РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

А.А. Иващенко, Д.А. Новиков, М.А. Щепкина

МОДЕЛИ И МЕХАНИЗМЫ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО СТИМУЛИРОВАНИЯ В ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

Москва – 2006

УДК 519
ББК 32.81

Иващенко А.А., Новиков Д.А., Щепкина М.А. **Модели и механизмы многокритериального стимулирования в организационных системах**. М.: ИПУ РАН, 2006. – 60 с.

Работа посвящена рассмотрению многокритериальных систем стимулирования – в которых деятельность управляемых субъектов описывается несколькими показателями, значения которых определяют размер вознаграждений, выплачиваемых управляющим органом. Вводится классификация задач стимулирования, позволяющая систематически описать результаты исследования: компенсаторные, линейные, «бригадные» и ранговые системы многокритериального стимулирования.

Работа рассчитана как на специалистов-теоретиков по управлению социально-экономическими системами, так и на руководителей организаций и сотрудников HR-отделов.

Рецензент: д.т.н., профессор В.Н. Бурков

Рекомендовано к печати редакционным советом Института

УДК 519
ББК 32.81

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Настоящая работа посвящена рассмотрению многокритериальных систем стимулирования – в которых деятельность каждого управляемого субъекта (*агента*) описывается несколькими показателями, значения которых определяют размер вознаграждения, выплачиваемого управляющим органом (*центром*).

Стимулированием называется побуждение (осуществляемое посредством воздействия центра на предпочтения – целевую функцию – агента) к совершению определенных действий [26]. Исследование формальных моделей стимулирования в рамках *теории управления* началось практически одновременно и независимо как в бывшем СССР, так и за рубежом, примерно в конце 60-х годов прошлого века. Основными научными школами по этому направлению исследований являются *теория активных систем* [5, 26-28] (научный центр – Институт проблем управления РАН), *теория иерархических игр* [9] (научный центр – Вычислительный центр РАН) и *теория контрактов*, развиваемая, в основном, зарубежными учеными [43, 45, 46]. Кроме того, проблемы стимулирования (спроса на труд, предложения труда и т.д.) традиционно находятся в центре внимания *экономики труда* [1, 2, 42, 48]. Прикладные задачи стимулирования рассматриваются и используются, в том числе, в *управлении персоналом* [14, 37].

Структура изложения материала настоящей работы следующая. В первом разделе вводится классификация задач стимулирования, позволяющая в дальнейшем систематически описать результаты исследования механизмов многокритериального стимулирования. В том числе: компенсаторные (раздел 2), линейные (раздел 3), «бригадные» (раздел 4) и ранговые (раздел 5) системы многокритериального стимулирования. Раздел 6 посвящен обсуждению роли систем оценки деятельности.

1. Классификация задач стимулирования

Рассмотрим двухуровневую организационную систему (ОС), состоящую из одного центра на верхнем уровне иерархии и n агентов на нижнем – см. Рис. 1.

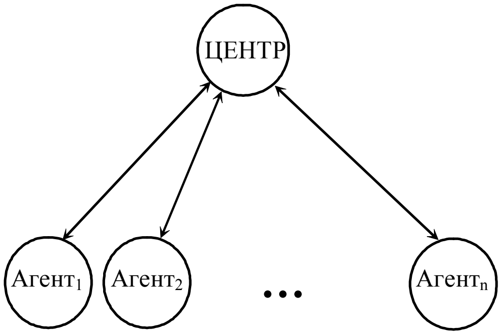

Рис. 1. Двухуровневая ОС

Стратегией i-го агента является выбор действия $y_i \in A_i$, $i \in N = \{1, 2, ..., n\}$ – множеству агентов; стратегией центра – выбор системы стимулирования $\{\sigma_i(z)\}_{i \in N}$, где $z_i = Q_i(y) \in B_i$ – наблюдаемый центром результат деятельности i-го агента, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ – вектор действий агентов, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ – вектор результатов деятельности агентов, Q_i: $A \to B_i$ – оператор агрегирования, σ_i: $B \to \Re^1$, $i \in N$, $A = \prod_{i \in N} A_i$, $B = \prod_{i \in N} B_i$.

Предпочтения центра отражены его целевой функцией

(1.1) $\Phi(z, \sigma(z)) = H(z) - \sum_{i \in N} \sigma_i(z)$,

где $H(\cdot)$: $B \to \Re^1$ – функция дохода центра.

