УДК 519.876.5

ИННОВАЦИИ В ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ: ДИСКРЕТНОСТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ, АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ОБОБЩЕННОЕ ОБРАЩЕНИЕ

С. Л. Блюмин
Профессор Липецкого государственного технического университета, доктор физико-математических наук

Обсуждаются инновационные аспекты современной прикладной математики – алгебраическое моделирование, базовый алгебраический аппарат обобщенного обращения и мотивирующие его дискретностные представления.

Работа поддержана РФФИ, проект № 09-07-97 531-р_центр_а.

Ключевые слова: моделирование, математические структуры, алгебраический аппарат.

Введение

Основой архитектуры современной математики признаны фундаментальные математические структуры – алгебраическая, порядковая и топологическая, причем упоминаемая в первую очередь алгебраическая структура является «скелетом» математики. В прикладной математике ключевым является математическое моделирование – алгебраическое, связанное с вычислительными процессами, порядковое, связанное с оптимизацией, и топологическое, связанное с «непрерывностными» представлениями, основанными на предельном переходе.

Следуя уже общепризнанному представлению о том, что характерными чертами инноваций должны быть не только (и даже, может быть, не столько) новизна, сколько совершенствование, представляется уместным рассмотреть алгебраическое моделирование как инновационный аспект математического моделирования: акцентирование первоочередной роли алгебраического моделирования при формализации прикладных задач позволяет проводить ее более совершенно, не отвлекая на этом этапе внимание исследователя на детали, значение которых проявится позднее. При этом следует учитывать предшествующие алгебраическому моделированию и вытекающие из него другие инновационные аспекты современной прикладной математики. Обсуждение некоторых из них и является целью данной работы.

Исследователи, ориентированные на разработку инновационных математических методов, вплоть до искусственного интеллекта, и компьютерных средств, вплоть до нейрокомпьютеров, и решение с их использованием новых, не поддававшихся решению традиционными методами и средствами, задач математического моделирования, анализа, оптимизации реальных явлений, объектов и процессов, прогнозирования их поведения и принятия решений в условиях неопределенности, часто сталкиваются с необходимостью применения, уже на стадии формализации подобных задач, нового, более общего и гибкого, математического аппарата. Это приводит в конечном счете к необходимости пересмотра самих основ прикладной математики, прежде всего ее алгебраических основ, существенного отхода от давно сложившихся традиций. Особое внимание обращается на необходимость преодоления традиционности «непрерывностного» мышления. Эта необходимость актуализировалась в связи с интенсивным развитием инновационных технологий, в первую очередь компьютерных и информационных.

Побуждают к этому и нанотехнологии – одно из наиболее актуальных и бурно развивающихся направлений в современной науке и технике, которое, наряду с квантовой информатикой и генной инженерией, может существенно повлиять на развитие цивилизации. Особенность нанотехнологий заключается в том, что рассматриваемые процессы и совершаемые действия происходят в нанометровом диапазоне пространственных масштабов; в этом диапазоне размеров «сырьем» являются отдельные атомы, молекулы, молекулярные системы, а не привычные в традиционной технологии микронные или макроскопические объемы материала, содержащие, по крайней мере, миллиарды атомов и молекул. Успех работы в новой перспективной области существенным образом зависит от использования конструктивных алгебраических методов такой альтернативы классическому «непрерывностному» математическому анализу, как квантовый анализ, образно называемый «математическим анализом без взятия пределов». Обращается внимание на необходимость системы подготовки специалистов, учитывающей междисциплинарный характер проблематики.

Следует указать и на многоагентные системы, которые играют всё более заметную роль в проблематике искусственного интеллекта и компьютерных наук. Они состоят из некоторого числа агентов, взаимодействующих между собой и с окружающей средой в течение некоторого числа шагов. Поведение таких систем естественно изучать в соответствии с современными концепциями и подходами к моделированию различных классов дискретных распределенных пространственно-временных систем, актуальных как для технических, технологических, экологических, так и для социально-экономических, организационных, управленческих, интеллектуальных приложений. Примерами многоагентных систем являются организационные системы, распределенные системы искусственного интеллекта, коллективы роботов, распределенные информационно-вычислительные сети, транспортные и электроэнергетические системы и др. Исследуются сетевые, иерархические, динамические и другие многоагентные системы. Для описания структуры связей между агентами используется теория графов, особенно алгебраическая, и принятая в ней их характеризация матрицами смежности, валентностей, инцидентности и лапласианами.

