования реальных объектов и систем самой разнообразной природы. Хорошо известны применения теоретико-графовых моделей для решения задач управления большими системами. Так, в [1] проиллюстрировано многообразие применений теории графов при решении широкого класса прикладных задач управления организационными системами. В их числе – задачи о цепях и путях как упорядоченных последовательностях ребер и дуг или, что то же, вершин в неориентированных и ориентированных графах.

---

[1] *Работа поддержана РФФИ, проект №09-07-00220-а.*
[2] *Семен Львович Блюмин, доктор физико-математических наук, профессор* (*slb@stu.lipetsk.ru*).

Ребра графов являются не более чем двухэлементными подмножествами множества его вершин, а в дугах (ориентированных ребрах) орграфов эти вершины упорядочены, что отражается в матрице инцидентности орграфа приписыванием им чисел ± 1 – квадратных корней из единицы, имеющих нулевую сумму.

Гиперграфы и оргиперграфы обобщают графы и орграфы в том направлении, что их гиперребра и гипердуги могут быть и более чем двухэлементными подмножествами множества вершин. Простейшей интерпретацией гиперграфов и оргиперграфов в терминах графов и орграфов может служить следующая: множества вершин – те же, тогда как в качестве гиперребер или гипердуг рассматриваются соответственно цепи или пути. Такая интерпретация открывает потенциальные возможности использования гиперграфов и оргиперграфов в прикладных задачах управления большими системами. В частности, в случае некоторых типов деревьев и образованных ими лесов она приводит к значительному сокращению количества гиперребер и гипердуг по сравнению с количеством исходных ребер и дуг, что может иметь значение для решения задач управления именно большими системами. При этом в таких моделях существенно используется упорядоченность вершин в гипердугах оргиперграфов.

В данной работе из различных известных определений оргиперграфа за основу принято именно то, при котором в его гипердугах вершины предполагаются упорядоченными. Это предлагается отражать в матрице инцидентности оргиперграфа приписыванием вершинам гипердуги, в установленном их порядке внутри нее, вообще говоря, комплексных корней из единицы подходящей степени, имеющих нулевую сумму. Аналогичным образом предлагается формировать матрицу инцидентности дуального оргиперграфа в предположении о том, что в его гипердугах – гиперточках (ориентированных гипервершинах) исходного оргиперграфа – ребра (исходного гиперграфа) упорядочены. На основе матриц инцидентности формируются матрицы валентности и смежности и лапласианы (отличным от некоторых известных способом) оргиперграфа и его дуального.

2. Гиперграфы

Гиперграф H определяется заданием множеств V и E и отображения R: $V \times E \to \{0, 1\}$ [2, 3, 5]. В соответствии с терминологией теории графов элементы $v \in V$ называются вершинами, а элементы $e \in E$ – ребрами гиперграфа; отображение R называется его инцидентором. Вершина $v \in V$ и ребро $e \in E$ инцидентны в H, если инцидентор $R(v, e) = 1$, и не инцидентны, если $R(v, e) = 0$. С учетом этого гиперграф может быть определен как пара $H = (HV, HE)$, где

$$HV \cong \{hv = E(v) = \{e \in E\colon R(v, e) = 1\}\},$$
$$HE \cong \{he = V(e) = \{v \in V\colon R(v, e) = 1\}\} –$$

множества его гипервершин и гиперребер (символ $\cong$ здесь и далее означает «по определению»). В дальнейшем символы hv и he, в зависимости от контекста или удобства интерпретации, трактуются как v или $E(v)$, e или $V(e)$. Из определений следует, что $e \in hv \Leftrightarrow v \in he$.

Дуальный гиперграф определяется как пара

$$H^* = (H^*V, H^*E) \cong (HE, HV);$$

при этом $(H^*)^* = H$.

Определяются:

– степени пар «вершина-гиперребро»

$$d(v, he) = R(v, e);$$

– степени пар гипервершин (их смежности; символ $|S|$ означает мощность множества S)

$$d(hv', hv'') = d(hv'', hv') = |hv' \cap hv''|,$$

в частности, степени гипервершин (их валентности)

$$d(hv) = d(hv, hv) = |hv|;$$

– степени пар гиперребер (их смежности)

$$d(he', he'') = d(he'', he') = |he' \cap he''|,$$

в частности, степени гиперребер (их валентности)

$$d(he) = d(he, he) = |he|;$$

– степени пар «ребро-гипервершина»

$$d(e, hv) = R(v, e).$$

Для дуального гиперграфа эти понятия определяются дуальным образом.

