приведены графики зависимости вероятности отказа системы от числа элементов для приближённого значения и точного, определяемого как: $Q = 1-\mu/(\lambda+\mu)^{n}$. Из графиков видно, что с ростом n, отклонение приближённого значения от точного резко уменьшается. Были вычислены значения ошибки для n>3, результаты показали, что для n=4, ошибка составляет порядка $10^{-6}$, для n=5 – $10^{-7}$, для n=7 – $10^{-10}$, для n=10 – $^{-14}$.

Таким образом, полученные формулы могут быть весьма эффективны при расчёте надёжности сложных систем, даже для небольших значений n результат получается весьма точным, а время расчётов сокращается в разы. Преимущество предлагаемого подхода в том, что он позволяет легко выделить промежуточные состояния, например, состояния частичного отказа. В случае необходимости можно рассмотреть различные схемы восстановления системы, определить оптимальные варианты профилактического обслуживания системы и резервирования.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ивлев, В.В. Надёжность систем из однотипных элементов [Текст] / В.В. Ивлев. – М.: Радио и связь, 1986. – 96с.
2. Козлов, Б. Справочник по расчету надежности [Текст] / Б. Козлов, И. Ушаков. – М.: Сов. радио, 1975.
3. Левин, Б.Р. Элементы теории надёжности. [Текст] / Б.Р. Левин. – М.: МЭИС, 1969. – 144 с.
4. Черкесов, Г.Н. Надёжность аппаратно-программных комплеков. [Текст] /Н.Г. Черкесов. – Спб.: Питер, 2005.
5. Barlow, R.E. Mathematical theory of reliability [Text]/ R.E. Barlow, F. Proschan. – SIAM, 1996.
6. Yonghuan, Cao. System availability with non-exponentially distributed outages [Text] / Cao Yonghuan [et al] //IEEE Transactions on reliability. – 2002. №2. - С.193-198
7. Koren, Israel. Fault tolerant systems. [Text]/ Israel Koren, C. Mani Krishna. – Elsevier. – 2007. - 378 p.
8. Limnios, N. Processes and Reliability. [Text]/ N. Limnios, G. Semi-Markov Oprisan– A Birkhäuser book, 2001.
9. Way, Kuo Way. Optimal reliability modeling: principles and applications. [Text]/ Way Kuo, Ming J. Zuo. – NJ: John Wiley & Sons, 2003.

Сведения об авторах
Калимулина Эльмира Юрьевна, аспирант Московского технического университета связи и информатики
E-mail: elmira-yu-k@yandex.ru

УДК 512.8+621.73

# АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ*

С.Л. Блюмин

Липецкий государственный технический университет

Рассмотрены некоторые свойства дифференцирования в произвольном бигруппоиде с двумя бинарными операциями, не обладающими никакими свойствами и никак не связанными между собой непосредственно, кроме косвенной связи, определяемой фиксированием идемпотента относительно одной из операций. Указаны области приложения.

Современные методы фундаментальной и прикладной математики находят все более широкое применение при построении математических моделей технологических и сопровождающих процессов в разнообразных предметных областях, от искусственного

*Работа поддержана РФФИ, проект № 09-07-97531-р_центр_а

интеллекта, включая проблемы принятия решений в условиях неопределенности на основе нечеткой логики (см., например, [1, 2]), до систем автоматизации и управления в конкретных производствах, включая металлургическое производство и его экономику (см., например, [3 – 7]). Используются методы как прикладной алгебры, так и прикладного анализа.

