

## **МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ РЕЧНОЙ ВОДЫ**

**Горбанева О. И.<sup>1</sup>, Угольницкий Г. А.<sup>2</sup>**

*(Южный Федеральный Университет, Ростов-на-Дону)*

*В статье описана и исследована задача распределения ресурсов в иерархических системах управления качеством речной воды. Система состоит из двух центральных элементов, каждому из которых подчиняются все остальные элементы. Экономический центр распределяет ресурсы между подчиненными элементами, а экологический центр следит за влиянием экономики предприятия на состояние окружающей среды. Модель распределения ресурсов рассматривается в трех случаях: случай отсутствия механизма коррупции, случаи попустительства и вымогательства при распределении ресурсов и контроле над использованием ресурсов. Модель управления качеством речной воды учитывает различные случаи нарушения норм сброса загрязняющих веществ в речные воды. Найдены равновесие по Штакельбергу и кооперативно-игровые решения, а также решения задачи управления качеством водных ресурсов.*

Ключевые слова: древовидная иерархическая система, механизмы коррупции, теоретико-игровые модели.

---

<sup>1</sup> *Ольга Ивановна Горбанева, ассистент ([gorbaneva@mail.ru](mailto:gorbaneva@mail.ru))*

<sup>2</sup> *Геннадий Анатольевич Угольницкий, доктор физико-математических наук, профессор ([ougoln@mail.ru](mailto:ougoln@mail.ru))*

## **1. Введение**

Рыночная экономика требует высокого уровня использования ресурсов хозяйствующих субъектов. С другой стороны, действия субъектов рынка всегда связаны с риском и конфликтом интересов. Поэтому задачи оптимизации распределения ресурсов следует рассматривать с теоретико-игровых позиций. Основная часть объединений субъектов экономической деятельности представляет собой сложные многоуровневые образования, состоящие из следующих структурных составляющих: Центра, прерогативой которого является определение общих стратегических целей; объектов, организационно подчиненных Центру, имеющих собственные цели и довольно большую свободу в выборе своего будущего состояния; и объектов, не подчиняющихся Центру организационно, а связанных с ним неформально в процессе производственной, хозяйственной, финансовой или информационной деятельности (потребители продукции данного предприятия, сервисные организации и т.д.).

Нормальной деятельности экономических систем препятствует коррупция [7]. Это сложное явление тесно связано со множеством экономических, политических, социопсихологических и других трудноформализуемых процессов, протекающих в обществе, и требует учета при моделировании.

## **2. Постановка задачи**

Пусть имеется древовидная экономическая система, например, предприятие во главе с директором, состоящее из нескольких структурных подразделений, или сеть предприятий, объединенных единым руководством. Главенствующий орган (в первом случае – директор предприятия, во втором – руководство объединения) следит за экономической деятельностью этих подчиненных ему подразделений и может влиять на нее.

Главенствующий орган имеет определенное количество ресурсов, которое распределяет между подчиненными предприятиями (подразделениями), используя полученные ресур-

сы для производства продукции и получения прибыли от ее продажи. Очевидно, что каждое подразделение стремится получить от главенствующего органа как можно больше ресурсов.

В процессе деятельности подразделений образуются отходы производства, негативно сказывающиеся на состоянии окружающей среды. Отходы сбрасываются в виде сточных вод в какой-либо природный водный объект или в виде выбросов загрязняющих веществ в атмосферу. Очевидно, чем больше масштабы производства, тем больше образуется отходов, которые загрязняют окружающую среду.

Имеется некоторый государственный контрольный орган (например, Ростехнадзор), целью которого является поддержание экологической обстановки района в определенном состоянии, в частности, того объекта, в который сбрасываются сточные воды. Контрольный орган может воздействовать на предприятия путем принуждения к очищению сточных вод самим предприятием или путем наложения штрафов за загрязнение объекта. Если предприятия в недостаточной степени очищают сточные воды, контрольный орган очищает их сам или с помощью нанятой им организации (путем фильтрации, проведения химических реакций) за счет средств, собранных с предприятий в виде штрафов.

Таким образом, рассматриваются следующие элементы:

- два источника воздействия верхнего уровня:
  - Экономический Центр;
  - Экологический Центр;
- $N$  источников нижнего уровня – подразделения экономического Центра, которые мы назовем Подчиненными;
- объект воздействия – водный объект (река).