Далее предполагается, что множества V, E вершин и ребер, а значит и множества HV, HE гипервершин и гиперребер, конечны: $|HV| = m$, $|HE| = n$; в этом случае говорят о (m, n)-гиперграфе H и его дуальном (n, m)-гиперграфе H^*. Предполагается, что элементы этих конечных множеств некоторым образом (фиксированным на протяжении всего рассмотрения) перенумерованы: $V = \{v_i, i = 1, \ldots, m\}$, $E = \{e_j, j = 1, \ldots, n\}$.

(m, n)-гиперграф однозначно определяется матрицей (вершинно-гиперреберной) инцидентности $I(H) = I(V, HE)$ – $(0, 1)$-матрицей размера $m \times n$, строки которой помечены его вершинами, столбцы – гиперребрами, а на месте (v, he) находится число $d(v, he)$. При этом для дуального гиперграфа H^*

$$I(H^*) = I(E, HV) = (I(V, HE))^* = (I(H))^*;$$

здесь применение операции «*» к матрице означает транспонирование.

Матрица $I(HV)$ гипервершинной инцидентности определяется как квадратная матрица порядка m, строки и столбцы которой помечены гипервершинами, а на месте (hv', hv'') находится число $d(hv', hv'')$. Эта матрица допускает представление

$$(1)\quad I(HV) = \sum_{he \in HE} I(HV; he) = \sum_{he \in HE} \left(\sum_{k(he)=0}^{d(he)-1} P(he)^{k(he)} \right) =$$

$$= \sum_{he \in HE} P(he)^0 + \sum_{he \in HE} \left(\sum_{k(he)=1}^{d(he)-1} P(he)^{k(he)} \right) = D(HV) + A(HV) \cdot$$

Здесь $D(HV)$ – диагональная матрица валентности (степеней) гипервершин; $A(HV)$ – симметричная (с нулевой диагональю) матрица смежности гипервершин, а вспомогательные матрицы $I(HV; he)$ и $P(he)$ строятся так: матрица $I(HV; he)$ содержит единицы на местах, отвечающих вершинам $v \in he$, а остальные элементы – нули. Вычеркивание в ней нулевых строк и столбцов приводит к квадратной матрице J порядка $d(he)$, состоящей из единиц. Эта матрица допускает представление в виде суммы

$$J = P^0 + P^1 + \ldots + P^{d(he) - 1},$$

где P^0 – единичная матрица; $P^1 = P$ – матрица циклической перестановки набора из $d(he)$ элементов. Возвращение в нее вычеркнутых строк и столбцов приводит к матрице $P(he)$.

Матрица $I(HE)$ гиперреберной инцидентности определяется как квадратная матрица порядка n, строки и столбцы которой помечены гиперребрами, а на месте (he', he'') находится число $d(he', he'')$. Эта матрица допускает представление

$$I(HE) = \sum_{hv\in HV} I(HE; hv) = \sum_{hv\in HV} \left(\sum_{k(hv)=0}^{d(hv)-1} P(hv)^{k(hv)} \right) = \tag{2}$$

$$= \sum_{hv\in HV} P(hv)^0 + \sum_{hv\in HV} \left(\sum_{k(hv)=1}^{d(hv)-1} P(hv)^{k(hv)} \right) = D(HE) + A(HE)\cdot$$

Здесь $D(HE)$ – диагональная матрица валентности (степеней) гиперребер; $A(HE)$ – симметричная (с нулевой диагональю) матрица смежности гиперребер, а вспомогательные матрицы $I(HE; hv)$ и $P(hv)$ строятся дуально матрицам $I(HV; he)$ и $P(he)$, так как для дуального гиперграфа

$I(H^*V) = I(HE)$, $I(H^*E) = I(HV)$.

