Автоматика и Телемеханика. 2005. № 2.

© 2004 г. Д.А. НОВИКОВ, д-р техн. наук
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

А.Г. ЧХАРТИШВИЛИ, канд. физ.-мат. наук
(МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва)

СТАБИЛЬНОСТЬ ИНФОРМАЦИОННОГО РАВНОВЕСИЯ В РЕФЛЕКСИВНЫХ ИГРАХ

Исследуется свойство стабильности информационного равновесия в рефлексивной игре (игре, в которой агенты принимают решения на основе иерархии представлений о существенных параметрах, представлений о представлениях и т.д.). Свойство стабильности состоит в том, что каждый участник (реальный и фантомный, то есть существующий в представлении других реальных или фантомных участников) наблюдает в точности тот результат игры, на который рассчитывал.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из способов теоретико-игрового моделирования принятия решений в условиях неполной информированности являются рефлексивные игры, для которых концепцией решения является информационное равновесие [1–3].

Напомним, что рефлексивная игра задается кортежем $\{N, (X_i)_{i \in N}, f_i(\cdot)_{i \in N}, \Omega, I\}$, где $N = \{1, 2, ..., n\}$ – множество участников игры (игроков, агентов), X_i – множество допустимых действий x_i i-го агента, $f_i(\cdot)$: $\Omega \times X' \to \Re^1$ – его целевая функция, $i \in N$, $X' = \prod_{i \in N} X_i$, $\theta_i \in \Omega$ – *его представления о состоянии природы* $\theta \in \Omega$, $\theta_{ij} \in \Omega$ – его представления о представлениях j-го агента, $\theta_{ijk} \in \Omega$ – представления i-го агента о том, что j-ый агент думает о представлениях k-го агента и т.д. в общем случае до бесконечности; весь набор взаимных представлений образует структуру информированности $I = (I_1, I_2, ..., I_n)$, где $I_i = (\theta_i, \theta_{ij}, \theta_{ijk}, ...)$, $i, j, k \in N$, – структура ин*формированности i-го агента,* [1–3]. Индексы $i, j, k, ...$ пробегают все значения из N, так что структура информированности I представляет собой n-арное дерево. Вершинами этого дерева являются элементы множества Ω ($\theta_i, \theta_{ij}, \theta_{ijk}$ и т.д.), а ребра соединяют θ_i и θ_{ij}, θ_{ij} и θ_{ijk} и т.д.

Введем обозначения:

Σ_+ – множество всевозможных конечных последовательностей индексов из N;

Σ – объединение Σ_+ с пустой последовательностью.

Пусть $i \in N$, $\tau \in \Sigma$, тогда обозначим $I_{\tau i} = (\theta_{\tau i}, \theta_{\tau ij}, \theta_{\tau ijk}, ...)$, $i, j, k \in N$.

О п р е д е л е н и е. Набор действий $x_{\tau i}^*$, $\tau \in \Sigma$, $x_{\tau i}^* \in X_i$, называется *информационным равновесием*, если выполнены следующие условия:

1. структура информированности I имеет конечную сложность ν, то есть дерево I содержит конечное число ν попарно различных поддеревьев;

2. $\forall\ i \in N,\ \forall \lambda, \mu \in \Sigma\ \ I_{\lambda i} = I_{\mu i} \Rightarrow x_{\lambda i}^{\ *} = x_{\mu i}^{\ *}$;

3. $\forall\ i \in N,\ \forall\ \sigma \in \Sigma$

$$x_{\sigma i}^* \in \operatorname{Arg}\max_{x_i \in X_i} f_i(\theta_{\sigma i}, x_{\sigma i1}^*, \ldots, x_{\sigma i,i-1}^*, x_i, x_{\sigma i,i+1}^*, \ldots, x_{\sigma i,n}^*).$$

Информационное равновесие является обобщением равновесия Нэша [4, 5] – наиболее распространенной концепции решения некооперативной игры – и переходит в него, в случае, когда значение состояния природы θ является общим знанием [5, 6] среди агентов. Условия существования информационного равновесия, аналогичные условиям существования равновесия Нэша, приведены в [1, 2]. Многочисленные прикладные примеры использования концепции информационного равновесия в задачах управления социально-экономическими системами приведены в [1, 9].

