УДК 519.6

© 2002 г. А. В. АРУТЮНОВ, д-р физ.-мат. наук
(Российский университет дружбы народов, Москва),
В. Н. БУРКОВ, д-р техн. наук,
А. Ю. ЗАЛОЖНЕВ, канд. физ.-мат. наук
(Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва),
Д. Ю. КАРАМЗИН
(Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова)

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ ПО МНОЖЕСТВУ НЕЗАВИСИМЫХ ОПЕРАЦИЙ

Рассматривается задача оптимального распределения ресурсов по множеству независимых операций для случая, когда скорость операций линейно зависит от количества ресурсов и от состояния операций. Получены необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина.

1. Введение

Задачи оптимального распределения ресурсов относятся к сложным комбинаторным задачам управления проектами. Достаточно законченная теория существует для ряда постановок и, в частности – для случая независимых операций [1]. Рассмотрим постановку задачи для этого случая. Проект состоит из k технологически не зависимых операций. Для каждой операции задано ее начальное состояние $x_{0,j}$, конечное состояние $x_{T,j}$ (разность $W_j = x_{T,j} - x_{0,j}$ называется объемом операции) и зависимость скорости операции от количества ресурсов на ней

$$\dot{x}_j = f_j(u_j).$$

Задано множество ограничений на ресурсы

$$\sum_{j=1}^{k} u_j(t) \le b.$$

Требуется определить распределение ресурсов $\overline{u}(t)$, удовлетворяющее ограничению на ресурсы, при котором все операции будут выполняться (проект перейдет из состояния $\mathbf{x}_0$ в состояние $\mathbf{x}_T$) и критерий оптимальности примет минимальное значение. Для случая, когда в качестве критерия оптимальности принимается время завершения всех операций,

$$T_{\max} = \max_{1 \le j \le k} t_j,$$

где t_j – время завершения j-й операции, а $f_j(u_j)$ – вогнутые функции, Бурковым В.Н. доказаны следующие свойства оптимальности решения [1]:

1. Количество ресурсов на операции в процессе ее выполнения не меняется.

2. Все операции начинаются и заканчиваются одновременно.

При этом минимальное время завершения операций определяется как минимальное решение следующего уравнения:

$$\sum_{j=1}^{k} \varphi_j \left(\frac{W_j}{T} \right) = N,$$

где φ_j – функции, обратные f_j, а N – количество ресурсов. Для критерия линейной комбинации моментов t_j (минимизация упущенной выгоды) предложены как точные, так и приближенные методы решения (в основном для линейных зависимостей $f_j(u_j)$) [2].

Более адекватной практическим задачам является ситуация, когда скорость операции зависит не только от количества ресурсов на ней, но и от состояния операции. Задача в этом случае становится существенно более трудной. В работе получены необходимые условия оптимальности для случая линейных по управлению и состоянию зависимостей.

2. Постановка задачи

Будем изучать следующую задачу оптимального управления.

Даны k линейных динамических систем

$$\dot{x}_j = A_j x_j + B_j u_j, \quad t \in [0, t_j], \quad j = 1, \ldots, k, \quad u_j \in U_j. \tag{1}$$

Здесь $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, $t \in R^1$ – время, а x_j, $j = 1, \ldots, k$ – фазовая переменная, принимающая значения в n-мерном арифметическом пространстве R^n. Вектор u_j, $j = 1, \ldots, k$, принимающий значения в R^m, называется управлением. Каждая из систем определена на своем отрезке времени $[0, t_j]$, матрицы A_j, B_j имеют размерности $n \times n$ и $m \times n$ соответственно.

Значение управления u_j в каждый момент времени $t \in [0, t_j]$ выбирается из заданных множеств $U_j \subset R^m$, каждое из которых выпукло, компактно и содержит нуль: $0 \in U_j$. Для всех $t > t_j$ управление u_j считается равным нулю.

Кроме того, управления u_j связаны совместным ограничением

$$\sum_{j=1}^{k} C_j u_j \le b, \quad b \in R^\ell, \quad b \ge 0, \tag{2}$$

где C_j – заданные матрицы размеров $m \times \ell$. Множество векторов $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_k) \in R^{mk}$, удовлетворяющих (2), обозначим через U_c. Несложно заметить, что $U_c \subset R^{mk}$ выпукло, замкнуто и непусто, так как содержит нуль ($b \ge 0$).

Пусть $\tau = (t_1, \ldots, t_k) \in R^k$ – вектор, компонентами которого являются моменты завершения, $\tau > 0$. Введем в рассмотрение многозначное отображение $U(t, \tau)$, определяемое по следующей формуле

$$U(t,\tau) = \left[\prod_{j=1}^{k} U_j(t, t_j) \right] \cap U_c, \quad U_j(t,s) = \begin{cases} U_j, & t \le s, \\ 0, & t > s, \end{cases}$$

где символ $\prod$ обозначает декартово произведение множеств. Для каждого момента времени t множество $U(t, \tau) \subset R^{mk}$ выпукло, компактно и непусто, так как содержит нуль.

