УДК 62.50
ББК 32.817

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СЛЕЖЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ НА ОСНОВЕ СОВМЕСТНОЙ БЛОЧНО-КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ УПРАВЛЯЕМОСТИ И НАБЛЮДАЕМОСТИ

Ахобадзе А.Г.[1]**, Краснова С.А**[2]
*(Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления РАН, Москва)*

Исследуются структурные свойства линейных многомерных динамических систем при действии внешних возмущений в задаче слежения за заданными траекториями выходных переменных. Предполагается, что только выходные переменные подлежат измерениям, а компоненты вектора возмущений являются неизвестными гладкими ограниченными функциями времени. Разработана пошаговая процедура приведения математической модели исходной системы к совместной блочно-канонической форме управляемости и наблюдаемости относительно выходных переменных. На основе полученной формы разработана декомпозиционная процедура синтеза обратной связи, обеспечивающая асимптотическую сходимость к заданным траекториям. Информационная поддержка комбинированных законов управления осуществляется с помощью наблюдателей состояния на скользящих режимах.

Ключевые слова: слежение, декомпозиция, внешние возмущения, наблюдатели состояния на скользящих режимах.

---

[1] *Анна Гурамиевна Ахобадзе, аспирантка (krasnova@ipu.rss.ru).*
[2] *Светлана Анатольевна Краснова, доктор технических наук, профессор (krasnova@ipu.rss.ru).*

Введение

В работе изучается задача слежения за заданными траекториями выходных переменных объекта автоматического управления. Несмотря на то, что рассматриваемая математическая модель объекта управления представлена линейной динамической системой уравнений, она имеет такие качественные признаки сложной системы, как высокая размерность, многоканальность, неполнота измерений фазовых переменных; допускается неопределенность параметров. На систему действуют внешние неконтролируемые гладкие возмущения, не имеется аналитического описания задающих воздействий и, как следствие, – информации об их производных.

В указанных условиях возможность обеспечить асимптотическую сходимость выходных сигналов к значениям задающих воздействий определяется не только структурными свойствами оператора объекта управления, но также возможностью восстановить текущую информацию об объекте управления и среде его функционирования, требуемую для синтеза обратной связи и компенсации действия имеющихся неопределенностей. Требуется найти комплексное решение задач оценивания и синтеза обратной связи, обеспечивающее робастность и инвариантность замкнутой системы слежения.

Развитый раздел теории инвариантности составляют методы динамической компенсации [13-15], основанные на расширении пространства состояния за счет введения модели экзогенной системы, описывающей динамику внешних возмущений, и использовании оценок ее переменных для синтеза обратной связи. В частности, в работе [13] задача слежения относительно выходных переменных линейных систем в условиях параметрической определенности была рассмотрена на основе расширенной системы, которая включала линейные дифференциальные уравнения конечного порядка, описывающие динамику внешних возмущений и задающих воздействий. Известные методы решения задачи наблюдения при наличии внешних возмущений предполагают использование генератора возмущений [1, 5] и могут быть дополнены алгоритмами адаптации при параметрической неопределенности моделей [9, 12].

В случае, когда возмущающие воздействия являются неизвестными, ограниченными по модулю функциями времени, приходится обращаться к классическим способам подавления действия внешних возмущений различной природы – так называемым «силовым» методам с использованием больших коэффициентов усиления или разрывных управлений, функционирующих в скользящем режиме [17]. Однако, эффективные в теории, данные методы не находят широкого применения на практике, поскольку для их реализации требуются или значительные ресурсы управления, или необходимость в специальной аппаратурной реализации.

В данной работе для решения задачи слежения относительно выходных сигналов линейных систем, функционирующих в условиях неопределенности и при действии внешних неконтролируемых гладких возмущений, разработан альтернативный подход, не требующий ввода автономных динамических моделей входных воздействий. Данный подход основан на введении в контур обратной связи наблюдателей состояния с разрывными корректирующими воздействиями, функционирующими в скользящем режиме. Данный класс наблюдателей при определенных условиях позволяет решить задачу оценивания не только неизмеряемых фазовых переменных, но и имеющихся неопределенностей [6-8, 10, 11, 17, 20], что позволяет компенсировать их влияние с помощью комбинированного управления [12].

В наблюдателях на скользящих режимах сохраняются известные преимущества (декомпозиция и инвариантность) систем с разрывными управлениями [17], а задача оценивания вектора состояний и неконтролируемых возмущений решается за теоретически конечное время, что позволяет при некоторых необременительных ограничениях на динамику объекта управления проводить анализ и синтез наблюдателя и системы управления независимо. Отметим, что использование разрывных управляющих воздействий в задачах наблюдения выгодно отличается от их использования в задачах управления, где при наличии неучтенных динамик возникают автоколебания и реальный скользящий режим [10, 17], кроме того, в силу физической природы координат использование разрывных управлений ограничено. В задачах наблюдения вычислительная среда формируется искусственно и не включает динамические неидеальности объекта управления, а на использование разрывных управлений не накладываются физические ограничения. Как следствие, реальный скользящий режим в устройствах наблюдения близок к теоретическому.

Еще одна проблема настоящего исследования связана с многомерностью и многоканальностью рассматриваемого объекта управления. В таких системах, как правило, возникает необходимость в предварительном преобразовании исходной модели в канонические формы управляемости или наблюдаемости, в терминах которых проблемы анализа и синтеза упрощаются, а формулировка результатов значительно облегчается по сравнению с формулировкой в терминах исходной системы. Конструктивным приемом в решении задачи слежения как линейных, так и нелинейных динамических систем является неособое преобразование фазовых координат, приводящее к эквивалентной системе «вход–выход», непосредственно отражающей связи входных и выходных переменных. Наиболее целесообразным является прямой метод: получение выходного отображения исходной системы путем многократного дифференцирования выходных переменных с целенаправленной неособой заменой фазовых координат координатами выходного вектора и их производными [2, 3, 5, 7, 9, 13, 16, 18-22]. В отличие от известных покомпонентных децентрализованных форм, в данной работе предлагается блочная структура эквивалентной модели, которая состоит из связанных подсистем «вход–выход» различной размерности с учетом возмущений. В каждой подсистеме группы компонент выходного вектора регулируются «своими» управляющими воздействиями (непосредственно или через цепочку интеграторов), не влияющими на поведение других выходных координат, и в которых имеется возможность устранить или компенсировать внутренние перекрестные связи и внешние возмущения с помощью обратной связи. При этом допускается формирование согласованных линейно независимых комбинаций как выходных, так и входных переменных с целью «закрепления» за группами выходных переменных, имеющих различную относительную степень, «своих» управляющих воздействий.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 1 описывается математическая модель объекта управления, формализуется постановка задачи. В разделе 2 вводится понятие совместной блочно–канонической формы управляемости и наблюдаемости линейных систем с учетом возмущений рассматриваемого класса (СБКФ), формализуются условия ее существования, что является предпосылкой разрешимости задачи слежения. Заранее ориентируясь на предполагаемую высокую размерность задачи и допустимую неопределенность параметров модели объекта управления, в разделе 3 разработана пошаговая процедура трансформации математической модели исходной системы в СБКФ, что позволяет декомпозировать анализ разрешимости задачи слежения на независимо решаемые подзадачи меньшей размерности. На основе СБКФ в разделе 4 в рамках блочного подхода [4, 16] разработана декомпозиционная процедура синтеза комбинированной обратной связи по состоянию и по возмущению, которая сводится к последовательно решаемым элементарным подзадачам стабилизации и обеспечивает асимптотическую сходимость выходных сигналов к заданным траекториям инвариантно к внешним возмущениям. Для информационной поддержки базовых алгоритмов управления разработана процедура синтеза наблюдателей состояния на скользящих режимах, позволяющих за теоретически конечное время решить задачу оценивания составляющих базового закона управления, что существенно упрощает структуру регулятора.

1. Модель объекта управления. Постановка задачи

Рассматривается линейная математическая модель объекта автоматического управления вида

(1) $\dot{x} = Ax + Bu + Q\eta, \quad y_1 = Dx,$

где $x \in R^n$ – вектор состояния, $y_1 \in R^{m_0}$ – вектор выходных (регулируемых) переменных, $u \in R^p$ – вектор управляющих воздействий, A, B, Q, D – матрицы с постоянными элементами соответствующих размерностей. Без ограничения общности полагается, что $\operatorname{rank} D = m_0$, $\operatorname{rank} B = p$, $0 < m_0 \le p < n$. Выделим следующие особенности рассматриваемой модели (1):

1) $\eta(t) \in R^q$ – вектор внешних возмущений, компоненты которого полагаются неизвестными гладкими ограниченными по модулю функциями времени с ограниченными производными в общем случае до $(n-1)$-го порядка, допускается невыполнение условий согласования: $\operatorname{rank}(B\ Q) \ge \operatorname{rank} B$, в общем случае $\operatorname{Im} Q \not\subset \operatorname{Im} B$;

2) полагается, что измерениям подлежат только выходные переменные y_1 (т.е. начальные условия фазовых координат системы (1) неизвестны), шумы в измерениях отсутствуют;

3) класс допустимых управлений может включать как непрерывные, так и разрывные воздействия;

4) допускается параметрическая неопределенность матрицы Q, а также фрагментов матрицы A, которые включены в пространство управлений $\operatorname{Im} B$. Предполагается, что известны конечные границы диапазонов, которым принадлежат значения данных элементов (допускается даже их плавная вариация в известных диапазонах);

5) аналитический вид задающих воздействий $g(t) \in R^{m_0}$ для выходных переменных $y_1(t) \in R^{m_0}$ неизвестен, имеются только их текущие значения. Предполагается, что сигналы $g(t)$ являются произвольными гладкими ограниченными функциями време-

ни с ограниченными производными в общем случае до n-го порядка, в общем случае соотношение $\lim\limits_{t\to\infty}\dot{g}(t)=0$ не имеет места.

Для системы (1) в сделанных предположениях ставится задача синтеза обратной связи, обеспечивающей асимптотическую сходимость выходных переменных к заданным траекториям:

(2) $\lim\limits_{t\to\infty} y_1(t) = g(t)$.

Решение данной задачи включает два этапа:

1) анализ разрешимости, т.е. формализация требований к тройке матриц $(D\,(A, B))$ системы (1), при которых задача слежения может быть решена в условиях полной определенности;

2) синтез обратной связи, который включает решение проблемы информационной поддержки базовых законов управления, обеспечивающих отработку выходными переменными задающих сигналов инвариантно к внешним возмущениям.

Еще раз подчеркнем, что задача (2) решается в «узкой» постановке без расширения пространства состояний за счет динамических моделей задающих и возмущающих воздействий, не предполагается также ввода динамического компенсатора, порождающего производные управляющих воздействий. В то же время предположение о гладкости задающих и возмущающих воздействий расширяет класс систем, в которых имеется возможность обеспечить инвариантность выходных сигналов по сравнению со случаем негладких возмущений [2, 3, 8].

Предварительно отметим, что в случае действия на систему внешних неконтролируемых возмущений стандартные предположения о наблюдаемости пары (D, A) и управляемости пары (A, B) (т.е. полный ранг матриц наблюдаемости и управляемости) уже не являются гарантией разрешимости задач наблюдения и стабилизации. Более того, даже для невозмущенной системы нет гарантии разрешимости задачи слежения относительно выходных переменных. Следующие простые примеры демонстрируют такие ситуации.

Пример 1. Рассмотрим систему $\dot{x}_1 = x_2 + \eta$, $\dot{x}_2 = u$, $y = x_1$, $\eta(t)$ – неизвестное внешнее воздействие. Здесь пара (D, A) наблюдаема, но возможность восстановить текущие значения фазовой координаты $x_2(t)$ отсутствует. Пара (A, B) управляема, но условие согласования не выполнено. Информации о текущих значениях $g(t)$ и даже $x_2(t)$, $\eta(t)$ недостаточно для обеспечения (2) стандартными способами, требуется привлечение специальных методов, которые представлены в данной работе.

Пример 2. Рассмотрим невозмущенную систему $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$, $y = \mathrm{col}(x_1, x_2)$. Задача наблюдения не ставится, так как обе фазовые координаты подлежат измерениям, пара (A, B) управляема, но не выполняется условие $\mathrm{rank}\, D \leq \mathrm{rank}\, B$, т.е. фазовая координата x_1 не обеспечена «своим» управлением. Задача слежения за произвольными задающими воздействиями по каждой выходной переменной $g(t) = \mathrm{col}\,(g_1(t), g_2(t))$ не имеет решения без ввода дополнительного управляющего воздействия в первое уравнение ($\dot{x}_1 = x_2 + u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$), либо следует признать постановку задачи слежения некорректной. Действительно, в исходной системе регулируемыми переменными являются фазовые координаты типа «положение–скорость». Задающие воздействия, отслеживание которых можно обеспечить в данной системе без аппаратной доработки, должны подчиняться зависимости $\dot{g}_1 = g_2$. Аналогичная ситуация проявляется и в системе $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_3 + u_1$, $\dot{x}_3 = u_2$, $y = \mathrm{col}\,(x_1, x_2)$, где пара (D, A) наблюдаема, пара (A, B) управляема, но даже выполнение условия $\mathrm{rank}\, D \leq \mathrm{rank}\, B$ не гарантирует решение задачи слежения за *произвольными* задающими воздействиями по каждой выходной переменной.

Пример 3. Рассмотрим систему $\dot{x}_1 = x_2 + u$, $\dot{x}_2 = x_1 + x_2$, $y_1 = x_1$, пара (D, A) наблюдаема, пара (A, B) управляема. Очевидно, что в этой системе можно обеспечить стабилизацию выходной переменной на заданном уровне ($g = \mathrm{const}$), но задача слежения относительно выходной координаты (например, при

$g = \sin t$) не может быть реализована, система будет неработоспособной из-за неустойчивости собственных движений второй координаты.