Центры воздействуют на Подчиненных, а Подчиненные – на речную систему. Экономический Центр на реку не воздействует, а Экологический Центр может воздействовать только в том случае, если Подчиненные очистили сточные воды недостаточно для того, чтобы состояние экологической системы осталось в допустимых пределах.

Рассмотрим каждый из этих элементов в отдельности.

1) Подчиненный использует для производства ресурсы, выделенные ему Центром. Зная, что Центр обладает лишь ограниченным количеством ресурсов, на которые претендуют и другие Подчиненные, для получения как можно большего количества ресурсов Подчиненный может предложить Экономическому Центру взятку в размере определенной доли от того количества ресурсов, которое ему выделит Центр. Не исключено, что у Подчиненного кроме общесистемных экономических целей, согласуемых с Центром, имеются и свои частные цели, на которые также требуются ресурсы. То есть полученные от Центра ресурсы Подчиненный может потратить как на цели всей экономической системы во главе с Центром, так и на свои частные производственные цели. Одной из задач Подчиненного является распределение доставшихся от Центра ресурсов:

- а) на общесистемное производство;
- б) на свою частную деятельность;
- в) на взятку Экономическому Центру

– таким образом, чтобы получить максимальную прибыль от всей своей деятельности.

Второй задачей Подчиненного является выбор уровня очистки сточных вод таким образом, чтобы затраты на очистку воды и на выплату штрафов за загрязнение были минимальными.

2) Экономический Центр руководит производственной системой и заинтересован в том, чтобы она дала как можно большую прибыль. Центр имеет ограниченное количество ресурсов, которое следует распределить между Подчиненными таким образом, чтобы в процессе производства Подчиненных получить максимальную прибыль. Но здесь дело может осложниться следующими обстоятельствами:

а) зная, что Подчиненный может потратить полученные ресурсы не только на производственные цели всей системы, но и на свои частные цели, Центр может указать Подчиненному минимальную долю ресурсов, меньше которой он не может потратить на общесистемные цели;

б) Центр также может иметь свои частные несистемные цели, для достижения которых требуются ресурсы. То есть не исключено, что из того ограниченного количества ресурсов, которые имеются у Центра для распределения между Подчиненными, часть Центр потратит на свои частные цели;

в) если Подчиненный для получения большего количества ресурсов предлагает Центру взятку, то Центру при распределении ресурсов нужно выяснить, что больше: выигрыш от взятки или потери от того, что данному Подчиненному были выделены средства, которые могли быть использованы более прибыльным Подчиненным.

3) Экологический Центр. Его главная цель – обеспечение некоторых объективных требований к состоянию водного объекта. Для обеспечения этих целей Экологический Центр назначает Подчиненному следующие виды штрафов: штрафы за загрязнения, превышающие допустимые нормы, но не превышающие критические пределы, и штрафы за загрязнения, превышающие критические пределы. Если Подчиненные сами не очищают свои сточные воды на должном уровне, а отделяются штрафом, Экологический Центр сам за счет своих средств очищает речную систему. Дополнительной задачей Экологического Центра является назначение такой штрафной системы Подчиненным, чтобы разность от средств, полученных в качестве штрафов от Подчиненных, и средств, потраченных на очистку воды, была максимальной.

4) Речная система подвергается сбросу в нее сточных вод Подчиненными, а также очищению со стороны Подчиненных и Экологического Центра.

Здесь явно видны две иерархические системы: Экономический Центр – Подчиненный, Экологический Центр – Подчиненный – Река. В разделе 3 рассматривается взаимодействие Подчиненных с Экономическим Центром, а в разделе 4 – с Экологическим.

### 3. Исследование модели распределения ресурсов.

#### 3.1. ОТСУТСТВИЕ ОБЪЕДИНЕНИЯ В КОАЛИЦИИ

Рассматривается двухуровневая древовидная модель управления [12, 13, 18], состоящая из Экономического Центра и  $n$  подчиненных ему подразделений. Центр имеет некоторое количество ресурсов  $R$ , которое необходимо распределить между Подчиненными. Не исключено, что Центр оставляет часть ресурсов на собственные цели, и что Подчиненные, в свою очередь, могут распределить доставшееся им количество ресурсов как на общесистемные цели, так и на свои частные цели. Также учтена возможность влияния Подчиненных на количество распределенных им ресурсов при помощи механизма коррупции [16, 17]. И Центр, и Подчиненные стремятся максимизировать свои целевые функции от использования ресурсов  $J_0$  и  $J_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  соответственно. Без ограничения общности примем количество  $R = 1$ .