Предпочтения i-го агента отражены его целевой функцией:

(1.2) $f_i(y, \sigma_i(z)) = \sigma_i(z) - c_i(y)$,

где $c_i(\cdot)$: $A \to \Re^1$ – функция затрат i-го агента, $i \in N$.

Последовательность функционирования ОС такова: центр выбирает и сообщает агентам систему стимулирования (зависимость вознаграждения, выплачиваемого каждому из агентов, от вектора результатов их деятельности), затем агенты однократно, одновременно и независимо выбирают свои действия, которые приводят к соответствующим результатам деятельности. Целевые функции и допустимые множества, а также операторы агрегирования, являются общим знанием [35] среди всех участников ОС (центра и агентов); агенты на момент принятия решений знают выбранную центром систему стимулирования; центр наблюдает результаты деятельности агентов, но может не знать их действий.

Обозначим:

$P(\sigma(\cdot)) \subseteq A$ – множество действий, выбираемых агентами при системе стимулирования $\sigma(\cdot)$: обычно считается, что агенты выбирают действия, являющиеся равновесием их игры [12];

$Q(P) = \bigcup\limits_{y \in P} \{(Q_1(y_1), Q_2(y_2), ..., Q_n(y_n))\}$ – множество результатов деятельности агентов, которые могут реализоваться при выборе ими действий из множества P.

Эффективность стимулирования $K(\sigma)$ определяется как гарантированное значение целевой функции центра:

(1.3) $K(\sigma) = \min\limits_{z \in Q(P(\sigma))} [H(z) - \sum\limits_{i \in N} \sigma_i(z)]$.

В общем виде задача стимулирования формулируется следующим образом – найти допустимую систему стимулирования, обладающую максимальной эффективностью:

(1.4) $K(\sigma) \to \max\limits_{\sigma}$.

Введем систему классификаций задач стимулирования, в которой основаниями классификации являются размерности соответствующих множеств.

1. Первым основанием системы классификаций является число агентов n. Возможные значения признаков классификации: $n = 1$ (*одноэлементная ОС*) и $n \geq 2$ (*многоэлементная ОС*).

2. Вторым основанием является размерность k множества допустимых действий агентов (здесь и всюду ниже будем считать, что для всех агентов множества допустимых действий являются подмножествами $\Re^k$). Возможные значения признаков классификации: $k = 1$ (*скалярная система стимулирования*) и $k \geq 2$ (*многокритериальная система стимулирования*).

3. Третьим основанием является размерность m множества допустимых результатов деятельности агентов (здесь и всюду ниже будем считать, что для всех агентов множества допустимых результатов деятельности являются подмножествами $\Re^m$). Возможные значения признаков классификации: $m = 1$ и $m \geq 2$. Частным случаем (*отсутствие агрегирования*) является тождественный оператор агрегирования, тогда $m = k$ и $B = A$.

4. Четвертым основанием является размерность предпочтений агентов и системы стимулирования. В настоящей работе предполагается, что областью значений функции стимулирования является множество неотрицательных действительных чисел, а предпочтения агентов скалярны (область значений целевой функции любого агента – множество действительных чисел). Содержательно, целевая функция агента при этом отражает его «экономические» интересы, а аддитивно входящее в целевую функцию стимулирование может интерпретироваться как материальное стимулирование. Возможно использование векторных предпочтений агентов (см. [10, 34]) и так называемых *векторных систем стимулирования* [21], в которых одна из компонент соответствует материальному стимулированию, а другая компонента (или другие компоненты) – различным аспектам морального стимулирования. Исследование векторных систем стимулирования выходит за рамки настоящей работы и представляется перспективным направлением будущих исследований.

5. Пятым основанием системы классификаций задач стимулирования являются те априорные требования, которые накладываются на класс допустимых систем стимулирования – различают системы стимулирования различных типов: компенсаторные (которые в большинстве случаев оптимальны), скачкообразные (аккордные), линейные (пропорциональные, сдельные), «бригадные», ранговые и др. [21, 26].

6. Шестым основанием системы классификаций является наличие или отсутствие единообразности определения размера вознаграждения агента в зависимости от результатов его деятельности. Системы стимулирования, в которых вознаграждение зависит от характеристик конкретного агента, называются *персонифицированными*. В отличие от персонифицированных, в *унифицированных* системах стимулирования зависимость размера вознаграждения от

результатов деятельности одинакова для всех агентов. Унифицированные системы стимулирования являются более «демократичными» («справедливыми») и требуют от центра обладания меньшей информацией об агентах. С другой стороны, являясь частным случаем персонифицированных, они обладают не большей эффективностью. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением унифицированных систем стимулирования.