Отметим, что альтернативным способом моделирования ситуаций с неполной информированностью являются *байесовы игры*, введенные Дж. Харшаньи [7]. Сопоставление «рефлексивного» и «байесового» подходов проведено в статье [8].

2. СТАБИЛЬНОЕ ИНФОРМАЦИОННОЕ РАВНОВЕСИЕ

Одним из основных особенностей «классического» равновесия Нэша является его самоподдерживающийся характер – если игра повторяется несколько раз, и все игроки кроме i-го выбирают одни и те же равновесные действия, то и i-му нет резона отклоняться от своего равновесного действия. Это обстоятельство очевидным образом связано с тем, что представления всех игроков о реальности являются адекватными.

В случае информационного равновесия ситуация, вообще говоря, может быть иной. Действительно, в результате однократного разыгрывания игры может оказаться, что какие-то из игроков (или даже все) наблюдают не тот результат, на который они рассчитывали. Это может быть связано как с неверным представлением о состоянии природы, так и с неадекватной информированностью о представлениях оппонентов. В любом случае, самоподдерживающийся характер равновесия нарушается – если игра повторяется во второй раз, действия игроков могут измениться.

Однако в некоторых случаях самоподдерживающийся характер равновесия может иметь место и при различных (и, вообще говоря, неверных) представлениях агентов. Говоря неформально, это происходит тогда, когда каждый агент (как реальный, так и фантомный, т.е. существующий в сознании других реальных или фантомных агентов [1–3]) наблюдает тот результат игры, которого ожидает. Для формального описания нам понадобится дополнить описание рефлексивной игры.

Дополним определение рефлексивной игры (см. выше), набором функций $w_i(\cdot): \Omega \times X' \to W_i$, $i \in N$, каждая из которых отображает вектор (θ, x), где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X'$ в элемент w_i некоторого множества W_i. Этот элемент w_i и есть то, что i-й агент наблюдает в результате разыгрывания игры.

Функцию $w_i(\cdot)$ будем называть *функцией наблюдения* i-го агента. Будем считать, что функциональные зависимости $w_i(\cdot)$ являются общим знанием [1, 6] среди агентов.

Если $w_i(\theta, x) = (\theta, x)$, т. е. $W_i = \Omega \times X'$, то i-й агент наблюдает как состояние природы, так и действия всех агентов. Если, напротив, множество W_i состоит из одного элемента, то i-й агент ничего не наблюдает.

Пусть в рефлексивной игре существует информационное равновесие x_τ, $\tau \in \Sigma_+$. Зафиксируем $i \in N$ и рассмотрим i-го агента. Он ожидает в результате игры пронаблюдать величину

(1) $w_i\,(\theta_i, x_{i1}, \ldots, x_{i,i-1}, x_i, x_{i,i+1}, \ldots, x_{in})$.

На самом же деле он наблюдает величину

(2) $w_i\,(\theta, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

Поэтому требование стабильности для i-го агента означает совпадение величин (1) и (2) (напомним, что эти величины являются элементами некоторого множества W_i).

Пусть величины (1) и (2) равны, т. е. i-й агент и после разыгрывания игры не сомневается в истинности своих представлений. Однако является ли это достаточным основанием для того, чтобы он и в следующий раз (при повторном разыгрывании игры) выбрал то же действие x_i? Ясно, что ответ отрицательный, что продемонстрируем на следующем примере.

Пример 1. Пусть в рефлексивной биматричной игре, где $\Omega = \{1, 2\}$, выигрыши заданы биматрицами (агент 1 выбирает строку, агент 2 – столбец, то есть $X_1 = X_2 = \{1; 2\}$) на рис. 1, и при этом второй агент считает общим знанием $\theta = 2$, а первый агент знает реальное состояние природы $\theta = 1$ и адекватно информирован о втором. Иными словами, $\theta = \theta_1 = 1$, $\theta_{2\sigma} = \theta_{12\sigma} = 2$ для любой последовательности индексов $\sigma \in \Sigma$

$$\begin{array}{cc} \theta = 1 & \theta = 2 \\ \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) \\ (0,1) & (2,0) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (0,1) & (1,2) \\ (1,1) & (2,2) \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 1. Матрицы выигрышей в примере 1

Пусть, далее, каждый агент наблюдает свой выигрыш (и это является общим знанием).