Таким образом, в современной прикладной математике и математическом моделировании укрепляются традиции «дискретностных» представлений. Это еще более повышает роль алгебраического моделирования как первоочередного этапа в математическом моделировании.

Дискретностные представления

Некоторые из указанных выше мотиваций дискретностного подхода обсуждены в работах [1–5]. Представляет интерес остановиться подробнее на установлении некоторых соответствий между структурами математических моделей, используемыми в математической теории автоматического управления дискретно-аргументными системами – ДАС (см. [1] и указанную там литературу) и в теории управления организационными (активными) системами – ОС (см. [3] и указанную там литературу). Дискретно-аргументные системы характеризуются с позиций традиционной математической теории систем как распределенные, а с позиций ОС – как пассивные. Несмотря на это отличие и вытекающие из него различия в методах управления активными и пассивными системами, типовые структуры используемых в указанных теориях моделей проявляют значительное сходство. При этом структура ОС понимается как совокупность устойчивых связей между ее активными элементами (АЭ) и, по смыслу ОС, иерархична, а структура ДАС понимается в обычном смысле математической теории систем как структура описывающих ее уравнений.

Поведение ОС естественно моделировать в дискретном пространстве-времени, то есть относительно дискретного аргумента. Пространственная дискретность обусловлена тем, что состав ОС определяется дискретным (фактически конечным) числом входящих в нее АЭ – агентов, центров, метацентров и т. д., в соответствии с ее иерархической структурой; тем самым ОС является многоагентной. Временная дискретность обусловлена тем, что действия этих АЭ выполняются многократно (фактически – в течение конечного числа связанных периодов функционирования). При этом если АЭ в некоторой ОС действуют последовательно в течение T периодов ее функционирования, то можно условно рассматривать данную ОС как T-уровневую иерархическую, переинтерпретируя временной аргумент (номер периода функционирования) как пространственный (номер уровня иерархии). В теории ДАС этому соответствует формализация пространства и/или времени в виде абстрактного дискретного аргумента (той или иной математической природы).

Простейшей типовой структурой ОС является вырожденная, в которой отсутствуют какие-либо связи между элементами. Эта структура не представляет самостоятельного интереса, она отражает только состав ОС и служит носителем невырожденных структур ОС данного состава. Простейшей невырожденной является базовая структура ОС, состоящей из двух АЭ, центра и агента, то есть двухэлементной и двухуровневой. Многоэлементные многоуровневые ОС могут иметь линейную (в частности, веерную) структуру, иерархия которой подобна дереву, когда каждый АЭ подчинен одному и только одному АЭ более высокого уровня иерархии, или матричную структуру, в которой некоторые АЭ могут быть подчинены одновременно нескольким АЭ, находящимся на одном и том же либо на различных более высоких уровнях иерархии. Известны и другие классификации структур ОС; любая из них может быть отнесена к одной из указанных.

В простейшей нетривиальной структуре многоэлементной многоуровневой ОС на каждом уровне иерархии находится один АЭ. Активный элемент самого нижнего уровня является агентом, следующего – центром, остальные – метацентрами. Такая структура «линейна» в буквальном смысле слова. Пусть АЭ обозначены номерами $s \in S = \{0,1,\ldots,n\}$, где 0 – номер метацентра самого высокого уровня, имеющего «право первого хода», n – номер агента. Пусть $x[s-1]$ – внутренняя (по отношению к ОС) связь между

АЭ с номерами s – 1 и s, $u[s]$ – входная связь между АЭ с номером s и внешней (по отношению к ОС) средой. Пусть $\varphi(s,\cdot,\cdot)$ – действие АЭ с номером s, результатом которого является внутренняя связь $x[s]$ между ним и АЭ с номером $s+1$, а $\Psi(s,\cdot,\cdot)$ – действие АЭ с номером s, результатом которого является выходная связь $y[s]$ между ним и внешней средой. Модель структуры такой ОС записывается в виде

$$x[s]=\varphi(s,x[s-1],u[s]), \quad (1)$$

$$y[s]=\Psi(s,x[s-1],u[s]), \quad (2)$$

соответствующем, с точки зрения ДАС, «одномерной однонаправленной итеративной цепи» [6].