Возможны и другие основания системы классификаций, которые порождают еще большее разнообразие задач стимулирования:

- наличие неопределенности того или иного типа (интервальная, вероятностная, нечеткая) или вида (внутренняя, внешняя, смешанная) [27, 28, 33], которая может устраняться, в том числе, путем сообщения информации от более информированных участников ОС к менее информированным [20, 27, 31, 36];
- наличие динамики [30];
- наличие распределенного контроля (когда один и тот же подчиненный имеет несколько начальников) [11, 17, 24, 34];
- наличие векторных предпочтений центра и агентов [10, 34];
- наличие кооперативного взаимодействия участников [11];
- наличие возможности изменять состав участников ОС [17];
- наличие нескольких уровней иерархии [7, 24].

Рассматривать детально перечисленные вариации задачи стимулирования в настоящей работе мы не будем, так как приводимые ниже результаты могут быть обобщены на эти случаи по аналогии с тем, как это делается в соответствующих работах, ссылки на которые даны выше.

Введенная система классификаций обусловливает структуру изложения материала настоящей работы.

Базовой моделью стимулирования, которая исследована на сегодняшний день наиболее подробно, является модель, в которой $n = m = k = 1$ и отсутствует агрегирование – см. [5, 8, 21, 26]. Поэтому в разделе 2.1 обсуждается обобщение этой модели на случай $n = 1$, $m \geq 2$, $k \geq 2$. Разделы 2.2 и 2.3 посвящены обобщению полученных в [33] результатов исследования, соответственно, индивидуального стимулирования и стимулирования за результаты коллективной деятельности, на случай $n \geq 2$, $k \geq 2$, $m = 1$ многокритериального стимулирования.

Далее, в разделах 3-5 на случай многокритериального стимулирования обобщаются результаты исследования линейных [2, 21], бригадных [13, 26, 41] и ранговых [33, 40] скалярных систем стимулирования. Шестой раздел посвящен исследованию роли систем оценки деятельности агентов, которые позволяют перейти от векторных к скалярным показателям оценки результатов деятельности агентов.

В заключении обсуждаются основные результаты и перспективы дальнейших исследований.

2. Компенсаторные системы стимулирования

В настоящем разделе[1] изучаются компенсаторные системы многокритериального стимулирования, в рамках которых центр компенсирует агентам затраты только при условии выполнения плана. Сначала рассматриваются одноэлементные (подраздел 2.1), а затем – многоэлементные ОС (подразделы 2.2 и 2.3).

2.1. Базовая модель стимулирования

Основным аппаратом моделирования задач стимулирования в теории управления является теория игр – раздел прикладной математики, исследующий модели принятия решений в условиях несовпадения интересов сторон (*игроков*), когда каждая сторона стремится воздействовать на развитие ситуации в собственных интересах [12]. Простейшей игровой моделью является взаимодействие двух игроков – *центра* (principal) и подчиненного ему агента (agent), то есть $n = 1$. Такая организационная система (ОС) имеет следующую структуру: на верхнем уровне иерархии находится центр, на нижнем – подчиненный ему агент. В качестве центра может выступать работодатель, непосредственный руководитель агента или организация, заключившая трудовой (или какой-либо иной – страховой, подрядный и т.д.) договор с агентом. В качестве агента может выступать наемный работник, подчиненный, или

---

[1] *Раздел написан совместно с М.И. Сапико.*

организация, являющаяся второй стороной по соответствующему договору.

Стратегией агента является выбор *действия* $y \in A \subseteq \Re^k$, $k \geq 2$, принадлежащего компактному множеству допустимых действий A. Содержательно, действием агента может быть количество отрабатываемых часов, объем произведенной продукции, ее качество и иные характеристики. Пока будем считать, что агрегирование отсутствует, то есть $z \equiv y$ ($Q(\cdot)$ – тождественное отображение, $m = k$, $B = A$).

Стратегией центра является выбор *функции стимулирования* $\sigma(\cdot)$, ставящей в соответствие действию агента некоторое неотрицательное вознаграждение, выплачиваемое ему центром, то есть $\sigma: A \to \Re_+^1$.

Выбор действия $y \in A$ требует от агента *затрат* $c(y)$, $c: A \to \Re^1$, и приносит центру *доход* $H(y)$, $H: A \to \Re^1$. Функцию *затрат агента* $c(y)$ и *функцию дохода центра* $H(y)$ будем считать известными (см. обсуждение проблем и результатов их идентификации в [2, 21, 26]).

