УДК 681.3.076.4

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ В ПАМЯТИ БОЛЬШОГО ОБЪЕМА

В. Н. БУРКОВ, М. И. РУБИНШТЕЙН, В. Б. СОКОЛОВ

(Москва)

Рассматривается задача оптимального размещения информации в памяти на магнитных лентах (МЛ) или дисках (МД) при критериях минимума среднего и максимального времени обращений (статистика обращений считается стационарной). Сделаны обобщения на случай более сложных критериев оптимизации.

1. Постановка задач и основные обозначения

Рассмотрим следующую модель памяти. Память состоит из одного блока МД или одной МЛ. Длины размещаемых в ней информационных массивов (ИМ) одинаковы. Поиск информации осуществляется в двух направлениях, а считывание — в одном (для МЛ направление считывания считается совпадающим с направлением нумерации мест ИМ).

Для данной модели рассмотрим две основные задачи.

I. Найти размещение ИМ, минимизирующее среднее время обращения к памяти.

II. Найти размещение ИМ, минимизирующее максимальное взвешенное время обращения к памяти.

В обеих задачах предполагается заданной статистика обращений к ИМ. Физический смысл задачи I ясен и не требует пояснений. Задача II возникает, например, когда память используется в режиме работы справочной.

Прежде чем привести аналитическую формулировку задач I и II, введем обозначения: p_i — вероятность обращения к i-му ИМ ($i = 1, 2, \ldots, n$), $P = \|p_{ij}\|$ — матрица размерности $n \times n$, элементы p_{ij} которой представляют собой вероятность обращения к j-му ИМ после обращения к i-му; $\mathbf{p}_m$ — m-вектор с i-й компонентой, равной p_i ($i = 1, \ldots, m$, $m = 1, \ldots, n$), $\mathbf{k}_m$ — m-вектор, обозначающий некоторое размещение m первых ИМ; i-я компонента $\mathbf{k}_m$, т. е. k_i, представляет собой номер места i-го ИМ в этом размещении ($i = 1, \ldots, m$, $m = 1, \ldots, n$), $\mathbf{p}^m$ — m-вектор с i-й компонентой p_i^m, равной $p_i - p_{m+1}$ ($i = 1, \ldots, m$, $m = 1, \ldots, n$, $p_{n+1} = 0$), $I_m(A)$ — подмножество множества индексов $I_m = \{1, \ldots, m\}$, для которого выполняется соотношение A.

В приведенных обозначениях нетрудно записать целевые функции задач I и II.

Среднее время обращения T складывается из среднего времени поиска $T_{\text{п}}$ и среднего времени считывания $T_{\text{сч}}$, которые соответственно равны

$$T_{\text{п}} = L_1 \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{j \in I_n(k_j > k_i)} p_i p_{ij}(k_j - k_i - \beta) + \sum_{j \in I_n(k_j \leqslant k_i)} p_i p_{ij}(k_i - k_j + \beta) \right\},$$

$$T_{\text{сч}} = L_2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i p_{ij},$$

где L_1 и L_2 — константы, зависящие соответственно от скорости поиска и считывания (в случае МЛ L_1 зависит также от «длины» одного ИМ), $\beta = 1$ для МЛ и $\beta = 0$ для МД.

Таким образом, задача I принимает вид

$$\min_{\mathbf{k}_n} \{ T_1(P, \mathbf{p}_n, \mathbf{k}_n) \},$$

$$T_1(P, \mathbf{p}_n, \mathbf{k}_n) = L_1 \left\{ \sum_{i=1} \sum_{j=1} p_i p_{ij} |k_i - k_j| \right\} +$$

$$+ \beta \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j \in I_n(k_j \leqslant k_i)} p_i p_{ij} - \sum_{j \in I_n(k_j > k_i)} p_i p_{ij} \right) + L_2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i p_{ij}. \qquad \text{(I)}$$

Задача II, как легко видеть, записывается следующим образом:

$$\min_{\mathbf{k}_n} \{ T_2(P, \mathbf{p}_n, \mathbf{k}_n) \},$$

$$T_2(P, \mathbf{p}_n, \mathbf{k}_n) = \max_{i,j \in I_n} \left\{ L_1 p_i p_{ij} \left(|k_i - k_j| + \beta + \frac{L_2}{L_1} \right) \right\}. \qquad \text{(II)}$$

Отметим, что сформулированные выше задачи относятся к классу экстремальных комбинаторных задач и являются довольно сложными. Ниже рассматривается их приближенное решение, которое находится на основании точного решения для частного случая, когда

$$p_{ij} = p_j \qquad (i, j \in I_n). \qquad (1)$$

Условие (1) обозначает независимость обращений к ИМ, что в некоторых случаях имеет место на практике.