Ясно, что информационным равновесием является набор $x_\sigma = 2$, $\sigma \in \Sigma_+$, т. е. первый и второй агенты, а также 21-агент (первый агент в представлении второго) и все прочие фантомные агенты выбирают вторые действия. Однако реальное состояние природы $\theta = 1$ становится известным второму агенту после розыгрыша игры (и получения им выигрыша 0 вместо ожидаемого 2). Поэтому в следующий раз второй агент выберет действие $x_2 = 1$, что побуждает и первого агента изменить свое действие (выбрать $x_1 = 1$).

Таким образом, для стабильности равновесия необходимо чтобы и ij-агент, $i, j \in N$, наблюдал «нужную» величину. Он ожидает в результате игры пронаблюдать

(3) $w_j\,(\theta_{ij}, x_{ij1}, \ldots, x_{ij,j-1}, x_{ij}, x_{ij,j+1}, \ldots, x_{ijn})$.

На самом же деле (т. е. i-субъективно, ведь ij-агент существует в сознании i-агента) он наблюдает величину

(4) $w_j\,(\theta_i, x_{i1}, \ldots, x_{i,j-1}, x_{ij}, x_{i,j+1}, \ldots, x_{in})$.

Поэтому требование стабильности для *ij*-агента означает совпадение величин (3) и (4).

В общем случае, т. е. для τi-агента, $\tau i \in \Sigma_+$, условие стабильности определим следующим образом.

Определение. Информационное равновесие $x_{\tau i}$, $\tau i \in \Sigma_+$, будем называть *стабильным* при заданной структуре информированности I, если для любого $\tau i \in \Sigma_+$ выполняется

(5) $w_i(\theta_{\tau i}, x_{\tau i 1}, \ldots, x_{\tau i, i-1}, x_{\tau i}, x_{\tau i, i+1}, \ldots, x_{\tau i n}) = w_i(\theta_\tau, x_{\tau 1}, \ldots, x_{\tau, i-1}, x_{\tau i}, x_{\tau, i+1}, \ldots, x_{\tau n})$.

Информационное равновесие, не являющееся стабильным, будем называть *нестабильным*. В частности, информационное равновесие в примере 1 является нестабильным.

Утверждение 1. Пусть структура информированности I имеет конечную сложность ν, и существует информационное равновесие $x_{\tau i}$, $\tau i \in \Sigma_+$. Тогда система соотношений (5) *содержит не более чем ν попарно различных условий.*

Доказательство. Рассмотрим две любые тождественные структуры информированности: $I_{\lambda i} = I_{\mu i}$. Поскольку $x_{\tau i}$ – равновесие, имеем $\theta_{\lambda i} = \theta_{\mu i}$, $x_{\lambda i} = x_{\mu i}$, $I_{\lambda ij} = I_{\mu ij}$, $x_{\lambda ij} = x_{\mu ij}$ для любого $j \in N$. Поэтому условия стабильности (5) для λi- и μi-агентов тождественно совпадают. Так как имеется ν попарно различных структур информированности, количество попарно различных условий (5) не превышает ν.

3. ИСТИННЫЕ И ЛОЖНЫЕ РАВНОВЕСИЯ

Стабильные информационные равновесия будем разделять на два класса – истинные и ложные равновесия. Определение предварим примером.

Пример 2. Рассмотрим игру, в которой участвуют три агента с целевыми функциями

$$f_i(r_i, x_1, x_2, x_3) = x_i - \frac{x_i(x_1 + x_2 + x_3)}{r_i},$$

где $x_i \geq 0$, $i \in N = \{1, 2, 3\}$. Целевые функции являются общим знанием с точностью до типов агентов – параметров $r_i > 0$. Пусть $r_2 = r_3 = r$, $r_{21} = r_{23} = r_{31} = r_{32} = c$, при этом первый агент адекватно информирован о втором и третьем, а второй и третий считают всех трех одинаково информированными. Иными словами, для любого $\sigma \in \Sigma$ выплняются равенства $r_{2\sigma 2} = r_{3\sigma 3} = r$, $r_{2\sigma 1} = r_{2\sigma 3} = r_{3\sigma 1} = r_{3\sigma 2} = c$. Общим знанием является также следующее: каждый игрок знает свой тип и наблюдает сумму действий оппонентов.