Как видим, необходимость обеспечения сходимости выходных переменных к заданным траекториям приводит к сужению ресурсов управляемости и наблюдаемости. Для разрешимости задачи слежения даже в условиях полной определенности оператор объекта управления (тройка матриц (D (A, B))) должен удовлетворять специфическим условиям, которые будут формализованы в разделе 2. В свою очередь, наличие неопределенностей, указанных при описании объекта управления (1), потребует привлечение специальных методов синтеза. Как будет показано в разделе 4, в данной работе решается задача обеспечения полной инвариантности выходных переменных к имеющимся неопределенностям за счет их компенсации на основе оценок, полученных с помощью наблюдателей на скользящих режимах.

В качестве методологической основы декомпозиции как задачи анализа, так и задачи синтеза, в работе используется блочный подход, который обладает большей конструктивностью, а также грубостью к вариациям параметров объекта управления по сравнению с известными каноническими представлениями [5]. К настоящему времени в рамках блочного подхода разработаны декомпозиционные процедуры синтеза законов управления [4, 14, 16] и наблюдателей состояния [4, 7] применительно к многомерным системам общего вида, в том числе и при наличии внешних возмущений различного класса. Суть блочного метода заключается в том, что в ходе неособых однотипных элементарных преобразований математическая модель преобразуется к блочной форме, которая отражает соответствующие структурные свойства (управляемости или наблюдаемости), что является основой для декомпозиционного синтеза обратной связи или наблюдателя состояния. Однако данные методы хотя и решают проблему «большой размерности», не находят непосредственного применения в задаче управления выходными переменными, требующей комплексного анализа и синтеза указанных проблем. Блочные формы наблюдаемости и управляемости, полученные из исходной системы, как правило, не совпадают, а задачи наблюдения и собственно управления решаются относительно разных координатных базисов, что требует при синтезе обратной связи выполнения прямых и обратных преобразований координат в реальном времени.

Возникает естественное желание упростить структуру регулятора, сформулировав и задачу наблюдения, и задачу собственно управления выходными переменными в терминах совместной эквивалентной блочной формы управляемости и наблюдаемости, на основе которой обе задачи могут быть решены относительно одних и тех же блоков преобразованных координат. В этом случае не потребуется выполнять в реальном времени прямых и обратных замен переменных, что, в частности, не потребует тотального знания матриц перехода, а синтез закона управления и наблюдателя состояния будет сведен к последовательному решению элементарных подзадач стабилизации невязок, размерности которых равны размерностям блоков блочной формы.

В следующем разделе формализуется класс линейных систем (1), в которых в принципе (т.е. в условиях полной определенности) имеется возможность обеспечить задачу слежения за произвольными задающими воздействиями.

2. Совместная блочно-каноническая форма управляемости и наблюдаемости

В данном разделе вводится понятие эквивалентной блочной модели «вход–выход» (СБКФ) системы (1), на основе которой группы компонент выходного вектора y_1 будут регулироваться группами «своих» управляющих координат (непосредственно или через цепочку интеграторов), не влияющих на поведение других групп выходных координат. СБКФ может быть получена в режиме *off-line* путем многократного (μ раз, где μ – максимальная относительная степень, $1 \le \mu \le n$) дифференцирования выходных переменных с целенаправленной неособой заменой фазовых координат выходными переменными и их производными до комплектации полного управления с матрицей ранга m_0.

Будем рассматривать общий случай, когда вектор выходных переменных может быть расщеплен на непересекающиеся группы компонент

(3) $\quad y_1 = \mathrm{col}(y_{11}, y_{12}, ..., y_{1\mu})$, $\dim y_{1i} = p_i$, $p_1 + ... + p_\mu = m_0$,

каждая из которых состоит из переменных, имеющих одинаковую относительную степень $\nu_i = i$, $1 \le \nu_i \le \mu \le n$, т.е. полное управление в соответствующих дифференциальных уравнениях относительно y_{1i} появляется минимум после i дифференцирований. В частных случаях все выходные переменные могут иметь одинаковую относительную степень $\nu_\mu = \mu$ и $p_\mu = m_0$; та или иная группа компонент y_{1i} ($i = 1, \ldots, \mu - 1$) может отсутствовать по признаку $p_i = 0$; расщеплению (3) подлежат линейно независимые комбинации выходных переменных ранга m_0, т.е. $H_{1y}y_1 = \mathrm{col}\,(y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1\mu})$, $\det H_y \ne 0$. Процесс «закрепления» за группами выходных переменных (или их линейных комбинаций), имеющих различную относительную степень, «своих» управляющих воздействий потребует также выполнения неособой замены координат вектора управления.

Введем понятие СБКФ системы (1), организация которой отражает указанную специфику задачи и является предпосылкой решения задачи слежения за произвольными задающими воздействиями в предположении, что оператор объекта управления известен, имеется информация о задающих и возмущающих воздействиях и их производных требуемого порядка.

Совместной блочно-канонической формой управляемости и наблюдаемости будем называть эквивалентную модель «вход–выход» исходной системы (1), полученную в результате преобразования фазовых координат и управляющих воздействий и имеющую блочную структуру вида

$$\dot{\bar{y}}_i = y_{i+1},\ \dot{\tilde{y}}_i = \sum_{j=1}^{\mu} \widetilde{A}_{ij} y_j^* + \widetilde{D}_i x_\mu + u_i + \widetilde{Q}_i f_{\mu-1},\ i = \overline{1,\ \mu-1};$$

(4)

$$\dot{y}_\mu^* = \sum_{j=1}^{\mu} A_{\mu j} y_j^* + D_\mu x_\mu + u_\mu + Q_\mu f_\mu,$$

(5) $$\dot{x}_\mu = \sum_{j=1}^{\mu} C_{\mu j} y_j^* + G_\mu x_\mu + S_\mu u_{\mu+1} + R_\mu f_{\mu-1},$$

где $f_i = \mathrm{col}(\eta, \dot{\eta}, ..., \eta^{(i-1)})$,

(6) $H_x x + \Lambda_\eta f_{\mu-1} = \mathrm{col}(y_1, ..., y_\mu, x_\mu)$, $\det H_x \neq 0$,

т.е. переменные системы (4) – координаты выходного вектора (или их линейно независимые комбинации) и их производные до $(\mu-1)$-го порядка – связаны с фазовыми координатами x неособыми преобразованиями (6), в которых задействованы компоненты вектора возмущений η и их производные до $(\mu-2)$-го порядка; $H_{iy} y_i = \mathrm{col}(\bar{y}_i, \tilde{y}_i) = y_i^*$; $\det H_{iy} \neq 0$, $i = \overline{1, \mu-1}$,

(7) $\dim \bar{y}_i = \dim y_{i+1} = m_i$, $m_0 + ... + m_\mu = l$, $l + \dim x_\mu = n$,

(8) $\dim \tilde{y}_i = \dim u_i = p_i$, $p_1 + ... + p_\mu = m_0$, $m_0 + \dim u_{\mu+1} = p$,

(9) $H_u u = \mathrm{col}(u_1, ..., u_\mu, u_{\mu+1})$, $\det H_u \neq 0$,

т.е. новые управления u_i являются независимыми линейными комбинациями компонент исходного вектора управления u. В общем случае в системе (4) могут отсутствовать любые подблоки относительно переменных $\tilde{y}_i$ по признаку $p_i = 0$. К переменным подсистемы (5), которые образуют внутреннюю динамику, предъявляется требование ограниченности решений:

(10) $\|x_\mu(t)\| \leq \overline{X} = \mathrm{const}$.

Если в системе (4)-(5) $\dim x_\mu = 0$, то будем называть ее полной СБКФ системы (1), при $\dim x_\mu \neq 0$ – неполной СБКФ, где переменные x_μ подсистемы (5) в общем случае могут быть и ненаблюдаемыми, и неуправляемыми. Тогда для работоспособности неполной СБКФ и выполнения условия (10) требуется устойчивость собственных движений нулевой динамики (5).

Блочно-каноническая форма (4) является совместной формой управляемости и наблюдаемости относительно выходных переменных в силу двойной функции, которую выполняют векторы y_{i+1} в подблоках относительно переменных $\bar{y}_i$:

– с одной стороны, при решении задачи наблюдения они подлежат оцениванию на i-ом шаге и трактуются как фиктивный выход полной размерности для $(i + 1)$-го блока [7]. Заметим, что речь идет о наблюдаемости линейных комбинаций фазовых переменных и возмущающих воздействий и их производных (6), в отличие от традиционной задачи наблюдения указанных координат по отдельности, которая может не иметь решения;

– с другой стороны, в задаче слежения они трактуются как фиктивные управления полной размерности [4, 16], целенаправленно выбираемые для обеспечения требуемой динамики $\bar{y}_i$. Требуемая же динамика компонент $\tilde{y}_i$ обеспечивается непосредственно с помощью выбора истинных управлений u_i.

Структура СБКФ (4) отражает прямые каналы действия управляющих воздействий u_i $(i = 1, \ldots, \mu)$ на выходные переменные $H_{1y}y_1 = \mathrm{col}(\bar{y}_1, \tilde{y}_1)$: $\tilde{y}_1$ полностью управляются посредством «своих» истинных u_1, $\bar{y}_1$ – посредством фиктивных управлений y_2, которые, в свою очередь, полностью управляются посредством «своих» истинных u_2 и фиктивных управлений y_3, и т.д., и, наконец, переменные y_μ полностью управляются «своими» истинными управлениями u_μ.

Таким образом, выходные переменные y_1 не фигурируют в качестве фиктивных управлений (так, как в примере 2) и будут отрабатывать «свои», а не «чужие» задающие воздействия, что является предпосылкой разрешимости задачи слежения. Заметим, что в системе (4) выполняются условия согласования, так как незадействованные в неособых преобразованиях (6) внешние возмущения и их производные сосредоточены в пространстве новых управлений. Особенность структуры СБКФ (4) позволит на ее основе решить и задачу наблюдения в указанном смысле, и задачу собственно управления выходными переменными относительно одного и того же координатного базиса, т.е. не потребуется выполнять в реальном времени прямых и обратных преобразований координат, что существенно упростит структуру регулятора.

Условия существования СБКФ, ее полнота и техническая реализуемость обусловлены структурными свойствами оператора объекта управления (1) и зависят от ранговых соотношений тройки матриц $(D\,(A, B))$. С целью выявить возможность трансформации исходной системы (1) в СБКФ, проведем анализ ее выходного отображения, составив избыточную систему путем дифференцирования выходных переменных n раз. Специфика построения выходного отображения заключается в том, что операции дифференцирования не предполагают порождение производных управляющих воздействий, а именно:

$$y_1 = Dx,\ \dot{y}_1 = DAx + DBu + DQ\eta,\ y_2 = DAx + DQ\eta;$$

$$\dot{y}_i = DA^i x + DA^{i-1}Bu + DA^{i-1}Q\eta + \sum_{j=1}^{i-1} DA^{i-1-j}Q\eta^{(j)},$$

$$y_{i+1} = DA^i x + DA^{i-1}Q\eta + \sum_{j=1}^{i-1} DA^{i-1-j}Q\eta^{(j)},\ i = \overline{2, n-1};$$

$$\dot{y}_n = DA^n x + DA^{n-1}Bu + DA^{n-1}Q\eta + \sum_{j=1}^{n-1} DA^{n-1-j}Q\eta^{(j)},$$

или в общем виде

(11) $\overline{Y} = \overline{A}x + \overline{B}u + \overline{Q}f_n$,

где $\overline{Y} = \mathrm{col}(y_1(t), \dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t), ..., \dot{y}_n(t))$, $\overline{Y} \in R^{m_0(n+1)}$, $\overline{A} \in R^{m_0(n+1)\times n}$, $\overline{B} \in R^{m_0(n+1)\times p}$, $\overline{Q} \in R^{m_0(n+1)\times qn}$, $f_n = \mathrm{col}(\eta, \dot{\eta}, ..., \eta^{(n-1)})$,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} D \\ DA \\ DA^2 \\ \ldots \\ DA^n \end{pmatrix}, \bar{B} = \begin{pmatrix} O \\ DB \\ DAB \\ \ldots \\ DA^{n-1}B \end{pmatrix}, \bar{Q} = \begin{pmatrix} O & O & \ldots & O \\ DQ & O & \ldots & O \\ DAQ & DQ & \ldots & O \\ \ldots & & & \\ DA^{n-1}Q & DA^{n-2}Q & \ldots & DQ \end{pmatrix},$$

здесь и далее O – нулевая матрица соответствующей размерности. С учетом введенных обозначений i-е уравнения системы (11) имеют вид $\dot{y}_i = y_{i+1} + DA^{i-1}Bu$, $i = 1, \ldots, n - 1$.

Прообраз СБКФ (4) – это $m_0 \leq l \leq n$ ($l = m_0 + \ldots m_\mu$) дифференциальных уравнений системы (11) относительно переменных $\bar{y} \in R^l$, $\bar{y} \subset \bar{Y}$, которые определяются путем последовательного «наращивания» базисных строк матриц $(\bar{A} \;\; \bar{B})$ так, чтобы поставить в соответствие всем компонентам вектора $y_1 \in R^{m_0}$ линейно независимые комбинации компонент вектора управления u ранга m_0; всем переменным вектора $\bar{y} \in R^l$ – линейно независимые комбинации компонент вектора x ранга l.