Лапласовские матрицы $L(H)$, $L(H^*)$ (лапласианы) гиперграфа и его дуального определяются по формулам

$L(H) \cong I(H)\cdot(I(H))^*$, $L(H^*) \cong I(H^*)\cdot(I(H^*))^* = (I(H))^*\cdot I(H)$,

они симметричны и удовлетворяют соотношениям

$L(H) = I(HV)$, $L(H^*) = I(HE)$.

Указанные выше матричные представления (неориентированных) гиперграфов служат основой для матричных представлений оргиперграфов.

3. Оргиперграфы

Обыкновенные графы $G = (V, E)$ без петель являются частным случаем рассматриваемых гиперграфов, для всех гиперребер которых, т. е. ребер e, $d(e) = 2$, так как ребра являются двухэлементными подмножествами $e = \{v', v''\}$ множества V вершин (следует отметить, что для обыкновенных графов имеет смысл понятие гипервершины, так как, вообще говоря, вершине графа инцидентно множество ребер, $|E(v)| \geq 0$ может быть любым натуральным числом, как и в гиперграфе).

В случае орграфа $OG = (V, A)$ вершины дуг (*arcs* – ориентированных ребер) $a \in A$ упорядочены, пронумерованы, $a = (v', v'') = (v^{(a)}_1, v^{(a)}_2)$ или (в соответствии с последующими обозначениями) $a = (v^{(a)}_0, v^{(a)}_1)$. В столбце матрицы $I(OG)$ инцидентности орграфа, отвечающем дуге *a,* на местах, отвечающих этим вершинам, находятся числа +1 и –1, являющиеся корнями степени 2 из единицы и имеющие нулевую сумму. Это подсказывает следующее определение матрицы инцидентности оргиперграфа.

Пусть элементы гипервершин и гиперребер гиперграфа некоторым образом (вообще говоря, не связанным с указанной ранее «сквозной» нумерацией его вершин и ребер) упорядочены, пронумерованы, в результате чего гипервершины и гиперребра становятся гиперточками $hp \in HP$ (*hyperpoints*) и гипердугами $ha \in HA$ (*hyperarcs*):

$$hp = (e_0^{(hp)}, e_1^{(hp)}, ..., e_{d(hp)-1}^{(hp)}) = (e_{k(hp)}^{(hp)}, k(hp) = 0,1,...,d(hp)-1),$$

$$ha = (v_0^{(ha)}, v_1^{(ha)}, ..., v_{d(ha)-1}^{(ha)}) = (v_{k(ha)}^{(ha)}, k(ha) = 0,1,...,d(ha)-1),$$

(именно такой способ «внутренней» нумерации удобен в дальнейшем).

Оргиперграф теперь может быть определен как пара $OH = (OHV, OHE) = (HP, HA)$. Дуальный оргиперграф $(OH)^* = (HA, HP)$.

В столбец матрицы $I(OH)$ инцидентности оргиперграфа, отвечающий его гипердуге *ha*, на места, отвечающие инцидентным ей вершинам в установленном их порядке, помещаются, вообще говоря, комплексные корни степени $d(ha)$ из единицы, имеющие нулевую сумму:

$$\varepsilon_{d(ha)}^{k(ha)}(ha), k(ha) = 0,1,...,d(ha)-1,$$

где $\varepsilon_{d(ha)}^{1}(ha) = \varepsilon_{d(ha)}(ha) = \exp\left(\dfrac{2\pi i}{d(ha)}\right)$

(указание метки гипердуги *ha* обязательно, так как для разных гипердуг *ha'*, *ha''* возможно $d(ha') = d(ha'')$).

Лапласиан $L(OH)$ оргиперграфа определяется по формуле

$L(OH) \cong I(OH)\cdot(I(OH))^*$;

здесь применение операции «*» к матрице с комплексными элементами означает эрмитово сопряжение, т. е. транспонирование и замену каждого элемента комплексно сопряженным. Как следствие, лапласиан оргиперграфа является эрмитовой матрицей. Справедливо соотношение

$L(OH) = I(HP)$,

где матрица $I(HP)$ гиперточечной инцидентности допускает представление, основанное на представлении (1) матрицы $I(HV)$ гипервершинной инцидентности:

(3) $$I(HP) = \sum_{ha\in HA} I(HP;ha) = \sum_{ha\in HA}\left(\sum_{k(ha)=0}^{d(ha)-1}\left(\varepsilon_{d(ha)}(ha)\cdot P(ha)\right)^{k(ha)}\right) =$$

$$= \sum_{ha\in HA} P(ha)^0 + \sum_{ha\in HA}\left(\sum_{k(ha)=1}^{d(ha)-1}\left(\varepsilon_{d(ha)}(ha)\cdot P(ha)\right)^{k(ha)}\right) = D(HP) + A(HP)\cdot$$

Здесь $D(HP)$ – диагональная матрица валентности гиперточек, совпадающая с матрицей $D(HV)$ валентности гипервершин, а $A(HP)$ – эрмитова (с нулевой диагональю) матрица смежности гиперточек, отличающаяся указанным в (3) образом от матрицы $A(HV)$ смежности гипервершин.

Для матрицы инцидентности и лапласиана дуального оргиперграфа $(OH)^* = (HA, HP)$ справедливы соотношения

$I((OH)^*) = (I(OH))^*$,

$L((OH)^*) \cong I((OH)^*)\cdot(I((OH)^*))^* = (I(OH))^*\cdot I(OH) = I(HA)$.

Для получения на основе (2) дуального к (3) представления матрицы гипердуговой индцидентности исходного гиперграфа, т. е. матрицы гиперточечной инцидентности и лапласиана дуального гиперграфа, целесообразно переопределить непосредственно матрицу инцидентности дуального гиперграфа способом, дуальным к способу определения матрицы инцидентности исходного графа, а именно: в столбец матрицы $I^\wedge((OH)^*)$ инцидентности дуального оргиперграфа, отвечающий его гипердуге

hp (гиперточке исходного оргиперграфа), на места, отвечающие ее элементам (инцидентным ей ребрам исходного гиперграфа) в установленном их порядке, помещаются корни степени $d(hp)$ из единицы, имеющие нулевую сумму:

$$\delta_{d(hp)}^{k(hp)}(hp),\ k(hp) = 0, 1, ..., d(hp) - 1 .$$

Теперь лапласиан $L^\wedge((OH)^*)$ дуального оргиперграфа определяется по формуле

$$L^\wedge((OH)^*) \cong I^\wedge((OH)^*)\cdot(I^\wedge((OH)^*))^*.$$

Справедливо соотношение

$$L^\wedge((OH)^*) = I^\wedge(HA),$$

где матрица $I^\wedge(HA)$ гипердуговой инцидентности исходного оргиперграфа допускает представление, основанное на представлении (2) матрицы $I(HE)$ его гиперреберной инцидентности:

$$(4)\quad I^\wedge(HA) = \sum_{hp\in HP} I^\wedge(HA;hp) = \sum_{hp\in HP}\left(\sum_{k(hp)=0}^{d(hp)-1}\Big(\delta_{d(hp)}(hp)\cdot P(hp)\Big)^{k(hp)}\right) =$$

$$= \sum_{hp\in HP} P(hp)^0 + \sum_{hp\in HP}\left(\sum_{k(hp)=1}^{d(hp)-1}\Big(\delta_{d(hp)}(hp)\cdot P(hp)\Big)^{k(hp)}\right) = D^\wedge(HA) + A^\wedge(HA)\cdot$$

Здесь $D^\wedge(HA)$ – диагональная матрица валентности гипердуг, совпадающая с матрицей $D(HE)$ валентности гиперребер, а $A^\wedge(HA)$ – эрмитова (с нулевой диагональю) матрица смежности гипердуг, отличающаяся указанным в (4) образом от матрицы $A(HE)$ смежности гиперребер.

4. Примеры

4.1. ГРАФЫ

В случае обыкновенных графов представления (1) и (3) сводятся к известным соотношениям

$$I(G)\cdot(I(G))^* = L(G) = D(G) + A(G),$$

$$I(OG)\cdot(I(OG))^* = L(OG) = D(OG) + (-1)\cdot A(OG),$$

где $I(G)$ и $L(G)$, $I(OG)$ и $L(OG)$ – матрица инцидентности и лапласиан графа и орграфа, $D(G) = D(OG)$ и $A(G) = A(OG)$ – матрицы валентности и смежности, совпадающие для графа и соответствующего ему орграфа. Множитель –1 соответствует общему для всех дуг орграфа корню степени 2 (степени любого ребра графа) из единицы, отличному от самой единицы.