Нетрудно вычислить единственное информационное равновесие этой игры:

(6) $x_2 = x_3 = (3\,r - 2\,c) / 4$,

$x_{21} = x_{23} = x_{31} = x_{32} = (2\,c - r) / 4$,

$x_1 = (2\,r_1 - 3\,r + 2\,c) / 4$.

Условия стабильности (5) в данном случае выглядят следующим образом:

(7) $x_{21} + x_{23} = x_1 + x_3$, $x_{31} + x_{32} = x_1 + x_2$.

Записаны условия для 2- и 3-агентов, поскольку для 1-, 21-, 23-, 31-, 32-агентов они тривиальны.

Подставляя (6) в (7), получаем, что необходимым и достаточным условием стабильности является равенство

(8) $2\,c = r_1 + r$.

Пусть условие (8) выполнено. Тогда равновесные действия реальных агентов таковы:

(9) $x_2 = x_3 = (3\,r - r_1) / 4$, $x_1 = (3\,r_1 - 2\,r\,) / 4$.

Предположим теперь, что типы агентов стали общим знанием. Нетрудно убедиться, что в случае общего знания единственным равновесием будет (9).

Таким образом, при выполнении условия (8) имеет место парадоксальная ситуация: представления второго и третьего агентов не соответствуют действительности, однако их равновесные действия (9) в точности такие, как были бы в случае общего знания. Назовем такое стабильное информационное равновесие истинным.

О п р е д е л е н и е. Пусть набор действий $x_{\tau i}$, $\tau i \in \Sigma_+$, является стабильным информационным равновесием. Будем называть его *истинным* равновесием, если набор $(x_1, \ldots, x_n)$ является равновесием в условиях общего знания о состоянии природы θ (или о наборе типов $(r_1, \ldots, r_n)$).

Из приведенного определения, в частности, следует, что в условиях общего знания любое информационное равновесие является истинным. Рассмотрим еще один случай, когда этот факт имеет место.

У т в е р ж д е н и е 2. Пусть целевые функции агентов имеют вид

$$f_i\,(r_i, x_1, \ldots, x_n) = \varphi_i\,(r_i, x_i, z_i(x_{-i})),$$

а функции наблюдения – вид $w_i(\theta, x) = z_i(x_{-i})$, $i \in N$.

Тогда любое стабильное равновесие является истинным.

Отметим, что содержательно условие утверждения 2 означает следующее: выигрыш каждого агента зависит от его типа, его действия и функции наблюдения, зависящей от действий остальных агентов (но не от их типов).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_{\tau i}$, $\tau i \in \Sigma_+$, – стабильное информационное равновесие, и условия утверждения выполнены. Тогда для любого $i \in N$ имеем:

$$x_i \in \operatorname*{Arg\,max}_{y_i \in X_i} f_i(r_i, y_i, x_{i,-i}) = \operatorname*{Arg\,max}_{y_i \in X_i} \varphi_i\,(r_i, y_i, z_i(x_{i,-i})).$$

В силу стабильности справедливо равенство

$$z_i(x_{i,-i}) = z_i(x_{-i}),$$

поэтому

$$x_i \in \operatorname*{Arg\,max}_{y_i \in X_i} \varphi_i\,(r_i, y_i, z_i(x_{-i})) = \operatorname*{Arg\,max}_{y_i \in X_i} f_i(r_i, y_i, x_{-i})\,.$$

Последнее соотношение означает (в силу произвольности $i \in N$), что набор $(x_1, \ldots, x_n)$ является равновесным в условиях общего знания. Утверждение 2 доказано.

О п р е д е л е н и е. Стабильное информационное равновесие, не являющееся истинным, назовем *ложным*.

Таким образом, ложное равновесие – это такое стабильное информационное равновесие, которое не является равновесием в случае одинаковой информированности агентов (в условиях общего знания). Приведем пример ложного равновесия.