Внутренние связи между АЭ, вообще говоря, являются двусторонними; такой структуре ОС в большей степени соответствуют, с точки зрения ДАС, «одномерные двунаправленные итеративные цепи»

$$x[s]=\varphi(s,x[s-1],x[s+1],u[s]), \quad (3)$$

$$y[s]=\Psi(s,x[s-1],x[s+1],u[s]). \quad (4)$$

Если структура ОС такова, что связи имеются не только между «ближайшими соседями», то соответствующие модели могут быть найдены в детализирующей теорию ДАС теории окрестностных систем [7] (эти замечания могут быть отнесены и к другим рассматриваемым далее простейшим дискретно-аргументным моделям структур ОС).

Простейшей веерной структуре многоэлементной многоуровневой ОС соответствует, с точки зрения ДАС, «двумерная однонаправленная итеративная цепь»

$$x[s_1,s_2]=\varphi\begin{pmatrix} s_1,s_2;x[s_1-1,s_2], \\ x[s_1,s_2-1],u[s_1,s_2] \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$y[s_1,s_2]=\Psi\begin{pmatrix} s_1,s_2;x[s_1-1,s_2], \\ x[s_1,s_2-1],u[s_1,s_2] \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Основной в теории ДАС «метод ассоциированной модели» реализуется в данном случае введением ассоциированного с исходным двумерным аргументом $[s_1,s_2]$ одномерного аргумента $["s"]$, $"s"=s_1+s_2$, который с точки зрения иерархических ОС интерпретируется как номер уровня иерархии, на котором расположены АЭ в количестве $"s"+1$. Подобным же образом могут быть представлены, как модели структур многоэлементных многоуровневых иерархических ОС, «многомерные одно-, дву-, полуторанаправленные итеративные цепи» и их различные варианты и обобщения [6].

Указанные выше типовые структуры ОС отражают их статические характеристики; для описания их изменений во времени целесообразно использовать сетевые структуры. С точки зрения ДАС этому могут соответствовать модели структур, в которых вместо «цепей» используются соответствующие «сети», учитывающие не только распределение АЭ в пространстве, но и их поведение во времени [6]. С другой стороны, динамические организационные системы (ДОС) понимаются как такие ОС, действия АЭ в которых повторяются как минимум несколько раз, в течение некоторого числа связанных периодов функционирования. Простейшее проявление связанности – учет зависимости параметров каждого периода от параметров только предыдущего периода, когда не учитывается (вообще говоря, присутствующее) последействие; такая «неполная» зависимость во многих случаях достаточно хорошо отражает специфику ДОС. В то же время она вполне соответствует традиционному описанию динамики уравнениями «в нормальной форме».

Классическим примером динамической ДАС является клеточный автомат (КА) Дж. фон Неймана (см. [6]), описываемый уравнениями

$$x[t;s_1,s_2]=\varphi\begin{pmatrix} t;s_1,s_2;x[t-1;s_1,s_2], \\ x[t-1;s_1-1,s_2], \\ x[t-1;s_1,s_2-1], \\ x[t-1;s_1+1,s_2], \\ x[t-1;s_1,s_2+1], \\ u[t;s_1,s_2] \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$y[t;s_1,s_2]=\Psi\begin{pmatrix} t;s_1,s_2;x[t-1;s_1,s_2], \\ x[t-1;s_1-1,s_2], \\ x[t-1;s_1,s_2-1], \\ x[t-1;s_1+1,s_2], \\ x[t-1;s_1,s_2+1], \\ u[t;s_1,s_2] \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Первоначально КА были известны и как однородные структуры: в уравнениях (7), (8) отсутствовала явная зависимость действий φ, ψ от пространственных аргументов s_1, s_2 (кроме того, они были стационарны – отсутствовала явная зависимость действий φ, ψ от временного аргумента t, а также автономны – отсутствовали как уравнение (8), так и входная связь $u[t;s_1,s_2]$ с внешней средой в уравнении (7)). В приведенных выше уравнениях (7), (8) от однородности осталось только постоянство окрестности внутренних связей – шаблона соседства «крест» – для всех АЭ той ОС, в качестве модели структуры которой можно было бы предложить КА. Дальнейшее развитие этой модели в направлении учета возможных изменений окрестностей внутренних связей во времени и пространстве, соответствующего концепции сетевых структур ОС, возможно в рамках теории окрестностных систем.