С учетом (1) целевые функции задач I и II, которые в этом случае будем обозначать соответственно через $T_1(\mathbf{p}_n, \mathbf{k}_n)$ и $T_2(\mathbf{p}_n, \mathbf{k}_n)$, принимают вид

$$T_1(\mathbf{p}_n, \mathbf{k}_n) = L_1 \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i p_j |k_i - k_j| + \beta \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \right) + L_2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i p_j, \qquad (2)$$

$$T_2(\mathbf{p}_n, \mathbf{k}_n) = \max_{i,j \in I_n} \left\{ L_1 p_i p_j \left(|k_i - k_j| + \beta + \frac{L_2}{L_1} \right) \right\}. \qquad (3)$$

Выражения (2) и (3) показывают, что задачи I и II при условии (1) сводятся к следующим:

$$\min_{\mathbf{k}_n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i p_j (|k_i - k_j| + C_1) \right\},$$

$$\min_{\mathbf{k}_n} \{ \max_{i,j \in I_n} p_i p_j (|k_i - k_j| + C_2) \}$$

(C_1 и C_2 — константы).

Рассмотрим более общие задачи III и IV такой же структуры, а именно:

$$\min_{\mathbf{k}_n} \{T_3(\mathbf{p}_n, \mathbf{k}_n)\} = \min_{\mathbf{k}_n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i p_j f_1(|k_i - k_j| + C_1) \right\}, \qquad \text{(III)}$$

$$\min_{\mathbf{k}_n} \{T_4(\mathbf{p}_n, \mathbf{k}_n)\} = \min_{\mathbf{k}_n} \{ \max_{i,j \in I_n} f_3(p_i, p_j) f_2(|k_i - k_j| + C_2) \}. \qquad \text{(IV)}$$

Функции f_1, f_2 и f_3, входящие в (III) и (IV), предполагаются неубывающими, а f_1, кроме того, выпуклой вниз. Далее будет показано, что для этого класса функций оптимальное решение задач III и IV зависит только от $\mathbf{p}_n$. Будем обозначать его $\mathbf{k}_0(\mathbf{p}_n)$. Вектор $\mathbf{k}_0(\mathbf{p}_n)$ определяется следующим обра-

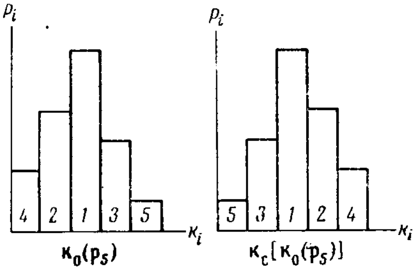

Рис. 1

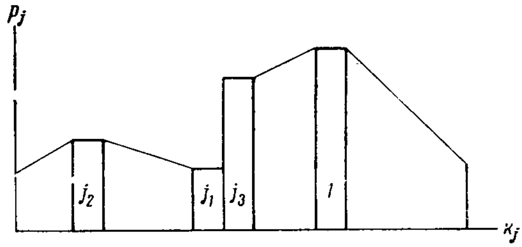

Рис. 2

зом. Расположим компоненты $\mathbf{p}_n$ в ряд по убыванию их величин. Пусть $N_i(\mathbf{p}_n)$ — номер i-й компоненты в этом ряду. Тогда

$$k_{0i}(\mathbf{p}_n) = \left[\frac{n}{2}\right] + 1 - (-1)^{N_i(\mathbf{p}_n)} \left[\frac{N_i(\mathbf{p}_n)}{2}\right] \qquad (i \in I_n). \qquad (4)$$

Здесь $[x]$ — целая часть x.

