

УПРАВЛЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИМИ АКТИВНЫМИ СИСТЕМАМИ

В. Н. Бурков, А. Г. Ивановский, Ж. И. Бексентов

Научный подход к анализу системы хозрасчета, включая механизмы стимулирования напряженных планов, достоверности данных, согласования планов и т. д., требует учета таких свойств организационных систем (предприятий, объединений), как целенаправленность поведения с учетом будущих последствий принимаемых решений, определенная свобода принятия решений как на этапе сообщения информации о возможностях и потребностях, так и на этапе реализации плановых заданий, информированность о принципах и процедурах принятия решений в вышестоящей управляющей подсистеме (центре) и использование этой информации в своих интересах. Формализация отмеченных свойств "активности" организаций привела к понятию "активная система" [1]. Теория управления активными системами разрабатывается в Институте проблем управления с 1968 года [2+6 и др.]

Проблема стимулирования ставится в статье как задача управления стохастическими активными системами. Приводится краткий обзор результатов в этой области,дается постановка задачи управления стохастическими активными системами и исследуется проблема достоверности информации для случая многомерных активных элементов.

I. Простой активный элемент

Будем рассматривать активную систему (A_S), состоящую из центра (C) и m активных элементов (A_E).

Функционирование системы разбивается на ряд дискретных периодов, называемых периодами функционирования. A_E , состояние которого в каждом периоде функционирования определяется неотрицательной случайной величиной y , называется простым A_E [7]. Обозначим $F_k(y)$ -функцию распределения величины y в периоде k . (В дальнейшем примем, что $F_k(y)$ одна и та же в каждом периоде и индекс k будем

опускать). Для того, чтобы учесть способность А Э целево-направленно устанавливать границу сверху (или снизу) на величину состояния определяется параметрическое семейство функций распределения [8]

$$F_\omega(y) = \begin{cases} F(y) & \text{если } y \leq \omega \\ 1 & \text{если } y > \omega. \end{cases} \quad (1)$$

Функционирование А С происходит следующим образом: в начале каждого периода Ц назначает А Э планируемое состояние (план) x . В зависимости от соответствия плана x и реализации y А Э получает доход $\varphi(x, y)$. Возможны две принципиально различные схемы формирования плана - встречная и аддитивная. При встречном способе назначения плана А Э сообщает в Ц оценку x состояния y , которая и утверждается в качестве плана (такой способ соответствует распространенной в настоящее время практике принятия встречных напряженных планов). В этом случае в качестве целевой функции А Э при сообщении оценки x естественно принять величину ожидаемого дохода

$$\bar{\gamma}(x, \omega) = \int_0^\infty \varphi(x, y) dF_\omega(y). \quad (2)$$

Определение 1. Надежностью $\bar{\gamma}(x)$ плана (оценки) x называется вероятность его выполнения $\bar{\gamma}(x) = 1 - F(x)$.

Определение 2. Оценка (план) x называется достоверной, если ее надежность равна заданной q_x , то есть $q_x = \bar{\gamma}_x$ (предполагаем $F(x)$ непрерывной на $[0, \infty)$ функцией x).

Задачу анализа простой А С можно содержательно оформить как задачу определения надежности сообщаемых А Э оценок, при заданных функциях дохода. Задачу синтеза можно поставить как задачу определения функций дохода, обеспечивающих достоверность оценок (планов). Эти задачи рассматривались в работах Буркова В.Н., Ивановского А.Г., Горгидзе И.А., Немцевой А.Н. [I-9].

Так, в [I-9] показано, что при функциях дохода

$$\varphi(x, y) = x - \begin{cases} \alpha(x-y) & \text{если } x \geq y \\ \beta(y-x) & \text{если } x < y \end{cases} \quad (3)$$

где $\alpha > 0, \beta > 0$,
надежность оценки x удовлетворяет уравнению

$$q(x) = 1 - F(x) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}. \quad (4)$$

Тем самым решена проблема синтеза, так как взяв $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{q_3} - 1$, мы получим $q(x) = q_3$, то есть достоверную оценку x . В работе [8] проведен анализ варианта $\beta \geq 1$ и показано, что для этого случая граница $\omega = x$ и

$$q(x) = \frac{\alpha}{1 + \alpha}. \quad (5)$$

Там же рассмотрена квадратичная функция дохода $\varphi(x, y) = x - \alpha(x-y)^2$. Показано, что граница ω определяется из уравнения

$$\int_0^\omega F(x) dx = \frac{1}{2\alpha},$$

а оценка $x = \omega - \frac{1}{2\alpha}$.