Теперь, имея набор векторов $\mathbf{x}_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,k})$ – начальных значений для систем (1), вектор времени τ и управление $\mathbf{u}(t) \in U(t,\tau)$, можно решить каждую из систем (1) на своем отрезке времени $[0, t_j]$, полагая $x_j(0) = x_{0,j}$, а управление $u_j(t)$ как проекцию вектора $\mathbf{u}(t)$ на соответствующее j-е подпространство. Результатом решения будет набор векторов $\mathbf{x}_T = (x_{T,1}, \dots, x_{T,k})$ – конечных значений: $x_{T,j} = x_j(t_j)$, $j = 1, \dots, k$.

Задача заключается в том, чтобы набор векторов $\mathbf{x}_0$ перевести в $\mathbf{x}_T$ с наименьшим значением критерия $\varphi(\tau)$, причем в качестве функции $\varphi(\tau)$ может выступать:

1) линейная комбинация моментов t_j, $j = 1, \dots, k$, т.е. $\varphi(\tau) = \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j t_j$, где α_j - заданные вещественные константы;

2) функция максимума: $\varphi(\tau) = T_{\max} = \max\limits_{1 \le j \le k} t_j$.

Более общая формулировка задачи включает в себя оба случая. А именно, будем решать следующую, более общую задачу.

$$\varphi(\mathbf{p}) \to \min, \tag{3}$$

$$\dot{x}_j = A_j x_j + B_j u_j, \quad t \in [0, t_j], \quad j = 1, \dots, k, \tag{4}$$

$$E_1(\mathbf{p}) \le 0, \quad E_2(\mathbf{p}) = 0, \tag{5}$$

$$\mathbf{p} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_T, \tau), \quad \mathbf{u}(t) \in U(t,\tau) \quad \text{для почти всех} \quad t.$$

Векторы $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_T, \tau$, а также многозначное отображение $U(t,\tau)$ были введены выше. Вектор-функции $E_i : R^{k(2n+1)} \to R^{k_i}$, $i = 1, 2$, задающие концевые ограничения, т.е. ограничения на концы траекторий $x_j(t)$, $j = 1, \dots, k$ и на вектор времени τ, а также функция $\varphi(\mathbf{p})$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми. Вектор $\mathbf{p} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_T, \tau)$ называется концевым вектором.

Покажем, как задачу минимизации негладкой функции $\varphi(\tau) = T_{\max}$ (2-й случай) свести к задаче в гладкой форме (3)–(5). Введем новую фазовую координату y:

$$\dot{y} = 0, \quad t \in [0, t_1], \quad y(0) = y_0.$$

На y_0 наложим следующие ограничения:

$$y_0 \ge t_j, \quad j = 1, \dots, k.$$

Тогда, положив $\varphi(\mathbf{p}) = y_0$, перейдем к задаче эквивалентной задаче минимизации функции максимума $T_{\max}$, но уже в форме (3)–(5).

Наша ближайшая цель – получение для задачи (3)–(5) необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина (ПМ) [3]. Принцип максимума будем доказывать, руководствуясь схемой, предложенной в [4]: вначале ПМ доказывается для простейшей задачи, т.е. для задачи без ограничений на траектории и время, а затем с помощью метода штрафов получается ПМ для исходной задачи (3)–(5).

3. Простейшая задача

Пусть $f_{0,j}(x,t) : R^n \times R^1 \to R^1$, $j = 1, \dots, k$ – функции непрерывно дифференцируемые по x и абсолютно непрерывные по t, причем их производные по t существенно ограничены для каждого x. Положим

$$c_1 = \max_{j=1,\dots,k} \left\{ \max_{t \in [0,t_j^*]} \left| \frac{\partial f_{0,j}}{\partial x}(x_j^*(t), t) \right|, \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0,t_j^*]} \left| \frac{\partial f_{0,j}}{\partial t}(x_j^*(t), t) \right| \right\},$$

где x_j^* – траектории, соответствующие решению $(\mathbf{p}^*, \mathbf{u}^*)$ следующей задачи без концевых ограничений

$$(6)\qquad \varphi(\mathbf{p}) + \sum_{j=1}^{k} \int_0^{t_j} f_{0,j}(x_j, t)dt \to \min,$$
$$\dot{x}_j = A_j x_j + B_j u_j,\ t \in [0, t_j],\ j = 1, \ldots, k,$$
$$\mathbf{p} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_T, \tau), \quad \mathbf{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_k(t)) \in U(t, \tau).$$

Здесь управление $\mathbf{u}(t)$ есть существенно ограниченная измеримая вектор-функция со значениями в R^{km}, т.е. функция класса $\mathbf{L}_\infty$. Введем обозначение

$$H_j(x, u, \psi, t, \lambda_0) = \langle A_j x + B_j u, \psi\rangle - \lambda_0 f_{0,j}(x, t), \quad j = 1, \ldots, k.$$

Функция H_j называется гамильтонианом. Для краткости записи будем опускать аргументы t, λ_0 функции H_j.

Пусть $\tau = (t_1, \ldots, t_k)$ – вектор времени. Через $I_j(\tau)$ будем обозначать следующий набор индексов

$$I_j(\tau) = \{r:\ 1 \le r \le k,\ t_r \ge t_j\}.$$

Существует константа $c_2 > 0$ такая, что $|x_j(t)| \le c_2\ \forall t \in [0, T_{\max}]$, $j = 1, \ldots, k$, как только $|\mathbf{p} - \mathbf{p}^*| \le 1$, $\mathbf{u}(t) \in U(t, \tau)$ для почти всех t. Положим $c_3 = kc_1(c_2 + 1)T^*_{\max}$.