Теорема (достаточные условия существования СБКФ). Если оператор линейной стационарной системы (1), где $\eta(t) \in R^q$ – гладкие функции времени, $0 < \operatorname{rank} D = m_0 \leq$ $\leq \operatorname{rank} B = p < n$, удовлетворяет условиям:

1) $\operatorname{rank} \bar{B}_\mu = m_0$;
2) $\operatorname{rank} (\bar{A} \;\; \bar{B})_\mu = m_0 + l,\ m_0 \leq l \leq n$,

где $\bar{B}_\mu = \begin{pmatrix} DB \\ DAB \\ \ldots \\ DA^{\mu-1}B \end{pmatrix}$, $(\bar{A} \;\; \bar{B})_\mu = \begin{pmatrix} D & O \\ DA & DB \\ \ldots & \\ DA^{\mu-1} & DA^{\mu-2}B \\ O & DA^{\mu-1}B \end{pmatrix}$, $1 \leq \mu \leq n$, то существуют неособые преобразования (6), (9), позволяющие представить систему (1) в виде СБКФ (4)-(5).

Первое условие теоремы, обусловленное выполнением в системе (11) неравенства

(12) $\operatorname{rank}\bar{B} \ge m_0$,

определяет существование неособой замены координат вектора управления (9) и обеспечение m_0 выходных переменных «своими» управляющими воздействиями. В противном случае часть выходных переменных размерности $m_0 - \operatorname{rank}\bar{B}$ будет неуправляема в контексте рассматриваемой задачи слежения, т.е. будет вынуждена отрабатывать «чужие» задающие воздействия.

Исследуем структуру матрицы $\bar{B}$, последовательно наращивая ее блоки, определяя их совместный ранг и фиксируя базисные строки до набора m_0 базисных строк:

$$\bar{B}_1 = DB,\ \operatorname{rank}\bar{B}_1 = p_1 < m_0,$$

$$\bar{B}_2 = \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ DAB \end{pmatrix},\ \operatorname{rank}\bar{B}_2 = p_1 + p_2 < m_0,\ \ldots,$$

(13) $$\bar{B}_\mu = \begin{pmatrix} \bar{B}_{\mu-1} \\ DA^{\mu-1}B \end{pmatrix},\ \operatorname{rank}\bar{B}_\mu = p_1 + \ldots + p_{\mu-1} + p_\mu = m_0,\ 1 \le \mu \le n,$$

где $\mu = \nu_{\max}$ – максимальная относительная степень, при этом любое из чисел p_i (кроме p_μ) может быть равно нулю по признаку $\operatorname{rank}\bar{B}_i = \operatorname{rank}\bar{B}_{i-1} = p_1 + \ldots + p_{i-1}$.

Выявленная структура верхних блоков матрицы $\bar{B}$ ($m_0 \le \operatorname{rank}\bar{B} \le p$), т.е. ее m_0 линейно независимых строк, которые включают p_1 строк матрицы DB, p_2 строк матрицы DAB, …, p_μ строк матрицы $DA^{\mu-1}B$, обуславливает расщепление вектора выходных переменных на непересекающиеся группы компонент (3). Соответствующая расщеплению (3) цепочка интеграторов (уравнения относительно части переменных избыточной системы (11) $\bar{y} \subset \bar{Y}$), имеет размерность

(14) $l = p_1\nu_1 + p_2\nu_2 + \ldots + p_\mu\nu_\mu \le n$.

При $l < n$ останутся несвязанные переменные вектора x размерности $n - l$, образующие внутреннюю динамику (5) СБКФ.

Второе условие определяет существование неособого преобразования (6), т.е. однозначного соответствия между l фазовыми координатами исходной системы (1) с выходными переменными y_1 и частью их производных (11) по следующей схеме: со всеми m_0 переменными вектора y_1, с $m_0 - p_1 = m_1$ переменными вектора y_2, с $m_1 - p_2 = m_2$ переменными вектора y_3, …, с $m_{\mu-2} - p_{\mu-1} = m_{\mu-1} = p_\mu$ переменными вектора $y_{\mu-1}$.

В тривиальной ситуации, когда $\forall p_i = 0$ $(i = 1, \ldots, \mu - 1)$ и $p_\mu = m_0$, т.е. все компоненты выходного вектора имеют одинаковую относительную степень $\nu_{\max} = \mu$ и $l = \mu m_0$, преобразование (6) существует тогда, когда матрица $\bar{A}$ расширенной системы (11) имеет следующую структуру:

$$\bar{A}_0 = D,\ \mathrm{rank}\,\bar{A}_0 = m_0,\ \bar{A}_1 = \begin{pmatrix} \bar{A}_0 \\ DA \end{pmatrix},\ \mathrm{rank}\,\bar{A}_1 = m_0 + m_0,\ \ldots,$$

$$\bar{A}_{\mu-1} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{\mu-2} \\ DA^{\mu-1} \end{pmatrix},\ \mathrm{rank}\,\bar{A}_{\mu-1} = \mu m_0.$$

В нетривиальной ситуации требуется совместное рассмотрение матриц $\bar{A}_{\mu-1}$ и $\bar{B}_\mu$. Неособое преобразование (6) существует тогда, когда структура данных матриц соответствует указанной выше схеме трансформации, а именно:

$$(\bar{A}\ \ \bar{B})_0 = (D\ \ O),\ \mathrm{rank}\,(\bar{A}\ \ \bar{B})_0 = m_0,$$

$$(\bar{A}\ \ \bar{B})_1 = \begin{pmatrix} (\bar{A}\ \ \bar{B})_0 \\ DA\ \ DB \end{pmatrix},\ \mathrm{rank}\,(\bar{A}\ \ \bar{B})_1 = m_0 + (m_1 + p_1),$$

$$m_1 + p_1 = m_0;\ (\bar{A}\ \ \bar{B})_2 = \begin{pmatrix} (\bar{A}\ \ \bar{B})_1 \\ DA^2\ \ DAB \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{rank}\,(\bar{A}\ \ \bar{B})_2 = m_0 + (m_1 + p_1) + (m_2 + p_2),\ m_2 + p_2 = m_1, \ldots,$$

$$(\overline{A}\ \ \overline{B})_{\mu-1} = \begin{pmatrix} (\overline{A}\ \ \overline{B})_{\mu-2} \\ DA^{\mu-1}\ \ DA^{\mu-2}B \end{pmatrix},$$

$$(15)\quad \operatorname{rank}(\overline{A}\ \ \overline{B})_{\mu-1} = m_0 + (m_1 + p_1) + \ldots + (m_{\mu-1} + p_{\mu-1}),$$

$$m_{\mu-1} + p_{\mu-1} = m_{\mu-2},\ (\overline{A}\ \ \overline{B})_{\mu} = \begin{pmatrix} (\overline{A}\ \ \overline{B})_{\mu-1} \\ O\ \ DA^{\mu-1}B \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{rank}(\overline{A}\ \ \overline{B})_{\mu} = m_0 + (m_1 + p_1) + \ldots + (m_{\mu-1} + p_{\mu-1}) + p_{\mu} = m_0 + l,$$

$$p_{\mu} = m_{\mu-1}.$$

В противном случае, когда при определении ранга матрицы $(\overline{A}\ \ \overline{B})_i$ возникает ситуация $m_i + p_i < m_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, \mu - 1)$, тогда часть выходных переменных размерности $m_{i-1} - (m_i + p_i) > 0$ теряют связь со «своими» управляющими воздействиями, т.е. становятся неуправляемыми в контексте задачи слежения. Ситуация $m_i + p_i > m_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, \mu - 1)$ невозможна в силу структуры матрицы наблюдаемости $\overline{A}$ [1]. Теорема доказана.

Заметим, что совместное рассмотрение матриц $\overline{A}$ и $\overline{B}$ в (15) может привести к сужению наблюдаемого подпространства пары (D, A), так как на каждой i-ой итерации p_i строк матрицы DA^i (независимо от того, являются они базисными строками матрицы $\overline{A}$ или нет) и соответствующие им компоненты вектора y_{i+1} и их производные выбывают из дальнейших построений.

Построения (15) приводят к возможному сужению наблюдаемого подпространства пары (D, A), по сути, означают выделение наблюдаемого подпространства пары (D, A), не принадлежащего пространству управления.

Таким образом, СБКФ – упорядоченное выходное отображение, описываемое системой (11), которое при выполнении условий (13)-(15) может быть представлено в виде системы взаимосвязанных блоков (цепочек интеграторов), переменные которых являются укороченными, линейно независимыми и преобразованными неособым образом (6) производными компонент вектора выходных переменных y_1 с выполнением согласованной неособой замены координат вектора управляющих воздействий (9).

Нахождение матриц неособых преобразований (6), (9) перехода к СБКФ осложняется предположениями о неопределенности части параметров системы (1). Заметим, что практически все известные неособые преобразования линейных систем в те или иные канонические формы предполагают знание параметров [5].

В следующем разделе в рамках блочного подхода разработана пошаговая процедура трансформации системы (1) в СБКФ (4)-(5), в которой проверка условий (13)-(15), процедуры замены переменных (6), (9) и преобразований подобия декомпозируются на последовательные подзадачи размерности m_i и допускают указанную неопределенность параметров.

3. Процедура конструктивного анализа

В данном разделе разработана пошаговая процедура анализа разрешимости задачи и приведения исходной системы (1) к СБКФ (4)-(5). Каждый i-ый ($i = 1, \ldots, \mu - 1$) шаг процедуры состоит в общем случае из следующих операций:

П1 – получение дифференциального уравнения относительно переменных $y_i \in R^{m_{i-1}}$ (i-го блока СБКФ) и его анализ;

П2 – приведение i-го блока к регулярной форме относительно истинного управления (выделение p_i базисных строк матрицы $\overline{B}$ (11) и обнуление ее линейно зависимых строк), что позволяет сформировать линейные комбинации i-ых производных выходных переменных $y_{i+1} \in R^{m_i}$ ($m_i \le m_{i-1}$), подлежащих повторному дифференцированию;

П3 – закрепление за i-ой группой выходных переменных «своих» управляющих воздействий с неособой заменой координат вектора управления (при $p_i \ne 0$);

П4 – аннулирование в непреобразованной подсистеме управлений, закрепленных за j-ми ($j = 1, \ldots, i$) группами выходных переменных.

На каждом шаге комплексно проверяются условия существования СБКФ (4)-(5): условие А (все фазовые переменные x будут преобразованы в новые переменные $y_1, \ldots, y_i$, $y_i \in R^{m_{i-1}}$); условие В (все группы выходных переменных (3) будут обеспечены «своими» группами истинных управлений); условие С (пролонгация процедуры на следующий шаг), а именно:

$m_0 + \ldots + m_{i-1} = n$ (Аi*),

$m_0 + \ldots + m_{i-1} < n$ (Аi**);

$p_1 + \ldots + p_i = m_0 \le p$ (Вi*),

$p_1 + \ldots + p_i < m_0$ (Вi**);

$m_i + p_i < m_{i-1}$ или $m_i + p_i = m_{i-1}$, $p_1 + \ldots + p_i = p$ (Сi*),

$m_i = m_{i-1}$, $p_i = 0$ (С1**),

$m_i + p_i = m_{i-1}$, $p_1 + \ldots + p_i < p$, $p_i > 0$ (С1***).

Процедура заканчивает на i-ом шаге в следующих случаях:

(Аi*, Вi**); (Аi**, Вi**, Сi*) – СБКФ не существует, требуется либо корректировка цели управления, либо аппаратная доработка системы (см. пример 2);

(Аi*, Вi*) – получена полная СБКФ;

(Аi**, Вi*) – получена неполная СБКФ с внутренней динамикой, для которой проверяется условие (10);

При выполнении условий (Аi**, Вi**, Сi**(Сi***)) процедура пролонгируется на следующий шаг.

На рис. 1 показана блок-схема процедуры конструктивного анализа, «черным квадратом» обозначен конец процедуры.

С практической точки важно, что при таком пошаговом рассмотрении оператора системы (1) появляется возможность выявления проблемных (нестационарных или плохо обусловленных) фрагментов матриц и их резервации. Конечный вид системы последовательно формируется из блоков, в ходе процедуры имеется возможность корректировать построения на каждом шаге, чтобы получить добротную конструкцию, тогда как в общем случае приходится искать различные варианты реализации (6), (9), работая с матрицами избыточной системы (11).

Операции, связанные с перебором различных сочетаний базисных миноров и проверки их обусловленности, образуют дополнительную логику, не отраженную на рис. 1, но являющуюся неотъемлемой частью процедуры.

Процедура трансформации системы (1) в СБКФ (4)-(5).

Шаг 1. В тривиальном случае процедура может состоять из одного шага. Для однородности изложения рассмотрим этот случай, сняв априорные предположения о ранговых соотношениях матриц системы (1), кроме следующего: rank $D = m_0 \neq 0$.

А) В системе (1) выполняется одно из условий:

(A1*) $m_0 = n$ $(\dim y_1 = \dim x)$,

(A1**) $m_0 < n$ $(\dim y_1 < \dim x)$.

Переходим к первой операции, которая в зависимости от указанных вариантов имеет следующую реализацию.

A1*, П1) Все компоненты вектора состояния x связаны взаимнооднозначным соответствием с компонентами вектора выходных переменных $x = D^{-1}y_1$, $\det D_{m_0 \times m_0} \neq 0$. После дифференцирования и обратной подстановки имеем

(16) $\dot{y}_1 = A_{11}y_1 + B_1u + Q_1\eta$,

где $A_{11} = DAD^{-1}$, $B_1 = DB$, $Q_1 = DQ$. Анализ оператора системы (16) позволяет сделать вывод о разрешимости поставленной задачи слежения.

В) Обозначим rank $B_1 = p_1 \leq p$. В системе (16) выполняется одно из условий:

(B1*) $p_1 = m_0$ (rank $B_1 = \dim y_1$),

(B1**) $p_1 < m_0$ (rank $B_1 < \dim y_1$).