Алгебраические дифференциальные структуры могут рассматриваться как связующее звено между основными структурами алгебры и анализа. Дифференциальная алгебра изучает все более общие алгебраические дифференциальные структуры – от дифференциальных полей и колец в основополагающих работах (см., например, [8]) до дифференциальных полуколец в сравнительно недавних работах (см., например, [9, 10]). Определение дифференцирования в алгебраической структуре предполагает наличие в ней двух бинарных операций, связанных с ним аналогами известных правил: «производная суммы» и «производная произведения». Естественной областью подобных рассмотрений являются универсальные алгебры с операторами [11], то есть элементы многообразия $(S,\Omega,\Lambda,\Sigma)$, где S – некоторое множество; $\Omega$ - некоторая система операций над элементами этого множества; $\Lambda$ - некоторая система $\Omega$-тождеств; $\Sigma$ - некоторая система операторов, действующих как эндоморфизмы относительно некоторых операций и, возможно, связанных иными условиями с остальными операциями. Именно такие «иные условия» рассматриваются ниже в простейшем случае многообразия $(S,\{\bullet,\blacklozenge\},\varnothing,\{\alpha\})$ бигруппоидов ВГ=$<S,\bullet,\blacklozenge>$, где S – некоторое множество с заданными в нем, вообще говоря, не обладающими никакими свойствами и никак не связанными между собой бинарными операциями $\bullet$ и $\blacklozenge$, то есть отображениями $\bullet$: $S\times S\to S$ и $\blacklozenge$: $S\times S\to S$, а также с действующим в нем оператором $\alpha$, то есть отображением $\alpha:S\to S$. Множество S является носителем бигруппоида ВГ, Supp[ВГ]=S. В бигруппоиде ВГ определены два частных группоида $\Gamma_\bullet=<S,\bullet>$ и $\Gamma_\blacklozenge=<S,\blacklozenge>$ с тем же носителем. Определены произведения $\Gamma_\bullet\bullet\Gamma_\bullet=\{s\bullet t,\ s,t\in S\}$ и $\Gamma_\blacklozenge\blacklozenge\Gamma_\blacklozenge=\{s\blacklozenge t,\ s,t\in S\}$; их носители являются, вообще говоря, некоторыми подмножествами S, $\mathrm{Supp}[\Gamma_\bullet\bullet\Gamma_\bullet]\subseteq S$, $\mathrm{Supp}[\Gamma_\blacklozenge\blacklozenge\Gamma_\blacklozenge]\subseteq S$; в каждом из них, кроме основной для него, определена и вторая операция, но результат ее применения может ему не принадлежать, будучи элементом его дополнения в S; тем самым определены два частичных группоида $<<\mathrm{Supp}[\Gamma_\bullet\bullet\Gamma_\bullet],\blacklozenge>>$ и $<<\mathrm{Supp}[\Gamma_\blacklozenge\blacklozenge\Gamma_\blacklozenge],\bullet>>$. Для некоторых их элементов, например, идемпотентов относительно второй операции (см. ниже), результат ее применения не выводит за пределы носителя.

Условие эндоморфизма для оператора $\alpha$ относительно операции $\bullet$ имеет вид (далее обозначения и терминология в основном следуют [11])

$$(1)\quad (\forall s,t\in S)\{(s\bullet t)\alpha=s\alpha\bullet t\alpha\}.$$

Если оно же выполнено и относительно операции $\blacklozenge$,

$$(2)\quad (\forall s,t\in S)\{(s\blacklozenge t)\alpha=(s\alpha)\blacklozenge(t\alpha)\},$$

то ВГ является бигруппоидом с оператором $\alpha$.

Если наряду с (1) выполнено условие

$$(3)\quad (\forall s,t\in S)\{(s\blacklozenge t)\alpha=(s\alpha)\blacklozenge t=s\blacklozenge(t\alpha)\},$$

то $\alpha$ коммутирует с операцией $\blacklozenge$, а ВГ является линейным бигруппоидом относительно $\alpha$.

Если наряду с (1) выполнено условие

$$(4)\quad (\forall s,t\in S)\{(s\blacklozenge t)\alpha=((s\alpha)\blacklozenge t)\bullet(s\blacklozenge(t\alpha))\},$$

то $\alpha$ является дифференцированием, а ВГ - дифференциальным бигруппоидом относительно $\alpha$. Следует отметить, что условия (1) – (4), вообще говоря, могут выполняться или не выполняться независимо друг от друга; некоторые их взаимосвязи в специальных случаях указаны ниже.