С точки зрения ОС упомянутая выше однородность может быть интерпретирована как «равноправность» входящих в нее АЭ, отсутствие необходимого, в соответствии с присущей ОС иерархичностью, учета их разделения на агентов, центры, метацентры и т. п. Допускающие подобную возможность иерархические КА также могут быть рассмотрены в рамках теории окрестностных систем.

Алгебраическое моделирование

Выше были охарактеризованы дискретностные представления, мотивирующие, алгебраическое моделирование как инновационный аспект математического моделирования. Некоторые из прочих мотиваций таковы.

Источником современной алгебры послужила традиционная числовая арифметика. Между тем в современных приложениях, особенно в задачах искусственного интеллекта, возникают алгебры, отличные от традиционной, причем операндами в них служат как обычные числа, но с нетрадиционными операциями, так и объекты иной природы. Разнообразные примеры таких алгебраических структур приведены в [4].

Классическая математика предлагает приложениям аппарат, основанный на «непрерывностных» традициях; так, наиболее используемыми классами математических моделей являются дифференциальные уравнения. Современные компьютерные технологии оперируют с дискретными моделями, полученными как путем дискретизации непрерывных, так и путем непосредственной формализации реальных объектов (примеры приведены выше); анализ этих дискретных моделей выполняется чаще всего чисто алгебраическими методами.

Нельзя не отметить алгебраический характер и самого математического анализа: используя «непрерывностный» подход для определения, например, производной, дифференциальное исчисление опирается далее на чисто алгебраические правила, что приводит к дифференциальной алгебре как специальной алгебраической структуре. Алгебраические дифференциальные структуры могут рассматриваться как связующее звено между основными структурами алгебры и анализа. Дифференциальная алгебра изучает всё более общие алгебраические дифференциальные структуры – от дифференциальных полей и колец в основополагающих работах до дифференциальных полуколец в сравнительно недавних работах. Определение дифференцирования в алгебраической структуре предполагает наличие в ней двух бинарных операций, связанных с ним аналогами известных правил «производная суммы» и «производная произведения». Естественной областью подобных рассмотрений являются универсальные алгебры с операторами. С другой стороны, укрепляющийся дискретностный подход приводит и к дискретным аналогам классического дифференциального исчисления, например квантовому исчислению (см. [2] и указанную там литературу).

Линейные модели описываются и исследуются методами линейной алгебры; между тем нетрадиционные алгебры позволяют представить в «линейном» виде и некоторые нелинейные модели. Такие возможности предоставляет идемпотентная математика (см. [4] и указанную там литературу). Известны идемпотентные аналоги многих важных, полезных и интересных классических результатов. Например, установлено, что линейности уравнения Шредингера (связанной с принципом суперпозиции в квантовой механике) соответствует линейность уравнений Беллмана и Гамильтона – Якоби над некоторыми идемпотентными полукольцами (что связано с вариационными принципами классической механики). С другой стороны, задачи принятия решений в условиях неопределенности на базе нечеткой логики приводят к матричным уравнениям над некоторыми решетками, формализующими нечеткие множества, записываемым и решаемым при помощи операций, которые лишь весьма условно можно назвать «линейными».

Традиционный подход к анализу нелинейных моделей – их стандартная линеаризация, использующая методы дифференциального исчисления; дальнейшее исследование линеаризованных моделей возможно чисто алгебраическими методами.