В случае (A1*, B1*) все компоненты выходных переменных обеспечены своим управляющим воздействием, получена полная СБКФ, состоящая из одного блока (16); на ее основе переходим к задаче синтеза обратной связи.

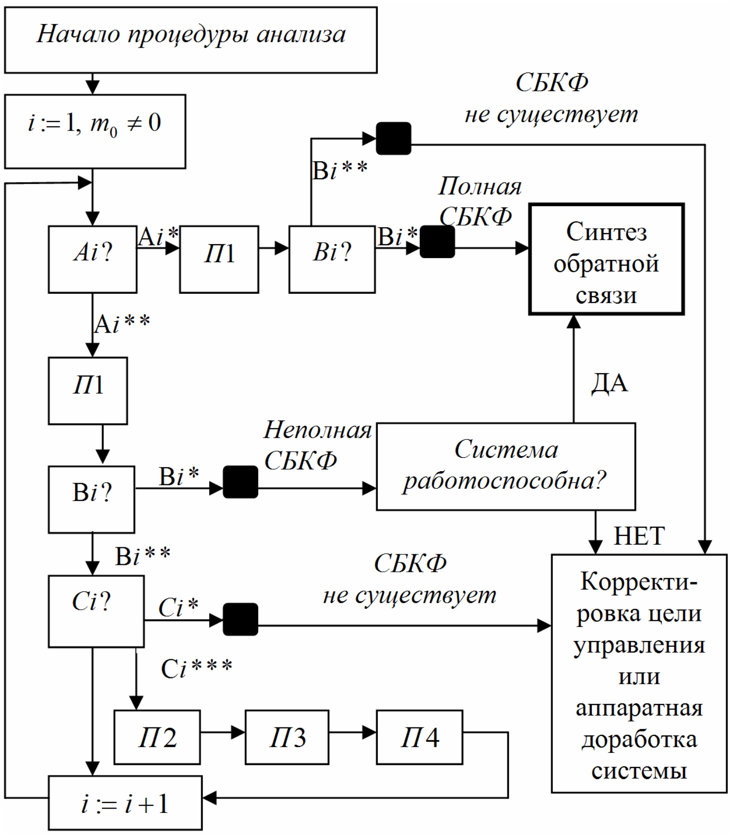

Рис. 1. Блок-схема процедуры конструктивного анализа

В случае (A1*, B1**) часть выходных переменных размерности ($m_0 - \operatorname{rank} B_1$) не обеспечена истинным управлением и будет вынуждена отрабатывать «чужие» задающие воздействия. Процедура заканчивается, СБКФ не существует.

A1**, П1) Перегруппируем компоненты вектора состояния $x = \operatorname{col}(\tilde{x}_1,\ x_1)$, $\tilde{x}_1 \in R^{m_0}$, $x_1 \in R^{n-m_0}$ так, чтобы в линейном разложении $y_1 = Dx = D_{11}\tilde{x}_1 + D_{12}x_1$ выполнялось условие $\det D_{11} \neq 0$, что позволяет установить взаимнооднозначное соответствие между выходными переменными и координатами вектора состояния $\tilde{x}_1$:

$$x \mapsto H_{11}\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ x_1 \end{pmatrix},\ H_{11} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ O & I_{n-m_0} \end{pmatrix},\ \det H_{11} \neq 0\,,$$

здесь и далее I – единичная матрица указанной размерности.

Представим систему (1) в виде двух подсистем

$$\begin{aligned} &\dot{y}_1 = A_{11}y_1 + D_1x_1 + B_1u + Q_1\eta, \\ &\dot{x}_1 = C_{11}y_1 + G_1x_1 + S_1u + R_1\eta, \end{aligned} \tag{17}$$

где $H_{11}AH_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & D_1 \\ C_{11} & G_1 \end{pmatrix},\ H_{11}B = \begin{pmatrix} B_1 \\ S_1 \end{pmatrix},\ H_{11}Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ R_1 \end{pmatrix}.$

Далее в первом уравнении (17) выполняется комплексный анализ матриц D_1, B_1 в контексте решаемой задачи.

B) В первом уравнении (17) выполняется одно из условий: (B1*) или (B1**). В случае (A1**, B1*) все компоненты выходных переменных «обеспечены» своим управляющим воздействием, получена неполная СБКФ, переходим к проверке работоспособности (10) системы (17). В случае (A1**, B1**) приступаем к проверке следующего условия.

C) В первом уравнении (17) выполняется одно из условий:

(C1*) $\quad \operatorname{rank}\begin{pmatrix} D_1 & B_1 \end{pmatrix} < m_0$ или $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} D_1 & B_1 \end{pmatrix} = m_0$ и $p_1 = p$,

(C1**) $\quad \dim y_1 = \operatorname{rank} D_1 = m_0 \ \ p_1 = 0$,

(C1***) $\quad \dim y_1 = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} D_1 & B_1 \end{pmatrix} = m_1 + p_1 = m_0$ и $0 < p_1 < p$.

В первом варианте (C1*) часть выходных переменных не обеспечивается фиктивным управлением, в качестве которого рассматриваются фазовые переменные x_1, а во втором – уже фиктивные управления x_1 не обеспечены истинным управлением. Процедура заканчивается, СБКФ не существует.

В случаях (C1**), (C1***) все выходные переменные обеспечены фиктивным и/или истинным управлением.

Результат первого шага в случае (A1**, B1**, C1**). В системе (17) $B_1 = O$, т.е. весь вектор первых производных выходных переменных подлежит повторному дифференцированию. Для единообразия изложения обозначим $y_2 = A_{11}y_1 + \overline{D}_1 x_1 + Q_1\eta$, где $D_1 := \overline{D}_1$, $\operatorname{rank}\overline{D}_1 = \dim y_1$ первая подсистема системы (17) примет вид первого блока СБКФ $\dot{y}_1 = y_2$. Переходим на второй шаг процедуры, где аналогичные построения применяются для второй подсистемы (17) с фиктивным выходом $y_2 \in R^{m_1}$, $m_1 = m_0$.

В случае (A1**, B1**, C1***) выполняем аннулирующие преобразования, которые позволят непосредственно сформировать комбинацию производных выходных переменных $\dot{y}_1$, которые не зависят от управления и подлежат второму дифференцированию.

П2) В соответствии с логикой изложения, преобразования данного пункта выполняются, когда $0 < p_1 < m_0$.

С помощью перестановки строк выполним следующее расщепление первой подсистемы (17):

$$(18)\ B_1 = \begin{pmatrix} \widehat{B}_1 \\ \widetilde{B}_1 \end{pmatrix},\ y_1 = \begin{pmatrix} \widehat{y}_1 \\ \widetilde{y}_1 \end{pmatrix},\ A_{11} = \begin{pmatrix} \widehat{A}_{11} \\ \breve{A}_{11} \end{pmatrix},\ D_1 = \begin{pmatrix} \widehat{D}_1 \\ \widetilde{D}_1 \end{pmatrix},\ Q_1 = \begin{pmatrix} \widehat{Q}_1 \\ \widetilde{Q}_1 \end{pmatrix},$$

где $\operatorname{rank} B_1 = \operatorname{rank}\tilde{B}_1 = \dim\tilde{y}_1 = p_1$, $\dim\widehat{y}_1 = m_0 - p_1 = m_1$.

Обнулим линейно зависимые строки матрицы B_1 с помощью неособой замены переменных $\overline{y}_1 = \widehat{y}_1 - B_1^*\widetilde{y}_1$, где $B_1^*\widetilde{B}_1 = \widehat{B}_1$, и выполним соответствующие преобразования подобия:

$$(19)\ y_1 \mapsto H_{12}\begin{pmatrix} \widehat{y}_1 \\ \widetilde{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{y}_1 \\ \widetilde{y}_1 \end{pmatrix} = y_1^*,\ H_{12} = \begin{pmatrix} I_{m_0-p_1} & -B_1^* \\ O & I_{p_1} \end{pmatrix},\ \det H_{12} \neq 0,$$

$$H_{12}\begin{pmatrix} \widehat{D}_1 & \widehat{B}_1 \\ \widetilde{D}_1 & \widetilde{B}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{D}_1 & O \\ \widetilde{D}_1 & \widetilde{B}_1 \end{pmatrix},\ H_{12}\begin{pmatrix} \widehat{A}_{11} \\ \breve{A}_{11} \end{pmatrix} H_{12}^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{A}_{11} \\ \widetilde{A}_{11} \end{pmatrix},\ H_{12}\begin{pmatrix} \widehat{Q}_1 \\ \widetilde{Q}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{Q}_1 \\ \widetilde{Q}_1 \end{pmatrix},$$

$C_{11}H_{12}^{-1} = \overline{C}_{11}$, $B_1^* = \widehat{B}_1\widetilde{B}_1^+$ – реализация аннулирующей матрицы, где $\tilde{B}_1^+ = \tilde{B}_1^{\mathrm{T}}(\tilde{B}_1\tilde{B}_1^{\mathrm{T}})^{-1}$ – псевдообратная матрица матрицы $\widetilde{B}_1$. Неособые преобразования не изменяют ранга матрицы, а именно: $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} D_1 & B_1 \end{pmatrix} = m_1 + p_1 = m_0 \Rightarrow \operatorname{rank}\overline{D}_1 = m_1 = \dim\overline{y}_1$, $m_1 \neq 0$.

Отметим, что если в расщеплении (18)

(20) $\widehat{B}_1 = O$,

то неособая замена переменных (19) не выполняется. Для единообразия изложения будем полагать, что в этом случае H_{12} с точностью до перестановок столбцов равна единичной матрице.

П3) Во втором подблоке (19) p_1 координат вектора управления, соответствующих базисным столбцам матрицы $\widetilde{B}_1$, фиксируются в качестве управляющих воздействий для p_1 компонент вектора $\widetilde{y}_1$ с помощью неособой замены $\widetilde{B}_1 u = u_1$, а именно:

$$(21)\quad u \mapsto H_{13}\begin{pmatrix} \widetilde{u}_1 \\ u_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2^* \end{pmatrix},\ H_{13} = \begin{pmatrix} \widetilde{B}_{11} & \widetilde{B}_{12} \\ O & I_{p-p_1} \end{pmatrix},\ \widetilde{B}_1 = (\widetilde{B}_{11} \quad \widetilde{B}_{12}),$$

$$\det \widetilde{B}_{11} \neq 0,\ \det H_{13} \neq 0,\ \widetilde{u}_1, u_1 \in R^{p_1},\ u_2^* \in R^{p-p_1},$$

$$\widetilde{u}_1 = \widetilde{B}_{11}^{-1}(u_1 - \widetilde{B}_{12}\overline{u}_2),\ \widetilde{B}_1 H_{13}^{-1} = I_{p_1},\ S_1 H_{13}^{-1} = (P_{11} \quad S_1^*).$$

В результате преобразований (19), (21) система (17) принимает вид

$$\dot{\overline{y}}_1 = \overline{A}_{11} y_1^* + \overline{D}_1 x_1 + \overline{Q}_1 \eta = y_2,$$

$$(22)\quad \dot{\widetilde{y}}_1 = \widetilde{A}_{11} y_1^* + \widetilde{D}_1 x_1 + u_1 + \widetilde{Q}_1 \eta,$$

$$\dot{x}_1 = C_{11}^* y_1^* + G_1 x_1 + P_{11} u_1 + S_1^* u_2^* + R_1 \eta,$$

где $y_2 \in R^{m_1}$ – сформированные неособым образом (19) линейные комбинации первых производных выходных переменных, подлежащие повторному дифференцированию. Тот факт, что неособая замена $y_2 = \overline{A}_{11} y_1^* + \overline{D}_1 x_1 + \overline{Q}_1 \eta$, где $\operatorname{rank} \overline{D}_1 = \dim y_2 = m_1$, зависит от внешних возмущений, приведет после дифференцирования к появлению их производных, что допустимо в рассматриваемом классе систем.

П4) С целью исключить из дифференциального уравнения относительно y_2 управляющие воздействия u_1, зарезервированные для переменных $\widetilde{y}_1$, введем неособую замену переменных

$$(23)\quad \hat{y}_2 = y_2 - B_{21}\widetilde{y}_1,\ B_{21} = \widetilde{\overline{A}}_{11} + \overline{D}_1 P_{11},\ \overline{A}_{11} y_1^* = \overline{\overline{A}}_{11}\overline{y}_1 + \widetilde{\overline{A}}_{11}\widetilde{y}_1,$$

$$H_{14}\begin{pmatrix}\widetilde{y}_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\widetilde{y}_1\\ \hat{y}_2\end{pmatrix},\ H_{14}=\begin{pmatrix}I_{p_1} & O\\ -B_{21} & I_{m_1}\end{pmatrix},\ \det H_{14}\neq 0,\ \hat{y}_2\in R^{m_1}.$$

Переходим на второй шаг, где аналогичные преобразования выполняются для последней подсистемы (22) с фиктивным выходом (23), который возьмем за основу изложения как более общий случай, по сравнению с (A1**, B1**, C1**).

Шаг 2. A) На втором шаге с учетом $\operatorname{rank}\overline{D}_1=m_1\neq 0$ выполняется одно из условий:

(A2*) $m_0+m_1=n$ ($\dim\hat{y}_2=\dim x_1$),

(A2**) $m_0+m_1<n$ ($\dim\hat{y}_2<\dim x_1$).

A2*, П1) Все компоненты вектора состояния x_1 связаны взаимнооднозначным соответствием с компонентами вектора $\hat{y}_2$: $x_1=\overline{D}_1^{-1}(\hat{y}_2+B_{21}\widetilde{y}_1-\overline{A}_{11}y_1^*-\overline{Q}_1\eta)$, $\det\overline{D}_{1(m_1\times m_1)}\neq 0$. После дифференцирования и обратной подстановки имеем

(24) $\dot{\hat{y}}_2=A_{21}y_1^*+A_{22}\hat{y}_2+B_2u_2^*+Q_2f_2$, $f_2=\operatorname{col}(\eta,\dot{\eta})$.

