УДК 517.954.622

ИНТЕГРИРОВАННЫЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРИ РАЗРАБОТКЕ НЕФТЯНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

Ахметзянов А. В.[1]**, Ибрагимов И. И.**[2]**, Ярошенко Е. А.**[3]
(*Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления РАН, Москва*)

Рассмотрены проблемы построения интегрированных (комплексных) математических моделей фильтрации флюидов в пластах и течения газожидкостных смесей (ГЖС, т.е. нефть, газ, вода) в нефтегазосборных сетях трубопроводов. Моделирование такой комплексной системы определяется как процесс вычисления обобщенного решения начально-краевой задачи для системы уравнений, описывающих реальные физические процессы в нефтеносных пластах, стволах (лифтах) скважин и наземных нефтегазосборных сетях трубопроводов. Предложены и исследованы методы решения систем нелинейных алгебраических уравнений, получаемых после дискретной (сеточной) пространственно-временной аппроксимации начально-краевых задач рассматриваемого класса.

Ключевые слова: гидродинамическая модель, фильтрация, газосборная сеть.

[1] *Атлас Валиевич Ахметзянов, кандидат технических наук, заведующий лабораторией (Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495)334-92-11).*
[2] *Ильдар Ильясович Ибрагимов, кандидат технических наук, с.н.с. (Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495) 334-90-30).*
[3] *Егор Александрович Ярошенко, н.с. (Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495) 334-92-11).*

1. Введение

При исследовании технологических процессов добычи и сбора нефти и газа необходимо рассматривать три типа объектов моделирования, технологически связанных между собой. Первый тип – это нефтяные залежи месторождения. Моделирование ведется в трехмерной области (резервуаре месторождения) $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, ограниченной внешним контуром Γ_0 и внутренними контурами Γ_n, $n \subset S$, где S – множество номеров добывающих и нагнетательных скважин. Второй тип – это лифт (ствол) скважины. В лифтах добывающих скважин движение ГЖС происходит от забоя скважины к ее устью, в нагнетательных скважинах, наоборот, движение нагнетаемой жидкости (вода или ее смесь с реагентами) – от устья к забою скважины. Третий объект – это наземные нефтесборная и водораспределительная сети трубопроводов.

Интеграция моделей множества объектов заключается в совместном решении уравнений, описывающих реальные физические процессы и связанных через граничные условия.

2. Постановка задач моделирования

2.1. ОБЪЕКТ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЕРВОГО УРОВНЯ

Первый объект, для которого исходными являются уравнения в частных производных, описывающие пространственно-временные изменения распределения давления, относительных содержаний (насыщенностей) нефти, газа и воды. В частности, для фильтрации несжимаемой водонефтяной смеси при отсутствии влияния капиллярных сил можно записать:

(1) $\operatorname{div}[k_\text{а}(x)(k_\text{н}(\sigma)/\mu_\text{н} + k_\text{в}(\sigma)/\mu_\text{в})\operatorname{grad} p] = 0$,

(2) $\partial\sigma/\partial t = \operatorname{div}[(k_\text{а}(x)k_\text{н}(\sigma)/\mu_\text{н})\operatorname{grad} p]$,

где $x = (x_1, x_2, x_3) \subset \Omega \subset \mathbf{R}^3$; $k_\text{н}$ и $k_\text{в}$ – фазовые проницаемости нефти и воды соответственно; $\mu_\text{н}$ и $\mu_\text{в}$ – динамическая вязкость нефти и воды соответственно; $p(x, t)$, $\sigma(x, t)$ – распределения давления и нефтенасыщенности в пласте в момент времени t.

Граничные и начальные условия, необходимые для решения уравнений (1) и (2), следующие:

(3) $p(x,t) = p_0(t), \;\; x \in \Gamma_0$,

(4) $p(x,t) = p_n(t), \; x \in \Gamma_n, \; n \in S_p$,

где S_p – множество номеров скважин, на которых заданы забойные давления. Второй способ задания граничных условий на забое скважин следующий:

(5) $$\begin{aligned} & p(x,t) = \overline{p}(t), \\ & -\int_{\Gamma_n} k_а(x)(k_н(\sigma)/\mu_н + k_в(\sigma)/\mu_в)(\partial \overline{P}/\partial \nu) ds = q_n(t), \end{aligned}$$

где v – направление внешней нормали к границе Γ_n, $x \in \Gamma_n$, $n \in S_q$ – множество номеров скважин, на которых заданы $q_n(t)$, т. е. заданные отборы или закачки жидкости;

(6) $$\begin{aligned} & \sigma(x,t) = \sigma_0(t), \; x \in \Gamma_0, \\ & \sigma(x,t) = \sigma_{\min}, \; x \in \Gamma_n, \; n \in S_н, \end{aligned}$$

где $S_н$ – множество номеров нагнетательных скважин; σ_{min} – остаточная нефтенасыщенность;

(7) $\sigma(x,t_0) = \sigma_н(x)$,

где $\sigma_н(x)$ – функция начального распределения и нефтенасыщенности.