В целевую функцию Центра включаются средства, полученные от использования ресурсов Подчиненными в общих целях, средства, полученные от использования оставшихся ресурсов в своих собственных интересах и средства, полученные от Подчиненных в качестве взятки.

Целевая функция Подчиненного состоит из дохода от его деятельности, направленной на общесистемные цели, и от деятельности, направленной на свои частные цели. Так как Подчиненный направляет на общие цели только часть средств, Центр имеет право установить контроль над использованием ресурсов Подчиненным, т.е. может задать минимальную долю ресурсов, которую Подчиненный должен потратить на общесистемные цели.

Итак, математическая модель выглядит следующим образом:

Задача Центра:

$$(1) \quad J_0 = H \left( 1 - \sum_{i=1}^n r_i(b_i) \right) + \sum_{i=1}^n g_i(u_i r_i) + \sum_{i=1}^n b_i r_i(b_i) \rightarrow \max$$

$$(2) \quad 0 \leq q_i(b_i) \leq 1,$$

$$(3) \quad 0 \leq r_i(b_i) \leq 1,$$

$$(4) \quad \sum_{i=1}^n r_i(b_i) \leq 1.$$

Задача Подчиненного:

$$(5) \quad J_i = h_i((1 - b_i - u_i)r_i) + g_i(u_i r_i) \rightarrow \max$$

$$(6) \quad q_i(b_i) \leq u_i \leq 1,$$

$$(7) \quad b_i + u_i \leq 1,$$

$$(8) \quad 0 \leq b_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $b_i$  – доля выделенного ресурса, возвращаемая  $i$ -м Подчиненным Центру в качестве взятки (от  $r_i$ );  $r_i(b_i)$  – доля ресурса, выделяемая  $i$ -му Подчиненному Центром (от  $R$ );  $u_i$  – доля выделенного ресурса, используемая  $i$ -м Подчиненным для решения общесистемных задач;  $q_i(b_i)$  – нижняя граница значений  $u_i$ , контролируемая Центром (от  $r_i$ );  $g_i(u_i r_i)$  – выигрыш системы от деятельности  $i$ -го Подчиненного;  $h_i((1 - u_i - b_i)r_i)$  – выигрыш  $i$ -го субъекта от его частной деятельности;  $H\left(1 - \sum_{i=1}^n r_i(b_i)\right)$  – выиг-

рыш Центра от нецелевого использования ресурсов. Функции  $g_i(x)$ ,  $h_i(x)$  и  $H(x)$  являются производственными с коэффициентом отдачи  $\beta$ .

Задачи (1)-(4) и (5)-(8) – иерархическая игра 2-х лиц в нормальной форме [5, 6]. Стратегиями Центра являются распределение ресурсов  $r_i$  и назначение контроля над использованием ресурсов  $q_i$ . Стратегиями Подчиненных являются следующие величины: доля ресурса  $u_i$ , выделенного Центром, используемая на общесистемные цели, и доля ресурсов  $b_i$ , возвращаемая Центру в качестве взятки. Центр имеет право первого хода. В качестве решения ищется равновесие по Штакельбергу [3, 4].

Не исключена возможность наличия механизмов коррупции в системе, причем рассматриваются следующие механизмы коррупции:

- 1)  $r_i = r_i(b_i)$  – коррупция при выделении ресурсов;
- 2)  $q_i = q_i(b_i)$  – коррупция при контроле выполнения общесистемных требований,

причем каждый из этих видов коррупции рассматривается в двух случаях: попустительства и вымогательства.