Интересы участников организационной системы (центра и агента) отражены их скалярными *целевыми функциями*, (функциями выигрыша, полезности и т.д., в записи которых зависимость от стратегии центра будет опускаться), которые обозначим, соответственно: $\Phi(y)$ и $f(y)$.

Целевые функции представляют собой: для агента – разность между стимулированием и затратами:

(2.1.1) $f(y) = \sigma(y) - c(y)$,

а для центра – разность между доходом и *затратами центра на стимулирование* – вознаграждением, выплачиваемым агенту:

(2.1.2) $\Phi(y) = H(y) - \sigma(y)$.

Определим $y_{LCA} = \arg\min\limits_{y \in A} c(y)$ – действие агента, минимизирующее его затраты.

Введем следующие предположения, которых будем придерживаться, если не оговорено особо, в ходе дальнейшего изложения материала настоящего раздела. Относительно функции затрат предположим, что она непрерывна, а затраты от выбора действия y_{LCA} равны нулю. Также допустим, что значение вознаграждения, выплачиваемого центром агенту, неотрицательно, и что функция дохода центра непрерывна и достигает максимума при действии агента, отличном от y_{LCA}.

Так как значение целевой функции агента зависит как от его собственной стратегии – действия, так и от функции стимулирования, то в рамках гипотезы рационального поведения агент будет выбирать действия, которые при заданной системе стимулирования максимизируют его целевую функцию. Понятно, что множество таких действий, называемое множеством *реализуемых действий*, зависит от используемой центром системы стимулирования. Основная идея стимулирования как раз и заключается в том, что, варьируя систему стимулирования, центр может побуждать агента выбирать те или иные действия.

Так как целевая функция центра зависит от действия, выбираемого агентом, то *эффективностью системы стимулирования* называется гарантированное значение целевой функции центра на множестве действий агента, реализуемых данной системой стимулирования. Следовательно, задача стимулирования заключается в том, чтобы выбрать оптимальную систему стимулирования, то есть систему стимулирования, имеющую максимальную эффективность.

Множество действий агента, доставляющих максимум его целевой функции (и, естественно, зависящее от функции стимулирования), называется *множеством решений игры* или *множеством действий, реализуемых данной системой стимулирования*:

(2.1.3) $P(\sigma) = \operatorname{Arg} \max\limits_{y \in A} \{\sigma(y) - c(y)\}$.

Зная, что агент выбирает действия из множества (2.1.3), центр должен найти систему стимулирования, которая максимизировала бы его собственную целевую функцию. Следовательно, эффективность системы стимулирования $\sigma \in M$ равна:

(2.1.4) $K(\sigma) = \min\limits_{y \in P(\sigma)} \Phi(y)$.

Прямая задача синтеза оптимальной системы стимулирования заключается в выборе допустимой системы стимулирования, имеющей максимальную эффективность:

(2.1.5) $K(\sigma) \to \max\limits_{\sigma}$.

Обратная задача стимулирования заключается в поиске множества систем стимулирования, реализующих заданное действие, или, в более общем случае, – заданное множество действий $A^* \subseteq A$. Например, при $A^* = \{y^*\}$ обратная задача может заключаться в поиске множества $M(y^*)$ систем стимулирования, реализующих это действие, то есть $M(y^*) = \{\sigma \mid y^* \in P(\sigma)\}$.

Перейдем к решению задачи стимулирования, практически дословно повторяя решение, описанное в [26], для рассматриваемого случая многокритериальной системы стимулирования. Предположим, что использовалась система стимулирования $\sigma(\cdot)$, при которой агент выбирал действие $x \in P(\sigma(\cdot))$. Утверждается, что если взять другую систему стимулирования $\tilde{\sigma}(\cdot)$, которая будет равна нулю всюду, кроме точки x, и будет равна старой системе стимулирования в точке x:

$$\tilde{\sigma}(y) = \begin{cases} \sigma(x), & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases},$$

то и при новой системе стимулирования это же действие агента будет доставлять максимум его целевой функции.

Приведем формальное доказательство этого утверждения. Условие того, что выбор действия x доставляет максимум целевой функции агента при использовании системы стимулирования $\sigma(\cdot)$, можно записать в следующем виде: разность между стимулированием и затратами, будет не меньше, чем при выборе любого другого действия: $\forall y \in A \;\; \sigma(x) - c(x) \geq \sigma(y) - c(y)$.