Представление (2) сводится к сравнимому с известным соотношением для реберного графа

$(I(G))^*\cdot I(G) = 2\cdot E + A(R(G))$,

где в данном случае E – единичная матрица; $A(R(G))$ – матрица смежности реберного графа. Множитель 2 соответствует общей для всех ребер графа их степени. На матрицу $2\cdot E$ можно смотреть как на матрицу валентности, а на матрицу $A(R(G))$ – как на матрицу смежности дуального (в смысле гиперграфов) графа.

4.2. ОРГИПЕРГРАФ

В [2] приведен пример гиперграфа $H = (HV, HE)$, для которого $V = \{v_1, \ldots, v_9\}$, $E = \{e_1, \ldots, e_6\}$, $HV = \{hv_1 = \{e_1\}$, $hv_2 = \{e_1, e_2\}$, $hv_3 = \{e_1, e_4\}$, $hv_4 = \{e_2\}$, $hv_5 = \{e_2\}$, $hv_6 = \{e_2, e_3, e_6\}$, $hv_7 = \{\underline{e}_3\}$, $hv_8 = \{e_3, e_4\}$, $hv_9 = \{e_5\}\}$, $HE = \{he_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $he_2 = \{v_2, v_4, v_5, v_6\}$, $he_3 = \{v_6, v_7, v_8\}$, $he_4 = \{v_3, v_8\}$, $he_5 = \{v_9\}$, $he_6 = \{v_6\}\}$.

Матрицы инцидентности $I(H)$, валентности $D(HV)$ и смежности $A(HV)$ гипервершин, валентности $D(HE)$ и смежности $A(HE)$ гиперребер этого гиперграфа имеют вид:

$$I(H) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D(HV) = diag(1,2,2,1,1,3,1,2,1),$$

$$A(HV)=\begin{bmatrix}0&1&1&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&1&1&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&1&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&1&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$D(HE)=diag(3,4,3,2,1,1)\,,\qquad A(HE)=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&0&1\\0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Непосредственно проверяются соотношения

$I(H)\cdot(I(H))^* \cong L(H) = I(HV) = D(HV) + A(HV)$,

$(I(H))^*\cdot I(H) \cong L(H^*) = I(HE) = D(HE) + A(HE)$.

Представления (1), (2) матриц $I(HV)$, $I(HE)$ проиллюстрированы ниже в рамках представлений (3), (4) матриц $I(HP)$, $I\hat{}(HA)$.

Пусть элементы гиперточек и гипердуг оргиперграфа *OH* упорядочены именно так, как указано выше. Его матрица инцидентности формируется в виде

$$I(OH)=\begin{bmatrix} \varepsilon_3^0(1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_3^1(1) & \varepsilon_4^0(2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_3^2(1) & 0 & 0 & \varepsilon_2^0(4) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_4^1(2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_4^2(2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_4^3(2) & \varepsilon_3^0(3) & 0 & 0 & \varepsilon_1^0(6) \\ 0 & 0 & \varepsilon_3^1(3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3^2(3) & \varepsilon_2^1(4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1^0(5) & 0 \end{bmatrix},$$

а ее сопряженная

$(I(OH))^* =$

$$=\begin{bmatrix} \varepsilon_3^0(1) & \varepsilon_3^2(1) & \varepsilon_3^1(1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_4^0(2) & 0 & \varepsilon_4^3(2) & \varepsilon_4^2(2) & \varepsilon_4^1(2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3^0(3) & \varepsilon_3^2(3) & \varepsilon_3^1(3) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2^0(4) & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2^1(4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1^0(5) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1^0(6) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Их произведение

$$I(OH)\cdot(I(OH))^* \cong L(OH) = I(HP)$$

(с учетом свойств произведений корней из единицы и того, что $\varepsilon_j^0(i) = 1$) записывается в виде