2.2. ОБЪЕКТ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВТОРОГО УРОВНЯ

Рассмотрим случай подъема ГЖС с помощью погружного насоса. Уравнения изменения давления вдоль лифта определяют модели второго уровня. Ствол лифта скважины от устья до забоя разобьем на два участка $(0, L)$ и $(L, L_{заб})$, где L – условная координата по длине подвески насоса; $L_{заб}$ – координата забоя скважины.

При $0 \le l \le L$ и $L \le l \le L_{заб}$ справедливо дифференциальное уравнение [2]

(8) $$\begin{aligned} & \partial P/\partial l = g(\varphi_н \rho_н + \varphi_в \rho_в + \varphi_г \rho_г)\cos\theta + \\ & \lambda_{см}(\varphi_н \rho_н w_н^2 + \varphi_в \rho_в w_в^2 + \varphi_г \rho_г w_г^2)/2d, \end{aligned}$$

где $\varphi_н$, $\varphi_в$, $\varphi_г$ и $\rho_н$, $\rho_в$, $\rho_г$ – функции истинных объемных долей и плотности нефти, газа и воды в смеси; Θ – угол наклона скважины к вертикали; $w_н = q_н/\varphi_н f$; $w_в = q_в/\varphi_в f$; $w_г = q_г/\varphi_г f$ – истинные скорости нефти, воды и газа; $\lambda_{см}$ – коэффициент гидравлического трения потока, является функцией от числа Рейнольдса смеси $Re_{см}$ [2]; d – гидравлический диаметр колонны скважины; g – ускорение свободного падения. Функции $\varphi_н$, $\varphi_в$, $\varphi_г$ зависят от значений плотностей $\rho_н$, $\rho_в$, $\rho_г$ и относительных содержаний $\sigma_н = q_н/q_{см}$, $\sigma_в = q_в/q_{см}$, $\sigma_г = q_г/q_{см}$, $\sigma_н + \sigma_в + \sigma_г = 1$, поверхностных натяжений $\sigma_{нв}$, $\sigma_{гж}$ на границах раздела нефть–вода и газ–жидкость, вязкостей $\mu_ж$ и $\mu_в$ жидкости и воды [2].

В точке L можно использовать рабочие характеристики насоса

(9) $\Delta p = F(q_{ж\,ср}, q_г)$,

где $q_{ж\,ср}$ – средне-интегральный расход жидкости через насос. В первом приближении можно считать $q_{ж\,ср} = q_ж$; Δp– перепад давления (напор), развиваемый насосом. Обычно зависимости даются в виде набора функций $\Delta p = F_г(q_{ср})$ при постоянных величинах расхода газа $q_г$.

Предположим, что задано граничное условие для модуля второго уровня $p(0) = p_{буф}$. Тогда для получения $p_{заб}$ необходимо решить дифференциальное уравнение (8) на участке $(0, L)$ с граничным условием $p(0) = p_{буф}$, в результате получаем $\overline{p} = p(L)$. В точке L происходит скачок $p^+ = \overline{p} - \Delta p$, где Δp – величина, определяемая (9). Далее на участке $(L, L_{заб})$ решается (8) с граничным условием $p(L) = p^+$.

Таким образом, модули первого и второго уровней в общем случае не могут быть просчитаны независимо друг от друга. Задание граничного условия в виде (4) будет корректным с физической точки зрения в двух случаях.

1. Насос имеет систему регулирования, поддерживающую величину $p_n(t) = const$.

2. На буфере перепад давления может регулироваться штуцером таким образом, что $p_n = const$.

Предположим теперь, что $p_{n\text{буф}} = const$, $n \in S_p$. Запишем решение на выходе модели первого уровня как $q_{\text{н}}(t) = \Phi_p(p_{\text{заб}})$, где Φ_p – некоторый оператор, определяемый уравнениями (1) и (2) и условиями (3)–(7) в момент времени t

(10) $p_{\text{заб}}(t) = \overline{\Phi}_Q(Q_{\text{н}}, Q_{\text{в}}, Q_{\text{г}}, p_{\text{буф}})$,

где $Q_{\text{н}}$ и $P_{\text{заб}}$ – S_p-мерные векторы в эвклидовом пространстве, Φ_Q – оператор, определяемый уравнением (8) и соотношением (9).

Если $n \in S_Q$, то считаем, что всегда выполнено условие (5).