B) Обозначим $\operatorname{rank}B_2=p_2$, $p_1+p_2\leq p$. В системе (25) выполняется одно из условий:

(B2*) $p_2=m_1$ ($\operatorname{rank}B_2=\dim\hat{y}_2$),

(B2**) $p_2<m_1$ ($\operatorname{rank}B_2<\dim\hat{y}_2$).

В случае (A2*, B2*) все компоненты выходных переменных обеспечены своим управляющим воздействием, получена полная СБКФ, состоящая из двух блоков – первых двух подсистем (22) и (24); на ее основе переходим к задаче синтеза обратной связи. В случае (A2*, B2**) часть выходных переменных размерности ($m_1-\operatorname{rank}B_2$) не обеспечена истинным управлением и будет вынуждена отрабатывать «чужие» задающие воздействия. Процедура заканчивается, СБКФ не существует.

A2**, П1) В отличие от замены переменных H_{11}, начиная со второго шага в неособых преобразованиях участвуют предыдущие переменные и внешние возмущения. Перегруппируем компоненты вектора состояния $x_1=\operatorname{col}(\tilde{x}_2,\,x_2)$, $\widetilde{x}_2\in R^{m_1}$,

$x_2 \in R^{n-m_0-m_1}$ так, чтобы в линейном разложении $\hat{y}_2 = \overline{\overline{A}}_{11}\overline{y}_1 - \overline{D}_1 P_{11}\tilde{y}_1 + \overline{Q}_1\eta + D_{21}\tilde{x}_2 + D_{22}x_2$ выполнялось условие $\det D_{21} \neq 0$, что позволяет установить взаимнооднозначное соответствие между переменными (23) и координатами вектора состояния $\tilde{x}_2$:

$$(25)\quad H_{21}\begin{pmatrix} y_1^* \\ \eta \\ \tilde{x}_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^* \\ \eta \\ \hat{y}_2 \\ x_2 \end{pmatrix},\ H_{21} = \begin{pmatrix} I_{m_0} & O & O & O \\ O & I_q & O & O \\ (\overline{\overline{A}}_{11} - \overline{D}_1 P_{11}) & \overline{Q}_1 & D_{21} & D_{22} \\ O & O & O & I_{n-m_0-m_1} \end{pmatrix},$$

где $\det H_{21} \neq 0$. После дифференцирования и обратной подстановки в силу (25) имеем:

$$(26)\quad \begin{aligned} \dot{\hat{y}}_2 &= A_{21}y_1^* + A_{22}\hat{y}_2 + D_2 x_2 + B_2 u_2^* + Q_2 f_2, \\ \dot{x}_2 &= C_{21}y_1^* + \hat{C}_{22}\hat{y}_2 + G_2 x_2 + P_{21}u_1 + S_2 u_2^* + R_2\eta. \end{aligned}$$

В первом уравнении (26) выполняется комплексный анализ матриц D_2, B_2 в контексте решаемой задачи.

B) В первом уравнении (26) выполняется одно из условий: (B2*) или (B2**). В случае (A2**, B2*) все компоненты выходных переменных «обеспечены» своим управляющим воздействием, получена неполная СБКФ, переходим к проверке работоспособности (10) системы (26). В случае (A2**, B2**) приступаем к проверке следующего условия.

C) В первом уравнении (26) выполняется одно из условий:

(C2*) $\operatorname{rank}(D_2\ \ B_2) < m_1$ или $\operatorname{rank}(D_2\ \ B_2) = m_1$ и $p_1 + p_2 = p$,

(C2**) $\dim \hat{y}_2 = \operatorname{rank} D_2 = m_1\ \ p_2 = 0$,

(C2***) $\dim \hat{y}_2 = \operatorname{rank}(D_2\ \ B_2) = m_2 + p_2 = m_1$,

$0 < p_2,\ p_1 + p_2 < p$.

В первом варианте (C2*) часть выходных переменных не обеспечивается фиктивным управлением, в качестве которого рассматриваются фазовые переменные x_2, а во втором – уже фиктивные управления x_2 не обеспечены истинным управлением. Процедура заканчивается, СБКФ не существует.

В случаях (C2**), (C2***) все выходные переменные обеспечены фиктивным и/или истинным управлением.

Результат второго шага в случае (A2**, B2**, C2**). В системе (26) $B_2 = O$, т.е. весь вектор первых производных выходных переменных подлежит повторному дифференцированию. Для единообразия изложения обозначим $y_3 = A_{21}y_1^* + A_{22}\hat{y}_2 + \overline{D}_2 x_2 + Q_2 f_2$, где $D_2 := \overline{D}_2$, $\operatorname{rank}\overline{D}_2 = \dim\hat{y}_2$, тогда первое уравнение (26) примет вид второго блока СБКФ $\dot{\hat{y}}_2 = y_3$. Переходим на третий шаг процедуры, где аналогичные построения применяются для второй подсистемы (26) с фиктивным выходом $y_3 \in R^{m_2}$, $m_2 = m_1$.

В случае (A2**, B2**, C2***) выполняем аннулирующие преобразования, которые позволят непосредственно сформировать комбинацию вторых производных выходных переменных, которые не зависят от управления и подлежат повторному дифференцированию.

П2) В соответствии с логикой изложения, преобразования данного пункта выполняются, когда $0 < p_2 < m_1$.

С помощью перестановки строк выполним (аналогично (18)) расщепление первой подсистемы (26):

$$(27)\ B_2 = \begin{pmatrix} \widehat{B}_2 \\ \widetilde{B}_2 \end{pmatrix},\ \hat{y}_2 = \begin{pmatrix} \widehat{y}_2 \\ \widetilde{y}_2 \end{pmatrix},\ A_{22} = \begin{pmatrix} \widehat{A}_{22} \\ \breve{A}_{22} \end{pmatrix},\ D_2 = \begin{pmatrix} \widehat{D}_2 \\ \widetilde{D}_2 \end{pmatrix} \text{ и др.,}$$

где $\operatorname{rank} B_2 = \operatorname{rank}\tilde{B}_2 = \dim\widetilde{y}_2 = p_2$, $\dim\widehat{y}_2 = m_1 - p_2 = m_2$.

Обнулим линейно зависимые строки матрицы B_2 с помощью неособой замены переменных $\overline{y}_2 = \widehat{y}_2 - B_2^*\widetilde{y}_2$, где $B_2^*\widetilde{B}_2 = \widehat{B}_2$ (например, $B_2^* = \widehat{B}_2\widetilde{B}_2^+$, $\tilde{B}_2^+ = \tilde{B}_2^{\mathrm{T}}(\tilde{B}_2\tilde{B}_2^{\mathrm{T}})^{-1}$), и выполним соответствующие преобразования подобия:

$$(28)\ \hat{y}_2 \mapsto H_{22}\begin{pmatrix} \widehat{y}_2 \\ \widetilde{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{y}_2 \\ \widetilde{y}_2 \end{pmatrix} = y_2^*,\ H_{22} = \begin{pmatrix} I_{m_1-p_2} & -B_2^* \\ O & I_{p_2} \end{pmatrix},\ \det H_{22} \neq 0,$$

$$H_{22}\begin{pmatrix}\widehat{D}_2 & \widehat{B}_2\\ \widetilde{D}_2 & \widetilde{B}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{D}_2 & O\\ \widetilde{D}_2 & \widetilde{B}_2\end{pmatrix},\ H_{22}\begin{pmatrix}\widehat{A}_{22}\\ \breve{A}_{22}\end{pmatrix}H_{22}^{-1}=\begin{pmatrix}\overline{A}_{22}\\ \widetilde{A}_{22}\end{pmatrix},\ \text{и др.,}$$

где $\operatorname{rank}(D_2\ \ B_2)=m_2+p_2=m_1 \Rightarrow \operatorname{rank}\overline{D}_2=m_2=\dim\overline{y}_2$, $m_2\neq 0$.

Если в расщеплении (27) $\widehat{B}_2=O$, то неособая замена переменных (28) не выполняется. Для единообразия изложения будем полагать, что в этом случае H_{22} с точностью до перестановок столбцов равна единичной матрице.

П3) Во втором подблоке (28) p_2 координат вектора управления u_2^*, соответствующих базисным столбцам матрицы $\widetilde{B}_2$, фиксируются в качестве управляющих воздействий для p_2 компонент вектора $\widetilde{y}_2$ с помощью неособой замены $\widetilde{B}_2u_2^*=u_2$:

(29) $$u_2^*\mapsto H_{23}\begin{pmatrix}\widetilde{u}_2\\ u_3^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_2\\ u_3^*\end{pmatrix},\ H_{23}=\begin{pmatrix}\widetilde{B}_{21} & \widetilde{B}_{22}\\ O & I_{p-p_1-p_2}\end{pmatrix},\ \widetilde{B}_2=(\widetilde{B}_{21}\ \widetilde{B}_{22}),$$

$$\det\widetilde{B}_{21}\neq 0,\ \det H_{23}\neq 0,\ \widetilde{u}_2,u_2\in R^{p_2},\ u_3^*\in R^{p-p_1-p_2},$$

$$\widetilde{u}_2=\widetilde{B}_{21}^{-1}(u_2-\widetilde{B}_{22}u_3^*),\ \widetilde{B}_2H_{23}^{-1}=I_{p_2},\ S_2H_{23}^{-1}=(P_{22}\ \ S_2^*).$$

В результате (28)–(29) система (26) принимает вид

(30) $$\begin{aligned}&\dot{\overline{y}}_2=\overline{A}_{21}y_1^*+\overline{A}_{22}y_2^*+\overline{D}_2x_2+\overline{Q}_2f_2=y_3,\\ &\dot{\widetilde{y}}_2=\widetilde{A}_{21}y_1^*+\widetilde{A}_{22}y_2^*+\widetilde{D}_2x_2+u_2+\widetilde{Q}_2f_2,\\ &\dot{x}_2=C_{21}y_1^*+C_{22}^*y_2^*+G_2x_2+P_{21}u_1+P_{22}u_2+S_2^*u_3^*+R_2\eta.\end{aligned}$$

где $y_3\in R^{m_2}$ – сформированные неособым образом (28) линейные комбинации вторых производных выходных переменных, подлежащие повторному дифференцированию.

П4) С целью исключить из дифференциального уравнения относительно y_3 управляющие воздействия u_1, u_2, зарезервированные для переменных $\widetilde{y}_1,\widetilde{y}_2$, введем неособую замену

(31) $\hat{y}_3=y_3-B_{31}\widetilde{y}_1-B_{32}\widetilde{y}_2$,

$$H_{24}\begin{pmatrix}\tilde{y}_1\\ \tilde{y}_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{y}_1\\ \tilde{y}_2\\ \hat{y}_3\end{pmatrix},\ H_{24}=\begin{pmatrix}I_{p_1} & O & O\\ O & I_{p_2} & O\\ -B_{31} & -B_{32} & I_{m_1}\end{pmatrix},\ \det H_{24}\neq 0,$$

где $B_{31}=\tilde{\tilde{A}}_{21}+\overline{D}_2P_{21}$, $B_{32}=\tilde{\tilde{A}}_{22}+\overline{D}_2P_{22}$, $\overline{A}_{21}y_1^*=\overline{\overline{A}}_{21}\overline{y}_1+\tilde{\tilde{A}}_{21}\tilde{y}_1$, $\overline{A}_{22}y_2^*=\overline{\overline{A}}_{22}\overline{y}_2+\tilde{\tilde{A}}_{22}\tilde{y}_2$.

Переходим на третий шаг, где аналогичные преобразования выполняются для последней подсистемы (30) с фиктивным выходом (31), и т.д. На следующих шагах выполняемые преобразования принципиально не отличаются от преобразований второго шага, на каждом шаге проверяются условия окончания или пролонгации процедуры. Ограничимся ситуацией, когда процедура закончится именно на третьем шаге по одному из указанных ниже условий.

Шаг 3 (последний). А) На третьем шаге с учетом $\mathrm{rank}\overline{D}_2=m_2\neq 0$ выполняется одно из условий:

(A3*) $m_0+m_1+m_2=n$ ($\dim\hat{y}_3=\dim x_2$),

(A3**) $m_0+m_1+m_2<n$ ($\dim\hat{y}_3<\dim x_2$).

А3*, П1) Все компоненты вектора состояния x_2 связаны взаимнооднозначным соответствием с компонентами вектора $\hat{y}_3$ (31), $\det\overline{D}_{2(m_2\times m_2)}\neq 0$. После дифференцирования и обратной подстановки имеем

(32) $\dot{\hat{y}}_3=A_{31}y_1^*+A_{32}y_1^*+A_{33}\hat{y}_3+B_3u_3^*+Q_3f_3$, $f_3=\mathrm{col}(\eta,\dot{\eta},\ddot{\eta})$.

В) Обозначим $\mathrm{rank}\,B_3=p_3$, $p_1+p_2+p_3\leq p$. В системе (32) выполняется одно из условий:

(B3*) $p_3=m_2$ ($\mathrm{rank}\,B_3=\dim\hat{y}_3$),

(B3**) $p_3<m_2$ ($\mathrm{rank}\,B_3<\dim\hat{y}_3$).

В случае (А3*, В3*) все компоненты выходных переменных обеспечены своим управляющим воздействием, получена полная СБКФ, состоящая из трех блоков – первых двух уравнений систем (22), (30) и (32); на ее основе переходим к задаче синтеза обратной связи.