$$
\begin{bmatrix}
1 & \varepsilon_3^2(1) & \varepsilon_3^1(1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\varepsilon_3^1(1) & 2 & \varepsilon_3^2(1) & \varepsilon_4^3(2) & \varepsilon_4^2(2) & \varepsilon_4^1(2) & 0 & 0 & 0 \\
\varepsilon_3^2(1) & \varepsilon_3^1(1) & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2^1(4) & 0 \\
0 & \varepsilon_4^1(2) & 0 & 1 & \varepsilon_4^3(2) & \varepsilon_4^2(2) & 0 & 0 & 0 \\
0 & \varepsilon_4^2(2) & 0 & \varepsilon_4^1(2) & 1 & \varepsilon_4^3(2) & 0 & 0 & 0 \\
0 & \varepsilon_4^3(2) & 0 & \varepsilon_4^2(2) & \varepsilon_4^1(2) & 3 & \varepsilon_3^2(3) & \varepsilon_3^1(3) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3^1(3) & 1 & \varepsilon_3^2(3) & 0 \\
0 & 0 & \varepsilon_2^1(4) & 0 & 0 & \varepsilon_3^2(3) & \varepsilon_3^1(3) & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

Его представление (3) расписывается следующим образом:

$L(OH) = I(HP) = D(HP) + A(HP)$,

где

$$
\begin{aligned}
&D(HP) = \\
&= D(HV) = diag(1,\, 2,\, 2,\, 1,\, 1,\, 3,\, 1,\, 2,\, 1) = P(ha_1)^0 + \ldots + P(ha_6)^0 = \\
&= diag(1,1,1,0,0,0,0,0,0) + diag(0,1,0,1,1,1,0,0,0) + \\
&+ diag(0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 1,\, 1,\, 1,\, 0) + diag(0,\, 0,\, 1,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 1,\, 0) + \\
&+ diag(0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 1) + diag(0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 1,\, 0,\, 0,\, 0)\,,
\end{aligned}
$$

$A(HP) =$

$$
= \varepsilon_3^1(1)\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix} & \\ & \phantom{\begin{matrix} 0&0&0&0&0&0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \end{bmatrix} + \varepsilon_3^2(1)\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{bmatrix} & \\ & \phantom{\begin{matrix} 0&0&0&0&0&0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \end{bmatrix} +
$$

$$
+\varepsilon_4^1(2)\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & & 1 \\ & & & & \\ 1 & & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \end{bmatrix} & \\ & \\ & \end{bmatrix} + \varepsilon_4^2(2)\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & 1 & \\ & & & & \\ & & & & 1 \\ 1 & & & & \\ & & 1 & & \end{bmatrix} & \\ & \\ & \end{bmatrix} +
$$

$$
+\varepsilon_4^3(2)\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} & & 1 & & \\ & & & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ 1 & & & & \end{bmatrix} & \\ & \\ & \end{bmatrix} + \varepsilon_3^1(3)\begin{bmatrix} & \\ & \\ & \begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix} \\ & \end{bmatrix} +
$$

$$
+\varepsilon_3^2(3)\begin{bmatrix} & \\ & \\ & \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{bmatrix} \\ & \end{bmatrix} + \varepsilon_2^1(4)\begin{bmatrix} & \\ \begin{bmatrix} & & & & 1 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}.
$$

Замена корней из единицы единицами дает представление (1) матрицы $A(HV)$.

Матрица инцидентности $I^\wedge((OH)^*)$ дуального оргиперграфа формируется в виде (целесообразно сравнить ее с матрицей $I((OH)^*) = (I(OH))^*$, а ее сопряженную $(I^\wedge((OH)^*))^*$ – с матрицей $(I((OH)^*))^* = I(OH)$; далее указано их произведение и, для сравнения, произведение $(I(OH))^* \cdot I(OH))$

I^$((OH)^*) =$

$$= \begin{bmatrix} \delta_1^0(1) & \delta_2^0(2) & \delta_2^0(3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2^1(2) & 0 & \delta_1^0(4) & \delta_1^0(5) & \delta_3^0(6) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3^1(6) & \delta_1^0(7) & \delta_2^0(8) & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2^1(3) & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2^1(8) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_1^0(9) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3^2(6) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