П р и м е р 3. Пусть в рефлексивной биматричной игре, где $\Omega = \{1, 2\}$, выигрыши заданы биматрицами (агент 1 выбирает строку, агент 2 – столбец, то есть $X_1 = X_2 = \{1; 2\}$) на рисунке 2.

$$\begin{array}{cc} \theta = 1 & \theta = 2 \\ \begin{pmatrix} (2,2) & (4,1) \\ (1,4) & (3,3) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (2,2) & (0,3) \\ (3,0) & (1,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 2. Матрицы выигрышей в примере 3

Пусть, далее, в реальности $\theta = 2$, однако оба агента считают общим знанием $\theta = 1$ (т.е. имеет место $\theta_\sigma = 1$, $\sigma \in \Sigma_+$). Каждый агент наблюдает пару (x_1, x_2), которая и является функцией наблюдения.

Информационным равновесием является выбор каждым агентом первого действия. Если бы общим знанием было бы реальное состояние природы, равновесным был бы выбор каждым агентом второго действия. Таким образом, выигрыши агентов в информационном равновесии оказываются б*о*льшими, чем если бы общим знанием было реальное состояние природы.

4. СЛУЧАЙ НАБЛЮДАЕМЫХ ДЕЙСТВИЙ

Рассмотрим случай, когда функцией наблюдения является вектор действий всех агентов: $w_i\,(\theta, x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$. Тогда *стабильным* является информационное равновесие $x^* = (x^*_{\sigma i})_{i \in N,\ \sigma \in \Sigma}$, удовлетворяющее следующему соотношению:

(10) $\forall\, i \in N,\ \forall\, \sigma \in \Sigma\ \ x^*_{\sigma i} = x^*_i$.

Соотношение (10) означает, что действие любого реального агента совпадает с действием, ожидаемым от него любым другим (реальным или фантомным) агентом.

Введем следующее предположение относительно целевых функций f_i и множеств Ω, X_i:

А1. $\forall\, i \in N,\ \forall\, \sigma \in \Sigma,$ для любых представлений $\theta_{\sigma i}$ и $\theta'_{\sigma i}$ таких, что $\theta_{\sigma i} \neq \theta'_{\sigma i}$, и для любой обстановки игры $x^*_{\sigma i,-i} = (x^*_{\sigma i1}, \ldots, x^*_{\sigma i,i-1}, x^*_{\sigma i,i+1}, \ldots x^*_{\sigma in})$ выполняется

(11) $BR_i(\theta_{\sigma i},\ x^*_{\sigma i,-i}) \cap BR_i(\theta'_{\sigma i},\ x^*_{\sigma i,-i}) = \varnothing$,

где $BR_i(\theta_{\sigma i},\ x^*_{\sigma i,-i}) = \operatorname{Arg}\max\limits_{y_i \in X_i} f_i(\theta_{\sigma i}, x^*_{\sigma i1}, \ldots, x^*_{\sigma i,i-1}, y_i, x^*_{\sigma i,i+1}, \ldots, x^*_{\sigma in})$.

У т в е р ж д е н и е 3. Пусть выполнено предположение А1 и существует информационное равновесие x^*. Тогда x^* является стабильным информационным равновесием в том и только в том случае, если структура информированности игры такова, что

(12) $\forall\, i \in N,\ \forall\, \sigma \in \Sigma\ \ \theta_{\sigma i} = \theta_i$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено (12). Тогда $\forall\, i \in N,\ \forall\, \sigma \in \Sigma\ \ I_{\sigma i} = I_i$, откуда сразу следует равенство $x^*_{\sigma i} = x^*_i$ (см. второе условие в определении информационного равновесия). Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть выполнено условие (10), но существуют такие $i \in N$ и $\sigma \in \Sigma$, что $\theta_{\sigma i} \neq \theta_i$.

Поскольку x^*_i и $x^*_{\sigma i}$ являются компонентами информационного равновесия x^*, они удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} x_i^* \in BR_i(\theta_i, x_{i,-i}^*), \\ x_{\sigma i}^* \in BR_i(\theta_{\sigma i}, x_{\sigma i,-i}^*). \end{cases}$$

С учетом (10) последнюю систему можно записать в виде

$$\begin{cases} x_i^* \in BR_i(\theta_i, x_{-i}^*), \\ x_i^* \in BR_i(\theta_{\sigma i}, x_{-i}^*), \end{cases}$$

откуда следует, что $BR_i(\theta_i,\ x_{-i}^*) \cap BR_i(\theta'_{\sigma i},\ x_{-i}^*) \neq \varnothing$.