Лемма 1. *Пусть* $(\mathbf{p}^*, \mathbf{u}^*)$ *решение задачи* (6). *Тогда существуют положительное число* $\lambda_0 > 0$ *и абсолютно непрерывные вектор-функции* $\psi_j(t)$, $1 \le j \le k$, *со значениями в* R^n *такие, что*

$$(7)\qquad \dot{\psi}_j = -\frac{\partial H_j}{\partial x}(x_j^*, u_j^*, \psi_j), \quad t \in [0, t_j^*],$$

$$(8)\qquad \psi_j(0) = \lambda_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x_{0,j}}(\mathbf{p}^*), \quad \psi_j(t_j^*) = -\lambda_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x_{T,j}}(\mathbf{p}^*),$$

$$(9)\qquad \max_{\mathbf{u} \in U(t, \tau^*)} \sum_{r=1}^{k} H_r(x_r^*(t), u_r, \psi_r(t)) =$$
$$= \sum_{r=1}^{k} H_r(x_r^*(t), u_r^*(t), \psi_r(t)) \text{ п.в. } t \in [0, T^*_{\max}],$$

$$(10)\qquad \max_{\mathbf{u} \in U(t_j^*, \tau^*)} \sum_{r \in I_j(\tau^*)} H_r\left(x_r^*(t_j^*), u_r, e^{A_r^*(t_r^* - t_j^*)}\psi_r(t_r^*)\right) -$$
$$-\lambda_0 \sum_{r \in I_j(\tau^*)} \frac{\partial \varphi}{\partial t_r}(\mathbf{p}^*) \le \lambda_0 c_3,$$
$$\max_{\mathbf{u} \in U(t_j^*, \tau^*)} \sum_{r \in I_j(\tau^*)} H_r\left(x_r^*(t_j^*), u_r, e^{A_r^*(t_r^* - t_j^*)}\psi_r(t_r^*)\right) -$$
$$-\lambda_0 \sum_{r \in I_j(\tau^*)} \frac{\partial \varphi}{\partial t_r}(\mathbf{p}^*) \ge -\lambda_0 c_3.$$

Доказательство леммы проводится по стандартной схеме, изложенной в [4].

Отметим, что в ПМ для задачи (6) можно, не теряя общности, считать, что $\lambda_0 = 1$. Это возможно в силу положительной однородности соотношений ПМ по переменным ψ_j, λ_0.

Пусть $(\mathbf{p}^*, \mathbf{u}^*)$ – оптимальный процесс. Докажем сначала условия трансверсальности (8).

Зафиксируем произвольный номер j, $1 \le j \le k$. Правая часть уравнения (7) линейна по переменной ψ_j. Поэтому в силу теоремы существования решения для линейных дифференциальных уравнений уравнение (7) имеет на отрезке $[0, t_j^*]$ решение ψ_j с начальным условием

$$(11) \qquad \psi_j(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_{0,j}}(\mathbf{p}^*).$$

Докажем, что $\psi_j(t_j^*) = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_{T,j}}(\mathbf{p}^*)$. Для удобства будем считать, что $j = 1$. Возьмем произвольный вектор $a \in R^n$. По теореме существования решения для любого $\alpha > 0$ задача Коши

$$\dot{x}_j = A_j x_j + B_j u_j^*, \quad x_j^*(0) = x_{0,j}^* + \alpha a$$

имеет решение $x_j(t; \alpha)$, $t \in [0, t_j^*]$.

Положим $\mathbf{p}(\alpha) = (x_{0,1}^* + \alpha a, x_{0,2}^*, \ldots, x_{0,k}^*, x_1(t_1^*; \alpha), x_{T,2}^*, \ldots, x_{T,k}^*, \tau^*)$. Тогда, очевидно,

$$\frac{\varphi(\mathbf{p}(\alpha)) - \varphi(\mathbf{p}^*)}{\alpha} \ge 0 \quad \forall \alpha > 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\alpha \to 0+$, получаем

$$(12) \qquad \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_{0,j}}(\mathbf{p}^*), a \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_{T,j}}(\mathbf{p}^*), \Delta_j(t_j^*) \right\rangle + \int\limits_0^{t_j^*} \left\langle \frac{\partial f_{0,j}}{\partial x}(x_j^*(t), t), \Delta_j(t) \right\rangle dt \ge 0,$$

где $\Delta_j(t) = \dfrac{\partial x_j}{\partial \alpha}(t; 0)$.

Известно, что функция $\Delta_j(t)$ удовлетворяет следующему уравнению (уравнение в вариациях)

$$(13) \qquad \dot{\Delta}_j = A_j \Delta_j, \quad \Delta_j(0) = a.$$

Отсюда и из (7)

$$\frac{d}{dt} \langle \psi_j(t), \Delta_j(t) \rangle \equiv \left\langle \frac{\partial f_{0,j}}{\partial x}(x_j^*(t), t), \Delta_j(t) \right\rangle.$$

Обозначим через Φ_j фундаментальную матрицу уравнения (13), т.е. его решение с начальным условием $\Phi_j(0) = E$, где E – единичная матрица. Тогда $\Delta_j(t_j^*) = \Phi_j(t_j^*)a$. Интегрируя полученное тождество на отрезке $[0, t_j^*]$ и подставляя его в неравенство (12), выводим

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_{T,j}}(\mathbf{p}^*) + \psi_j(t_j^*), \Phi_j(t_j^*)a \right\rangle \ge 0.$$

Тогда в силу произвольности вектора a и невырожденности матриц $\Phi_j(t)$ вытекает искомое равенство (11).