Тождественный автоморфизм $\iota$, $(\forall s\in S)\{s\iota=s\}$, очевидно, удовлетворяет условиям (1) – (3); условию же (4) он удовлетворяет, то есть является дифференцированием, при выполнении в ВГ условия

$$(5)\quad (\forall s,t\in S)\{s\blacklozenge t=(s\blacklozenge t)\iota= =((s\iota)\blacklozenge t)\bullet(s\blacklozenge(t\iota))=(s\blacklozenge t)\bullet(s\blacklozenge t)\}.$$

Элемент $s\in S$ является идемпотентом относительно операции $\bullet$, если $s\bullet s=s$. Частный группоид $\Gamma_{\bullet}$ является группоидом, идемпотентным относительно своей основной операции $\bullet$, если каждый его элемент является идемпотентом относительно операции $\bullet$. Частичный группоид $\langle\langle Supp[\Gamma_{\blacklozenge}\blacklozenge\Gamma_{\blacklozenge}],\bullet\rangle\rangle$ является частичным группоидом, идемпотентным относительно второй операции $\bullet$, если каждый его элемент является идемпотентом относительно операции $\bullet$, то есть $s\blacklozenge t=(s\blacklozenge t)\bullet(s\blacklozenge t)$, $s,t\in S$.

Условие (5) означает, таким образом, что тождественный автоморфизм является дифференцированием в бигруппоиде $B\Gamma^{*}$, определяемом тем условием, что любой результат применения операции $\blacklozenge$ является идемпотентом относительно операции $\bullet$, то есть тем условием, что частичный группоид $\langle\langle Supp[\Gamma_{\blacklozenge}\blacklozenge\Gamma_{\blacklozenge}],\bullet\rangle\rangle$ является частичным группоидом, идемпотентным относительно операции $\bullet$. Примером может служить бигруппоид $N^{*}_{\bullet,\blacklozenge}=\langle N,\bullet,\blacklozenge\rangle$, где $N=\{0,1,2,\ldots\}$ – множество натуральных чисел, а операции $\bullet,\blacklozenge$ определяются через обычные арифметические операции $+$ , $\times$ следующим образом:

$$(\forall m,n\in N)\{m\bullet n=[m/2]+[n/2], m\blacklozenge n=2\cdot m\cdot n\}$$

здесь $[m/2]$ – целая часть рационального числа $m/2$); действительно, в нем любой результат применения операции $\blacklozenge$ является четным числом, а четные числа, и только они, являются идемпотентами относительно операции $\bullet$.

В бигруппоиде $B\Gamma^{*}$ любой оператор $\alpha$, удовлетворяющий условиям (1) и (3), удовлетворяет и условию (4), то есть является дифференцированием:

$$(\forall s,t\in S)\{(s\blacklozenge t)\alpha=((s\blacklozenge t)\bullet(s\blacklozenge t))\alpha= =((s\blacklozenge t)\alpha)\bullet((s\blacklozenge t)\alpha)=((s\alpha)\blacklozenge t)\bullet(s\blacklozenge(t\alpha))\}.$$

В бигруппоиде $N^{*}_{\bullet,\blacklozenge}$ операторы $\alpha_k$ вида $m\alpha_k=m\cdot k$ удовлетворяют условию (1) только при $k=0$ и $k=1$.

Пусть $\sigma\in S$ – некоторый фиксированный идемпотент относительно операции $\bullet$, $\sigma\bullet\sigma=\sigma$, например, нейтральный относительно этой операции элемент, $(\forall s\in S)\{s\bullet\sigma=\sigma\bullet s=s\}$, являющийся в то же время абсорбентом относительно операции $\blacklozenge$, $(\forall s\in S)\{s\blacklozenge\sigma=\sigma\blacklozenge s=\sigma\}$. Тогда $\sigma$-оператор $\alpha^{\sigma}$, определяемый условием $(\forall s\in S)\{s\alpha^{\sigma}=\sigma\}$, так что и $(\forall s,t\in S)\{(s\bullet t)\alpha^{\sigma}=\sigma,\ (s\blacklozenge t)\alpha^{\sigma}=\sigma\}$, является дифференцированием:

$$(\forall s,t\in S)\{(s\bullet t)\alpha^{\sigma}=\sigma=\sigma\bullet\sigma=s\alpha^{\sigma}\bullet t\alpha^{\sigma}\},$$
$$(\forall s,t\in S)\{(s\blacklozenge t)\alpha^{\sigma}=\sigma=\sigma\bullet\sigma= =(\sigma\blacklozenge t)\bullet(s\blacklozenge\sigma)=((s\alpha^{\sigma})\blacklozenge t)\bullet(s\blacklozenge(t\alpha^{\sigma}))\}.$$