В случае (А3*, В3**) часть выходных переменных размерности $(m_2 - \mathrm{rank}\, B_3)$ не обеспечена истинным управлением и будет вынуждена отрабатывать «чужие» задающие воздействия. Процедура заканчивается, СБКФ не существует. Для решения поставленной задачи требуется аппаратная доработка системы, а именно, ввод в систему (32) дополнительных каналов управления так, чтобы обеспечить (В3*).

А3**, П1) Перегруппируем компоненты вектора состояния $x_2 = \mathrm{col}(\tilde{x}_3, x_3)$, $\tilde{x}_3 \in R^{m_2}$, $x_3 \in R^{n-m_0-m_1-m_2}$ так, чтобы в линейном разложении $\hat{y}_3 = \bar{\bar{A}}_{21}\bar{y}_1 - \bar{D}_2 P_{21}\tilde{y}_1 + \bar{\bar{A}}_{22}\bar{y}_2 - \bar{D}_2 P_{22}\tilde{y}_2 + \bar{Q}_2 f_2 + D_{31}\tilde{x}_3 + D_{32}x_3$ выполнялось условие $\det D_{31} \neq 0$, что позволяет установить взаимнооднозначное соответствие между переменными (32) и координатами $\tilde{x}_3$ вектора состояния. Соответствующее неособое преобразование H_{31}, $\det D_{31} \neq 0$, в котором задействованы внешние возмущения и их первые производные, аналогично (25). После дифференцирования и обратной подстановки имеем:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\hat{y}}_3 = A_{31}y_1^* + A_{32}y_2^* + A_{33}\hat{y}_3 + D_3x_3 + B_3u_3^* + Q_3f_3,\\
&\dot{x}_3 = C_{31}y_1^* + C_{32}y_2^* + C_{33}\hat{y}_3 + G_3x_3 + P_{31}u_1 + P_{32}u_2 + S_3u_3^* + R_3f_2.
\end{aligned} \tag{33}
$$

В) В первом уравнении (33) выполняется одно из условий: (В2*) или (В2**). Сделанное предположение, что процедура закончится на третьем шаге, означает, что в случае (А2**, В2**) выполняется условие

(С3*) $\quad \mathrm{rank}\left(D_3\, B_3\right) < m_2$; $\mathrm{rank}\left(D_3\ \ B_3\right) = m_2$, $p_1 + p_2 + p_3 = p$,

которое означает, что СБКФ не существует, так как в первом варианте часть выходных переменных не обеспечивается фиктивным управлением, в качестве которого рассматриваются фазовые переменные x_3, а во втором – уже фиктивные управления x_3 не обеспечены истинным управлением. Для решения поставленной задачи требуется аппаратная доработка системы:

либо ввод в первое уравнение системы (33) дополнительных каналов управления так, чтобы обеспечить (В3*); либо ввод дополнительных внутренних связей, обеспечивающих $\operatorname{rank}(D_3\ B_3) = m_2$, и дальнейшее исследование системы (33). На практике выбирают наиболее реализуемый вариант, вплоть до корректировки цели управления (2).

В случае (А3**, В3*) все компоненты выходных переменных «обеспечены» своим управляющим воздействием, для их фиксации аналогично (29) выполняется неособое преобразование $B_3 u_3^* = u_3$:

$$u_3^* \mapsto H_{33}\begin{pmatrix} \widetilde{u}_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix},\ H_{33} = \begin{pmatrix} B_3^1 & B_3^2 \\ O & I_{p-p_1-p_2-p_3} \end{pmatrix},\ B_3 = (B_3^1\ B_3^2)\,,$$

$$\det B_3^1 \neq 0\,,\ \det H_{33} \neq 0\,,\ \widetilde{u}_3, u_3 \in R^{p_3}\,,\ u_4 \in R^{p-p_1-p_2-p_3}\,,$$

$$B_3 H_{33}^{-1} = I_{p_3}\,,\ S_3 H_{33}^{-1} = (P_{33}\ \ P_{34})\,.$$

В результате получена неполная СБКФ системы (1), которая в общем случае (при пролонгации первых двух шагов по признаку (А**, В**, С***)) и с учетом выполненных замен переменных имеет вид, соответствующий (4)-(5), а именно:

$$\dot{\bar{y}}_1 = y_2\,,\ \dot{\tilde{y}}_1 = \sum_{j=1}^{3} \widetilde{A}_{1j} y_j^* + \widetilde{D}_1 x_3 + u_1 + \widetilde{Q}_1 f_2\,,$$

$$(34)\quad \dot{\bar{y}}_2 = y_3\,,\ \dot{\tilde{y}}_2 = \sum_{j=1}^{3} \widetilde{A}_{2j} y_j^* + \widetilde{D}_2 x_3 + u_2 + \widetilde{Q}_2 f_2\,,$$

$$\dot{y}_3^* = \sum_{j=1}^{3} A_{3j} y_j^* + D_3 x_3 + u_3 + Q_3 f_3\,,$$

$$(35)\quad \dot{x}_3 = \sum_{j=1}^{3} C_{3j} y_j^* + G_3 x_3 + \sum_{j=1}^{4} P_{3j} u_j + R_3 f_2\,,$$

где $\hat{y}_3 := y_3^*$, и для простоты изложения оставлены прежние обозначения матриц, изменившихся в результате выполнения преобразований подобия; с учетом H_{12} (19), H_{14} (23), H_{22} (28), H_{24} (31) имеем

(36) $y_1^* = H_{12} y_1$, $y_2 = H_{22}^{-1} y_2^* + B_{21} \tilde{y}_1 = \begin{pmatrix} \bar{y}_2 + B_2^* \tilde{y}_2 + B_{21}^3 \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 + B_{21}^2 \tilde{y}_1 \end{pmatrix}$,

$y_3 = y_3^* + B_{31} \tilde{y}_1 + B_{32} \tilde{y}_2$.

Система (34) будет работоспособной, если решения системы (35) ограничены (10). Для этого требуется, во-первых, ограниченность внешних составляющих правой части уравнения (35), что оговаривалось в постановке задачи; во-вторых, устойчивость собственных движений Re $\lambda_i(G_3) < 0$, если резерв управляющих воздействий исчерпан и rank $P_{34} = 0$. При rank $P_{34} \neq 0$ требуется не только управляемость (стабилизируемость) пары (G_3, P_{34}), но и возможность реализации обратной связи, а именно, наблюдаемость переменных x_3 относительно выходных переменных y_1 с учетом возмущений [2].

Рассмотрим численный пример, иллюстрирующий приведенную процедуру анализа.

Пример 4. Пусть в системе (1)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где rank $D = m_0 =$ rank $B = p = 1$, элементы a_1, a_2, q неизвестны.

Шаг 1. В рассматриваемой системе выполняется условие (A1**): $m_0 \le n$ $(1 < 2)$. Преобразование П1, где

$$H_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ D_{11} = 1,\ D_{12} = 0,\ x \mapsto H_{11} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

приводит к следующему виду системы (17):

$$\dot{y}_1 = x_1 + q\eta,\ \dot{x}_1 = a_1 y_1 + a_2 x_2 + u,$$

где выполняется условие (B1**): rank $B_1 = 0 <$ dim $y_1 = 1$. С учетом $B_1 = O$ имеем случай (A1**, B1**, C1**). Вводим неособую замену переменных $y_2 = x_1 + q\eta$ и переходим на второй шаг.

Шаг 2. Условие (A2*) (dim y_2 = dim $x_1 = 1$) выполнено.

A2*, П1) После дифференцирования и обратной подстановки $x_1 = y_2 - q\eta$ исходная система принимает вид

$$\dot{y}_1 = y_2\,,\quad y_2 = a_1 y_1 + a_2(y_2 - q\eta) + q\dot{\eta} + u\,,$$

где выполняется условие (В2*): rank $B_2 = \dim y_2$. Таким образом, получена полная СБКФ, все условия существования которой выполнены: $\operatorname{rank} \overline{B}_2 = 1 = m_0$, $\mu = 2$ (13), $\operatorname{rank}(\overline{A}\ \ \overline{B})_2 = 1 + 2 =$ $= m_0 + l$, $l = 2$ (15). Отметим, что в представленной в разделе 4 процедуре синтеза на основе СБКФ не возникает необходимости в выполнении обратной замены переменных $x_1 = y_2 - q\eta$ (грубо говоря, задача наблюдения будет решаться относительно смешанной координаты $y_2 = x_1 + q\eta$), а используемые наблюдатели на скользящих режимах восстанавливают также текущие оценки сигнала $a_1 y_1 + a_2(y_2 - q\eta) + q\dot{\eta}$. Такая информационная поддержка позволяет решить задачу слежения в асимптотике при неизвестных по отдельности параметрах a_1, a_1, q и функциях $\eta(t), \dot{\eta}(t)$.

Пусть в системе (35) условие (10) выполняется. Прежде чем переходить к синтезу обратной связи, выполним в системе (34) расщепление выходных переменных на непересекающиеся группы с одинаковой относительно степенью (3): $\widetilde{y}_1 \in R^{p_1}$ с относительной степенью $\nu_1 = 1$, $\overline{y}_1 = \operatorname{col}(y_{12}, y_{13})$, $y_{12} \in R^{p_2}$ – $\nu_2 = 2$, $y_{13} \in R^{p_3}$ – $\nu_3 = 3$, что с учетом (36) позволяет раскрыть связи между блоками и представить систему (34) в виде блочно-децентрализованных подсистем «вход–выход»:

$$\dot{\widetilde{y}}_1 = \sum_{j=1}^{3} \widetilde{A}_{1j} y_j^* + \widetilde{D}_1 x_3 + \boldsymbol{u_1} + \widetilde{Q}_1 f_2\,;$$

$$\dot{y}_{12} = \boldsymbol{\widetilde{y}_2} + B_{21}^2 \widetilde{y}_1\,,\ \dot{\widetilde{y}}_2 = \sum_{j=1}^{3} \widetilde{A}_{2j} y_j^* + \widetilde{D}_2 x_3 + \boldsymbol{u_2} + \widetilde{Q}_2 f_2\,;$$

$$\dot{y}_{13} = \boldsymbol{\overline{y}_2} + B_{21}^3 \widetilde{y}_1 + B_2^* \widetilde{y}_2,\ \dot{\overline{y}}_2 = \boldsymbol{y_3^*} + B_{31} \widetilde{y}_1 + B_{32} \widetilde{y}_2, \tag{37}$$

$$\dot{y}_3^* = \sum_{j=1}^{3} A_{3j} y_j^* + D_3 x_3 + \boldsymbol{u_3} + Q_3 f_3\,,$$

где жирным шрифтом выделены фиктивные и истинные управления каждого блока.

Структурная схема системы (37) показана на рис. 2.

Как видим, в системе (37) уравнения относительно каждой группы компонент вектора выходных переменных $y_1^* = \mathrm{col}(\tilde{y}_1, \bar{y}_{12}, \bar{y}_{13})$ являются первыми блоками блочно-управляемых и одновременно блочно-наблюдаемых подсистем. Размерность переменных состояния подсистем системы (37) p_i, $i = 1, 2, 3$, можно трактовать как совместные индексы управляемости и наблюдаемости системы (1) относительно выходных переменных с учетом возмущений, подлежащих дифференцированию. Существенно, что если на первом шаге процедуры выполняются условия (С1**) или (20), то вектор y_1^* получен из вектора y_1 путем перестановки строк – операция, которая допустима в задаче автономного управления [13, 14, 16]. В этом случае на основе системы (37) может быть решена и задача автономного управления выходными переменными.

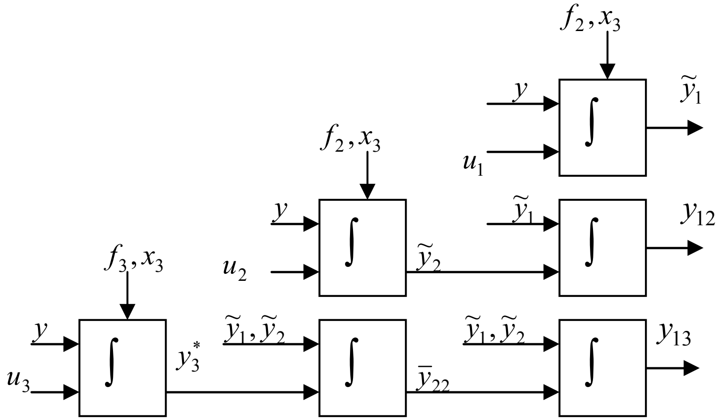

Рис. 2. Структурная схема системы (37)

Как будет показано в следующем разделе, в процедуре трансформации можно упростить промежуточные преобразования и не выполнять тотально все преобразования подобия, детализирующие правые части подсистем относительно переменных $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, y_3^*$, на которые непосредственно действуют управляющие воздействия, благодаря используемым на этапе синтеза специальным методам информационной поддержки.

4. Декомпозиционный синтез обратной связи

В общем случае с учетом (19) регулируемыми переменными в СБКФ (37) являются линейные комбинации компонент вектора выходных переменных $H_{12} y_1 = y_1^* = \mathrm{col}(\tilde{y}_1, y_{12}, y_{13})$, $\det H_{12} \neq 0$. Данное преобразование не является препятствием в решении задачи слежения за заданными траекториями, которые однозначно пересчитываются в задающие воздействия для регулируемых переменных: $H_{12} g = g^* = \mathrm{col}(\tilde{g}, g_2, g_3)$.

Для системы (37) ставится задача синтеза обратной связи, обеспечивающей отработку выходными переменными y_1 программных траекторий g^* в асимптотике (2). Данная задача сводится к задаче стабилизации невязок

(38) $\tilde{e}_1 = \tilde{y}_1 - \tilde{g}_1 \to 0$, $\tilde{e}_1 \in R^{p_1}$, $e_{1i} = y_{1i} - g_i \to 0$, $e_{i1} \in R^{p_i}$, $i = 2, 3$.