В работе использованы следующие виды параметризаций:

1) функция контроля Центром использования ресурсов  $i$ -м Подчиненным от количества взятки  $q_i(b_i)$ :

§  $q_i(b_i) \equiv q_{i0}$  (отсутствие коррупции при контроле выполнения общесистемных требований);

§  $q_i(b_i) = q_{i0}(1 - b_i)$  (случай попустительства,  $q_{i0}$  – начальный уровень контроля над использованием ресурсов при отсутствии взятки, который уменьшается с увеличением размера предложенной взятки до нуля);

§  $q_i(b_i) = 1 - (1 - q_{i0})b_i$  (случай вымогательства,  $q_{i0}$  – конечный уровень контроля над использованием ресурсов при уровне взятки, равном 100%, который увеличивается с уменьшением размера предложенной взятки до единицы);

2) функция доли ресурса, выделяемой  $i$ -му Подчиненному Центром, от уровня взятки  $r_i(b_i)$ :

§  $r_i(b_i) \equiv r_{i0}$  (отсутствие коррупции при распределении ресурсов);

§  $r_i(b_i) = r_{i0} + \frac{(k-1)b_i}{n}$  (случай попустительства,  $r_{i0}$  – начальная доля ресурсов, выделенная Подчиненному при отсутствии взятки, которая увеличивается с увеличением размера предложенной взятки);

§  $r_i(b_i) = \frac{b_i}{n}$  (случай вымогательства, начальная доля ресурсов, выделенных Подчиненному, равна нулю)

В случае отсутствия механизма коррупции равновесие по Штакельбергу выглядит следующим образом [2]:

$$(9) \quad u_i = 1,$$

$$(10) \quad b_i = 0,$$

$$(11) \quad q_i = 1,$$



$$(12) \quad r_i^* = \frac{{}^{1-b}\sqrt{g_i(x)}}{\sum_{i=1}^n {}^{1-b}\sqrt{g_i(x)} + {}^{1-b}\sqrt{H(x)}} ,$$

$$(13) \quad r_0^* = \frac{{}^{1-b}\sqrt{H(x)}}{\sum_{i=1}^n {}^{1-b}\sqrt{g_i(x)} + {}^{1-b}\sqrt{H(x)}} ,$$

$$(14) \quad J_i(r_i^*) = \frac{g_i^{\frac{1}{1-b}}(1)}{\left( \sum_{i=1}^n g_i^{\frac{1}{1-b}}(1) + H^{\frac{1}{1-b}}(1) \right)^b} ,$$

$$(15) \quad J_0(r^*) = \left( \sum_{i=1}^n g_i^{\frac{1}{1-b}}(1) + H^{\frac{1}{1-b}}(1) \right)^{1-b} .$$

В случае вымогательства при распределении ресурсов решение задачи: стратегия Подчиненного

$$(16) \quad u_i = \frac{{}^{1-b}\sqrt{g_i(x)}}{2\left({}^{1-b}\sqrt{g_i(x)} + {}^{1-b}\sqrt{h_i(x)}\right)} ,$$

$$(17) \quad b_i = 1/2 .$$

| Стратегия Центра  $q_{i0} = 1$ ,

$$(18) \quad r_i = \frac{1}{2n} .$$

Здесь Центр не оставляет Подчиненным возможности использовать ресурсы на свои частные цели, так как все ресурсы, не пошедшие на общесистемные цели, Центр забирает себе в качестве взятки.

В случае попустительства аналитически можно найти только стратегию Подчиненного:

$$(19) \quad b_i = \frac{1}{2} - \frac{nr_{i0}}{2(k-1)} ,$$

$$(20) \quad u_i = \frac{{}^{1-b}\sqrt{g_i(x)}}{{}^{1-b}\sqrt{g_i(x)} + {}^{1-b}\sqrt{h_i(x)}} \left( \frac{1}{2} + \frac{nr_{i0}}{2(k-1)} \right) ,$$

где  $x$  – любая точка из промежутка  $(0; 1]$ , откуда видно, что  $b_i \leq 1/2$ .

Доказано, что стратегии Центра  $q_i$  в случае попустительства можно найти при помощи метода последовательных приближений, а набор стратегий  $r_i$  – при помощи метода линеаризации.

Как при наличии, так и при отсутствии частного интереса у Подчиненного, количество ресурсов, возвращаемое Центру в качестве взятки, одинаково. Т. е. отсутствие или наличие частного интереса на размер взятки не влияет. А вот оставшиеся средства (минус средства, полученные от Подчиненных в качестве взятки) распределяются Подчиненным в зависимости от того, имеются или нет частные интересы и каковы его производственные мощности.