Отметим, что в фиксированный момент времени t при известной функции $\sigma(x, t)$, $q_{n\text{в}} = \varphi_{n\text{в}} q_{\text{н}}(1 - \varphi_{n\text{в}})$, где $\varphi_{n\text{в}}$ – функция обводненности скважины, зависящая только от $\sigma(x_n, t)$; x_n – координаты точки-скважины [2]; $q_{\text{пг}} = F(L, \Gamma)$, где Γ – газовый фактор. (Считаем, что газ в пласте полностью растворен в жидкостях).

Исходя из этого, (9) можно записать в виде:

(11) $p_{\text{заб}}(t) = \Phi_q(q_{\text{ж}}, \varphi_{n\text{в}}, p_{\text{буф}})$

Окончательно запишем

(12) $q_{\text{ж}} = \Phi_p \Phi_q(q_{\text{ж}}, \varphi_{n\text{в}}, p_{\text{буф}})$.

Предположим, что для оператора $\Phi_p\Phi_q$ справедливо неравенство

(13) $|\Phi_p \Phi_q(q''_{\text{ж}}\varphi_{\text{в}}) - \Phi_p \Phi_q(q'_{\text{ж}}\varphi_{\text{в}})| \le K\,|q''_{\text{ж}} - q'_{\text{ж}}|,\ K < 1$,

где $|\Phi_{\text{p}}\Phi_{\text{q}}(q_{\text{ж}}, p_{n\text{буф}})|$ и $|q_{\text{н}}|$– эвклидовы нормы в S_p-мерном пространстве.

Исследование уравнений моделей показало, что в ряде случаев неравенство (13) выполняется.

Справедливость неравенства (13) означает, что оператор $\Phi_p\Phi_q$ сжимающий, и для решения уравнения (12) можно применить метод простой итерации, реализация которого сводится к многократному совместному решению систем уравнений (1), (2), (8), при этом для всех $n \in S_{\text{p}}$ граничное условие будет $p_n(0) = p_{n\text{буф}}$.

2.3. ОБЪЕКТ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРЕТЬЕГО УРОВНЯ

На этом уровне моделируются изменения во времени и пространстве распределений давления и потоков в наземных сетях трубопроводов месторождения. Наземная сеть трубопроводов состоит из системы поддержания пластового давления и нефтегазосборной сети. Обе сети представляют собой планарный граф общего вида. Изменение давления вдоль каждого линейного участка (ветви графа) определяется как решение двухточечной краевой задачи для уравнений типа (8). Кроме того, в каждом узле справедливы уравнения Кирхгофа.

Модель 3-го уровня может быть записана в операторном виде $p_{буф} = \Phi_3(q_ж, \varphi_в, p_{вх})$, где $p_{буф}$, $q_ж$, $p_{вх}$ и $\varphi_в$ – $|S_p|$-мерные векторы буферных (или устьевых) давлений, отборов жидкости, обводненностей и давлений на входе насосов; $\Phi_3(q_ж, \varphi_в, p_{вх})$ – нелинейный оператор, определяемый уравнениями (8), балансовыми соотношениями Кирхгофа и указанными выше граничными условиями.

Модель второго уровня можно записать в виде операторного уравнения $p_{заб} = \Phi_2(q_ж, \varphi_в, p_{буф})$. Оператор $\Phi_2(q_ж, \varphi_в)$ описан выше, при этом считается, что в качестве граничных условий задаются значения $p_{nбуф}$, $n \in S_p$.

Модели первого уровня соответствует операторное уравнение вида

$$q_ж = \Phi_1(p_{заб}),\ q_ж = q_н + q_в .$$

Окончательно можно записать

$$q_ж = \Phi_1\Phi_2\Phi_3(q_ж, \varphi_в) . \quad (14)$$

Таким образом, при каждом фиксированном моменте времени t и известной функции $\varphi_в$ отыскание распределения функции давления эквивалентно решению операторного уравнения (14).

3. Особенности совместного математического моделирования первого и второго уровней

В данном разделе более подробно остановимся на некоторых математических моментах совместного моделирования объектов первого и второго уровней.

Будем считать, что система уравнений (1), (2) решается широко применяемым способом, описанным в [1]. Время моделирования $[t_0, T]$ разбивается на N интервалов длиной $(T - t_0)/N$. На n-ом интервале фиксируется насыщенность $\sigma^{n-1}(x, t^{n-1})$, полученная на предыдущем $(n - 1)$-ом интервале. После этого решается уравнение (1) с приведенными выше граничными условиями и находится функция $p^n(x, t^n)$. После этого решается уравнение (2) при фиксированной функции $p^n(x, t^n)$, приведенных выше граничных условиях и начальном условии $\sigma^n(x, t^n) = \sigma^{n-1}(x, t^{n-1})$. После нахождения функции $\sigma^n(x, t^n)$ все процедуры итеративно продолжаются на $(n + 1)$-ом интервале.