I^$((OH)^*) \cdot (I$^$((OH)^*))^* \cong L$^$((OH)^*) = I$^ $(HA) =$

$$= \begin{bmatrix} 3 & \delta_2^1(2) & 0 & \delta_2^1(3) & 0 & 0 \\ \delta_2^1(2) & 4 & \delta_3^2(6) & 0 & 0 & \delta_3^1(6) \\ 0 & \delta_3^1(6) & 3 & \delta_2^1(8) & 0 & \delta_3^2(6) \\ \delta_2^1(3) & 0 & \delta_2^1(8) & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \delta_3^2(6) & \delta_3^1(6) & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$(I(OH))^* \cdot I(OH) = I((OH)^*) \cdot (I((OH)^*))^* \cong L((OH)^*) = I(HA) =$

$$= \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon_3^2(1) & 0 & \varepsilon_3^1(1) & 0 & 0 \\ \varepsilon_3^1(1) & 4 & \varepsilon_4^1(2) & 0 & 0 & \varepsilon_4^1(2) \\ 0 & \varepsilon_4^3(2) & 3 & \varepsilon_3^1(3) \cdot \varepsilon_2^1(4) & 0 & 1 \\ \varepsilon_3^2(1) & 0 & \varepsilon_2^1(4) \cdot \varepsilon_3^2(3) & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_4^3(2) & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Представление (4) расписывается следующим образом:

I^$(HA) = D$^$(HA) + A$^(HA),

где

$$D\text{^}(HA) = D(HE) = diag(3, 4, 3, 2, 1, 1) = P(hp_1)^0 + ... + P(hp_9)^0 =$$
$$= diag(1, 0, 0, 0, 0, 0) + diag(1, 1, 0, 0, 0, 0) + diag(1, 0, 0, 1, 0, 0) +$$

$$+diag(0,1,0,0,0,0)+diag(0,1,0,0,0,0)+diag(0,1,1,0,0,1)+$$
$$+diag(0,0,1,0,0,0)+diag(0,0,1,1,0,0)+diag(0,0,0,0,1,0),$$

$$A\,\hat{}\,(H\grave{A})=\delta_2^1(2)\begin{bmatrix}\begin{bmatrix} & 1\\ 1 & \end{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}+$$

$$+\delta_2^1(3)\begin{bmatrix}\begin{bmatrix} & & 1\\ & & \\ 1 & & \end{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}+\delta_3^1(6)\begin{bmatrix} & \\ & \begin{bmatrix} & & & & & 1\\ 1 & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & 1 & & & & \end{bmatrix}\end{bmatrix}+$$

$$+\delta_3^2(6)\begin{bmatrix} & \\ & \begin{bmatrix} & 1 & & & & \\ & & & & & 1\\ & & & & & \\ & & & & & \\ 1 & & & & & \end{bmatrix}\end{bmatrix}+\delta_2^1(8)\begin{bmatrix} & & \\ & \begin{bmatrix} & 1\\ 1 & \end{bmatrix} & \\ & & \end{bmatrix}.$$

Замена корней из единицы единицами дает представление (2) матрицы $A(HE)$.

5. Заключение

В литературе имеются указания на то, что принятая за основу в данной работе трактовка гипердуги в оргиперграфе как кортежа, т. е. упорядоченного, нумерованного множества вершин, использовалась, например, в [7] (без использования комплексных корней из единицы для формирования матричных представлений оргиперграфов) как основа для обобщения теории формальных языков, грамматик и автоматов в соответствующем направлении.

Из других известных определений оргиперграфа, отличных от принятого за основу в данной работе, можно указать следующие [3, 9]: гипердугами являются пары подмножеств множества вершин, одно из которых принимается за «начальное», а другое – за «конечное» подмножество гипердуги; в частности, в гипердуге выбрана вершина, принимаемая за «начальную», а остальные принадлежащие этой гипердуге вершины принимаются за «конечные». Согласование предложенной в данной работе трактовки с этими определениями требует дополнительного исследования.

В определении инцидентора нечеткого гиперграфа [10] двухэлементное множество $\{0, 1\}$ заменяется промежутком $[0, 1]$. Так как в практических приложениях нечетких гиперграфов обычно оказываются достаточными некоторые конечные подмножества промежутка $[0, 1]$, то предложенный в данной работе подход, при надлежащей его модификации, может быть распространен на нечеткие гиперграфы.