### **3.2. ВОЗМОЖНОСТЬ ОБЪЕДИНЕНИЯ В КОАЛИЦИИ.**

Пусть  $N = \{0, 1, 2, \dots, n\}$  – конечное множество субъектов экономической системы, где  $\{0\}$  – Центр. Рассматриваются всевозможные коалиции, т. е. подмножества  $K \subseteq N$ , в том числе и одноэлементные  $\{i\}$  и максимальная коалиция  $N$ .

В двухуровневой иерархической системе управления возможны следующие основные типы коалиций:

- 1) вертикальная коалиция – коалиция Центра и Подчиненного;
- 2) горизонтальная коалиция – двух или нескольких Подчиненных;
- 3) комплексная кооперация – коалиция Центра с несколькими Подчиненными.

В статье найдены выигрыши каждой коалиции, а также способы распределения выигрыша между всеми участниками коалиции (вектор Шепли, вектор пропорционального распределения) для задачи распределения ресурсов как кооперативной игры. Для каждой коалиции вычислен кооперативный эффект [1], т.е. величина  $\Delta_K = v(K) - \sum_{i \in K} v(i)$ , где величина  $\Delta_K$  дает количественную характеристику выгоды объединения в коалицию  $K$ .

Найден выигрыш от вступления в коалицию всех участников системы

$$(21) \quad v(N) = \left( \sum_{i=1}^n \left( (2g_i(1))^{1-b} + h_i(1)^{1-b} \right) + H(1)^{1-b} \right)^{1-b},$$

который можно оптимально распределить между участниками системы при помощи вектора Шепли или вектора пропорционального распределения [1].

Найден вектор Шепли:

$$(22) \quad \Phi_0 = \frac{1}{n+1} \left( {}^{1-b}\sqrt{H(1)} + \sum_{i=1}^n \left( {}^{1-b}\sqrt{2g_i(1)} + {}^{1-b}\sqrt{h_i(1)} \right) \right)^{1-b} - \\ - \frac{n-1}{2(n+1)} \left( {}^{1-b}\sqrt{H(1)} + \sum_{i=1}^n {}^{1-b}\sqrt{h_i(1)} \right)^{1-b} + \\ + \sum_{s=2}^n g(s) \sum_{\substack{\forall K \\ |K|=s-1}} \left( {}^{1-b}\sqrt{H(1)} + \sum_{i \in K} {}^{1-b}\sqrt{g_i(1)} + \sum_{i \in K} \left( {}^{1-b}\sqrt{2g_i(1)} + {}^{1-b}\sqrt{h_i(1)} \right) \right)^{1-b},$$

$$(23) \quad \Phi_i = \frac{1}{2} \cdot \frac{{}^{1-b}\sqrt{g_i(1)}}{\left( {}^{1-b}\sqrt{H(1)} + \sum_{i=1}^n {}^{1-b}\sqrt{g_i(1)} \right)^b} + \\ + \sum_{s=2}^n g(s) \sum_{\substack{\forall K \\ |K|=s-1 \\ i \in K}} \left[ \left( {}^{1-b}\sqrt{H(1)} + \sum_{i \in K} {}^{1-b}\sqrt{g_i(1)} + \sum_{i \in K} \left( {}^{1-b}\sqrt{2g_i(1)} + {}^{1-b}\sqrt{h_i(1)} \right) \right)^{1-b} - \right. \\ \left. - \left( {}^{1-b}\sqrt{H(1)} + \sum_{i \in K \setminus \{i\}} {}^{1-b}\sqrt{g_i(1)} + \sum_{i \in K \setminus \{i\}} \left( {}^{1-b}\sqrt{2g_i(1)} + {}^{1-b}\sqrt{h_i(1)} \right) \right)^{1-b} \right].$$

Найден также вектор пропорционального распределения:

$$(24) \quad x_0 = \left( \sum_{i=1}^n {}^{1-b}\sqrt{H(1)} + \left( {}^{1-b}\sqrt{2g_i(1)} + {}^{1-b}\sqrt{h_i(1)} \right) \right)^{1-b} \frac{\sum_{i=1}^n {}^{1-b}\sqrt{g_i(1)} + {}^{1-b}\sqrt{H(1)}}{2 \sum_{i=1}^n {}^{1-b}\sqrt{g_i(1)} + {}^{1-b}\sqrt{H(1)}},$$

$$(25) \quad x_i = \frac{{}^{1-b}\sqrt{g_i(1)}}{2 \sum_{i=1}^n {}^{1-b}\sqrt{g_i(1)} + {}^{1-b}\sqrt{H(1)}} \left( {}^{1-b}\sqrt{H(1)} + \sum_{i=1}^n \left( {}^{1-b}\sqrt{2g_i(1)} + {}^{1-b}\sqrt{h_i(1)} \right) \right)^{1-b}.$$

#### 4. Исследование модели управления качеством речной воды

Исследована статическая задача управления качеством речной воды, которая состоит в следующем. Имеется Экологический Центр и предприятие, загрязняющее окружающую среду.