Заменим систему стимулирования $\sigma(\cdot)$ на систему стимулирования $\tilde{\sigma}(\cdot)$, тогда получим следующее: в точке x система стимулирования $\tilde{\sigma}(\cdot)$ по-прежнему равна системе стимулирования $\sigma(\cdot)$. В правой части будет тогда записана система стимулирования $\tilde{\sigma}(\cdot)$: $\forall y \in A \;\; \sigma(x) - c(x) \geq 0 - c(y)$. Если выполнялась первая система неравенств, то выполняется и новая система неравенств. Следовательно, $x \in P(\tilde{\sigma}(\cdot))$.

Так как центр стремится минимизировать выплаты агенту, при условии, что последний выбирает требуемое действие, то вознаграждение в случае выполнения плана должно равняться затратам агента (точнее – превосходить их на сколь угодно малую положительную величину δ – для того, чтобы целевая функция агента имела единственный максиму – точку плана). Этот важный вывод для скалярных систем стимулирования получил название «*принцип компенсации затрат*» [27]. Он справедлив для рассматриваемой модели и в случае многокритериального стимулирования.

Следовательно, параметрическим (с параметром $x \in A$) решением задачи (2.1.5) является следующая система стимулирования

(2.1.6) $\sigma_K(x, y) = \begin{cases} c(x) + \delta, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}$,

которая называется *компенсаторной* (K-*типа*).

Величина δ, фигурирующая в оптимальной системе стимулирования, получила название *мотивационной надбавки* [26], так как именно ее величина определяет значение целевой функции агента. Размер мотивационной надбавки может выбираться исходя из различных соображений – см. ниже.

Оптимальное реализуемое действие может быть найдено из решения следующей стандартной оптимизационной задачи

(2.1.7) $y^* = \arg \max\limits_{x \in A} [H(x) - c(x)]$.

<u>Утверждение 1.</u> При $n = 1$, $k \geq 2$ и отсутствии агрегирования, система стимулирования (2.1.6), (2.1.7) δ-оптимальна.

Отметим, что компенсаторная система стимулирования (2.1.6) не является единственной оптимальной системой стимулирования – легко показать, что в рамках гипотезы благожелательности решением задачи (2.1.5) является любая система стимулирования $\breve{\sigma}(\cdot)$, удовлетворяющая следующему условию: $\breve{\sigma}(y^*) = c(y^*)$, $\forall\, y \neq y^*$ $\breve{\sigma}(y) \leq c(y)$.

Существенным «плюсом» компенсаторных систем стимулирования является их простота и высокая эффективность, существенным «минусом» – абсолютная неустойчивость относительно возможных возмущений параметров модели [6, 25]. Действительно, если центр неточно знает функцию затрат агента, то сколь угодно малая неточность может приводить к значительным изменениям реализуемых действий. Вопросы адекватности моделей стимулирования, устойчивости оптимальных решений и т.д. подробно исследовались в [6, 25]. Предложенная в упомянутых работах техника анализа и методы повышения гарантированной (в рамках имеющейся у центра информации) эффективности стимулирования могут быть непосредственно использованы и для моделей, рассматриваемых ниже, поэтому проблемы адекватности и устойчивости в настоящей работе не исследуются.

Выше мы рассматривали случай отсутствия агрегирования информации. Теперь предположим, что агрегирование информации имеет место, то есть доход центра $h(z)$ зависит от наблюдаемого им результата деятельности агента $z = Q(y) \in B \subseteq \Re^m$, причем $m \le k$, где $Q(\cdot): A \to B$ – однозначное непрерывное отображение, такое, что $\bigcup\limits_{y \in A} Q(y) = B$. Отметим, что при этом предполагается, что оператор агрегирования и функция затрат агента центру известны, а действия не наблюдаются.

Фиксируем произвольный результат деятельности агента $z \in B$ и вычислим, во-первых, множество его действий, приводящих к данному результату:

(2.1.8) $Y(z) = \{y \in A \mid Q(y) = z\}$,

и, во-вторых, минимальные затраты агента по достижению данного результата:

(2.1.9) $C(z) = \min\limits_{y \in Y(z)} c(y)$.

Рассмотрим систему стимулирования

(2.1.10) $\sigma_K(x, z) = \begin{cases} C(x), & z = x \\ 0, & z \ne x \end{cases}$, $x, z \in B$.

Видно, что система стимулирования (2.1.10) в рамках гипотезы благожелательности (при прочих равных агент выберет действия, наиболее благоприятные с точки зрения центра) побуждает агента выбрать действия, приводящие к «плановому результату» $x \in B$, причем затраты центра на стимулирование при этом минимальны.