Пришли к противоречию с (11). Утверждение 3 доказано.

С л е д с т в и е. Если выполнено предположение А1, то стабильные информационные равновесия могут возникать только в рамках структур информированности, удовлетворяющих (12). В частности, невозможны ложные равновесия.

З а м е ч а н и е. Уместно отметить аналогию между условием А1 и «условием равноправия функций предпочтения» в [10, с. 259].

При ослаблении требования (10) результат утверждения 3 теряет силу. Например, если считать «стабильным» информационное равновесие x^*, удовлетворяющее свойству

(13) $\forall\, i, j \in N\ \ x_{ji}^* = x_i^*$

(действие любого реального агента совпадает с действием, ожидаемым от него любым другим реальным агентом), то в рамках предположения А1 существуют структуры информированности, не удовлетворяющие (12), при которых соответствующие информационные равновесия «стабильны» в смысле (13).

Утверждение 3 важно как с точки зрения задач анализа, так и с точки зрения задач синтеза. Действительно, оно позволяет при исследовании свойств информационных равновесий для определенного класса ситуаций (определяемых предположением А1) выделять при помощью условия (12) множества информационных структур, при которых информационные равновесия могут быть стабильными. С точки зрения задачи информационного управления, утверждение 3 накладывает ограничения на множество управляющих воздействий, приводящих к стабильному равновесию игры управляемых субъектов.

5. СЛУЧАЙ НАБЛЮДАЕМЫХ ДЕЙСТВИЙ И ЦЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ТИПА АГЕНТА

Пусть по-прежнему действия агентов наблюдаемы, т.е. стабильность определяется условием (10). Однако каждый из n агентов характеризуется своим типом $r_i \geq 0,\ i \in N$, и тип агента достоверно ему известен, но, вообще говоря, не известен остальным агентам. Будем считать, что целевая функция i-го агента имеет вид $f_i(r_i, x)$, т. е. зависит от его собственного типа, но не от типов оппонентов. Относительно типов каждый из агентов имеет иерархию представлений I_i, состоящую из следующих компонент: r_{ij} – представление i-го агента о типе j-го агента, r_{ijk} – представление i-го агента о представлениях j-го агента о типе k-го агента и т.д., $i, j, k \in N$.

Содержательное различие между обсуждениями в терминах неопределенного параметра θ и в терминах вектора типов $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \Re_+^n$ состоит в следующем. В первом случае более естественным является предположение о том, что значение θ (состояние природы) так или иначе наблюдается агентом (является значимым аргументом функции наблюдения). Во втором случае, напротив, типы оппонентов, предположительно, не являются наблюдаемыми (не являются аргументами функции наблюдения). При этом, согласно утверждению 2, все стабильные равновесия являются истинными. Поэтому сосредоточим внимание на исследовании стабильности.

В рассматриваемом случае предположение А1 и утверждение 3 перепишем следующим образом.

А1$^{\mathbf{r}}$. $\forall\ i \in N$, $\forall\ \sigma \in \Sigma$, для любых представлений $r_{\sigma i}$ и $r'_{\sigma i}$ таких, что $r_{\sigma i} \neq r'_{\sigma i}$, и для любой обстановки игры $x^*_{\sigma i,-i}$

$$BR_i(r_{\sigma i},\ x^*_{\sigma i,-i}) \cap BR_i(r'_{\sigma i},\ x^*_{\sigma i,-i}) = \varnothing,$$

где $BR_i(r_{\sigma i},\ x^*_{\sigma i,-i}) = \operatorname{Arg}\max\limits_{y_i \in X_i} f_i(r_{\sigma i}, x^*_{\sigma i1}, \ldots, x^*_{\sigma i,i-1}, y_i, x^*_{\sigma i,i+1}, \ldots, x^*_{\sigma in})$.