Анализ различных нелинейных функций дохода проведен в [7].

При адаптивном способе формирования плана, оценка определяется Ц на основе анализа планов и реализаций в предыдущие периоды функционирования (такой способ содержательно соответствует нормативному планированию). При адаптивном способе "активность" подсистем проявляется на этапе реализации и заключается в выборе границы ω_t в период t . Целевая функция АЭ в периоде $t=0$ определяется следующим образом

$$\varphi(x_0, \omega_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \delta^k \int_0^{\omega_k} \varphi(x_k, y_k) dF_{\omega_k}(y),$$

где $0 < \delta < 1$ коэффициент дисконтирования. В работах [7, 8] проведен анализ закона назначения плана

$$x_{t+1} = \begin{cases} x_t & \text{если } y_t \leq x_t \\ cx_t + (1-c)y_t & \text{если } y_t > x_t \end{cases}$$

при функции дохода (3). Показано, что если $(1-\beta)(1-\delta) < \alpha\delta(1-c)$, то последовательность планов $\{x_t\}$ и последовательность

границ $\{\omega_k\}$ сходятся по вероятности к оценке x , удовлетворяющей уравнению

$$F(x) = \frac{1}{1+\alpha} \left[1 + \frac{(1-\beta)(1-\delta)}{\delta(1-\alpha)} \right].$$

Заметим, что при $\beta \geq 1$ получаем $q(x) = \frac{\alpha}{1+\alpha}$, а это совпадает с соответствующим результатом (5) для встречного способа.

2. Постановка задачи управления

Обобщая определение простого АЭ на многомерный случай, мы приходим к понятию стохастического АЭ. Обозначим $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - план, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ - реализацию АЭ. Множество возможных реализаций $B(x, z)$ определяется планом x и случайным вектор-параметром z , имеющим многомерную функцию распределения $F(z)$. Параметрическое семейство функций распределения $F_\omega(z)$ определяется по аналогии с (1)

$$F_\omega(z) = \begin{cases} F(z) & \text{если } z < \omega \ (\forall j : z_j < \omega_j) \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Вектор-параметр ω будем называть границей. Обозначим $F_j(z_j)$ - одномерную функцию распределения параметра z_j , s_j - некоторую оценку параметра z_j .

Будем предполагать $F_j(z_j)$ непрерывными на $[0, \infty)$ функциями (обобщение на дискретный случай элементарно).

Определение 1'. Надежностью $q_j(s_j)$ оценки s_j назовем величину $1 - F_j(s_j)$.

Определение 2'. Оценка s_j называется достоверной, если ее надежность равна заданной, то есть $q(s_j) = q_s$.

Замечание. В дискретном случае достоверную оценку естественно определить как максимальную оценку, надежность которой не ниже заданной.

Ограничимся постановкой задачи управления стохастическими АС при встречном способе формирования данных. В общем случае функция дохода АЭ зависит помимо плана

x и реализации y также от управления λ , устанавливаемого Ц для всех (или нескольких) АЭ (содержательно управление может соответствовать ценам на продукцию и сырье, процентам отчислений в поощрительные фонды, коэффициентам штрафов и поощрений и т.д.). Обозначим $\varphi(\lambda, x, y)$ — функцию дохода АЭ. Функционирование АС при встречном способе формирования данных включает три этапа.

1. Этап формирования данных. Каждый АЭ сообщает вектор-оценку s_i вектор-параметра x_i и вектор-оценку \bar{s}_i , характеризующую распределение $F_i(x_i)$.