Уравнение (1), участвующее в приведенном выше делении общей модели на уровни, решается путем аппроксимации всех производных на разностной сетке Ω_{ijk} [3]. Обозначим через P_{ijk} разностную функцию $p^n(x, t)$ на сетке Ω_{ijk}, являющуюся разностным решением уравнения (1) зависящим от граничных условий (3)–(5).

(15) $\mathbf{A}_p(\mathbf{P}) = \mathbf{B}_p\mathbf{P}_{\text{зад}}$,

где $\mathbf{A}_p$ и $\mathbf{B}_p$ – линейные операторы, точнее матрицы [3].

Из соотношения (15) следует уравнение

(16) $q_i = \sum p_{j\,\text{заб}} d_{ij} + q_{i0}$.

Здесь и в дальнейшем для простоты изложения вместо $q_{n\text{ж}}$ будем писать q_n.

Модель второго уровня, определяемая уравнением (8) и напорной характеристикой (9), возьмем в упрощенном виде:

(17) $p_{n\,\text{заб}} = p_{n\,\text{буф}} + p_{n\,\text{ст}} + a_n q_n^2 - \left(\Delta p^0_{n\,\text{мех}} - f_n(q_n)(q_n - q_{n0})\right)$,

где $f_n(q_n) \geq 0$; $p_{n\,\text{ст}}$– статический вес жидкости, определяемый первым слагаемым в правой части уравнения (8); $a_n q_n^2$ – член, определяемый потерями на трение; $\Delta p^{0}_{n\,\text{мех}}$ – напор, развиваемый насосом в номинальной точке; q_{n0}– номинальный расход жидкости; $f_n(q_n)$ – функция, определяемая производной от функции напора F (9) и удовлетворяющая условиям:

(18) $\partial F_n / \partial q_n < 0, -\partial F_n / \partial q_n = f_n(q_n)$.

После элементарных преобразований запишем (18) в виде

(19) $p_{n\,\text{заб}} = aq_n^2 + b_n q_n + p_{n0},\ a \geq 0, b_n \geq 0, p_{n0} > 0$.

Из (16) и (19) запишем

(20) $q_i = \sum_j d_{ij}(a_j q_j^2 + b_j q_j + p_{j0}) + q_i^0$

или в векторной форме $q = \Phi(q)$.

Выражение (20) конкретизирует операторное соотношение (12). Для исследования разрешимости уравнений (20) построим уравнение $t = \varphi(t)$, определенное на промежутке $[t_0, t`]$и мажорирующее уравнение (20), т. е.

(21) $\| \Phi(q_0) \| - q_0 \leq \varphi(t_0) - t_0$,

(22) $\| \Phi'(q) \| \leq \varphi'(t)$, если $\| q - q_0 \| \leq t - t_0 \|$.

В качестве t выберем следующую функцию

(23) $t = \left(\sum_{i \in S_p} q_i^2 \right)^{1/2}$,

а в качестве $\varphi(t)$ – следующую зависимость

$$\varphi(t) = A(B - Ct),\ A, B, C > 0,\ t \in [t_0, t'], t' = t_0 + r \leq t_0 + R,$$

R – радиус шара $\|q - q_0\|$, в котором определен оператор Φ.

Определим

$$\| q \| = \max_i | q_i | = \max_i \sum_{ij} | d_{ij}(a_j q_j^2 + b_j q_j + p_j) + q_i^0 |$$

и обозначим

$$\Phi_{0\max} = \| \Phi(q_0) - q_0 \| = \max_i | \sum_{ij} \left(d_{ij}(a_j q_{i0}^2 + b_i q_{j0} + p_{j0}) + q_i^0 \right) - q_{i0} |.$$

Оператор $\Phi`(q)$ определяется уравнениями

$$\partial \Phi_i / \partial q_i = d_{ij} \left(2a_i q_i + b_i + q_i \partial b_j / \partial q_i \right) < 0,\ q_i \geq 0, i = \overline{1, | S_p |};$$

$$\partial \Phi_i / \partial q_j = d_{ij} \left(2a_j q_j + b_j + q_j \partial b_j / \partial q_j \right) > 0,\ q_j \geq 0,\ j \neq i = \overline{1, | S_p |};$$

так как $d_{ii} < 0, d_{ij} > 0, i \neq j, \partial b_i / \partial q_i \geq 0, i = \overline{1, |S_p|}$. Определим $\| \Phi' \|$ как

$$\| \Phi'(q) \| = \max_{ij} \left| \partial \Phi_i / \partial q_j \right|,$$

при $ij = \overline{1, |S_p|}$

$$\| \Phi'(q) \| = \max_{ij} \left| d_{ij} \left(2a_j q_j + b_j + q_j \partial b_j / \partial q_j \right) \right|.$$