Это прежде всего методы исследования и решения матричных уравнений, сводящихся в конечном счете к системам линейных алгебраических уравнений. По сравнению с хорошо известными алгоритмическими методами их точного или приближенного решения (метод Гаусса, метод наименьших квадратов – тоже Гаусса) в ряде случаев предпочтительными оказываются «аналитические» (не в смысле использования в них математического анализа, а в смысле представления результата в аналитическом виде, в виде формулы). Такие возможности предоставляет обобщенное обращение матриц.

Обобщенное обращение

В лекциях Е. Мура 1903–1906 гг. и его работе 1920 г. по матричной алгебре было предложено обобщение понятия обратной на вырожденные и вообще прямоугольные числовые матрицы, истоки которого прослеживаются в ранних работах Д. Гильберта, И. Фредгольма, А. Гурвица и др. по интегральным и дифференциальным операторам. В работах Р. Пенроуза и С. Рао (1955) было указано определяющее соотношение обобщенных обратных матриц, а именно: матрица G является обобщенной обратной к матрице A, если выполняется соотношение $AGA = A$. В работе Дж. фон Неймана 1936 г. было введено понятие регулярного элемента кольца R, определяемого тем же соотношением.

Впоследствии стало ясно, что естественной областью определения регулярности является более «бедная» алгебраическая структура – полугруппа S, то есть группоид (множество с одной бинарной операцией ·, знак которой обычно опускается, как в случае обычного умножения), в котором выполняется аксиома ассоциативности $(ab)c = a(bc)$ для всех a, b, c из S: элемент a из S регулярен, если существует элемент g из S такой, что $aga = a$; полугруппа регулярна, если каждый ее элемент регулярен. Ближайшей более «богатой» алгебраической структурой является полукольцо SR – множество с еще одной ассоциативной бинарной операцией +, в котором выполняется аксиома дистрибутивности $a(b+c) = ab + ac$. Уже здесь следует подчеркнуть, что, несмотря на заимствованные из традиционной алгебры обозначения операций, они могут иметь, особенно в современных приложениях, совершенно необычный смысл и интерпретацию, примеры чего уже упоминались. В полукольце, наряду с введенным выше понятием «мультипликативной» регулярности, может быть точно так же введено понятие «аддитивной» регулярности с заменой · на +. В регулярном полукольце все элементы регулярны; простейшими традиционными примерами являются числовое поле и булева алгебра, менее традиционными» – идемпотентные полукольца: из $aa = a$ следует $aaa = a$, так что в качестве g может быть взят сам элемент a. Развиваемая над регулярными полукольцами регулярная математика [4] охватывает с единых позиций вычислительную, оптимизационную, компьютерную, идемпотентную математики. В рамках регулярной математики могут быть получены уже не аналоги, а обобщения результатов как классической, так и идемпотентной математики. Регулярность существенно используется при исследовании и решении линейных уравнений, причем линейность может трактоваться в новых и подчас весьма неожиданных смыслах, важных для разнообразных и весьма далеких друг от друга прикладных областей.

Особое прикладное значение для алгебраического моделирования имеет специальный вид обобщенного обращения – псевдообращение, которое в классе числовых матриц определяется соотношениями Мура–Пенроуза:

$$AGA = A, GAG = G, (AG)^T = AG, (GA)^T = GA .$$

Его значение достаточно проиллюстрировать на примере одной из важнейших задач фундаментальной и прикладной математики – задачи исследования и решения линейного матричного уравнения

$$AX = B .$$

Критерий его разрешимости записывается в виде $AGB = B$, и если он выполняется, то общее решение записывается в аналитическом виде

$$X = GB + Y - GAY ,$$

выгодно отличающемся от известных алгоритмических методов, удобном и эффективном для последующего исследования; здесь в качестве G может быть использована любая обобщенная обратная к A матрица; матрица Y тех же размеров, что и X, произвольна.

Еще более важно то, что при невыполнении критерия, то есть в случае несовместного, переопределенного матричного уравнения, та же формула, с использованием именно псевдообратной матрицы, дает общее псевдорешение уравнения, минимизирующее матричную норму невязки между левой и правой его частями, реализуя вариационный подход к решению неразрешимых уравнений и, в случае фробениусовой матричной нормы, метод наименьших квадратов. Это является примером того, как алгебраические методы могут давать решение оптимизационных задач, что весьма существенно для алгебраического моделирования, в частности для решения задач параметрической идентификации математических моделей.