2. Этап планирования. Ц определяет планы $x(\bar{s}, s)$ и управление $\lambda(\bar{s}, s)$. Процедура $\mathcal{T}(\bar{s}, s) = \{x(\bar{s}, s), \lambda(\bar{s}, s)\}$ называется законом управления.

3. Этап реализации плана. АЭ определяет реализацию y_i из множества $B_i(x_i, z_i)$, максимизируя доход $\varphi_i(\lambda, x_i, y_i)$. Обозначим $\xi_i(\lambda, x_i, z_i)$ оптимальную реализацию и $f_i(\lambda, x_i, z_i) = \varphi_i[\lambda, x_i, \xi_i(\lambda, x_i, z_i)]$.

В качестве целевой функции АЭ на этапе формирования данных примем ожидаемый доход

$$\eta_i(\lambda, x_i) = M_{z_i} \{ f_i(\lambda, x_i, z_i) \}.$$

Предполагая, что $f_i(\lambda, x_i, z_i)$ — неубывающая функция z_i , можно принять $\omega_i = \infty$ и $F_{i, \omega_i}(z_i) = F_i(z_i)$.

Подставляя закон управления $\mathcal{T}(\bar{s}, s)$ в целевую функцию $\eta_i(\lambda, x_i)$ i -го АЭ, мы получим "выигрыш" i -го АЭ $\mathcal{D}_i(\bar{s}, s)$ в зависимости от ситуации $\{\bar{s}_i, s_i\}$ (то есть от набора стратегий всех АЭ). Действуя по аналогии с детерминированным случаем [4], мы можем определить решение полученной игры как ситуацию равновесия по Нэшу, а также эффективность $\rho(\pi)$ закона \mathcal{T} как отношение значения Φ_π целевой функции системы в ситуации равновесия к оптимальному значению Φ_m целевой функции системы при наличии в Ц достаточной информации о законах распределения $\{F_i(z_i)\}$. Поскольку и значение Φ_π в ситуации равновесия, и величина Φ_m зависят от неизвестных Ц законов $\{F_i(z_i)\}$, то в качестве $\rho(\pi)$ следует взять гарантированную эффективность [4].

Задача управления состоит в определении закона \mathcal{X}_t из множества G допустимых законов управления так, чтобы

$$\rho(\mathcal{X}_t) = \max_G \rho(\mathcal{X}).$$

Иллюстрируем постановку задачи и возможность ее решения на примере задачи распределения одномерного ресурса. Рассмотрим систему из m предприятий. В распоряжении Центра имеется однородный ресурс в количестве R в каждый период функционирования. Пусть x_i - количество ресурса, получаемое предприятием i , $\Omega_i = 2\sqrt{x_i}$ - количество продукции, выпускаемой предприятием i (объем реализации в денежном выражении), ϑ_i - коэффициент эффективности работы предприятия (случайная величина). Обозначим $v_i^* = 2\sqrt{\vartheta_i}$ - план предприятия i по выпуску продукции. Примем в качестве функции дохода системы в целом

$$\tilde{\Phi}(\Omega, v) = \sum_i [\Omega_i - \Theta_i(v_i^* - \Omega_i)],$$

где

$$\Theta_i(v_i^* - \Omega_i) = \begin{cases} \alpha(v_i^* - \Omega_i) & \text{если } v_i^* \geq \Omega_i \\ \beta(\Omega_i - v_i^*) & \text{если } v_i^* \leq \Omega_i \end{cases}$$

$$\alpha > 0, \beta > 0.$$

Функция Θ_i определяет потери системы при отклонениях реального выпуска от плана. Целевую функцию системы на этапе планирования определим как ожидаемый доход

$$\Phi(x) = \sum_i 2\sqrt{x_i} \int [x_i - \Theta_i(G_i - x_i)] dF_i(x_i) =$$

$$= \sum_i 2\eta_i(G_i)\sqrt{x_i}, \quad (6)$$

$$\text{где } \eta_i(G_i) = (1-\beta)\mu_i + \beta G_i - (\alpha + \beta) \int_0^{G_i} F_i(z) dz \quad (7)$$

$$\mu_i = \int z dF_i(z).$$

Элементарные вычисления показывают, что максимум $\Phi(x)$ достигается при плане

$$\tilde{x} = \frac{\eta_i(G_i)}{\sum_j \eta_j(G_j)} R,$$

также \tilde{G}_i удовлетворяет уравнению

$$F_i(\tilde{G}_i) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} = 1 - q_j.$$