При $\| q - q_0 \| = \max_i | q_i - q_{i0} | \leq r$ обозначим $\| \Phi' \|$ как $\Phi'_{\max}$. Если учесть (23), то для соответствующих значений q и t справедливо

$$| t - t_0 | = \left(\sum_{i \in S_p} (q_i - q_{i0})^2 \right)^{1/2} > \max_i | q_i - q_{i0} | = \| q - q_0 \|.$$

Предположим, что уравнение $t = \varphi(t)$ имеет корень $\tilde{t}$, причем $t_0 \leq \tilde{t} \leq t' = t_0 + r$, т. е. $A(B - C\tilde{t}) - 0$ и

(24) $\tilde{t} = B / C$.

Таким образом, для выполнения условий (21) и (22) необходимо, чтобы

$$A(B - Ct_0) - t_0 > \Phi_{0\max},$$

(25) $AC > | \Phi'_{\max} |$

и, кроме того, из (24) следует $t_0 + r \geq B/C$.

Положим $B/C = t_0 + r/2$, тогда из равенства $A/(B - Ct_0) - t_0 = ACr/2 - t_0$ следует, что необходимо $ACr \geq 2(t_0 + \Phi_{max})$ или

(26) $AC \geq 2(t_0 + \Phi_{\max}) / r$.

Постоянные A и C всегда можно выбрать так, чтобы условия (25) и (26) выполнялись. Таким образом, оператор Φ и функция φ обладают всеми свойствами, которые описаны в теореме 1 §3, Гл. XVIII [4].

Следовательно, уравнение $q = \Phi(q)$ имеет решение q^*, к которому сходится последовательность $\{q_n\}$

$$q_{n+1} = \Phi(q_n), n = 0,1,2,\ldots$$

при этом $|q^* - q_0| \leq t^* - t_0$.

Рассмотрим выражение

$\varphi(t') = \varphi(t_0 + r)$ при $B = Ct_0 + Cr/2$,

$\varphi(t') = A(Ct_0 + Cr/2 + C(t_0 + r) < 0$, т. е. $\varphi(t') < t'_0$.

Отсюда следует справедливость теоремы 2 §3, Гл. XVIII [5], и упомянутое выше решение q^* единственно.

Если начальная точка q_0 близка к решению q^*, то эффективным может оказаться метод Ньютона.

Для этого запишем аппроксимированное уравнение (1) в следующем виде

(27) $A_{ijk}(P_{ijk}) = 0, ijk \in \Omega_0$,

(28) $A^s_{ijk}(P_{ijk}) - a_s Q_s^2 - b_s(Q_s)Q_s - P_{s0} = 0, ijk \in \Omega_s, s \in S_p$,

(29) $Q_s = B^s_{ijk}(P_{ijk}) = 0$,

где A_{ijk} и $A^s{}_{ijk}$ – это линейные формы от сеточных значений P_{ijk}, определяемых при конечно-разностной аппроксимации уравнений (1); Ω_0– множество узлов ijk, на которых не задаются граничные условия; Ω_s– множество узлов ijk, на которых задается граничное условие $P_{ijk} = P_{s\,заб}$; $B^s{}_{ijk}$ – линейная форма от P_{ijk}, определяющая расход жидкости в S-ой скважине.

Соотношения (27)–(29) определяют уравнение $P(x) = 0$, фигурирующее в Гл. XVIII [5].

Основное уравнение метода запишем в виде

(30) $P'(X_n)(X_n - X_{n+1}) = P(X_n)$, $X = (X^p, X^Q)$,

где $X^p = P_{ijk}, ijk \in \Omega_0 \cup \Omega_s$, $X^Q = Q_s, s \in S_p$. В силу линейности A_{ijk}, B^s_{ijk}, Q_s и A^s_{ijk}

$A'_{ijk}(X_n)X_n = A_{ijk}(X_n), ijk \in \Omega_0$;

$(A^s_{ijk})'(X_n)X_n = A^s_{ijk}(X_n), s \in S_p$;

$Q'_s(X_n)X_n = Q_s(X_n), s \in S_p$;

$(B^s_{ijk})'(X_n)X_n = B^s_{ijk}(X_n), s \in S_p$;