Доказательство оптимальности определенного таким образом вектора $\mathbf{k}_0(\mathbf{p}_n)$ приводится в следующем разделе.

Отметим, что обобщения (III) и (IV) интересны не только сами по себе, но и тем, что расширяют круг задач оптимального размещения ИМ, решаемых точно. Так, задача минимизации среднего «штрафа» за время ожидания информации при независимых обращениях сводится к следующей:

$$\min_{\mathbf{k}_n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i p_j S(|k_i - k_j|) \right\},$$

где $S(|k_i - k_j|)$ — нелинейная функция стоимости ожидания. Эта задача при соответствующем вполне реальном виде функции стоимости S совпадает с (III) и, значит, имеет своим решением $\mathbf{k}_0(\mathbf{p}_n)$.

Рассмотрим другой пример.

Пусть матрица Q с элементами $q_{ij} = p_i p_{ij}$ $(i, j \in I_n)$ удовлетворяет следующему свойству: существует такая система приоритетов $N_i(Q)$, где $N_i(Q) \in I_n$, $N_i(Q) \neq N_j(Q)$ при $i \neq j$ и $i, j \in I_n$, что

$$q_{i_1 j} \geqslant q_{i_2 j}, \qquad q_{j i_1} \geqslant q_{j i_2}, \qquad j \in I_n \qquad (5)$$

при $N_{i_1}(Q) > N_{i_2}(Q)$.

Зададим функцию $f_3'(p_i', p_j') = q_{ij}$.

Легко видеть, что в силу (5) $f'(p_i', p_j')$ можно считать монотонной, если произвольный пока вектор $\mathbf{p}_n'$ выбрать так, чтобы

$$N_i(\mathbf{p}_n') = N_i(Q) \qquad (i \in I_n).$$

Последнее всегда можно сделать. Поэтому задача II для матрицы Q, удовлетворяющей (5), сводится к задаче IV и имеет решением $\mathbf{k}_0(Q)$, которое определяется выражением (4), где вместо $N_i(\mathbf{p}_n)$ стоит $N_i(Q)$.

Прежде чем перейти к доказательству оптимальности размещения $\mathbf{k}_0(\mathbf{p}_n)$, сделаем одно замечание.

Величины критериев задач III и IV не изменятся, если от размещения $\mathbf{k}_n$ перейти к размещению $\mathbf{k}_c(\mathbf{k}_n)$, где

$$k_{ci}(\mathbf{k}_n) = n + 1 - k_i \quad (i \in I_n).$$

Размещение $\mathbf{k}_c(\mathbf{k}_n)$ по отношению к $\mathbf{k}_n$ будем называть симметричным. На рис. 1 показано размещение $\mathbf{k}_0(\mathbf{p}_5)$ и симметричное ему размещение (цифры в прямоугольниках соответствуют i).

2. Оптимизация размещения ИМ при независимых обращениях

Будем считать, что ИМ пронумерованы в порядке убывания p_i, т. е.

$$p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_n. \tag{6}$$

Кроме того, будем считать для краткости, что $C_1 = C_2 = 0$, хотя все приводимые ниже рассуждения остаются в силе и для случая, когда C_1 и C_2 не равны 0.

Рассмотрим в отдельности каждую из задач III и IV.

Задача III. Докажем две леммы.

Лемма 1. Решением задачи

$$\min_{\mathbf{k}_q} \left\{ \sum_{i=1}^{q} p_i^q \sum_{j=1}^{q} f_1(|k_i - k_j|) \right\} \quad (q = 1, \ldots, n) \tag{7}$$

является вектор $\mathbf{k}_0(\mathbf{p}_q)$.