Заметим, что для определения плана \tilde{x} достаточно знать оценку S_i выражения (7). Учитывая это, рассмотрим следующую схему функционирования. На этапе формирования данных каждый АЭ сообщает оценку G_i коэффициента эффективности \tilde{x}_i и оценку S_i коэффициента $\eta_i(G_i)$. На этапе планирования Ц определяет план $\{x_i\}$ и цену λ ресурса по закону [5,6].

$$x_i = \frac{S_i^2}{\lambda^2}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\sum S_i^2}{R}}. \quad (8)$$

На этапе реализации плана каждое предприятие выпускает продукцию в количестве $2x_i \sqrt{R}$, получая доход

$$f_i(\lambda, x_i, z_i) = \Omega_i - \Psi_i(x_i - \Omega_i) = \lambda x_i. \quad (9)$$

Проведем анализ закона управления (8). После подстановки (8) в (9), получаем

$$\mathcal{D}_i(G, s) = 2\eta_i(G_i)\sqrt{R} - \lambda x_i = \frac{1}{\lambda} S_i(2\eta_i(G_i) - s). \quad (10)$$

В работе [6] показано, что при достаточно большом числе предприятий можно пренебречь влиянием оценки S_i отдельного предприятия на управление λ (теорема о слабом влиянии). С учетом слабого влияния, ситуация равновесия S_i^* , G_i^* будет определяться следующими уравнениями

$$S_i^* = \eta_i(G_i^*)$$

$$F_i(G_i^*) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} = 1 - q_j$$

или $G_i^* = \tilde{G}_i$, $S_i^* = \eta_i(\tilde{G}_i)$.

Таким образом, закон управления (8) является оптимальным законом управления (точнее, квазиоптимальным, то есть приближающимся к оптимальному с ростом числа предприятий).

Рассмотренный пример позволяет сделать следующие замечания. Задача управления стохастическими активными системами во многом близка к детерминированной постановке,

Так, анализ равновесных ситуаций почти полностью аналогичен детерминированному случаю [4+6]. Особенности связаны, во-первых, с оценкой коэффициента эффективности $\rho(\pi)$ закона управления π , поскольку вычисление Φ_{π} и Φ_m потребует, в общем случае, использования методов стохастического программирования. (В данном примере удалось избежать связанных с этим трудностей, поскольку случайные параметры входят только в функцию дохода системы. Переход к ожидаемому доходу позволил получить непосредственную задачу в детерминированной постановке). Во-вторых, с требованием определенной надежности сообщаемых оценок \bar{b}_i , или, другими словами, с требованием достоверности оценок.

В рассмотренном примере проблема достоверности свелась к случаю простого АЭ, поскольку x_i — скалярный параметр. Трудности, возникающие при анализе достоверности сообщаемых оценок \bar{b}_i , в общем случае кратко анализируются ниже.

3. Анализ многомерных активных элементов

Естественным обобщением функции дохода (3) на многомерный случай является

$$\varphi(\lambda, x, y) = \sum_j \lambda_j [y_j - \theta_j(x_j - y_j)],$$

где

$$\theta_j(x_j - y_j) = \begin{cases} \alpha_j(x_j - y_j) & , \text{ если } x_j \geq y_j \\ \beta_j(y_j - x_j) & , \text{ если } x_j \leq y_j. \end{cases}$$

Положим $\tau_j = \frac{x_j}{\theta_j}$. Если, например, x_j — план предприятия по выпуску продукции вида j , \bar{b}_j — оценка производительности предприятия по выпуску продукции j , то τ_j определяет плановое время выпуска продукции вида j . Примем, что $y_j = x_j \tau_j - \frac{\beta_j}{\alpha_j} x_j$, то есть предприятие выпускает продукцию вида j именно в течение τ_j ед. времени. Тогда, как показало в [2]

$$\gamma(\lambda, x) = \sum_j \lambda_j \tau_j \eta_j(\bar{b}_j),$$

где $\gamma_j(\sigma_j) = (1-\beta_j)\mu_j + \beta_j(\sigma_j) - (\alpha_j + \beta_j) \int_0^{\sigma_j} F_j(z) dz$.