$A'_{ijk}(X_n)X_{n+1} = A_{ojk}(X_{n+1}), ijk \in \Omega_0 \cup \Omega_s, s \in S_p$;

$$(B_{ijk}^s)'(X_n) = B_{ijk}^s(X_{n+1}).$$

Из приведенных соотношений уравнение (30) можно записать как

$$(31)\quad \begin{gathered} -A_{ijk}(X_{n+1}) = 0, ijk \in \Omega_0; \\ -A_{ijk}^s(X_{n+1}) - 2a_s Q_s(X_n)\big(Q_s(X_n) - Q_s(X_{n+1}) + a_s Q_s^2(X_n) - \\ -\frac{\partial}{\partial Q_s} b_s(Q_s(X_n)Q_s(X_n))\big)\big(Q_s(X_n) - Q_s(X_{n+1})\big) + b_s Q_s(X_n) + P_{s0} = 0, \\ -Q_s(X_{n+1}) + B_{ijk}^s(X_{n+1}) = 0. \end{gathered}$$

Уравнения (31) являются линейными уравнениями относительно переменных (X^P, X^Q).

Учитывая связь $Q_s = B^s(P_{ijk})$, очевидно, что указанные уравнения являются уравнениями относительно переменных $P_{ijk}^{n+1}, ijk \in \Omega_0 \cup \Omega_s$.

Эти уравнения можно записать в виде $AX = b$, где A – адамаровская матрица, поэтому существуют эффективные методы численного решения этого уравнения.

Вернемся к соотношению (17). Запишем его в виде:

$$(32)\quad \begin{gathered} P_{s\,\text{заб}} = P_{s\,\text{буф}} + P_{s\,\text{ст}} + a_s Q_{s0}^2 + 2a_s Q_{s0}(Q_s - Q_{s0}) - \\ -\big(f_{s0} - \big|(\partial f_s / \partial Q_s)_0\big|(Q_s - Q_{s0})\big) = \\ = P_s^0 + (Q_s - Q_{s0})\big(2a_s + (\partial f_s / \partial Q_s)_0\big) = P_s^0 + (Q_s - Q_{s0}) / K_s, \\ P_s^0 = P_{s\,\text{буф}} + P_{s\,\text{ст}} + a_s Q_{s0}^2 - f_{s0}, \quad \partial f_s / \partial Q_s < 0, K_s > 0. \end{gathered}$$

В качестве Q_{s0} можно взять некоторый стационарный режим работы скважины.

Для двумерной модели (1) можно привести следующие расчетные формулы, следующие из уравнений (15)

$$(33)\quad P_{ij} = \frac{(P_{i+1j} + P_{ij+1})K_{ij} + P_{i-1j}K_{i-1j} + P_{ij-1}K_{ij-1}}{2K_{ij} + K_{i-1j} + K_{ij-1}}, ij \in \Omega_0;$$

$$P_{ij} = \frac{P_{i+1j}K_{ij} + P_{i-1j}K_{i-1j} + P_{ij-1}K_{ij-1} + P_s^0 / K_s - Q_{s0} / K_s^2}{1/K_s + 2K_{ij} + K_{i-1j} + K_{ij-1}}, \quad i, j \in \Omega_s. \tag{34}$$

Здесь $K_{ij} = [k_a(k_н/\mu_н + k_в/\mu_в)]_{ij}$ (см. (1)), $\Omega_0 = \Omega \backslash \Omega_s \backslash \Omega_k$, где Ω– множество внутренних узлов; Ω_s – множество внутренних узлов, на которых задано граничное условие (4); Ω_k – множество внутренних узлов, на которых задано граничное условие (5).

$$P_{ij} = P_{ij\,зад},\ ij \in \overline{\Omega}_0,$$

где $\overline{\Omega}_0$ – множество узлов, аппроксимирующих внешний контур Γ_0.

Рассмотрим теперь проблему интерференции скважин. Пусть имеем модель первого уровня. Если на скважинах задавать граничные условия в виде (4), то изменение граничного условия на любой скважине приводит к изменению расходов на всех остальных скважинах. Это максимальный модельный эффект интерференции скважины.

Если на скважинах задаются граничные условия в виде (5), то изменения режима данной скважины не ведет к изменению расходов на других скважинах. Это минимальный модельный эффект интерференции.

Формула (34) наглядно показывает, каким образом параметры скважинного лифта влияют на распределение давления в пласте и, следовательно, на распределение расходов по скважинам. Предположим, что одним из двух описанных выше методов найдено точное решение Q_{s0}, $s \in S_p$. Если на какой либо скважине проведено мероприятие, приводящее априори к «небольшому» изменению Q_{s0}, то «быстрый» расчет новых режимов можно производить по формулам (33), (34), и тем самым оценить интерференцию интересующих нас скважин.