Оптимальный реализуемый результат деятельности может быть найден из решения следующей стандартной оптимизационной задачи

(2.1.11) $z^* = \arg \max\limits_{x \in B} [h(x) - C(x)]$.

<u>Утверждение 2.</u> При $n = 1$, $k \ge 2$ и наличии агрегирования в рамках гипотезы благожелательности система стимулирования (2.1.10), (2.1.11) оптимальна.

Таким образом, в настоящем подразделе получено решение задачи синтеза оптимальной многокритериальной системы стимулирования в одноэлементной ОС как для случая отсутствия агрегирования информации (утверждение 1), так и для случая агрегирования информации (утверждение 2).

Завершив рассмотрение механизмов стимулирования в одноэлементных ОС, перейдем к описанию механизмов многокритериального стимулирования в многоэлементных ОС.

2.2. Стимулирование за индивидуальные результаты

Простейшим обобщением базовой одноэлементной модели является *многоэлементная ОС* с независимыми (невзаимодействующими) агентами. В этом случае задача стимулирования распадается на набор одноэлементных задач [26]. Если ввести общие для всех или ряда агентов ограничения на механизм стимулирования, то получается задача стимулирования в *ОС со слабо связанными агентами*, представляющая собой набор параметрических одноэлементных задач, для которого проблема поиска оптимальных значений параметров решается стандартными методами условной оптимизации [26].

Если агенты взаимосвязаны (в настоящей работе не рассматривается ситуация, когда существуют общие ограничения на множества допустимых состояний, планов, действий и т.д. агентов – этот случай подробно описан в [23, 33]), то есть затраты и стимулирование агента зависят, помимо его собственных действий, от действий других агентов, то получается «полноценная» многоэлементная модель стимулирования, описываемая в настоящем подразделе. Предположим пока, что агрегирование информации отсутствует (ситуация, когда агрегирование имеет место, рассматривается в следующем подразделе).

Пусть $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество агентов, $y_i \in A_i$ – действие i-го агента, $c_i(y)$ – скалярные затраты i-го агента, $\sigma_i(y)$ – скалярное стимулирование этого агента со стороны центра, $i \in N$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – вектор действий агентов, $y \in A = \prod_{i \in N} A_i$. Предположим, что центр получает доход $H(y)$ от деятельности агентов.

Обозначим $y_{-i} = (y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n) \in A_{-i} = \prod_{j \neq i} A_j$ – обстановка игры для i-го агента. Интересы и предпочтения участников ОС – центра и агентов – выражены их целевыми функциями. Целевая функция центра $\Phi(\sigma, y)$ представляет собой разность между его доходом $H(y)$ и суммарным вознаграждением $\upsilon(y)$, выплачиваемым агентам: $\upsilon(y) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(y)$, где $\sigma_i(y)$ – стимулирование i-го агента, $\sigma(y) = (\sigma_1(y), \sigma_2(y), \ldots, \sigma_n(y))$. Целевая функция i-го агента $f_i(\sigma_i, y)$ – разность между стимулированием, получаемым от центра, и затратами $c_i(y)$, то есть:

(2.2.1) $\Phi(\sigma, y) = H(y) - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(y)$.

(2.2.2) $f_i(\sigma_i, y) = \sigma_i(y) - c_i(y),\ i \in N$.

Отметим, что и индивидуальное вознаграждение, и индивидуальные затраты i-го агента по выбору действия y_i в общем случае зависят от действий всех агентов (случай сильно связанных агентов с несепарабельными затратами).

Примем следующий порядок функционирования ОС. Центру и агентам на момент принятия решения о выбираемых стратегиях (соответственно – функциях стимулирования и действиях) известны целевые функции и допустимые множества всех участников ОС. Центр, обладая правом первого хода, выбирает функции стимулирования и сообщает их агентам, после чего агенты при известных функциях стимулирования одновременно и независимо выбирают действия, максимизирующие их целевые функции.

Обобщая предложенную в [33] модель, относительно параметров ОС введем следующие предположения:

- множество A_i допустимых действий i-го агента является компактом в $\Re^{k_i}$;

- функции затрат агентов непрерывны, неотрицательны и $\exists\, y_{LCA\,i} \in A_i$, такое, что $\forall\, y_{-i} \in A_{-i}\ \arg\min_{y_i \in A_i} c_i(y_i, y_{-i}) = y_{LCA\,i}$, причем $\forall\, y_{-i} \in A_{-i}\ c_i(y_{LCA\,i}, y_{-i}) = 0$;

- функция дохода центра непрерывна по всем переменным и достигает максимума при векторе действий агентов, отличном от $y_{LCA} = (y_{LCA\,1}, y_{LCA\,2}, \dots, y_{LCA\,n})$.