Лапласианы и их спектры играют важную роль в теории и приложениях графов и орграфов (см., например, [4, 6, 8]). Так, в работе [4] исследовано применение спектров лапласианов взвешенных орграфов в задачах согласования характеристик при децентрализованном управлении многоагентными системами; в основу положена базовая модель распределенного согласования характеристик агентов, непосредственно учитывающая расхождения в значениях характеристик пар (групп из двух) агентов, что позволяет поставить ей в соответствие взвешенный орграф коммуникаций; одним из свойств его лапласиана, определяющих свойства его спектра, является то, что он имеет нулевые строчные суммы; это, в конечном счете, является следствием нулевой суммы квадратных корней из единицы, используемых при формировании матрицы инцидентности орграфа.

Если положить в основу модель, непосредственно учитывающую расхождения в значениях характеристик групп из более чем двух агентов, то ей можно поставить в соответствие взвешенный оргиперграф; при предложенном в данной работе способе формирования его матрицы инцидентности с использованием комплексных корней соответствующих степеней из единицы, имеющих нулевые суммы, сохраняется указанное выше свойство для лапласиана этого оргипергафа. Так как вычисление спектра (вообще говоря, неэрмитова) лапласиана взвешенного оргиперграфа сложнее вычисления спектра (эрмитова) лапласиана невзвешенного оргиперграфа, являющегося носителем данного взвешенного, то представляет интерес установление соответствия как между лапласианами невзвешенного и взвешенного оргиперграфов, так и между их спектрами.

Более полное исследование методов вычисления и возможных применений спектров лапласианов оргиперграфов, определенных предложенным в данной работе способом, требует отдельного рассмотрения.

Литература

1. БУРКОВ В. Н., ЗАЛОЖНЕВ А. Ю., НОВИКОВ Д. А. *Теория графов в управлении организационными системами*. – М.: СИНТЕГ, 2001. – 124 с.
2. ЕМЕЛИЧЕВ В. А., МЕЛЬНИКОВ О. И., САРВАНОВ В. И., ТЫШКЕВИЧ Р. И. *Лекции по теории графов*. – М.: Наука, 1990. – 384 с.
3. ЗЫКОВ А. А. *Гиперграфы* // Успехи математических наук. – 1974. – Т. 29, №6. – С. 89–154.
4. ЧЕБОТАРЕВ П. Ю., АГАЕВ Р. П. *Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов* // Автоматика и телемеханика. – 2009. – №3. – С. 136–151.

5. BERGE C. *Hypergraphs: Combinatorics of Finite Sets.* – Amsterdam: North-Holland, 1989. – 321 p.
6. BIYIKOGLU T., LEYDOLD J., STADLER P. *Laplacian Eigenvectors of Graphs*. – Berlin: Springer, 2007. – 115 p.
7. COURCELLE B. *Graph Rewriting. Handbook of Theoretical Computer Science. Part 2: Formal Models and Semantics.* – NY: North Holland, 1990. – P. 193–242.
8. CVETKOVIC D., DOOB M., SACHS H. *Spectra of Graphs: Theory and Applications*. – Leipzig: Verlag, 1995. – 368 p.
9. GALLO G., LONGO G., NGUYEN S., PALLOTTINO S. *Directed Hypergraphs and Applications* // Discrete Applied Mathematics. – 1993. – №42. – P. 177–201.
10. MORDESON J., NAIR P. *Fuzzy Graphs and Fuzzy Hypergraphs.* – Heidelberg, New York: Physica-Verlag, 2000. – 248 p.

DIHYPERGRAPHS: MATRIX REPRESENTATIONS

Sam L. Blyumin, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Dr. Sc. in Math. & Phys., professor (slb@stu.lipetsk.ru).

Abstract: Incidence matrices construction routine is proposed for dihypergraphs. It uses relevant degrees of unity root to describe hyperpoints and hyperarcs orientation. Valence and adjacency matrices along with Laplacians are also constructed for dihypergraphs and their duals.

Keywords: dihypergraphs, unity root, incidence matrix, valence matrix, adjacency matrix, Laplacian.

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А. Г. Чхартишвили