Рассмотрим некоторые особенности, связанные с использованием вышеприведенных формул. Для большей адекватности математической модели и физических процессов фильтрации в районе скважин вводятся специальные призабойные зоны. Описание изменения давления в этих зонах при разностной аппроксимации и учете малости этих зон часто дается в виде

(35) $P_{s\,\text{заб}} = P^s_{ijk} - Q_s / R_s$,

где P^s_{ijk} – давления на узлах разностной сетки, соответствующие s-ой скважине, $s \in S$; R_s– постоянная величина, получаемая при подгонке модельных значений забойных давлений и продуктивностей добывающих скважин к их фактическим значениям.

С учетом формулы (35) формулы (33), (34) выглядят следующим образом

(36) $$P_{ij} = \frac{P_{i+1j}K_{ij} + P_{i-1j}K_{i-1j} + P_{ij+1}K_{ij} + P_{ij-1}K_{ij-1}}{2K_{ij} + K_{i-1j} + K_{ij-1}}, ij \in \Omega_0;$$

(37) $$\begin{aligned} P_{ij} = \big[&P_{i+1j}K_{ij} + P_{i-1j}K_{i-1j} + P_{ij+1}K_{ij} + P_{ij-1}K_{ij-1} \\ &- P^0_s / \left((R_s)^{-1} + (K_s)^{-1}\right) - Q_s / K_s\left((R_s)^{-1} + (K_s)^{-1}\right)\big]\times \\ &\times\left(2K_{ij} + K_{i-1j} + K_{ij-1} + (R_s)^{-1} + (K_s)^{-1}\right)^{-1}, \\ &ij \in \Omega^s; \end{aligned}$$

Формула (37) получена из формул (34) и соотношения

(38) $$P^0_s + (Q_s - Q_s)/K_s = P_{ij} - Q_s / R_s, ij \in \Omega^s ,$$

определенного равенством забойного давления на скважине и полученного из формул (32) и (35). Параметры R_s и K_s, с одной стороны, являются существенными параметрами математической модели, а с другой стороны, их идентификация допускает простые процедуры.

Предположим, что в момент t_n нам известны фактические величины $Q^{\text{ф}}_s$ и $P^{\text{ф}}_{s\,\text{заб}}, s = \overline{1, |S_p|}$. Задавая для математической модели граничные условия в виде (4), определяем величины P_{ij}, $ij \in \Omega_s$.

Из формулы $P^{\text{ф}}_{s\,\text{заб}} = P_{ij} - Q^{\text{ф}}_s / R_s$ определяем $R_s = Q^{\text{ф}}_s / (P_{ij} - P_{s\,\text{заб}})$, а из формулы $P^{\text{ф}}_{s\,\text{заб}} = P^0_s - (Q^{\text{ф}}_s - Q_{s0}) / K_s$ определяем $K_s = (Q^{\text{ф}}_s - Q^0_s)/(P^{\text{ф}}_{s\,\text{заб}} - P^0_s)$.

Для определения R_s и K_s можно воспользоваться также фактическими величинами продуктивностей добывающих скважин, т. е. $PROD_s = \Delta Q_s^{ф} / \Delta P_s^{ф}$.

Вообще говоря, величины R_s и K_s можно считать функциями времени. Предположим, что идентификация функций $R_s(t)$ и $K_s(t)$ происходит на интервале времени $[T, T_k]$. На этом интервале имеем N точек замеров $t_1, t_2, \ldots, t_N$, величины $Q_s(t_1), \ldots, Q_s(t_N)$; $P_s(t_1), \ldots, P_s(t_N)$; $PROD_s(t_1), \ldots, PROD_s(t_N)$; и, соответственно, подсчитанные величины $R_s(t_1), \ldots, R_s(t_N)$; $K_s(t_1), \ldots, K_s(t_N)$.

Выбираем класс функций, в котором будут аппроксимированы полученные значения R_s и K_s, например

$$K_s = A_0 + A_1(t-T) + A_2 e^{A_3(t-T)},$$

$$R_s = B_0 + B_1(t-T) + B_2 e^{B_3(t-T)}.$$

Используя метод наименьших квадратов, находим значения постоянных величин A_i, B_i, $i = 0, 1, 2, 3$.

В заключение рассмотрим один из вариантов построения модели, включающей три уровня.

Предположим, что на линейном участке наземной нефтесборной сети соотношение между давлениями на концах участка и расходом жидкости можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\Delta P_m - \Delta P_n = K_{mn}\Delta Q_{mn}, \\ &\Delta P_m = P_m - P_m^0, \\ &\Delta P_n = P_n - P_n^0, \\ &\Delta Q_{mn} = Q_{mn} - Q_{mn}^0, \end{aligned} \tag{39}$$

где P_m^0 и P_n^0 – некоторые стационарные значения давлений в узлах m и n, полученные в результате измерений или расчетов. Аналогичный смысл имеют величины Q_{mn}^0.