Доказательство условия максимума (9) основано на применении игольчатых вариаций.

Возьмем такое счетное множество измеримых селекторов $\{\mathbf{v}_i\}$ многозначного отображения U, что множество $\{\mathbf{v}_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$, $\mathbf{v}_i(t) = (v_{1,i}(t), \dots, v_{k,i}(t))$ всюду плотно в $U(t, \tau^*)$ для почти всех t.

Докажем (9) для произвольной точки $s \in [0, T^*_{\max}]$, для которой, во-первых, s является точкой Лебега всех функций

$$u^*_j(\cdot),\ v_{j,i}(\cdot), \quad i = 1, 2, \dots,\ j = 1, \dots, k,$$

а во-вторых, множество точек $\{\mathbf{v}_i(s)\}_{i=1}^{\infty}$ всюду плотно в $U(s, \tau^*)$. Этого достаточно, так как множество таких точек имеет полную меру.

Зафиксируем номер i и число $\alpha > 0$. Рассмотрим управление

$$\mathbf{u}_i(t;\alpha) = \begin{cases} \mathbf{u}^*(t), & t \notin [s-\alpha, s], \\ \mathbf{v}_i(t), & t \in [s-\alpha, s] \end{cases}$$

- игольчатую вариацию управления $\mathbf{u}^*$. Обозначим через $x_j(t;\alpha)$ решение j-й системы (4), соответствующее управлению $u_{j,i}(\cdot, \alpha)$ и удовлетворяющее начальному условию $x_j(0, \alpha) = x^*_{0,j}$, $j = 1, \dots, k$. Положим $f_j(u, t) = A_j x^*_j(t) + B_j u$, $j = 1, \dots, k$. Поскольку s является точкой Лебега соответствующих функций, имеем

$$x^*_j(s) = x^*_j(s-\alpha) + \alpha f_j(u^*_j(s), s) + o(\alpha),$$
$$x_j(s;\alpha) = x^*_j(s-\alpha) + \alpha f_j(v_{j,i}(s), s) + o(\alpha), \quad j = 1, \dots, k.$$

Следовательно, предел

$$y_j(s) = \lim_{\alpha \to 0+} \alpha^{-1}[x_j(s;\alpha) - x^*_j(s)]$$

существует и равен

$$y_j(s) = f_j(v_{j,i}(s), s) - f_j(u^*_j(s), s).$$

Несложно показать, что предел

$$y_j(t) = \lim_{\alpha \to 0+} \alpha^{-1}[x_j(t;\alpha) - x^*_j(t)]$$

существует при $t \geq s$ и, более того, удовлетворяет следующему уравнению

$$\dot{y}_j = A_j y_j.$$

При этом, если $s > t^*_j$, то, как несложно видеть, $y_j \equiv 0$ при достаточно малом α. Из доказанного выше следует

$$\left\langle \psi_j(s), f_j(u^*_j(s), s) - f_j(v_{j,i}(s), s) \right\rangle =$$
$$= \int_s^{t^*_j} \left\langle \frac{\partial f_{0,j}}{\partial x}(x^*_j(t), t), y_j(t) \right\rangle dt + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_{T,j}}(\mathbf{p}^*), y_j(t^*_j) \right\rangle.$$

Положим $\mathbf{p}(\alpha) = (\mathbf{x}^*_0, x_1(t^*_1, \alpha), \dots, x_k(t^*_k, \alpha), \tau^*)$. Имеем

$$\lim_{\alpha \to 0+} \alpha^{-1}(J(\mathbf{p}(\alpha)) - J^*) \geq 0.$$

Вычисляя этот предел, используя полученное выше, выводим

$$\sum_{j=1}^{k}\int_{s}^{t_j^*}\left\langle \frac{\partial f_{0,j}}{\partial x}(x_j^*(t),t),y_j(t)\right\rangle dt+\sum_{j=1}^{k}\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_{T,j}}(\mathbf{p}^*),y_j(t_j^*)\right\rangle \geq 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{k} H_j(x_j^*(s),u_j^*(s),\psi_j(s)) \geq \sum_{j=1}^{k} H_j(x_j^*(s),v_{j,i}(s),\psi_j(s)).$$

Последнее неравенство доказано для любого номера i. Из него вытекает условие максимума (9) в точке s, так как по построению последовательность $\{\mathbf{v}_i(s)\}_{i=1}^{\infty}$ всюду плотна во множестве $U(s,\tau^*)$.

Докажем условия трансверсальности по времени (10).