Доказательство. Обозначим $\sum_{j=1}^{q} f_1(|k_i - k_j|) = f_i(\mathbf{k}_q)$, j_q — такое j, для которого $k_j = q$, а через $j^+(\mathbf{k}_q)$ или просто j^+ — номер ИМ, стоящего в размещении $\mathbf{k}_q$ после j-го ИМ. Тогда

$$f_{i^+}(\mathbf{k}_q) = \left[\sum_{j \in I_q (j \neq j_q)} f_1(|k_{i_+} - k_{j^+}|) \right] + f_1(|k_{i^+} - 1|),$$

$$f_i(\mathbf{k}_q) = \left[\sum_{j \in I_q (j \neq j_q)} f_1(|k_i - k_j|) \right] + f_1(|k_i - q|).$$

Учитывая, что $|k_{i^+} - k_{j^+}| = |k_i - k_j|$, получаем

$$f_i(\mathbf{k}_q) - f_{i^+}(\mathbf{k}_q) = f_1(|k_i - q|) - f_1(|k_{i^+} - 1|). \tag{8}$$

Равенство (8) показывает, что $f_i(\mathbf{k}_q)$ при росте k_i монотонно убывает для $k_i < [q/2]$ и монотонно возрастает для $k_i > [q/2]$. Можно показать еще, что в силу симметрии $f_i(\mathbf{k}_q)$ при $k_{i_1} = q - k_{i_2} + 1$

$$f_{i_1}(\mathbf{k}_q) = f_{i_2}(\mathbf{k}_q). \tag{9}$$

Из (8) и (9) легко заключить, что размещение $\mathbf{k}_0(\mathbf{p}^q)$ минимизирует сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{k}_q) p_i^q,$$

т. е. лемма доказана.

Лемма 2. Оптимальное размещение (решение) $\mathbf{k}_q'$ задачи

$$\min_{\mathbf{k}_q}\{T_3(\mathbf{p}^q, \mathbf{k}_q)\} \qquad (q = 1, \ldots, n) \tag{10}$$

удовлетворяет свойству унимодальности

$$p_j \leqslant p_{j+}^q, \qquad j \in I_q(k_j' < k_1'), \qquad p_j^q \geqslant p_{j+}^q, \qquad j \in I_q(k_j' \geqslant k_1'). \tag{11}$$

Доказательство. Переставим в оптимальном размещении $\mathbf{k}_q'$ два соседних ИМ. Приращение величины критерия Δ при этом должно быть больше 0. Таким образом, имеем

$$\Delta = 2(p_{j+}^q - p_j^q) \sum_{i \in I_q(i \neq j,\, j+)} p_i^q [f_1(|k_i' - k_j'|) - f_1(|k_i' - k_{j+}'|) =$$

$$= 2(p_{j+}^q - p_j^q)[Q_j^+(\mathbf{k}_q') - Q_j^-(\mathbf{k}_q')] \geqslant 0, \tag{12}$$

где

$$Q_j^-(\mathbf{k}_q) = \sum_{i \in I_q(k_i < k_j)} p_i^q [f_1(|k_i - k_{j+}|) - f_1(|k_i - k_j|)],$$

$$Q_j^+(\mathbf{k}_q) = \sum_{i \in I_q(k_i > k_{j+})} p_i^q [f_1(|k_i - k_j|) - f_1(|k_i - k_{j+}|)].$$

Используя монотонность и выпуклость функций f_1, легко показать, что $Q^-(\mathbf{k}_q)$ для любого размещения $\mathbf{k}_q$ монотонно возрастает, а $Q_j^+(\mathbf{k}_q)$ монотонно убывает при возрастании k_j.

Действительно, например, для $Q_j^-(\mathbf{k}_q)$ имеем

$$Q_j^-(\mathbf{k}_q) - Q_{j+}^-(\mathbf{k}_q) = \sum_{i \in I_q(k_i < k_j)} p_i^q \{[f_1(|k_i - k_{j+}|) - f_1(|k_i - k_j|) -$$

$$- [f_1(|k_i - k_{j+}| + 1) - f_1(|k_i - k_j| + 1)]\} - p_j^q [f_1(2) - f_1(1)] \leqslant 0.$$

Итак, выражение $Q_j^+(\mathbf{k}_q) - Q_j^-(\mathbf{k}_q)$ монотонно убывает при возрастании k_j, но для $k_j = 1$ оно больше 0, а для $k_j = q - 1$ меньше 0, так что оно один раз меняет знак. Легко видеть, что это замечание в силу (12) доказывает лемму 2.

Леммы 1 и 2 позволяют доказать основное утверждение для задачи III.