Пусть для идемпотента $\sigma$ относительно операции $\bullet$ бигруппоид $B\Gamma^{\langle\sigma\rangle}$ определяется тем условием, что $(\forall s,t\in S)\{s\blacklozenge t=\sigma\}$, то есть является бигруппоидом с $\langle\sigma\rangle$-операцией $\blacklozenge$. В этом случае $Supp[\Gamma_{\blacklozenge}\blacklozenge\Gamma_{\blacklozenge}]$ сводится к одноэлементному множеству $\{\sigma\}$, $\langle\langle Supp[\Gamma_{\blacklozenge}\blacklozenge\Gamma_{\blacklozenge}],\bullet\rangle\rangle$ сводится к одноэлементному группоиду $\langle\{\sigma\},\bullet\rangle$, идемпотентному относительно операции $\bullet$, и в силу ранее сказанного тождественный автоморфизм является дифференцированием. Кроме того, для любого оператора $\alpha$ выполнены условия $(\forall s,t\in S)\{(s\alpha)\blacklozenge t=\sigma,\ s\blacklozenge(t\alpha)=\sigma\}$, так что $((s\alpha)\blacklozenge t)\bullet(s\blacklozenge(t\alpha))=\sigma\bullet\sigma=\sigma$; для $\langle\sigma\rangle$-оператора же $\alpha^{\langle\sigma\rangle}$, определяемого более слабым, чем выше, условием $\sigma\alpha^{\langle\sigma\rangle}=\sigma$, выполняется и условие (4):

$$(\forall s,t\in S)\{(s\blacklozenge t)\alpha^{\langle\sigma\rangle}=\sigma\alpha^{\langle\sigma\rangle}=\sigma= =\sigma\bullet\sigma=((s\alpha^{\langle\sigma\rangle})\blacklozenge t)\bullet(s\blacklozenge(t\alpha^{\langle\sigma\rangle}))\},$$

причем независимо от условия (1). Таким образом, в бигруппоиде $B\Gamma^{\langle\sigma\rangle}$ с $\langle\sigma\rangle$-операцией $\blacklozenge$ любой $\langle\sigma\rangle$-оператор $\alpha^{\langle\sigma\rangle}$, удовлетворяющий условию (1), является дифференцированием. Следует отметить, что для любого оператора $\alpha$ при выполнении условия (1) элемент $\tau=\sigma\alpha$, как и $\sigma$, является идемпотентом относительно операции $\bullet$: $\tau=\sigma\alpha=(\sigma\bullet\sigma)\alpha=\sigma\alpha\bullet\sigma\alpha=\tau\bullet\tau$; для $\langle\sigma\rangle$-оператора же $\alpha^{\langle\sigma\rangle}$ эти элементы совпадают, $\tau=\sigma$. В частности, в бигруппоиде $B\Gamma_1^{\langle\sigma\rangle}$ с единственным идемпотентом $\sigma$ относительно операции $\bullet$ это выполняется для любого эндоморфизма $\alpha$ относительно операции $\bullet$, так что он является $<\sigma>$-оператором.