Зафиксируем произвольный номер j, $1 \leq j \leq k$ и число $\alpha > 0$. Положим $\mathbf{p}(\alpha) = (\mathbf{x}_0^*, \widetilde{x}_1(t_1^*-\sigma_1),\ldots,\widetilde{x}_k(t_k^*-\sigma_k),\tau^*-\sigma)$. Здесь вектор $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)\in R^k$ определяется так: $\sigma_r=\alpha$, если $r\in I_j(\tau^*)$, и $\sigma_r=0$ в противном случае; функция $\widetilde{x}_r$ есть решение r-й системы, соответствующее управлению $\widetilde{u}_r$, которое, в свою очередь, получается из u_r^* следующим образом: $\widetilde{u}_r=u_r^*$, если $r\notin I_j(\tau^*)$, и

$$\widetilde{u}_r(t)=\begin{cases} u_r^*(t), & t\in[0,t_j^*-\alpha],\\ u_r^*(t+\alpha), & t\in(t_j^*-\alpha,t_r^*-\alpha],\end{cases}$$

если $r\in I_j(\tau^*)$, т.е. получается сдвигом отрезка $[t_j^*,t_r^*]$ на $[t_j^*-\alpha,t_r^*-\alpha]$. При этом все управления u_r^* такие, что $t_r^*=t_j^*$ вправо за точку $t_j^*-\alpha$, в соответствии с постановкой задачи, продолжаются нулем. Допустимость описанного процесса следует из допустимости оптимального.

Для $\alpha>0$ в силу оптимальности, имеем

$$\alpha^{-1}[J(\mathbf{p}(\alpha),\widetilde{\mathbf{u}})-J_*]\geq 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq -\sum_{r\in I_j(\tau^*)}\int_{t_j^*-\alpha}^{t_j^*} f_{0,r}(x_r^*(t),t)dt+\sum_{r\in I_j(\tau^*)}\int_{t_j^*-\alpha}^{t_r^*-\alpha} f_{0,r}(\widetilde{x}_r(t),t)dt -$$

$$-\sum_{r\in I_j(\tau^*)}\int_{t_j^*}^{t_r^*} f_{0,r}(x_r^*(t),t)dt+[\varphi(\mathbf{p}(\alpha))-\varphi(\mathbf{p}^*)]=$$

$$=\sum_{r\in I_j(\tau^*)}\int_{t_j^*-\alpha}^{t_j^*} -f_{0,r}(x_r^*(t),t)dt+\sum_{r\in I_j(\tau^*)}\int_{t_j^*}^{t_r^*}[f_{0,r}(\widetilde{x}_r(t-\alpha),t-\alpha)-$$

$$-f_{0,r}(x_r^*(t),t)]dt+\sum_{r\in I_j(\tau^*)}\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x_{T,r}}(\mathbf{p}^*),\widetilde{x}_r(t_r^*-\alpha)-x_r^*(t_r^*)\right\rangle -$$

$$-\sum_{r\in I_j(\tau^*)}\frac{\partial\varphi}{\partial t_r}(\mathbf{p}^*)\alpha+o(\alpha)\leq$$

$$\leq \sum_{r\in I_j(\tau^*)}\int_{t_j^*-\alpha}^{t_j^*} H_r(x_r^*(t),u_r^*(t),e^{A_r^*(t_r^*-t_j^*)}\psi_r(t_r^*))dt-$$

$$-\alpha \sum_{r\in I_j(\tau^*)} \frac{\partial\varphi}{\partial t_r}(\mathbf{p}^*) + \alpha c_3 + o(\alpha) \le$$

$$\le \int\limits_{t_j^*-\alpha}^{t_j^*} \max_{\mathbf{u}\in U(t_j^*,\tau^*)} \sum_{r\in I_j(\tau^*)} H_r(x_r^*(t), u_r, e^{A_r^*(t_r^*-t_j^*)}\psi_r(t_r^*))dt -$$

$$-\alpha \sum_{r\in I_j(\tau^*)} \frac{\partial\varphi}{\partial t_r}(\mathbf{p}^*) + \alpha c_3 + o(\alpha).$$

Здесь, во-первых, используется автономность систем (4), откуда вытекает, что

$$\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x_{T,r}}(\mathbf{p}^*), \widetilde{x}_r(t_r^*-\alpha) - x_r^*(t_r^*) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x_{T,r}}(\mathbf{p}^*), e^{A_r(t_r^*-t_j^*)}[x_r^*(t_j^*-\alpha) - x_r^*(t_j^*)] \right\rangle, \ r\in I_j(\tau^*).$$

Во-вторых, используются оценки на частные производные функции $f_{0,r}$, приведенные выше, следствием которых является слагаемое αc_3 в правой части неравенства:

$$\sum_{r\in I_j(\tau^*)} \int\limits_{t_j^*}^{t_r^*} [f_{0,r}(\widetilde{x}_r(t-\alpha), t-\alpha) - f_{0,r}(x_r^*(t), t)]\, dt \le \alpha c_3 + o(\alpha).$$

И, наконец, используются уже доказанные условия трансверсальности (8).