Утверждение 1. Пусть размещение $\mathbf{k}_0(\mathbf{p}^{m-1})$ — решение задачи (10) при $q = m - 1$. Тогда $\mathbf{k}_0(\mathbf{p}^m)$ — решение той же задачи при $q = m$.

Доказательство. Оптимальное размещение задачи (10) при $q = m$ будем искать в классе таких размещений $\mathbf{k}_m'$, для которых k_m' равно либо 1, либо m. Остальные можно отбросить, поскольку в силу $p_m^m \leqslant p_i^m \quad (i < m)$ они не удовлетворяют свойству унимодальности (лемма 2).

Отметим, что если $p_i' = p_i - p_0$, где p_0 — произвольная константа, то

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} p_i p_j f_1(|k_i - k_j|) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} p_i' p_j' f_1(|k_i - k_j|) +$$

$$+ 2p_0 \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{m} f_1(|k_i - k_j|) + p_0^2 \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f_1(|k_i - k_j|). \tag{13}$$

Пусть теперь $p_0 = p_m - p_{m+1}$, $\mathbf{k}'_m = \begin{bmatrix} \mathbf{k}'_{m-1} \\ k'_m \end{bmatrix}$ и вектор $\mathbf{k}''_{m-1}$ такой, что

$$k'_i = \begin{cases} k'_i & \text{если } k'_m = m, \\ k'_i - 1, & \text{если } k'_m = 1 \qquad (i \in I_m). \end{cases} \tag{14}$$

Тогда из (13) с учетом вида функции $T_3(\mathbf{p}^q, \mathbf{k}_q)$ получаем

$$T_3(\mathbf{p}_m\mathbf{k}'_m) = T_3(\mathbf{p}_{m-1}, \mathbf{k}''_{m-1}) + 2(p_m - p_{m+1}) \sum_{i=1}^{m} p_i^m \sum_{j=1}^{m} f_1(|k'_i - k'_j|) +$$

$$+ (p_m - p_{m+1})^2 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} f_1(|k'_i - k'_j|). \tag{15}$$

Из (4), (6) и (14) следует, что если $\mathbf{k}'_m = \mathbf{k}_0(\mathbf{p}^m)$, то $\mathbf{k}''_{m-1} = \mathbf{k}_0(\mathbf{p}^{m-1})$, поэтому в силу условия утверждения и леммы 1 при $\mathbf{k}'_m = \mathbf{k}_0(\mathbf{p}^m)$ оба слагаемых в правой части (15), зависящие от $\mathbf{k}'_m$, минимальны, что и доказывает наше утверждение.

Прямым следствием доказанного утверждения является то, что решением задачи III является вектор $\mathbf{k}_0(\mathbf{p}^n) = \mathbf{k}_0(\mathbf{p}_n)$, поскольку оптимальность $\mathbf{k}_0(\mathbf{p}^1)$ очевидна, а задача III совпадает с (10) при $q = n$.

Задача IV. Для ее решения докажем лемму.

Лемма 3. В классе оптимальных размещений (решений) задачи

$$\min_{\mathbf{k}_n}\{T_4(\mathbf{p}_q, \mathbf{k}_q)\} = \min_{\mathbf{k}_n}\{\max_{i,\, j \in I_q} T_{ij}(k_i, k_j, p_i, p_j)\}, \tag{16}$$

где

$$T_{ij}(k_i, k_j, p_i, p_j) = f_3(p_i, p_j) f_2(|k_i - k_j|) \qquad (i \neq j,\ q = 2, \ldots, n),$$

имеются размещения, унимодальные по p_i (см. (11)).

Доказательство. Пусть имеется некоторое оптимальное размещение $\mathbf{k}''_q$ не удовлетворяющее условию унимодальности. Это означает, что справа или слева от 1-го ИМ найдется хотя бы один ИМ (пусть это будет i_1-й ИМ), для которого

$$p_{j_1} < p_{j_2} = \max_{j \in I_q(|k'_j - k'_1| > |k'_{j_1} - k'_1|)} \{p_j\}, \tag{17}$$

где j_2-й ИМ находится от 1-го ИМ с той же стороны, что j_1-й ИМ.