Условие максимума $\gamma_j(\sigma_j)$ по σ_j имеет вид

$$F_j(\sigma_j) = \frac{\beta_j}{\alpha_j + \beta_j}$$

и тем самым, проблема достоверности оценок σ_j решается аналогично случаю простого АЭ.

Рассмотренный случай имеет место, например, если предприятие получает плановое задание по выпуску продукции только одного вида (то есть $T_k = T$ для некоторого вида и $T_k = 0$ для всех $k \neq j$, где T — период функционирования).

Задача существенно усложняется, если $y_j = z_j t_j$, где величины t_j предприятие выбирает из условия максимума дохода при единственном ограничении $\sum t_j = T$. Ограничимся анализом случая двух видов продукции и $\beta_j \leq 1$ ($j = 1, 2$). Заметим, что при $\beta_j \geq 1$ ($j = 1, 2$) предприятию нелесообразно перевыполнять план. Примем для определенности, что

$\lambda_1(1+\alpha_1)\mu_1 > \lambda_2(1+\alpha_2)\mu_2$. Тогда стратегия действий предприятия на этапе реализации плана следующая. Сначала выпускать продукцию первого вида до тех пор, пока не будет выполнен план. Затем выпускать продукцию второго вида, также до тех пор, пока не будет выполнен план, либо не кончится период. Примем, что предприятию дается плановое задание по выпуску продукции в определенном соотношении, то есть $x_1 = x$, $x_2 = \delta x$. Тогда $\frac{x}{z_1} + \frac{\delta x}{z_2}$ определяет время, необходимое для выполнения плана предприятием. Выпишем величины дохода предприятиями при различных значениях

$x \left(\frac{1}{z_1} + \frac{\delta}{z_2} \right)$:

$$\text{а)} \quad \frac{1}{z_1} + \frac{\delta}{z_2} \leq \frac{T}{x},$$

$$\varphi(\lambda, x, y) = (\lambda_1 + \delta \lambda_2)x;$$

$$\text{б)} \quad \frac{1}{z_1} + \frac{\delta}{z_2} > \frac{T}{x}, \quad \frac{1}{z_1} < \frac{T}{x},$$

$$\varphi(\lambda, x, y) = (\lambda_1 - \delta \alpha_2 \lambda_2)x + \lambda_2(1 + \alpha_2)z_2(T - \frac{x}{z_1});$$

$$B) \frac{1}{x_1} > \frac{T}{x},$$

$$\varphi(x, y) = \lambda_1 \left[(1 + \alpha_1) x_1 T - \alpha_1 x \right].$$

Ожидаемый доход определяется выражением

$$\int_{\frac{x}{T-x}}^{\infty} dF_1(x_1) \int_{\frac{x}{T-x}}^{\infty} (\lambda_1 + \delta \lambda_2) x dF_2(x_2) + \int_{\frac{x}{T-x}}^{\infty} dF_1(x_1) \int_{\frac{x}{T-x}-x}^{\infty} ((\lambda_1 - \delta \alpha_2 \lambda_2) x) (II)$$

$$+ \lambda_2 (1 + \alpha_2) x_2 (T - \frac{x}{x_1})] dF_2(x_2) + \int_{\frac{x}{T-x}}^{\infty} \lambda_1 \left[(1 + \alpha_1) x_1 T - \alpha_1 x \right] dF_1(x_1).$$