Задачей Экологического Центра является поддержание окружающей среды в допустимых пределах. В этих целях Экологический Центр следит за количеством загрязняющих веществ, сброшенных предприятием в реку, и обеспечивает очистку сброшенных им в реку сточных вод. Если предприятие нарушило допустимые нормы сброса сточных вод, Экологический Центр назначает предприятию штраф и очищает реку собственными силами за счет собранных в виде штрафа средств. Таким образом, стратегией Экологического Центра является назначение величины штрафа за единицу сброшенных сверх допустимой нормы веществ.

Задачей предприятия является получение наибольшей прибыли с учетом затрат (в том числе на очищение сточных вод и выплату штрафов). Предприятие, сбросив сточные воды в реку, очищает их с выбранным уровнем очистки, измеряемом в процентах. Если объем загрязнений после очистки все же превышает допустимые пределы, то предприятие выплачивает штраф. Стратегией предприятия является выбор уровня очистки сточных вод.

Задача включает в себя следующие три подзадачи [14, 15]:

Задача 1: если объем сброса сточных вод Подчиненного в реку меньше допустимого (выбор Подчиненного  $p_i$  удовлетворяет условию  $0 \leq w_i(1 - p_i) \leq \tilde{w}_i$ ), то

$$(26) J_0 = -c_a(y)$$

$$(27) y_i^{(0)} = -w_i C_p(p) - (1 - n) s_i w_i (1 - p_i) \rightarrow \max_{p_i}$$

$$(28) 0 \leq p_i \leq 1 - e$$

Здесь свою оптимизационную задачу решает только Подчиненный.

Задача 2: если объем сброса сточных вод Подчиненного в реку больше допустимого, но меньше предельного (выбор Подчиненного  $p_i$  удовлетворяет условию  $\tilde{w}_1 \leq w_i(1-p_i) \leq \tilde{w}_2$ ), то

$$(29) J_0 = -c_a(y) + \sum_{j=1}^n K_{ch} s_i (w_i(1-p_i) - \tilde{w}_1) \rightarrow \max_{K_{ch}}$$

$$(30) y_i^{(1)} = -w_i C_p(p) - (1-n) s_i \tilde{w}_1 - K_{ch} s_i (w_i(1-p_i) - \tilde{w}_1) \rightarrow \max_{p_i}$$

$$0 \leq p_i \leq 1 - e, 0 \leq K_{ch} \leq K_{ch\max}.$$

Т. е. в этом случае свои оптимизационные задачи решают и Центр, и Подчиненный.

Задача 3: если объем сброса сточных вод Подчиненного в реку больше предельного (выбор Подчиненного  $p_i$  удовлетворяет условию  $w_i(1-p_i) \geq \tilde{w}_2$ ), то

$$(31) J_0 = -c_a(y) + \sum_{j=1}^n K_{ch} s_i (\tilde{w}_2 - \tilde{w}_1) + \sum_{j=1}^n K_{ca} s_i (w_i(1-p_i) - \tilde{w}_2) \rightarrow \max_{K_{ch}, K_{ca}}$$

$$(32) y_i^{(2)} = -w_i C_p(p) - (1-n) s_i \tilde{w}_2 - K_{ch} s_i (\tilde{w}_2 - \tilde{w}_1) - K_{ca} s_i (w_i(1-p_i) - \tilde{w}_2) \rightarrow \max_{p_i}$$

$$0 \leq p_i \leq 1 - e, 0 \leq K_{ch} \leq K_{ch\max}, 0 \leq K_{ca} \leq K_{ca\max}$$

Т. е. в этом случае, аналогично предыдущему случаю, свои оптимизационные задачи решают и Центр, и Подчиненный.