Так как и затраты, и стимулирование каждого агента в рассматриваемой модели зависят в общем случае от действий всех агентов, то последние оказываются вовлеченными в игру, в которой выигрыш каждого зависит от действий всех. Обозначим $P(\sigma)$ – множество равновесных при системе стимулирования σ стратегий агентов – множество решений игры (тип равновесия пока не оговаривается; единственно предположим, что агенты выбирают свои стратегии однократно, одновременно и независимо друг от друга, не имея возможности обмениваться дополнительной информацией и полезностью).

Как и в одноэлементной ОС, рассмотренной в подразделе 2.1, гарантированной эффективностью (далее просто «эффективностью») стимулирования является минимальное значение целевой функции центра на соответствующем множестве решений игры агентов:

(2.2.3) $K(\sigma) = \min\limits_{y \in P(\sigma)} \Phi(\sigma, y)$.

Задача синтеза оптимальной функции стимулирования заключается в поиске допустимой системы стимулирования σ^*, имеющей максимальную эффективность:

(2.2.4) $\sigma^* = \arg \max\limits_{\sigma} K(\sigma)$.

Из результатов подраздела 2.1 следует, что в частном случае, когда агенты независимы (вознаграждение и затраты каждого из них зависят только от его собственных действий), то оптимальной (точнее – δ-оптимальной, где $\delta = \sum\limits_{i \in N} \delta_i$) является компенсаторная система стимулирования:

(2.2.5) $\sigma_{iK}(y_i) = \begin{cases} c_i(y_i^*) + \delta_i, & y_i = y_i^* \\ 0, & y_i \neq y_i^* \end{cases}, \; i \in N,$

где $\{\delta_i\}_{i \in N}$ – сколь угодно малые строго положительные константы (мотивирующие надбавки), а оптимальное действие y^*, реализуемое системой стимулирования (2.2.5) как *равновесие в доминант-*

ных стратегиях (РДС) [12], является решением следующей задачи оптимального согласованного планирования:

(2.2.6) $y^* = \arg\max\limits_{y \in A} \{H(y) - \sum\limits_{i \in N} c_i(y_i)\}$.

Если стимулирование каждого агента зависит от действий всех агентов (рассматриваемый в настоящем подразделе случай коллективного стимулирования) и *затраты не сепарабельны* (то есть затраты каждого агента зависят в общем случае от действий всех агентов, что отражает взаимосвязь и взаимозависимость агентов), то множества *равновесий Нэша* [12] $E_N(\sigma) \subseteq A$ и РДС $y_d \in A$ имеют вид:

$$E_N(\sigma) = \{y^N \in A \mid \forall i \in N\ \forall y_i \in A_i$$
$$\sigma_i(y^N) - c_i(y^N) \geq \sigma_i(y_i, y_{-i}^N) - c_i(y_i, y_{-i}^N)\};$$

$y_{i_d} \in A_i$ – доминантная стратегия i-го агента, тогда и только тогда, когда

$$\forall y_i \in A_i,\ \forall y_{-i} \in A_{-i}\ \sigma_i(y_{i_d}, y_{-i}) - c_i(y_{i_d}, y_{-i}) \geq \sigma_i(y_i, y_{-i}) - c_i(y_i, y_{-i}).$$

Если при заданной системе стимулирования у всех агентов имеется доминантная стратегия, то говорят, что данная система стимулирования реализует соответствующий вектор действий как РДС.

Фиксируем произвольный вектор действий агентов $y^* \in A$ и рассмотрим следующую систему стимулирования:

(2.2.7) $\sigma_i(y^*, y) = \begin{cases} c_i(y_i^*, y_{-i}) + \delta_i, & y_i = y_i^* \\ 0, & y_i \neq y_i^* \end{cases}$, $\delta_i \geq 0,\ i \in N$.

Полученный в [33] результат остается в силе и для рассматриваемой модели: при использовании центром системы стимулирования (2.2.7) y^* – РДС. Более того, если $\delta_i > 0,\ i \in N$, то y^* – единственное РДС.

Вектор оптимальных реализуемых действий агентов y^*, фигурирующий в качестве параметра в выражении (2.2.7), определяется в результате решения следующей задачи оптимального согласованного планирования:

(2.2.8) $y^* = \arg\max\limits_{y \in A} \{H(y) - \sum\limits_{i \in N} c_i(y)\}$, а эффективность системы стимулирования (2.2.7), (2.2.8) равна следующей величине: $K^* = H(y^*) - \sum_{i \in N} c_i(y^*) - \delta$.