Пусть j_1 обозначает ближайший к 1-му ИМ, удовлетворяющий (17), и для определенности он расположен слева от 1-го ИМ (рис. 2). Поменяем в исходном размещении $\mathbf{k}'_q$ местами j_1-й и j_2-й ИМ. В новом размещении $\mathbf{k}''_q$

$$k''_j = k'_j, \quad j \in I_q(\mathrm{j} \neq j_1, j_2), \quad k''_{j_1} = k'_{j_2}, \quad k''_{j_2} = k'_{j_1}. \tag{18}$$

В силу того что j_1 есть первый ИМ, удовлетворяющий (17),

$$p_{j_3} \geqslant p_{j_1}, \qquad p_{j_3} \geqslant p_{j_2} [j_3 = j_1^+(\mathbf{k}'_q)]. \tag{19}$$

Нетрудно видеть, что из (17), (19) в силу вида функций f_2 и f_3 следует

$$\begin{aligned} &T''_{ij_2} < T'_{ij_3},\ T''_{ij_1} < T'_{ij_3} \text{ при } i \in I_q(k''_i < k'_{j_2}), \\ &T''_{ij_2} < T'_{ij_2},\ T''_{ij_1} < T'_{ij_2} \text{ при } i \in I_q(k''_i > k'_{j_1}), \\ &T''_{ij_2} < T'_{ij_3},\ T''_{ij_1} < T'_{ij_2} \text{ при } i \in I_q(k'_{j_2} < k''_i < k'_{j_1}), \\ &T''_{j_1j_2} = T'_{j_1j_2},\ T''_{ij} = T'_{ij} \text{ при } i, j \in I_q(j \neq j_1, j_2), \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$T'_{ij} = T_{ij}(k'_i, k'_j, p_i, p_j), \ T''_{ij} = T_{ij}(k''_i, k''_j, p_i, p_j).$$

Соотношения (20) показывают, что значение целевой функции $T_4(\mathbf{p}_q, \mathbf{k}_q)$ для размещения $\mathbf{k}''_q$ не больше ее значения для размещения $\mathbf{k}'_q$, и, значит, размещение $\mathbf{k}''_q$, так же как и $\mathbf{k}'_q$, является оптимальным, причем в нем ИМ, удовлетворяющие (17), если они есть, расположены «дальше» от 1-го ИМ. С размещением $\mathbf{k}''_q$ мы можем поступить так же, как с $\mathbf{k}'_q$, и получить из него оптимальное размещение, в котором ИМ, удовлетворяющие (17) (опять же если они есть), расположены дальше от 1-го, чем в

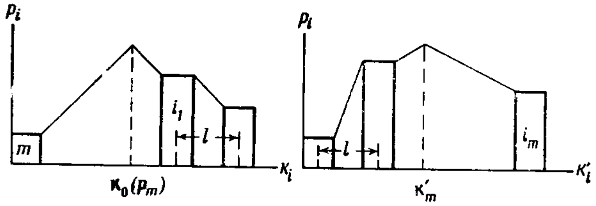

Рис. 3

размещении $\mathbf{k}''_q$. Поступая так дальше, мы, очевидно, придем к размещению, унимодальному по p_i, для которого (17) не имеет места. Лемма доказана.

Переходим к доказательству основного для задачи IV утверждения.

Утверждение 2. Пусть $\mathbf{k}_0(\mathbf{p}_{m-1})$ — оптимальное решение задачи (16) при $q = m - 1$, тогда $\mathbf{k}_0(\mathbf{p}_m)$ — оптимальное решение той же задачи при $q = m$.

Доказательство. Могут представиться два случая.

1. Имеет место следующее неравенство:

$$\max_{j \in I_{m-1}} T_{mj}[k_{m0}(\mathbf{p}_m), k_{j0}(\mathbf{p}_m), p_m, p_j] \leqslant T_4[\mathbf{p}_{m-1}, \mathbf{k}_0(\mathbf{p}_{m-1})]. \qquad (21)$$

Неравенство (21) показывает, что размещение $\mathbf{k}_0(\mathbf{p}_m)$ оптимально для задачи (16) при $q = m$, поскольку значение критерия для него совпадает со значением критерия задачи (16) при $q = m - 1$ для размещения $\mathbf{k}_0(\mathbf{p}_{m-1})$, которое по условию утверждения является оптимальным.