Деля на $\alpha > 0$ и переходя к пределу при $\alpha \to 0+$, приходим к неравенству

$$\max_{\mathbf{u}\in U(t_j^*,\tau^*)} \sum_{r\in I_j(\tau^*)} H_r\left(x_r^*(t_j^*), u_r, e^{A_r^*(t_r^*-t_j^*)}\psi_r(t_r^*)\right) \ge \sum_{r\in I_j(\tau^*)} \frac{\partial\varphi}{\partial t_r}(\mathbf{p}^*) - c_3.$$

Получим теперь второе неравенство в (10). Пусть по-прежнему $\alpha > 0$, а j есть произвольный фиксированный номер, $1 \le j \le k$. Продолжим управление $\mathbf{u}^*$ вправо за точку t_j^* допустимым образом так, что

$$\mathbf{v}(t) = (v_1(t), \dots, v_k(t)) \in \operatorname*{arg\,max}_{\mathbf{u}\in U(t_j^*,\tau^*)} \sum_{r\in I_j(\tau^*)} H_r\left(x_r^*(t_j^*), u_r, e^{A_r^*(t_r^*-t_j^*)}\psi_r(t_r^*)\right),$$

$$t\in[t_j^*, t_j^*+\alpha].$$

Положим $\mathbf{p}(\alpha) = (\mathbf{x}_0^*, \widetilde{x}_1(t_1^*+\sigma_1), \dots, \widetilde{x}_k(t_k^*+\sigma_k), \tau^*+\sigma)$. Здесь вектор $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k) \in R^k$ был определен выше; функция $\widetilde{x}_r$ есть решение r-й системы, продолженное на отрезок $[t_r^*, t_r^*+\sigma_r]$ и соответствующее управлению $\widetilde{u}_r$, которое, в свою очередь, получается из u_r^* и v_r следующим образом: $\widetilde{u}_r = u_r^*$, если $r \notin I_j(\tau^*)$, и

$$\widetilde{u}_r(t) = \begin{cases} u_r^*(t), & t\in[0,t_j^*),\\ v_r(t), & t\in[t_j^*, t_j^*+\alpha],\\ u_r^*(t-\alpha), & t\in(t_j^*+\alpha, t_r^*+\alpha] \end{cases}$$

иначе. Проводя теперь рассуждения, полностью аналогичные приведенным выше, но не слева от точки t_j^*, а справа от нее, получаем второе неравенство в (10).

Теорема доказана.

4. Принцип максимума

В этом параграфе изложено доказательство ПМ для задачи (3)–(5). Доказательство проводится методом штрафов [4].

Введем обозначение

$$\ell(\mathbf{p},\lambda)=\lambda_0\varphi(\mathbf{p})+\sum_{i=1}^{2}\langle E_i(\mathbf{p}),\lambda_i\rangle .$$

Функция ℓ называется малым лагранжианом.

Теорема 1 (ПМ). *Пусть* $(\mathbf{p}^*,\mathbf{u}^*)$ *– решение задачи* (3)–(5). *Тогда существуют число* $\lambda_0\geq 0$, *векторы* λ_1,λ_2, *абсолютно непрерывные вектор-функции* $\psi_j(t)$, $j=1,\dots,k$ *со значениями в* R^n *такие, что*

(14) $$\dot\psi_j=-A_j^*\psi_j,\quad t\in[0,t_j^*],$$

(15) $$\psi_j(0)=\frac{\partial\ell}{\partial x_{0,j}}(\mathbf{p}^*,\lambda),\quad \psi_j(t_j^*)=-\frac{\partial\ell}{\partial x_{T,j}}(\mathbf{p}^*,\lambda),$$

$$\lambda_1\geq 0,\quad \langle E_1(\mathbf{p}^*),\lambda_1\rangle=0,$$

(16) $$\max_{\mathbf{u}\in U(t,\tau^*)}\sum_{r=1}^{k}\langle B_ru_r,\psi_r(t)\rangle=$$

$$=\sum_{r=1}^{k}\langle B_ru_r^*(t),\psi_r(t)\rangle\quad \textit{для почти всех}\quad t\in[0,T_{\max}^*],$$

(17) $$\max_{\mathbf{u}\in U(t_j^*,\tau^*)}\sum_{r\in I_j(\tau^*)}\left\langle A_rx_r^*(t_j^*)+B_ru_r,\psi_r(t_j^*)\right\rangle=\sum_{r\in I_j(\tau^*)}\frac{\partial\ell}{\partial t_r}(\mathbf{p}^*)\ \forall j,$$

(18) $$|\lambda|+\sum_{j=1}^{k}\max_{t\in[0,t_j^*]}|\psi_j(t)|=1.$$

Здесь $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)$.

Доказательство. Пусть $(\mathbf{p}^*,\mathbf{u}^*)$ – оптимальная пара. Опишем штрафную задачу. Для этого возьмем произвольное натуральное число i и определим функции $f_{0,j}$ и $e_{0,i}$ формулами

$$f_{0,j}(x,t)=|x-x_j^*(t)|^2,\quad j=1,\dots,k,$$
$$e_{0,i}(\mathbf{p})=\varphi(\mathbf{p})+|\mathbf{p}-\mathbf{p}^*|^2+i\left[|E_1^+(\mathbf{p})|^2+|E_2(\mathbf{p})|^2\right].$$

Здесь для произвольного вектора $a=(a_1,\dots,a_\ell)$ через a^+ обозначается вектор с координатами $(a_j)^+=\max(0,a_j)$, $j=1,\dots,\ell$.

При фиксированном i рассмотрим задачу

(19) $$e_{0,i}(\mathbf{p})+\sum_{j=1}^{k}\int_0^{t_j}f_{0,j}(x_j,t)dt\to\min,$$

$$\dot x_j=A_jx_j+B_ju_j,\ t\in[0,t_j],\ j=1,\dots,k,$$
$$|\mathbf{p}-\mathbf{p}^*|\leq 1,\quad \mathbf{u}(t)=(u_1(t),\dots,u_k(t))\in U(t,\tau).$$

Эту задачу будем называть i-задачей.