Здесь введены следующие условные обозначения:  $v$  – ставка налога (константа);  $J_0$  – выигрыш экологического Центра;  $y_i^{(0)}$ ,  $y_i^{(1)}$ ,  $y_i^{(2)}$  – выигрыши Подчиненного в соответствующих задачах 1, 2 или 3;  $c_a(y)$  – функция затрат Центра на очистку речных вод;  $c_p(p)$  – функция затрат Подчиненного на очистку речных вод;  $s_i$  – функция штрафа Подчиненного за загрязнение воды (константа);  $w_i$  – объем сброса загрязняющих веществ до очистки;  $w_i(1-p_i)$  – объем сброса загрязняющих веществ после очистки;  $\tilde{w}_1$ ,  $\tilde{w}_2$ ,  $w$  – пределы нарушений (считаются известными).

Задача решается при следующих допущениях: функция затрат Центра на очистку речных вод  $c_a(y)$  линейна:  $c_a(y) = c_1 y$ ,

где  $y = \sum_{i=1}^n w_i(1 - p_i)$ , а функция затрат Подчиненного на очистку

речных вод  $c_p(p)$  имеет следующий вид:  $c_p(p) = \frac{Dp}{1-p}$ .

Решив задачу (26)-(28), получим

$$(26) \quad p_i = \begin{cases} \max \left\{ 1 - \frac{w_0}{w_i}, 0 \right\}, & s_i < \frac{D}{(1-n)} * \max^2 \left\{ \frac{w_i}{w_0}, 1 \right\}, \\ 1 - \sqrt{\frac{D}{(1-n)s_i}}, & \frac{D}{(1-n)} * \max^2 \left\{ \frac{w_i}{w_0}, 1 \right\} \leq s_i \leq \frac{D}{(1-n)e^2}, \\ 1 - e, & s_i > \frac{D}{(1-n)e^2}. \end{cases}$$

Решив задачу (29)-(30), получим, что оптимальная стратегия Подчиненного

$$(27) \quad p_i = \begin{cases} \max \left\{ 1 - \frac{w_0}{w_i}, 0 \right\}, & K_{ch} < \frac{D}{s_i} * \max^2 \left\{ \frac{w_i}{w_0}, 1 \right\}, \\ 1 - \sqrt{\frac{D}{K_{ch}s_i}}, & \frac{D}{s_i} * \max^2 \left\{ \frac{w_i}{w_0}, 1 \right\} \leq K_{ch} \leq \frac{D}{s_i e^2}, \\ 1 - e, & K_{ch} > \frac{D}{s_i e^2}. \end{cases}$$

а величина  $K_{ch}$  находится численным путем при помощи метода дихотомии. Чем больше  $K_{ch}$ , тем больше степень очистки.

Решив задачу (31)-(32), получим, что

$$(28) \quad p_i = \begin{cases} 0, & K_{ca} < \frac{D}{s_i}, \\ 1 - \sqrt{\frac{D}{K_{ca}s_i}}, & \frac{D}{s_i} \leq K_{ca} \leq \frac{D}{s_i \max^2 \left\{ \frac{w_0}{w_i}, e \right\}}, \\ 1 - e, & K_{ca} > \frac{D}{s_i \max^2 \left\{ \frac{w_0}{w_i}, e \right\}}. \end{cases}$$

причем данная критическая точка является точкой максимума. Оптимальная стратегия Центра:  $K_{ch} = K_{ch\max}$ . Это можно объяснить тем, что предполагается, что уровень очистки Подчиненного  $p_i$  точно удовлетворяет условию  $w_i(1 - p_i) \geq \tilde{w}_2$ , следовательно, штраф за первое нарушение ему придется заплатить в любом размере, а для Центра выгодно задать максимальную величину штрафа. Величина  $K_{ca}$  находится численно при помощи метода дихотомии.

## **5. Заключение**

В работе рассмотрены две частные модели взаимодействия субъектов эколого-экономической системы, включающей Экономический Центр, Экологический Центр и Подчиненных. В первой модели изучено распределение ресурсов Экономическим Центром между Подчиненными с учетом возможности нецелевого использования и коррупции. В качестве решения в бескоалиционном случае получено равновесие по Штакельбергу, а в кооперативном – вектор Шепли и вектор пропорционального распределения. Во второй модели исследована возможность обеспечения экологических требований путем экономического воздействия Экологическим Центром на Подчиненного. Найдены оптимальные стратегии Экологического Центра.