2. В размещении $\mathbf{k}_0(\mathbf{p}_{m-1})$ имеется такой ИМ i_1, для которого

$$\max_{j \in I_{m-1}} T_{mj}[k_{m0}(\mathbf{p}_m), k_{j0}(\mathbf{p}_m), p_m, p_j] =$$

$$= T_{mi_1}[k_{m0}(\mathbf{p}_m), k_{i_10}(\mathbf{p}_m), p_m, p_{i_1}] > T_4[\mathbf{p}_{m-1}\mathbf{k}_0(\mathbf{p}_{m-1})]. \qquad (22)$$

Предположим, что $\mathbf{k}_0(\mathbf{p}_m)$ не является оптимальным решением для задачи (16) при $q = m$, а таковым является $\mathbf{k}'_m \neq \mathbf{k}_0(\mathbf{p}_m)$. В силу леммы 3 $\mathbf{k}'_m$ можно считать унимодальным по p_i. Предположим, что $k'_m = k_{m0}(\mathbf{p}_m) = 1$ (вообще говоря, могло бы быть $k'_m = m$ или $k_{m0}(\mathbf{p}_m) = m$, но тогда мы бы перешли от $\mathbf{k}'_m$ или $\mathbf{k}_0(\mathbf{p}_m)$ к размещениям, им симметричным). Пусть i_1-й ИМ находится в размещении $\mathbf{k}_0(\mathbf{p}_m)$ на l-м месте от конца (очевидно, $l \leqslant \left[\frac{m+1}{2}\right]$), как изображено на рис. 3. Тогда в силу структуры $\mathbf{k}_0(\mathbf{p}_m)$ число ИМ, для которых

$$p_i < p_{i_1}, \qquad (23)$$

не более $(2l - 1)$. В размещении $\mathbf{k}'_m$ в силу его унимодальности эти

$(2l-1)$ ИМ находятся на «концах» размещения. Но на «дальнем конце» их должно быть не менее l, иначе, как видно из (22), значение критерия $T_4'(\mathbf{p}_m\mathbf{k}_m)$ для размещения $\mathbf{k}_m'$ было бы не меньше, чем для $\mathbf{k}_0(\mathbf{p}_m)$. Значит, на «ближнем конце» размещения $\mathbf{k}_m'$ ИМ, удовлетворяющих (23), не более $(l-1)$, т. е. на l-м месте от начала в размещении $\mathbf{k}_m'$ расположен ИМ i_2, для которого $p_{i_2} \geqslant p_{i_1}$. Если еще учесть, что $p_{im} \geqslant p_m(k_{i_m}' = m)$, то с учетом вида f_2 и f_3 получим

$$T_{i_2 i_m}(k_{i_2}', k_{i_m}', p_{i_2}, p_{i_m}) \geqslant T_{mi_1}[k_{m0}(\mathbf{p}_m), k_{i_1 0}(\mathbf{p}_m), p_m, p_{i_1}].$$

Это означает, что $\mathbf{k}_m'$ имеет значение критерия T_4 не меньшее, чем размещение $\mathbf{k}_0(\mathbf{p}_m)$. Полученное противоречие доказывает справедливость нашего утверждения во втором случае.

Прямым следствием доказанного утверждения является то, что решением задачи IV является $\mathbf{k}_0(\mathbf{p}_n)$, поскольку решением задачи (16) при $q = 2$, очевидно, является $\mathbf{k}_0(\mathbf{p}_2)$, а задача IV совпадает с (16) при $q = n$.