Заключение

Алгебраическое моделирование, его базовый алгебраический аппарат – обобщенное обращение – и его важнейший частный случай – псевдообращение, в том числе взвешенное, тесно связанное с задачами о наименьших квадратах – используются при исследовании и решении матричных уравнений с приложениями в задачах математического моделирования [1, 5, 6], современных информационных технологий [2], математической теории систем [3, 7, 8], искусственного интеллекта [4], принятия решений в условиях неопределенности и обучения искусственных нейронных сетей [9], оптимального управления и адаптивной нелинейной идентификации [10].

Алгебраическое моделирование имеет реальные перспективы использования в учебном процессе образовательных учреждений высшего профессионального образования как база инновационных образовательных технологий для наукоемких направлений подготовки и специальностей. Имеется опыт использования алгебраического моделирования в создании инновационных технологий формирования креативных способностей одаренной молодежи к математическому научному творчеству [11].

Формализация понятия инновации и теоретическое обоснование инновационной деятельности на основе математической теории общих систем рассмотрены в работе [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Блюмин С. Л. Дискретность против непрерывности при системном моделировании во времени и/или пространстве / С. Л. Блюмин // Системы управления и информационные технологии. – 2004. – № 1 (13). – С. 4–9.
2. Блюмин С. Л. Дискретность против непрерывности в информационных технологиях: квантовое исчисление и его альтернативы / С. Л. Блюмин // Системы управления и информационные технологии. – 2008. – № 1.2 (31). – С. 217–221.
3. Блюмин С. Л. Мультиагентные системы: проблемы и протоколы согласия, псевдообращение лапласианов графов / С. Л. Блюмин // Системы управления и информационные технологии. – 2007. – № 2 (28). – С. 4–9.
4. Блюмин С. Л. Математические проблемы искусственного интеллекта: регулярность по Дж. фон Нейману в линейной и «линейной» алгебрах / С. Л. Блюмин // Системы управления и информационные технологии. – 2003. – № 1–2 (12). – С. 90–94.
5. Блюмин С. Л. Инновации в содержании образовательных дисциплин: математическое моделирование приращений величин / С. Л. Блюмин // Инновационный Вестник Регион. – 2008. – № 4 (14). – С. 68–72.
6. Блюмин С. Л. Дискретное моделирование систем автоматизации и управления / С. Л. Блюмин, А. М. Корнеев. – Липецк : ЛЭГИ, 2005. – 124 с.
7. Блюмин С. Л. Окрестностные системы / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин. – Липецк : ЛЭГИ, 2005. – 132 с.
8. Блюмин С. Л. Метод назначаемых траекторий и обобщенное обращение в задачах управления линейными матричными системами / С. Л. Блюмин, С. П. Миловидов. – Липецк : ЛГТУ, 1994. – 76 с.
9. Блюмин С. Л. Нечеткая логика: алгебраические основы и приложения / С. Л. Блюмин, И. А. Шуйкова, П. В. Сараев, И. В. Черпаков. – Липецк : Изд-во ЛЭГИ, 2002. – 111 с.
10. Погодаев А. К. Адаптация и оптимизация в системах автоматизации и управления / А. К. Погодаев, С. Л. Блюмин. – Липецк : Изд-во ЛЭГИ, 2003. – 127 с.
11. Блюмин С. Л. Инновационные технологии формирования креативных способностей одаренной молодежи к математическому научному творчеству / С. Л. Блюмин // Инновационный Вестник Регион. – 2005. – № 1. – С. 22–27.
12. Блюмин С. Л. Инновации: формализация в математической теории общих систем / С. Л. Блюмин // Инновационный Вестник Регион. – 2007. – № 2 (8). – С. 9–11.

INNOVATIONS IN THE APPLIED MATHEMATICS: DISCONTINUOUS REPRESENTATIONS, THE ALGEBRAIC MODELLING, THE GENERALIZED INVERSE

S. L. Blumin

Innovative aspects of modern applied mathematics are discussed – algebraic modelling, base for it algebraic tool of the generalized inverse and discontinuous representations.

Key words: modeling, mathematical structures, algebraic tool.