## **Литература**

1. АГИЕВА М. Т., МАЛЬСАГОВ Г. А., УГОЛЬНИЦКИЙ Г. А. *Моделирование иерархической структуры управления образованием*. – Ростов-на-Дону: Издательство ООО «ЦВВР», 2003. – 208 с.
2. ГОРБАНЕВА О. И. *Распределение ресурсов в иерархических системах управления* // Рукопись деп. в ВИНТИ, 26.01.2006, №81–В2006.
3. ГОРЕЛИК В. А., КОНОНЕНКО А. Ф. *Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах*. – М.: Радио и связь, 1992. – 132 с.

4. МОИСЕЕВ Н. Н. *Математические задачи системного анализа. Уч. пособие для студ. вузов.* – М.: Наука, 1981. – 488 с.
5. НОВИКОВ Д. А. *Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем.* – М.: Фонд «Проблемы управления», 1999. – 150 с.
6. НОВИКОВ Д. А. *Стимулирование в организационных системах.* – М.: Наука, 2003. – 312 с.
7. РЫБАСОВ Е. А., УГОЛЬНИЦКИЙ Г. А. *Математическое моделирование иерархического управления эколого-экономическими системами с учетом коррупции* // Компьютерное моделирование. Экология. Выпуск 2. / Под ред. Угольницкого Г. А. – М.: Вузовская книга, 2004. – С. 46-65.
8. УГОЛЬНИЦКИЙ Г. А. *Иерархическое управление устойчивым развитием социальных организаций* // Общественные науки и современность. –2002. – №3. – С.133-140.
9. УГОЛЬНИЦКИЙ Г. А. *Линейная теория иерархических систем.* – М.: Вузовская книга, 1996.
10. УГОЛЬНИЦКИЙ Г. А. *Математическое моделирование иерархического управления устойчивым развитием* // Компьютерное моделирование. Экология. Выпуск 2 // Под ред. Угольницкого Г. А.. – М.: Вузовская книга, 2004. – С. 101-125.
11. УГОЛЬНИЦКИЙ Г. А. *Теоретико-игровые принципы оптимальности иерархического управления устойчивым развитием* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2005. – №4.
12. УГОЛЬНИЦКИЙ Г. А. *Теоретико-игровое моделирование методов иерархического управления устойчивым развитием* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2002. – №1.
13. УГОЛЬНИЦКИЙ Г. А. *Управление эколого-экономическими системами.* – М.: Вузовская книга, 1999. – 132 с.
14. УСОВ А. Б. *Методы иерархического управления качеством воды* // Компьютерное моделирование. Экология. Выпуск 2. / Под ред. Угольницкого Г. А. – Москва: Вузовская книга, 2004. – С. 136-158.



15. УСОВ А. Б., УГОЛЬНИЦКИЙ Г. А. *Многоуровневые модели в задачах управления качеством речной воды* // Водные ресурсы. – 2005. – Т. 32, №4. – С.504-511.
16. BARDHAN P. *Corruption and Development: a Review of Issues* // J. Political Economy. – 1996. – Vol. 31.
17. CHANDER P., WILDE L. *Corruption in tax administration* / Journal of Public Economics. – 1992. – Vol.49. – P. 333-349.
18. OUGOLNITSKY G. A. *Game Theoretic Modeling of the Hierarchical Control of Sustainable Development* // Game Theory and Applications. – 2002. – Vol. 8. – P. 82-91.

## RESOURCE ALLOCATION MODELS IN THE HIERARCHICAL SYSTEMS OF RIVER WATER QUALITY CONTROL

**Olga Gorbaneva**, Southern Federal University, assistant ([gorbaneva@mail.ru](mailto:gorbaneva@mail.ru)).

**Guennady Ougolnitsky**, Southern Federal University, professor ([ougoln@mail.ru](mailto:ougoln@mail.ru)).

*Abstract: The resource allocation problem in the hierarchical systems of river water quality control is described and investigated. It is shown that the problem may be divided into two subproblems: the resource allocation problem in hierarchical system and the river water quality control problem. Three cases of resource allocation model are considered: no-corruption mechanism, connivance and racket under resource allocation and the resource using controlling. The Stackelberg equilibrium in game theoretic model is found by the Lagrange multipliers method.*

Keywords: tree-type hierarchical system, corruption mechanisms, game-theoretic models.

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Д.А. Новиковым.*