Утверждение 3^r. Пусть выполнено предположение А1^r и существует информационное равновесие x^*. Тогда x^* является стабильным информационным равновесием в том и только в том случае, если структура информированности игры такова, что $\forall\ i \in N$, $\forall\ \sigma \in \Sigma$ $r_{\sigma i} = r_i$.

Доказательство утверждения 3$^{\mathrm{r}}$ дословно повторяет доказательство утверждения 3, надо лишь заменить θ на r и А1 на А1$^{\mathrm{r}}$.

Пусть $x^* = (x^*_1, \ldots, x^*_n)$ – стабильное равновесие. Определим для каждого $i \in N$ следующие множества: $R_i = \{r_i \in \Re_+ \,|\, x^*_i \in BR_i(r_i, x^*_{-i})\}$.

Эти множества не зависят от структуры информированности. Поэтому они позволяют сформулировать два утверждения, проясняющие связь между структурой и стабильностью равновесия.

Утверждение 4. Пусть x^* – стабильное равновесие. Если для любого $i \in N$ множество R_i состоит ровно из одного элемента, то вектор типов является общим знанием (и, соответственно, равновесие истинное).

Доказательство. Пусть x^* – стабильное равновесие и для любого $i \in N$ множество R_i состоит ровно из одного элемента. Предположим, что существуют такие i и σ, что $r_{\sigma i} \neq r_i$. Из стабильности равновесия вытекает, что

$$\begin{cases} x^*_i \in BR_i(r_i, x^*_{-i}), \\ x^*_i \in BR_i(r_{\sigma i}, x^*_{-i}), \end{cases}$$

откуда по определению множества R_i вытекает, что несовпадающие $r_{\sigma i}$ и r_i принадлежат этому множеству. Получили противоречие с тем, что оно состоит из одного элемента. Утверждение 4 доказано.

Утверждение 5. Если равновесие x^* является стабильным при некоторой структуре информированности, то для элементов этой структуры при любых $i \in N$ и $\sigma \in \Sigma$ выполняется $r_{\sigma i} \in R_i$.

Доказательство. Пусть равновесие x^* является стабильным. Тогда $\forall\ i \in N$ $\forall\ \sigma \in \Sigma$ выполняется $x^*_i \in BR_i(r_{\sigma i}, x^*_{-i})$, т. е. $r_{\sigma i} \in R_i$. Утверждение 5 доказано.

Утверждение 5 накладывает довольно жесткие требования на структуру информированности: если равновесие является стабильным, то все типы реальных агентов, а также представления о типах принадлежат множествам R_i.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено свойство стабильности информационного равновесия в рефлексивной игре, заключающееся в том, что каждый агент участник (реальный и фантомный) наблюдает в точности тот результат игры, на который рассчитывал. Стабильные равновесия подразделяются на истинные (которые остаются равновесиями и в случае общего знания) и ложные (которые в случае общего знания перестают быть равновесиями). Сформулированы достаточные условия отсутствия ложных равновесий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Рефлексивные игры. М.: СИНТЕГ, 2003.
2. *Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Информационное равновесие: точечные структуры информированности // АиТ. 2003. № 10. С. 111 – 122.
3. *Чхартишвили А.Г.* Информационное равновесие / Управление большими системами. Сб. тр. молодых ученых. Выпуск 3. М.: ИПУ РАН, 2003. С. 94 – 109.
4. *Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R.* Microeconomic theory. N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995.
5. *Myerson R.B.* Game theory: analysis of conflict. London: Harvard Univ. Press, 1991.
6. *Aumann R.J., Heifetz A.* Incomplete information. Handbook of Game Theory. V. III. Chapter 43. Amsterdam, Elseiver (forthcoming).
7. *Harsanyi J.* Games with incomplete information played by "Bayesian" players // Management Sci. Part I: 1967. V. 14. № 3. P. 159 – 182. Part II: 1968. V. 14. № 5. P. 320 – 334. Part III: 1968. V. 14. № 7. P. 486 – 502.
8. *Чхартишвили А.Г.* Равновесие Байеса–Нэша: точечные структуры информированности бесконечной глубины // АиТ. 2003. № 12. С. 105 – 111.
9. *Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Прикладные модели информационного управления. М.: ИПУ РАН, 2003.
10. *Бурков В.Н., Кондратьев В.В.* Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981.