и решается процедурно на основе блочного принципа [4, 16], что позволяет разделить решение задачи синтеза размерности $l = p_1 + 2p_2 + 3p_3$ на последовательно решаемые элементарные задачи формирования фиктивных, а потом и истинных управлений в каждой i-ой ($i = 1, 2, 3$) цепочке (37). Информационная поддержка базовых алгоритмов управления осуществляется с помощью наблюдателя состояния на скользящих режимах. Задача наблюдения также разделяется на независимо решаемые элементарные подзадачи синтеза корректирующих воздействий. Нижеследующая процедура без ограничений общности справедлива для СБКФ (4) любого порядка.

Процедура декомпозиционного синтеза

Шаг 1. Представим первую подсистему (37) относительно невязки (38)

(39) $\dot{\tilde{e}}_1 = \tilde{\varphi}_1 + u_1$,

где $\tilde{\varphi}_1 = \sum_{j=1}^{3} \tilde{A}_{1j} y_j^* + \tilde{D}_1 x_3 + \tilde{Q}_1 f_2 - \dot{\tilde{g}}_1$. С учетом априорных предположений об ограниченности внешних возмущений, задающих воздействий и их производных, а также фазовых переменных, полагаем $\|\tilde{\varphi}_1\| \le \tilde{F}_1 \;\; \forall t \ge 0$, где $\tilde{F}_1$ – известная константа.

Замечание 1. Первый способ обеспечения инвариантности в подсистеме (39) – подавление неопределенностей путем формирования разрывных управлений

(40) $u_1 = -M_1 \operatorname{sign} \tilde{e}_1$, $\operatorname{sign} \tilde{e}_1 = \operatorname{col}(\operatorname{sign} \tilde{e}_{11}, \ldots, \operatorname{sign} \tilde{e}_{1p_1})$,

амплитуда которых выбирается на основе достаточных условий существования скользящих режимов [17]:

(41) $\tilde{e}_1^{\mathrm{T}} \dot{\tilde{e}}_1 < 0 \Rightarrow \tilde{e}_1^{\mathrm{T}} (\tilde{\phi}_1 - M_1 \operatorname{sign} \tilde{e}_1) \le \|\tilde{e}_1\| (\tilde{F}_1 - M_1) < 0 \Rightarrow M_1 > \tilde{F}_1$.

При выполнении условия (41) за конечное время $t_1 > 0$ возникнет скользящий режим на многообразии $\tilde{e}_1 = 0 \Rightarrow \tilde{y}_1 = \tilde{g}_1$, что обеспечивает решение задачи слежения (38) в подсистеме (39). Переменные состояния $\tilde{e}_1(t) = \tilde{y}_1(t) - \tilde{g}_1(t)$ известны, реализация закона (40) не требует построения наблюдателя состояния.

Если в рассматриваемой системе не предусмотрена реализация разрывного управления (40), то тогда прибегаем ко второму способу – формированию комбинированного управления [12] с непрерывной и компенсирующей составляющими

(42) $u_1 = -K_{11} \tilde{e}_1 - \tilde{\varphi}_1$,

где выбор коэффициентов $K_{11} = \operatorname{diag}(k_{11,i})$, $k_{11,i} = \mathrm{const} > 0$, определяет темпы сходимости в нуль переменных замкнутой системы $\dot{\tilde{e}}_1 = -K_{11} \tilde{e}_1$.

Для информационной поддержки закона управления (42) на основе системы (39) построим наблюдатель состояния на скользящих режимах [6, 7] вида $\dot{\tilde{z}}_1 = u_1 + \tilde{v}_1$, где $\tilde{z}_1 \in R^{p_1}$ – вектор состояния, $\tilde{v}_1 \in R^{p_1}$ – вектор корректирующих воздействий наблюдателя, которые выбираются в классе разрывных функций так, чтобы решить задачу стабилизации относительно невязок $\tilde{\varepsilon}_1 = \tilde{e}_1 - \tilde{z}_1$: $\dot{\tilde{\varepsilon}}_1 = \tilde{\varphi}_1 - \tilde{v}_1$. Сформируем разрывные корректирующие воздействия $\tilde{v}_1 = M_{11}\mathrm{sign}\,\tilde{\varepsilon}_1$ по измеряемым переменным $\tilde{\varepsilon}_1 = \tilde{e}_1 - \tilde{z}_1$, где $M_{11} > 0$ – амплитуда разрывной коррекции, по аналогии с (41) $\tilde{\varepsilon}_1^{\mathrm{T}}\tilde{\varepsilon}_1 < 0 \Rightarrow M_{11} > \tilde{F}_1$. Тогда за конечное время $t_{11} > 0$ возникнет скользящий режим на многообразии $S_{11} = \{\tilde{\varepsilon}_1 = 0\} \Rightarrow \tilde{z}_1 = \tilde{e}_1$. При $t > t_{11}$ из уравнения статики $\dot{\tilde{\varepsilon}}_1 = \tilde{\varphi}_1 - \tilde{v}_{1\mathrm{eq}} = 0$ имеем оценки компенсирующей составляющей $\tilde{v}_{1\mathrm{eq}} = \tilde{\varphi}_1$ закона управления (42), значения которых получим с выходов линейных фильтров первого порядка с малой постоянной времени [17]:

(43) $\lambda\dot{\tau} = -\tau + \tilde{v}_{1\mathrm{eq}}$, $\tau \in R^{p_1}$, $\lim\limits_{\lambda \to +0} \tau = \tilde{v}_{1\mathrm{eq}}$.

Используемая техника построения наблюдателей состояния на скользящих режимах позволяет обеспечить асимптотическую сходимость к программным траекториям (38) и не требует знания оператора подсистемы (39), в том числе внешних возмущений и производных задающих воздействий; требуется только их ограниченность.

Шаг 2. Представим первое уравнение второй цепочки (37) относительно невязки (38) $\dot{e}_{12} = \tilde{y}_2 + \varphi_{12}$, где $\varphi_{12} = B_{21}^2\tilde{y}_1 - \dot{g}_2$, $\|\varphi_{12}\| \le F_{12} = \mathrm{const}$, $\tilde{y}_2$ – фиктивное управление, которое выбирается в комбинированном виде

(44) $\tilde{y}_2 = -K_{12}e_{12} - \varphi_{12}$,

где $K_{12} = \mathrm{diag}\,(k_{12,i})$, $k_{12,i} = \mathrm{const} > 0$.

Согласно блочному принципу сформированная зависимость (44) обеспечивается с помощью истинного управления u_2 при решении задачи стабилизации невязки между реальным и выбранным фиктивным управлением $\tilde{e}_2 = \tilde{y}_2 + K_{12}e_{12} + \varphi_{12}$. С учетом введенных неособых замен переменных вторая подсистема (37) принимает вид:

(45) $\dot{e}_{12} = -K_{12}e_{12} + \widetilde{e}_2$, $\dot{\widetilde{e}}_2 = \widetilde{\varphi}_2 + u_2$,

где $\quad \widetilde{\varphi}_2 = \sum_{j=1}^{3} \widetilde{A}_{2j} y_j^* + \widetilde{D}_2 x_3 + \widetilde{Q}_2 f_2 + K_{12}(-K_{12}e_{12} + \widetilde{e}_2) + B_{21}^2 \dot{\widetilde{y}}_1 - \ddot{g}_2$,

$\|\widetilde{\varphi}_2\| \le \widetilde{F}_2 = \text{const}$. Комбинированный закон управления

(46) $u_2 = -K_{22}\widetilde{e}_2 - \widetilde{\varphi}_2$,

где $K_{22} = \text{diag}\,(k_{22,i})$, $k_{22,i} = \text{const} > 0$, приведет к замкнутой подсистеме $\dot{\widetilde{e}}_2 = -K_{22}\widetilde{e}_2$. Другой способ – формирование в системе (45) разрывного истинного управления (см. замечание 1).

Для информационной поддержки базового закона управления (46) на основе системы (45) построим наблюдатель состояния на скользящих режимах вида $\dot{z}_{12} = -K_{12}z_{12} + \widetilde{z}_2 + v_{12}$, $\dot{\widetilde{z}}_2 = u_2 + \widetilde{v}_2$, и запишем систему дифференциальных уравнений относительно невязок $\varepsilon_{12} = e_{12} - z_{12}$, $\widetilde{\varepsilon}_2 = \widetilde{e}_2 - \widetilde{z}_2$:

(47) $\dot{\varepsilon}_{12} = -K_{12}\varepsilon_{12} + \widetilde{\varepsilon}_2 - v_{12}$, $\dot{\widetilde{\varepsilon}}_2 = \widetilde{\varphi}_2 - \widetilde{v}_2$.

Используя технику каскадного синтеза наблюдателей состояния на скользящих режимах, в первой подсистеме (47) сформируем разрывные корректирующие воздействия $v_{12} = M_{12}\text{sign}\,\varepsilon_{12}$. При $\varepsilon_{12}^{\text{T}}\dot{\varepsilon}_{12} < 0 \Rightarrow M_{12} > \|\tilde{\varepsilon}_2\|$ за конечное время $t_{12} > 0$ возникнет скользящий режим на многообразии $S_{12} = \{\varepsilon_{12} = 0\} \Rightarrow z_{12} = e_{12}$. При $t > t_{12}$ из уравнения статики $\dot{\varepsilon}_{12} = \widetilde{\varepsilon}_2 - v_{12\text{eq}} = 0$ имеем оценки $v_{12\text{eq}} = \widetilde{\varepsilon}_2$, значения которых получим с выходов фильтров типа (43) и которые используем для формирования разрывной коррекции во второй подсистеме (47): $\tilde{v}_2 = M_{22}\text{sign}\,\tilde{\varepsilon}_2$. При $\tilde{\varepsilon}_2^{\text{T}}\dot{\tilde{\varepsilon}}_2 < 0 \Rightarrow M_{22} > \tilde{F}_2$ за конечное время $t_{22} > t_{12}$ возникнет скользящий режим на многообразии $S_{22} = \{S_{12} \cap \widetilde{\varepsilon}_2 = 0\} \Rightarrow \widetilde{z}_2 = \widetilde{e}_2$. При $t > t_{22}$ из уравнения статики $\dot{\widetilde{\varepsilon}}_2 = \widetilde{\varphi}_2 - \widetilde{v}_{2\text{eq}} = 0$ имеем оценки компенсирующей составляющей $\widetilde{v}_{2\text{eq}} = \widetilde{\varphi}_2$ закона управления (46), значения которых получим с выходов фильтров типа (43).

Последняя цепочка (37) содержит три блока интеграторов.

Это означает, что согласно идеологии блочного синтеза фиктивное управление, сформированное в ее первой подсистеме, подлежит двухкратному дифференцированию. При этом только к первым производным фиктивного управления предъявляется требование гладкости (в контексте решаемой задачи они не должны зависеть от «чужих» управляющих воздействий, которые могут иметь разрывной характер и не подлежать дифференцированию). Ко вторым производным требований гладкости не предъявляется, так они попадают в пространство истинного управления, где сосредотачиваются все имеющиеся неопределенности. Таким образом, начиная с третьего шага теперь уже на этапе синтеза требуется формировать фиктивные управления, дифференцируемые требуемое число раз. Заметим, что в силу организации СБКФ отслеживание данного требования и в общем случае (4)-(5) не составляет проблемы.

Шаг 3. Представим первое уравнение третьей цепочки (37) относительно невязки (38) с учетом введенных замен переменных ($\tilde{y}_1 = \tilde{e}_1 + \tilde{g}_1$, $\tilde{y}_2 = \tilde{e}_2 - K_{12}e_{12} - B_{21}^2\tilde{y}_1 + \dot{g}_2$), сформированных на первых двух шагах:

$$\dot{e}_{13} = B^*\tilde{e}_1 + B_2^*\tilde{e}_2 + \varphi_{13} + \bar{y}_2,\;\; B^* = B_{21}^3 - B_2^* B_{21}^2,$$

где в вектор-функции $\varphi_{13} = B^*\tilde{g}_1 + B_2^*(-K_{12}e_{12} + \dot{g}_2) - \dot{g}_3$ собраны компоненты, первые полные производные которых являются гладкими, $\|\varphi_{13}\| \le F_{13} = \text{const}$. Сформируем фиктивное управление в виде $\bar{y}_2 = -K_{13}e_{13} - \varphi_{13}$, $K_{13} = \text{diag}\,(k_{13,i})$, $k_{13,i} = \text{const} > 0$. Составим дифференциальное уравнение относительно невязки $\bar{e}_2 = \bar{y}_2 + K_{13}e_{13} + \varphi_{13}$, а именно, $\dot{\bar{e}}_2 = \bar{\varphi}_2 + y_3^*$, где вектор-функция $\bar{\varphi}_2 = B_{31}\tilde{y}_1 + B_{32}\tilde{y}_2 + K_{13}\dot{e}_{13} + \dot{\varphi}_{13}$ ($\|\bar{\varphi}_2\| \le \bar{F}_2 = \text{const}$) состоит из компонент, подлежащих дифференцированию, что позволяет сформировать фиктивное управление в виде $y_3^* = -K_{23}\bar{e}_2 - \bar{\varphi}_2$, где $K_{23} = \text{diag}\,(k_{23,i})$, $k_{23,i} = \text{const} > 0$.

С учетом введенных неособых замен переменных, в результате составления дифференциального уравнения относительно невязки $e_3 = y_3^* + K_{23}\bar{e}_2 + \bar{\varphi}_2$ третья цепочка (37) принимает вид:

(48) $\dot{e}_{13} = B^*\tilde{e}_1 + B_2^*\tilde{e}_2 - K_{13}e_{13} + \bar{e}_2$, $\dot{\bar{e}}_2 = -K_{23}\bar{e}_2 + e_3$, $\dot{e}_3 = \varphi_3 + u_3$,

где $\varphi_3 = \sum_{j=1}^{3} A_{3j}y_j^* + D_3x_3 + Q_3f_3 + K_{23}\dot{\bar{e}}_2 + \dot{\bar{\varphi}}_2$, $\|\varphi_3\| \le F_3 = \text{const}$.