3. Приближенное решение задач оптимального размещения ИМ в общем случае

Пусть матрица P произвольна. Обозначим

$$p_j'' = \min_{i \in I_n} \{p_{ij}\}. \tag{24}$$

Поскольку должно быть

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} p_j p_{ji} \qquad (i \in I_n),$$

то из (24) следует

$$p_j'' \leqslant p_j \qquad (j \in I_n). \tag{25}$$

Из (24) и (25), используя решение задач III и IV, для любого размещения $\mathbf{k}_n$ легко получить

$$\begin{gathered} T_1[\mathbf{p}_n'', \mathbf{k}_0(\mathbf{p}_n'')] \leqslant T_1(\mathbf{p}_n'', \mathbf{k}_n) \leqslant T_1(P, \mathbf{p}_n, \mathbf{k}_n), \\ T_2[\mathbf{p}_n'', \mathbf{k}_0(\mathbf{p}_n'')] \leqslant T_2(\mathbf{p}_n'', \mathbf{k}_n) \leqslant T_2(P, \mathbf{p}_n, \mathbf{k}_n). \end{gathered} \tag{26}$$

Возьмем в качестве приближенного решения задач I и II размещение $\mathbf{k}_0(\mathbf{p}_n'')$. Тогда из (26) сразу получаем оценки для относительных точностей в определении оптимальных значений целевых функций $T_1(P, \mathbf{p}_n, \mathbf{k}_n)$ и $T_2(P, \mathbf{p}_n, \mathbf{k}_n)$:

$$\alpha_1 \leqslant \frac{T_1[P, \mathbf{p}_n, \mathbf{k}_0(\mathbf{p}_n'')]}{T_1[\mathbf{p}_n'', \mathbf{k}_0(\mathbf{p}_n'')]} - 1, \qquad \alpha_2 \leqslant \frac{T_2[P, \mathbf{p}_n, \mathbf{k}_0(\mathbf{p}_n'')]}{T_2[\mathbf{p}_n'', \mathbf{k}_0(\mathbf{p}_n'')]} - 1. \tag{27}$$

Оценки (27) позволяют судить о том, является ли размещение $\mathbf{k}_0(\mathbf{p}_n)$ приемлемым в смысле точности решением задач I и II.

Если оно неприемлемо, то его можно улучшить, применив метод локальной оптимизации.

Результаты решения задач III и IV ограничиваются случаем памяти, состоящей из одного блока МЛ или МД. При этом блок МД может состоять из нескольких дисков с цилиндрической схемой записи — считывания информации. Если число блоков памяти $m > 1$, задачи III и IV сильно усложняются. Однако, используя их решение при $m = 1$, легко указать алгоритм получения локально-оптимального решения.

Пусть вектор $\mathbf{p}(q)$ состоит из таких компонент p_i вектора $\mathbf{p}_n$, для которых

$$i \equiv q - 1 \pmod m \qquad (q = 1, 2, \ldots, m). \tag{28}$$

Разобьем множество всех ИМ на m групп в соответствии с разбиением вектора $\mathbf{p}_n$ на векторы $\mathbf{p}(q)$. Каждую q-ю группу разместим на q-й ленте в соответствии с $\mathbf{k}_0[\mathbf{p}(q)]$. Конструкция разбиения множества всех ИМ на группы (см. (28)) дает интуитивные основания предположить, что получаемое таким образом решение является достаточно хорошим.

Заключение

Задачи оптимального размещения, математическая модель которых рассмотрена в данной работе, возникают не только при оптимизации размещения информации в памяти ЭЦВМ.

Можно привести, например, следующие интерпретации той же модели.

1. Организация размещения книг в библиотеке (или предметов на складе) по критерию минимума энергии, затрачиваемой обслуживающим персоналом на их отыскание.

2. Размещение букв на барабане печатающего устройства, обеспечивающее при известной статистике букв в языке максимальную скорость печати.

3. Размещение складов и потребителей при организации работы мостового или башенного крана по критерию минимума задержки обслуживания любого потребителя или минимума расходуемой энергии.

По-видимому, возможны и другие интерпретации.

Поступила в редакцию
4 февраля 1969 г.

CERTAIN PROBLEMS OF OPTIMAL SPACING OF INFORMATION IN LARGE-VOLUMED MEMORY

V. N. BURKOV, M. I. RUBINSHTEIN, V. B. SOKOLOV

There is considered the problem of spacing information in the memory on magnetic tape (MT) or on magnetic disks (MD) under the criteria of the minimum of the average and maximum time of address (the statistic of address is considered to be stationary). The generalizations for the case of more complex optimization criteria have been made.