Последнее верно, если в бигруппоиде ВГ операция $\bullet$ является групповой, обозначаемой аддитивно через +; в этом случае единственным аддитивным идемпотентом является нейтральный элемент этой группы – нуль 0, $\sigma=0$; $ВГ^{<0>}= ВГ_1^{<0>}$ определяется условием $(\forall s,t\in S)\{s\blacklozenge t=0\}$ и является бигруппоидом с нулевой операцией $\blacklozenge$; любой аддитивный эндоморфизм $\alpha$ является и $<0>$-оператором $\alpha^{<0>}$, $0\alpha^{<0>}=0$. Поэтому любой аддитивный эндоморфизм бигруппоида с нулевой операцией $\blacklozenge$ является дифференцированием. В частности, если ВГ является кольцом R с обозначаемой мультипликативно через $\cdot$ операцией $\blacklozenge$, то изложенное реализуется в кольце с нулевым умножением, простейшим примером которого является подкольцо PD «чисто дуальных» чисел $y\varepsilon$ кольца D дуальных чисел $x+y\varepsilon$, где x,y - действительные числа, $\varepsilon$ - дуальная единица, $\varepsilon^2=0$. В любом прямом или косом тензорном произведении колец (см., например, [12]), в число сомножителей которого входят кольца D, содержится подкольцо с нулевым умножением; таковы, например, некоторые алгебры Клиффорда, в частности, алгебры Грассмана [12]. Над алгебрами Клиффорда развивается клиффордов анализ, являющийся широким обобщением классического комплексного анализа (см., например, [13]). Исходные определения дальнейшего его обобщения в контексте данной работы могут быть сформулированы следующим образом (ниже некоторые обозначения заменены на более привычные для этой области).

Пусть F – множество отображений f: $ВГ\rightarrow ВГ$, то есть функций $t=f(s)$, $t,s\in S$. С поэлементными операциями (обозначаемыми так же, как в ВГ), $f\bullet g$, $f\blacklozenge g$, $f,g\in F$, так что $(f\bullet g)(s)=f(s)\bullet g(s)$, $(f\blacklozenge g)(s)=f(s)\blacklozenge g(s)$, $s\in S$, множество F также является бигруппоидом. Пусть оператор D является дифференцированием в F, так что

$$D(f\bullet g)=D(f)\bullet D(g),$$
$$D(f\blacklozenge g)=((D(f)\blacklozenge g)\bullet(f\blacklozenge D(g)),\ f,g\in F.$$

Пусть, как и ранее, $\sigma\in S$ – идемпотент относительно операции $\bullet$ и абсорбент относительно операции $\blacklozenge$, но D не предполагается $\sigma$-оператором.

Функция $f\in F$ определяется как аналитическая, если $D(f)=\sigma$. Подмножество $A\subseteq F$ аналитических функций является подбигруппоидом бигруппоида F, так как замкнуто относительно операций $\bullet,\blacklozenge$ в силу определяющих свойств D и $\sigma$:

$$D(f\bullet g)=D(f)\bullet D(g)=\sigma\bullet\sigma=\sigma,$$
$$(f\blacklozenge g)=((D(f)\blacklozenge g)\bullet(f\blacklozenge D(g))=$$
$$=(\sigma\blacklozenge g)\bullet(f\blacklozenge\sigma)=\sigma\bullet\sigma=\sigma.$$

По мнению авторов [13], наиболее важным в классическом комплексном анализе является тот факт, что сам аргумент, то есть тождественное отображение, и его степени являются аналитическими функциями; действительно, если ВГ=С – поле комплексных чисел $z=x+yi$, $i^2=-1$, так что $\sigma=0$, а $D=(\partial/\partial x)+(\partial/\partial y)i$ – оператор Коши-Римана, то он является дифференцированием, аргумент аналитичен в силу $Dz=0$, а его степени аналитичны в силу свойства (4). Однако не для всех алгебр Клиффорда аргумент аналитичен [14]. Тем более это верно для более общих бигруппоидов.

Алгебры С и D комплексных и дуальных чисел, а также алгебра В двойных чисел $x+ye$, $e^2=1$, являются каноническими представителями семейства алгебр $K_{pq}$ параметрических, с параметрами p, q, комплексных чисел $x+ya$, $a^2=p+qa$. Развиваемый на них параметрический комплексный анализ, именно благодаря наличию параметров p, q, обладает большей гибкостью по сравнению с классическим комплексным анализом и менее известными, но имеющими определенные приложения дуальным и двойным анализами. На возможности приложения параметрического комплексного анализа к моделированию конкретных технологических процессов в металлургическом производстве, в частности, процесса прокатки и родственных ему процессов, указано в [15].