Комбинированный закон управления

(49) $u_3 = -K_{33}e_3 - \varphi_3$,

где $K_{33} = \text{diag}\,(k_{33,i})$, $k_{33,i} = \text{const} > 0$, приведет к замкнутой подсистеме $\dot{e}_3 = -K_{33}e_3$.

Для системы (48) построим наблюдатель состояния с учетом полученной на втором шаге оценки $\tilde{e}_2$ и имеющихся измерений $\dot{z}_{13} = B^*\tilde{e}_1 + B_2^*\tilde{z}_2 - K_{13}z_{13} + \bar{z}_2 + v_{13}$, $\dot{\bar{z}}_2 = -K_{23}\bar{z}_2 + z_3 + \bar{v}_2$, $\dot{z}_3 = u_3 + v_3$, и запишем систему дифференциальных уравнений относительно невязок $\varepsilon_{13} = e_{13} - z_{13}$, $\bar{\varepsilon}_2 = \bar{e}_2 - \bar{z}_2$, $\varepsilon_3 = e_3 - z_3$:

(50) $\dot{\varepsilon}_{13} = B_2^*\tilde{\varepsilon}_2 - K_{13}\varepsilon_{13} + \bar{\varepsilon}_2 - v_{13}$, $\dot{\bar{\varepsilon}}_2 = -K_{23}\bar{\varepsilon}_2 + \varepsilon_3 - \bar{v}_2$, $\dot{\varepsilon}_3 = \varphi_3 - v_3$.

В первой подсистеме (50) сформируем разрывные корректирующие воздействия $v_{13} = M_{13}\text{sign}\,\varepsilon_{13}$. При $\varepsilon_{13}^{\mathrm{T}}\dot{\varepsilon}_{13} < 0 \Rightarrow M_{13} > \|\bar{\varepsilon}_2\|$ за конечное время $t_{13} > t_{22}$ возникнет скользящий режим на многообразии $S_{13} = \{S_{22} \cap \varepsilon_{13} = 0\} \Rightarrow z_{13} = e_{13}$. При $t > t_{13}$ из уравнения статики $\dot{\varepsilon}_{13} = 0$ имеем оценки $v_{13\text{eq}} = \bar{\varepsilon}_2$, значения которых получим с выходов фильтров типа (43).

Данные оценки используем для формирования разрывной коррекции во второй подсистеме (50) $\dot{\bar{\varepsilon}}_2 = -K_{23}\bar{\varepsilon}_2 + \varepsilon_3 - M_{23}\text{sign}\bar{\varepsilon}_2$, где при $\bar{\varepsilon}_2^{\mathrm{T}}\dot{\bar{\varepsilon}}_2 < 0 \Rightarrow M_{23} > \|\varepsilon_3\|$ за конечное время $t_{23} > t_{13}$ возникнет скользящий режим на многообразии $S_{23} = \{S_{13} \bigcap \bar{\varepsilon}_2 = 0\} \Rightarrow \bar{z}_2 = \bar{e}_2$. При $t > t_{23}$ из уравнения статики $\dot{\bar{\varepsilon}}_2 = 0$ имеем оценки $\bar{v}_{2\text{eq}} = \varepsilon_3$, значения которых получим с выходов линейных фильтров типа (43), и которые используем для формирования разрывной коррекции в третьей подсистеме (50): $v_3 = M_{33}\text{sign}\,\varepsilon_3$. При $\varepsilon_3^{\mathrm{T}}\dot{\varepsilon}_3 < 0 \Rightarrow M_{33} > F_3$ за конечное время

$t_{33} > t_{23}$ возникнет скользящий режим на многообразии $S_{33} = \{S_{23} \cap \varepsilon_{33} = 0\} \Rightarrow z_3 = e_3$. При $t > t_{33}$ из уравнения статики $\dot{\varepsilon}_3 = 0$ имеем оценки компенсирующей составляющей $v_{3\text{eq}} = \varphi_3$ закона управления (49), значения которых получим с выходов линейных фильтров типа (43).

Уравнения замкнутой системы (39), (42), (45) (46), (48), (49) можно представить в виде $\dot{e} = A^* e$, где

$$(51) \quad A^* e = \begin{pmatrix} -K_{11} & O & O & O & O & O \\ O & -K_{12} & I & O & O & O \\ O & O & -K_{12} & O & O & O \\ B^* & O & B_2^* & -K_{13} & I & O \\ O & O & O & O & -K_{23} & I \\ O & O & O & O & O & -K_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{e}_1 \\ e_{12} \\ \tilde{e}_2 \\ e_{13} \\ \bar{e}_2 \\ e_3 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться в том, что собственные числа матрицы A^* (51) удовлетворяют соотношению $\prod(\lambda I + K_{ij}) = 0$, замкнутая система устойчива. Поведение переменных замкнутой системы (51) описывается логическими цепочками $e_{11} \to 0 \Leftrightarrow y_{11} \to g_1$; $e_{22} \to 0 \Rightarrow e_{12} \to 0 \Leftrightarrow y_{12} \to g_2$; $e_{33} \to 0 \Rightarrow e_{23} \to 0 \Rightarrow$ (и с учетом $e_{11} \to 0$, $e_{22} \to 0$) $e_{13} \to 0 \Leftrightarrow y_{13} \to g_3$, которые обуславливают соответствующую иерархию коэффициентов усиления K_{ij}, определяющую темпы переходных процессов в системе (51).

Как видим, использование наблюдателей состояния на скользящих режимах не только значительно упрощает вычислительный аспект процедуры синтеза (аналитические выражения для вектор-функций $\tilde{\varphi}_1$, $\tilde{\varphi}_2$, φ_3 находить не требуется), но также снижает требования к объему априорной информации об объекте управления и среде его функционирования. Существенно, что с помощью данных наблюдателей оцениваются именно те линейные комбинации переменных, которые непосредственно фигурируют в базовых законах управления (42), (46), (49), что сокращает объем вычислений, выполняемых в реальном времени.

Структурная схема замкнутой системы с наблюдателями состояния показана на рис. 3.

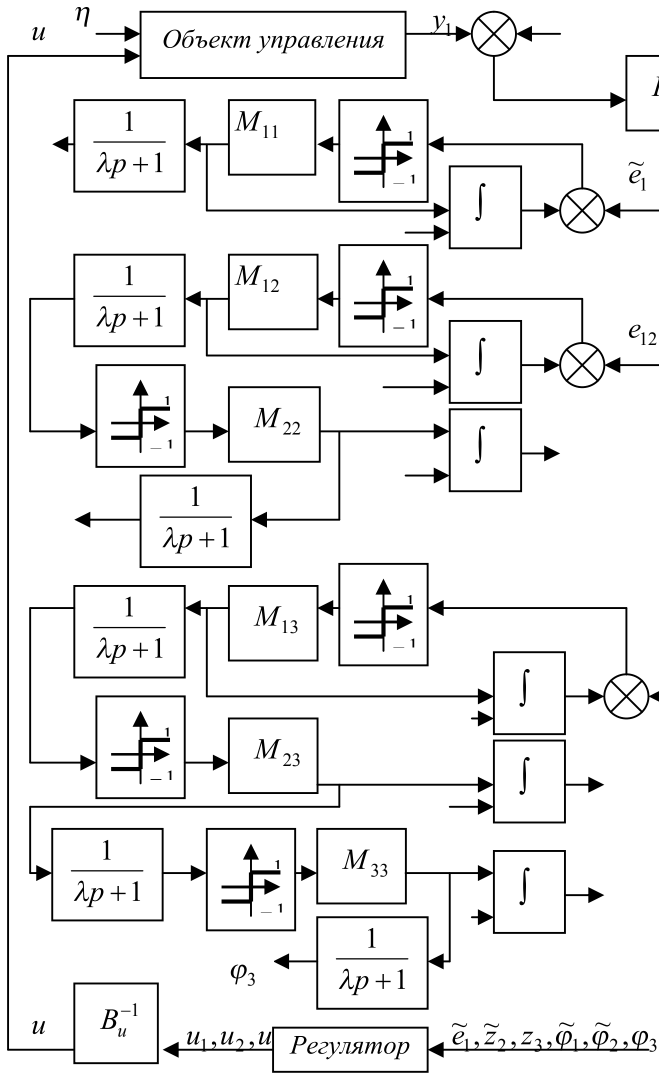

Рис. 3. Структурная схема замкнутой системы

В заключение отметим, что разработанная методика решения задачи слежения относительно выходных переменных линейных систем, функционирующих в условиях сигнальной и параметрической неопределенности, опирается на структурные свойства оператора объекта управления и может быть использована при синтезе систем управления нелинейными объектами автоматического управления. Представленные в работе теоретические результаты были апробированы в задачах управления электроприводами различных типов, роботами-манипуляторами, системой топливоподачи двигателей внутреннего сгорания [7, 8, 10, 11, 20].

Литература

1. АНДРЕЕВ Ю. Н. *Управление конечномерными линейными объектами.* – М.: Наука, 1976.
2. АХОБАДЗЕ А. Г., КРАСНОВА С. А. *Инвариантность к возмущениям и стабилизация выходных сигналов линейных динамических систем* / Труды Института. Том XXVIII. – М: ИПУ РАН, 2008. – С. 37-54.
3. АХОБАДЗЕ А. Г., КРАСНОВА С. А. *Декомпозиционный анализ и синтез линейных динамических систем относительно выходных переменных* // Труды международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO’08. – М.: ИПУ РАН, 2008. – С. 960-976.
4. ДРАКУНОВ С. В., ИЗОСИМОВ Д. Б., ЛУКЬЯНОВ А. Г., УТКИН В. А., УТКИН В. И. *Принцип блочного управления* // АиТ. – 1990. – №5. – С. 38-47.
5. КИМ Д. П. *Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
6. КРАСНОВА С. А., КУЗНЕЦОВ С. И. *Оценивание на скользящих режимах неконтролируемых возмущений в нелинейных динамических системах* // АиТ. – 2005. – №10. – С. 54-69.

7. КРАСНОВА С. А., УТКИН В. А. *Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем*. – М.: Наука, 2006.
8. КРАСНОВА С. А., НГУЕН ТХАНЬ ТИЕН *Блочный синтез системы управления электромеханическими объектами, функционирующими в условиях неопределенности* / Труды Института. Том XXVIII. – М.: ИПУ РАН, 2008. – С. 55-65.
9. МИРОШНИК И. В., НИКИФОРОВ В. А., ФРАДКОВ А. Л. *Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами*. – СПб.: Наука, 2000.
10. НГУЕН КУАНГ ХЫНГ, УТКИН В. А. *Задачи управления двигателем постоянного тока* // АиТ. – 2006. – №5. – С. 102-118.
11. НГУЕН ТХАНЬ ТИЕН, КРАСНОВА С. А. *Информационное обеспечение систем управления электромеханическими объектами при наличии внешних возмущений* / Труды Института. Том XXVII. – М.: ИПУ РАН, 2006. – С. 86-98.
12. ПЕТРОВ Б. Н., РУТКОВСКИЙ В. Ю., ЗЕМЛЯКОВ С. Д. *Адаптивное координатно-параметрическое управление нестационарными объектами*. – М.: Наука, 1980.
13. УОНЕМ У. М. *Линейные многомерные системы управления. Геометрический подход*. – М.: Наука, 1980.
14. УТКИН А. В. *Метод расширения пространства состояния в задаче синтеза автономного управления* // АиТ. – 2007. – №6. – С. 81-98.
15. УТКИН В. А., УТКИН В. И. *Метод разделения в задачах инвариантности* // АиТ. – 1983. – №12. – С. 39-48.
16. УТКИН В. А. *Инвариантность и автономность в системах с разделяемыми движениями* // АиТ. – 2001. – №11. – С. 73-94.
17. УТКИН В. И. *Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления*. – М.: Наука, 1987.
18. ISIDORI A. *Nonlinear control systems*. – Berlin: Springer-Verlag. 1995.

19. FLOQUET T., BARBOT J. P. *An observability form for linear system with unknown inputs* // Int. J. Control. – 2006. – №79. – P. 132-139.
20. KRASNOVA S. A., UTKIN V. A., UTKIN A. V. *Direct method of manipulator endpoint control synthesis* // Proceedings of the 17th World Congress IFAC, Seoul, Korea. – 2008. – P. 2388-2393.
21. MARINO R., TOMEI P. *Nonlinear control systems design*. – Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, 1995.
22. ZHOU K., DOYLE J., GLOVER R. *Robust and optimal control*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, 1995.

TRACKING PROBLEM SOLUTION UNDER UNCERTAINTY BASED ON JOINT CONTROLLABILITY AND OBSERVABILITY BLOCK FORM

Anna Akhobadze, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, postgraduate student (krasnova@ipu.rss.ru).
Svetlana Krasnova, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (krasnova@ipu.rss.ru).

Abstract: Structural properties of linear multidimensional dynamic systems under effect of external disturbances are analyzed in tracking problem on output values. Only output variables are supposed to be measured, components of external distributions are assumed to be unknown non-smooth limited functions of time. The step-by-step transformation procedure of source linear system to joint controllability and observability block form relating to output values is developed. On the basis of the given form decomposition feedback synthesis procedure is presented that provides convergence of *output variables to program trajectory with predetermined asymptotic convergence rates. The problem of information support for compositing control algorithms is solved by state observer on sliding modes.*

Keywords: tracking, decomposition, external disturbances, state observers on sliding modes.

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В.А. Уткиным