Несложно доказывается, что каждая из i-задач (19) имеет решение. Действительно, это есть следствие слабой секвенциальной компактности шара в гильбертовом пространстве (подобного рода доказательство см. [4]). Обозначим это решение через $(\mathbf{p}_i, \mathbf{u}_i, \mathbf{x}_i)$. В силу компактности, выделяя подпоследовательность, $\mathbf{p}_i \to \mathbf{p}$, $\mathbf{u}_i \to \mathbf{u}$ слабо, $\mathbf{x}_i \to \mathbf{x}$ равномерно. Действуя по аналогии с [4], в силу метода штрафов выводим сначала, что $(\mathbf{p}, \mathbf{u}, \mathbf{x})$ – допустимый процесс в задаче (3)–(5) и затем что $\mathbf{p} = \mathbf{p}^*$, $x_j = x_j^*$, $j = 1, \ldots, k$. При этом может оказаться, что $\mathbf{u} \neq \mathbf{u}^*$, но тем не менее всегда $B_j u_j = B_j u_j^*$ почти всюду, $j = 1, \ldots, k$, что ниже используется для доказательства условия максимума.

К i-задаче (19) применимы необходимые условия, полученные в лемме 1. Выпишем их для оптимального процесса $(\mathbf{p}_i, \mathbf{u}_i)$. В силу леммы 1 существуют абсолютно непрерывные функции $\psi_j^i(t)$, $j = 1, \ldots, k$ и число $\lambda_{0,i} > 0$, для которых имеет место

$$\dot{\psi}_j^i = -\frac{\partial H_j^i}{\partial x}(x_j^i, u_j^i, \psi_j^i), \quad t \in [0, t_j^i], \tag{20}$$

$$\psi_j^i(0) = \frac{\partial \ell}{\partial x_{0,j}}(\mathbf{p}_i, \lambda_i), \quad \psi_j^i(t_j^i) = -\frac{\partial \ell}{\partial x_{T,j}}(\mathbf{p}_i, \lambda_i), \tag{21}$$

$$\max_{\mathbf{u}(\cdot) \in U(\cdot, \tau_i)} \int\limits_0^{T_{\max}^i} \left[\sum_{r=1}^k H_r^i(x_r^i(t), u_r(t), \psi_r^i(t))\right] dt = \tag{22}$$

$$= \int\limits_0^{T_{\max}^i} \left[\sum_{r=1}^k H_r^i(x_r^i(t), u_r^i(t), \psi_r^i(t))\right] dt,$$

$$\max_{\mathbf{u} \in U(t_j^i, \tau_i)} \sum_{r \in I_j(\tau_i)} H_r^i\left(x_r^i(t_j^i), u_r, e^{A_r^*(t_r^i - t_j^i)}\psi_r(t_r^i)\right) - \tag{23}$$

$$- \sum_{r \in I_j(\tau_i)} \frac{\partial \ell}{\partial t_r}(\mathbf{p}_i, \lambda_i) \leq \lambda_{0,i}\gamma_i,$$

$$\max_{\mathbf{u} \in U(t_j^i, \tau_i)} \sum_{r \in I_j(\tau_i)} H_r^i\left(x_r^i(t_j^i), u_r, e^{A_r^*(t_r^i - t_j^i)}\psi_r(t_r^i)\right) -$$

$$- \sum_{r \in I_j(\tau_i)} \frac{\partial \ell}{\partial t_r}(\mathbf{p}_i, \lambda_i) \geq -\lambda_{0,i}\gamma_i.$$

Здесь

$$\lambda_i = (\lambda_{0,i}, \lambda_{1,i}, \lambda_{2,i}),$$
$$\lambda_{1,i} = 2i\lambda_{0,i}E_1^+(\mathbf{p}_i), \quad \lambda_{2,i} = 2i\lambda_{0,i}E_2(\mathbf{p}_i),$$

а γ_i – числовая последовательность, сходящаяся к нулю, как только $i \to \infty$. Точнее, числа γ_i определяются следующим образом:

$$\gamma_i = 2k(c_2 + 1)T_{\max}^i \max_{j=1,\ldots,k} \left\{ \max_{t \in [0, t_j^i]} \left|x_j^i(t) - x_j^*(t)\right|, \right.$$

$$\left. \operatorname*{ess\,sup}_{t \in [0, t_j^i]} \left|\left\langle x_j^i(t) - x_j^*(t), A_j x_j^i(t) + B_j u_j^i(t)\right\rangle\right| \right\}.$$

Как отмечалось, соотношения ПМ положительно однородны по переменным (λ, ψ). Поэтому умножая все его соотношения (20)–(23) на одно и то же положительное число, добъемся того, чтобы выполнялось условие нормировки

$$|\lambda_i| + \sum_{j=1}^{k} \max_{t\in[0,t_j^i]} |\psi_j^i(t)| = 1.$$

Переходя к пределу в (20)–(23) при $i \to \infty$, получаем (14)–(18).[1] При этом переходя к пределу в условии максимума (22), записанному в интегральной форме, мы воспользовались слабой сходимостью управлений $\mathbf{u}_i$ к $\mathbf{u}$, линейностью функций H_j по u, а также вышеозначенным равенством $B_j u_j(t) = B_j u_j^*(t)$ для почти всех t, которое дает возможность в полученном условии максимума произвести замену функции $\mathbf{u}$ (слабого предела последовательности $\{\mathbf{u}_i\}$) на функцию $\mathbf{u}^*$.