Запишем теперь уравнения модели трех уровней для приращений функций относительно некоторых стационарных значений.

$$\Delta P_{ij} = \frac{\Delta P_{i+1j}K_{ij} + \Delta P_{i-1j}K_{i-1j} + \Delta P_{ij+1}K_{ij} + \Delta P_{ij-1}K_{ij-1}}{2K_{ij} + K_{i-1j} + K_{ij-1}}, ij \in \Omega_0;$$

$$\Delta P_{ij} = \frac{\Delta P_{i+1j} K_{ij} + \Delta P_{i-1j} K_{i-1j} + \Delta P_{ij+1} K_{ij} + \Delta P_{ij-1} K_{ij-1}}{2K_{ij} + K_{i-1j} + K_{ij-1} + (R_s)^{-1} + (K_s)^{-1}} -$$

$$- \frac{\Delta P_{s\,\text{буф}} / \left((R_s)^{-1} + (K_s)^{-1}\right)}{2K_{ij} + K_{i-1j} + K_{ij-1} + (R_s)^{-1} + (K_s)^{-1}}, ij \in \Omega_s;$$

Для каждого внутреннего узла наземной сборной сети справедливо уравнение, вытекающее из уравнений Кирхгофа

(40) $\Delta P_m = \sum\limits_{n \in O_m} \left(P_n / K_{nm}\right) / \sum\limits_{n \in O_m} (1 / K_{nm})$,

где O_m – множество номеров узлов, из которых выходят линейные участки сети в рассматриваемый узел m.

К рассмотренным выше граничным условиям

$$\Delta P_{ij} = \Delta P_{ij}(t), ij \in \overline{\Omega}_0,$$

$$\Delta P_{ij} = \Delta P_k, k \in \Omega \setminus \overline{\Omega}_0 \setminus \Omega_s,$$

добавляются условия $\Delta P_m = \Delta P_{m\,\text{зад}}$, $m \in \Omega_{\text{вых}}$, где $\Omega_{\text{вых}}$ – множество узлов наземной сети, на которых задается условие $\Delta P_m = \Delta P_{m\,\text{зад}}$.

В приведенной линеаризованной трехуровневой модели уязвимым местом является определение коэффициентов K_{mn} в уравнениях (40). Если величины P_m^0 и Q_m^0 не измеряются, их необходимо определить расчетным путем, используя уравнения (8) и уравнения Кирхгофа в каждом внутреннем узле.

4. Заключение

Как следует из вышеизложенного, моделирование на каждом уровне сводится в общем случае к решению системы нелинейных алгебраических уравнений, обладающих определенной спецификой, вытекающей из балансового характера моделируемых физических процессов. Учет второго и третьего уровней приводит как к увеличению размерности модели, так и к появлению новых нелинейностей.

При решении задач моделирования разработки месторождения углеводородов, в соответствии с предложенной трехуровневой моделью, приходится многократно решать системы из сотен тысяч алгебраических уравнений.

Естественно, практическая реализация моделирования всех трех уровней за приемлемое время с применением рассмотренных выше методов решения уравнений возможна только с использованием вычислительных систем с параллельной организацией алгоритмов вычислений.

Литература

1. АЗИЗ Х., СЕТТАРИ Э. *Математическое моделирование пластовых систем.* – М.: Недра, 1982.
2. ГОДУНОВ С. К., РЯБЕНЬКИЙ В. С. *Разностные схемы.* – М.: Наука, 1973.
3. КАНТОРОВИЧ Л. В., АКИЛОВ Г. П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1977.
4. САМАРСКИЙ А. А., НИКОЛАЕВ Е. С. *Методы решения сеточных уравнений.* – М.: Наука, 1972.
5. *Справочное руководство по проектированию разработки и эксплуатации нефтяных месторождений. Добыча нефти* / Под ред. Ш. К. Гиматудинова. – М.: Недра, 1983.

INTEGRATED HYDRODYNAMICAL MODELS OF OIL FIELD DEVELOPMENT PROCESSES

Atlas V. Akhmetzyanov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., (awa@ipu.ru).
Ildar Ibragimov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., (ildar@ipu.ru).
Yegor Yaroshenko, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, (yaryegor@ipu.ru).

Abstract: We consider the problems of development of integrated mathematical models for stratum fluids filtration and gas-liquid *mixtures flows (i.e. oil, natural gas, and water) in oil and gas collecting systems. The modeling process consists of finding the generalized solution for the system of equations that describe real physical processes in oil and gas strata, shafts, and on-ground collecting pipelines. We propose and study the methods to solve nonlinear algebraic equations systems obtained from the space-time approximation of the initial boundary problems of the considered class.*

Keywords: hydrodynamic model, filtration, collecting pipelines.

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А. П. Курдюковым