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Блюмин, С.Л. Модели и методы принятия решений в условиях неопределенности [Текст]/ С.Л. Блюмин, И.А. Шуйкова. – Липецк: ЛЭГИ, 2001. – 139 с.

2. Блюмин, С.Л. Нечеткая логика: алгебраические основы и приложения [Текст] / С.Л. Блюмин [и др.]. – Липецк: ЛЭГИ, 2002. – 111 с.

3. Погодаев, А.К. Адаптация и оптимизация в системах автоматизации и управления [Текст] / А.К. Погодаев, С.Л. Блюмин – Липецк: ЛЭГИ, 2003. – 127 с.

4. Блюмин, С.Л. Экономический факторный анализ [Текст] / С.Л. Блюмин, В.Ф.Суханов, С.В. Чеботарев. – Липецк: ЛЭГИ, 2004. – 148 с.

5. Блюмин, С.Л. Окрестностные системы [Текст] / С.Л. Блюмин, А.М. Шмырин. – Липецк: ЛЭГИ, 2005. – 132 с.

6. Блюмин, С.Л. Дискретное моделирование систем автоматизации и управления [Текст] / С.Л. Блюмин, А.М. Корнеев. – Липецк: ЛЭГИ, 2005. – 124 с.

7. Кудинов, Ю.И. Нечеткая обучаемая система управления технологическим процессом в прокатном производстве [Текст] / Ю.И. Кудинов [и др.].– Липецк: ЛЭГИ, 2006. – 144 с.

8. Ritt, J. Differential Algebra. [Text] / J. Ritt – NY: AMS, 1950. – 185 p.

9. Carroll, M. The Natural Chain of Binary Arithmetic Operations and Generalized Derivatives [Text] / M. Carroll – ArXiv: math. HO/0112050, 2001. – 17 p.

10. Novotna, J. Orbital Structure of the Derivation on a Certain Semiring of Nonsingular Complex Matrices [Text] /J. Novotna, J. Chvalina // Acta Univ. M. Belii Math. 2004. № 11. – P. 45-54.

11. Курош, А.Г. Общая алгебра [Текст] / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1974. – 160 с.

12. Постников, М.М. Группы и алгебры Ли. [Текст] / М.М. Постников. – М.: Наука, 1982. – 447 с.

13. Laville, G. Analytic Cliffordian Functions [Text] / G. Laville, I. Ramadanoff. – ArXiv: math. CV/0502090, 2005. – 19 p.

14. Блюмин, С.Л. Алгебры с аналитическим аргументом (с нулевым следом таблицы умножения) [Текст] / С.Л. Блюмин // Современные методы теории краевых задач. – Воронеж: ВГУ, 2005. – С. 29-30.

15. Блюмин, С.Л. Основы параметрического комплексного анализа для моделирования процесса прокатки и родственных процессов[Текст] / С.Л. Блюмин // Теория и практика производства листового проката. Ч. 2. – Липецк: ЛГТУ, 2005. – С. 81-87.

Сведения об авторах

Блюмин Семен Львович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Липецкого государственного технического университета.

E-mail: mailbox@stu.lipetsk.ru

УДК 621.313:519.7

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИНХРОННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ С ГАЗОВЫМИ ТУРБИНАМИ В РАСЧЕТАХ ПЕРЕХОДНЫХ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

В.М. Тарасов, О.В. Буланова, А.В. Малафеев

Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова

В статье рассмотрены вопросы создания математических моделей функционирования синхронных генераторов с газовыми турбинами при возникновении переходных электромеханических процессов. Предложены математические модели синхронного генератора, приводимого газовой турбиной, которые предполагается использовать в программном обеспечении, предназначенном для анализа установившихся и переходных режимов систем электроснабжения промышленных предприятий, в том числе при выходе промышленных электростанций на раздельную с энергосистемой работу.

Переход России к рыночной экономике привел к значительным изменениям в структуре энергохозяйства страны. Так, крупным промышленным предприятиям становится выгодным не покупать электроэнергию из энергосистемы, а осуществлять производст-