Теорема доказана.

5. Расшифровка ПМ для задачи на MINiMAX

В заключение приведем ПМ для задачи минимизации максимального отрезка времени, т.е. для следующей задачи

(24)
$$\varphi(\tau) = \max_{1\le j\le k} t_j \to \min,$$
$$\dot{x}_j = A_j x_j + B_j u_j, \quad t \in [0, t_j], \quad j = 1, \dots, k,$$
$$\mathbf{x}_0 = \overline{\mathbf{x}}_0, \ \mathbf{x}_T = \overline{\mathbf{x}}_T, \quad \mathbf{u}(t) \in U(t,\tau) \quad \text{для почти всех} \quad t.$$

Требуется перевести вектор начальных состояний $\overline{\mathbf{x}}_0$ в вектор конечных состояний $\overline{\mathbf{x}}_T$ с минимальным значением критерия $\varphi(\tau)$.

Запишем эту задачу в гладкой форме. Для этого введем дополнительную фазовую координату y

$$\dot{y} = 0, \quad t \in [0, t_1], \quad y(0) = y_0.$$

На левый конец y_0 траектории y наложим следующие гладкие ограничения

$$t_j - y_0 \le 0, \quad j = 1, \dots, k.$$

Теперь, минимизируя y_0, т.е. положив $\varphi(\mathbf{p}) = y_0 \to \min$, получим задачу, эквивалентную поставленной выше, но уже в гладкой форме. Применим к этой задаче теорему 1.

Пусть $(\tau^*, y_0^*, \mathbf{u}^*)$ – решение задачи (24). Тогда в силу теоремы 1 существуют неотрицательные числа λ_j, $j = 0, \dots, k$ и абсолютно непрерывные функции ψ_j такие, что

(25)
$$\dot{\psi}_j = -A_j^* \psi_j, \quad t \in [0, t_j^*], \quad \lambda_0 = \sum_{r=1}^{k} \lambda_r,$$
$$t_j^* < y_0^* = T_{\max}^* \Rightarrow \lambda_j = 0, \ j = 1, \dots, k,$$
$$\max_{\mathbf{u}\in U(t,\tau^*)} \sum_{r=1}^{k} \langle B_r u_r, \psi_r(t) \rangle =$$
$$= \sum_{r=1}^{k} \langle B_r u_r^*(t), \psi_r(t) \rangle \quad \text{для почти всех} \quad t \in [0, T_{\max}^*],$$
$$\max_{\mathbf{u}\in U(t_j^*,\tau^*)} \sum_{r\in I_j(\tau^*)} \left\langle A_r x_r^*(t_j^*) + B_r u_r, \psi_r(t_j^*) \right\rangle = \sum_{r\in I_j(\tau^*)} \lambda_r,$$

[1] Подробнее, как осуществляются предельные переходы, см. [4]

$$\lambda_0 + \sum_{r=1}^{k} \max_{t\in[0,t_r^*]} |\psi_r(t)| = 1.$$

Из (25) следует, что сумма $\sum\limits_{r\in I_j(\tau^*)} \lambda_r$ не зависит от j. Поэтому приходим к следующему утверждению.

Сформулируем принцип максимума.

Пусть $(\mathbf{p}^*, \mathbf{u}^*)$ – решение задачи (24). Тогда найдутся не равные одновременно нулю абсолютно непрерывные функции ψ_j, $j = 1, \dots, k$ такие, что

$$\dot\psi_j = -A_j^*\psi_j, \quad t\in[0,t_j^*],$$

$$\max_{\mathbf{u}\in U(t,\tau^*)} \sum_{r=1}^{k} \langle B_r u_r, \psi_r(t)\rangle =$$

$$= \sum_{r=1}^{k} \langle B_r u_r^*(t), \psi_r(t)\rangle \quad \text{для почти всех} \quad t\in[0,T^*_{\max}],$$

$$\max_{\mathbf{u}\in U(t_1^*,\tau^*)} \sum_{r\in I_1(\tau^*)} \langle A_r x_r^*(t_1^*) + B_r u_r, \psi_r(t_1^*)\rangle =$$

$$= \max_{\mathbf{u}\in U(t_j^*,\tau^*)} \sum_{r\in I_j(\tau^*)} \left\langle A_r x_r^*(t_j^*) + B_r u_r, \psi_r(t_j^*)\right\rangle \ \forall j.$$

6. Заключение

Рассмотрена задача оптимального распределения ресурсов по множеству независимых операций. Скорость операций линейно зависит от количества ресурсов и от состояния операций. Постановка задачи продиктована практическими соображениями. Получены необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурков В.Н.* Модели и методы мультипроектного управления. Препринт. М.: Ин-т проблем управления, 1997.
2. *Баркалов С.А., Бурков В.Н.* Минимизация упущенной выгоды в задачах управления проектами. М.: Ин-т проблем управления, 2001.
3. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В. и др.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
4. *Арутюнов А.В.* Условия экстремума. М.: Факториал, 1997.