Обозначим $x(\delta)$ значение x , максимизирующее ожидаемый доход (II). Так как $x(\delta) \left[\frac{1}{G_1} + \frac{\delta}{G_2} \right] = T$, то при заданном δ существует множество точек $G(\delta) = [G_1(\delta), G_2(\delta)]$, обеспечивающих одно и то же $x(\delta)$. Заметим, что при $\delta=0$, $G_1(0)$ определяется из уравнения

$$F_1(G_1) = \frac{1}{1 + \alpha_1},$$

а $G_2(0)$ – произвольное неотрицательное число. Если $\frac{1}{G_1} = 0$ ($x_1 = 0$), то $G_2(0)$ определяется из уравнения

$$F_2(G_2) = \frac{1}{1 + \alpha_2},$$

а $G_1(0)$ – произвольное неотрицательное число. В общем случае $0 < \delta < \infty$ для определения $x(\delta)$ целесообразно применять метод статистических испытаний, поскольку аналитические исследования довольно трудоемки.

Л и т е р а т у р а

- I. Бурков В. И. Некоторые задачи материально-технического снабжения, решаемые на основе автоматизированной системы управления. Труды II Всесоюзной конференции по оперативному управлению [Ленинград, 1968]. В кн. "Оперативное управление производством", М., "Наука", 1971.

2. Бурков В. Н., Ивановский А. Г. и др. О методах стимулирования достоверности спроса и размещения заказов в условиях оптовой торговли. Международный симпозиум по материально-техническому снабжению (Тбилиси). Материалы. М., "МИТЭИМС", 1969.
3. Бурков В. Н., Ивановский А. Г., Горгидзе И. А. Оптимизация модели экономики на основе принципа открытого управления. Сб. "Вопросы экономико-математического моделирования". Изд. МГУ, 1971, выпуск 6.
4. Бурков В. Н., Емельянов С. В. Управление активными системами. Сб. "Активные системы". М., ИАТ, 1973.
5. Бурков В. Н., Опойцев В. И. Распределение ресурсов в активной системе. Сб. "Активные системы". М., ИАТ, 1973.
6. Бурков В. Н., Опойцев В. И. Метаматервой подход к управлению активными системами. "Автоматика и телемеханика", 1974, № 1.
7. Горгидзе И. А., Ивановский А. Г., Немцова А. Н. Простой активный элемент. Сб. "Активные системы". М., ИАТ, 1973.
8. Бурков В. Н., Горгидзе И. А. Принцип адаптивного планирования в активных системах. "Сообщения АН СССР", 1971, т. 64, № 3.
9. Ивановский А. Г. Задачи стимулирования и получения объективных оценок в активных системах. "Автоматика и телемеханика", 1970, № 8.

УДК 330.И15

Теория активных систем (обзор). Емельянов С. В., Бурков В. Н. Согласованное управление. Сборник статей. М., ИАТ, 1975.

Дается аксиоматика теории активных систем и приводятся основные результаты. Библ. наим. 50.

УДК 330.И15

Согласованное планирование в активных системах при адаптивном способе формирования данных. Кондратьев В. В. Согласованное управление. Сб. статей. М., ИАТ, 1975.

Рассматривается ряд задач согласованного планирования в активных системах при адаптивном способе формирования данных. Приводятся достаточные условия, обеспечивающие достоверность сообщаемой элементами информации. Библ. наим. 5.

УДК 330.И15

Управление стохастическими активными системами. Бурков В. Н., Ивановский А. Г., Бексентов Ю. И. Согласованное управление. Сб. статей. М., ИАТ, 1975.

Рассматривается проблема стимулирования в стохастических активных системах. Приводится краткий обзор результатов в этой области, дается постановка задачи, исследуется проблема достоверности информации для случая многомерных активных элементов. Библ. наим. 9.

УДК 330.И15

Обобщенные оценки в законах управления активными системами. Щепкин А. В. Согласованное управление. Сб. статей. М., ИАТ, 1975.

Рассматривается управление активной системой на основе обобщенных оценок. Изучается динамика поведения активных элементов, входящих в систему. Илл. 2, библ. наим. 5.

УДК 330.И15

Задачи синтеза иерархических систем управления. Рубинштейн М. И. Согласованное управление. Сб. статей. М., ИАТ, 1975.

Дается формализация и приближенный алгоритм решения задачи синтеза иерархических систем управления.