Утверждение 3. При $n \geq 2,\ k \geq 2$ и отсутствии агрегирования, система стимулирования (2.2.7), (2.2.8) δ-оптимальна.

Содержательно, при использовании системы стимулирования (2.2.7) центр использует следующий *принцип декомпозиции*: он предлагает i-му агенту – «выбирай действие, совпадающее с планом, а я компенсирую тебе затраты, независимо от того какие действия выбрали остальные агенты, если же ты выберешь любое другое действие, то вознаграждение будет равно нулю». Используя такую стратегию, центр декомпозирует игру агентов.

Таким образом, в настоящем подразделе посредством обобщения результатов, полученных в [33], решена задача синтеза оптимальной многокритериальной системы стимулирования в многоэлементных ОС без агрегирования информации (утверждение 3). Перейдем к описанию случая агрегирования информации.

2.3. Стимулирование за коллективные результаты

Пусть в рамках модели, рассмотренной в предыдущем подразделе, имеет место агрегирование информации, то есть результат деятельности $z \in B$ ОС, состоящей из n агентов, является функцией их действий: $z_i = Q_i(y)$, $i \in N$. Интересы и предпочтения участников ОС – центра и агентов – выражены их целевыми функциями. Целевая функция центра представляет собой разность между его доходом $h(z)$ и суммарным вознаграждением, выплачиваемым агентам, то есть

(2.3.1) $\Phi(\sigma(\cdot), z) = h(z) - \sum_{i \in N} \sigma_i(z_i)$,

где $\sigma_i(z_i)$ – стимулирование i-го агента, $\sigma(z) = (\sigma_1(z_1), \sigma_2(z_2), \dots, \sigma_n(z_n))$.

Целевая функция i-го агента представляет собой разность между стимулированием, получаемым им от центра, и затратами $c_i(y)$, то есть:

(2.3.2) $f_i(\sigma_i(\cdot), y) = \sigma_i(z_i) - c_i(y)$, $i \in N$.

Примем следующий порядок функционирования ОС. Центру и агентам на момент принятия решений о выбираемых стратегиях (соответственно – функциях стимулирования и действиях) известны целевые функции и допустимые множества всех участников ОС, а также функции агрегирования. Центр, обладая правом первого хода, выбирает функции стимулирования и сообщает их агентам, после чего агенты при известных функциях стимулирования выбирают действия, максимизирующие их целевые функции.

Рассмотрим случай, когда центр наблюдает только результаты деятельности агентов, от которых зависит его доход $h(z)$, но не знает и не может восстановить индивидуальных действий агентов (в противном случае мы оказались бы в рамках модели, рассмотренной в подразделе 2.2 выше), то есть, имеет место агрегирование информации – центр имеет не всю информацию о векторе $y \in A$ действий агентов, а ему известен лишь некоторый их агрегат $z \in B$ – параметр, характеризующий результаты совместных действий агентов.

Отметим, что в рассмотренной в подразделе 2.2 задаче стимулирования декомпозиция игры агентов основывалась на возможности центра поощрять агентов за выбор определенного (и наблюдаемого центром) действия. Если действия агентов не наблюдаемы, то непосредственное применение идеи декомпозиции невозможно, поэтому при решении задач стимулирования, в которых вознаграждение агентов зависит от агрегированных результатов деятельности, следует использовать подход, описанный для одноэлементной системы в подразделе 2.1 – найти множество действий, приводящих к заданным результатам деятельности, выделить среди них подмножество, характеризуемое минимальными суммарными затратами агентов (и, следовательно, минимальными затратами центра на стимулирование при использовании компенсаторных функций стимулирования), построить систему стимулирования, реализующую это подмножество действий, а затем определить, реализация какого из результатов деятельности наиболее выгодна для центра.

Будем считать, что отображения $\{Q_i(\cdot)\}$ непрерывны и однозначны, причем $\bigcup_{y \in A} (Q_1(y), Q_2(y), ..., Q_n(y)) = B.$ Определим множество векторов действий агентов, приводящих к заданному вектору результатов деятельности $z \in B$:

(2.3.3) $Y(z) = \{y \in A \mid Q_i(y) = z_i,\ i \in N\} \subseteq A$.

Вычислим минимальные суммарные затраты агентов по достижению результата деятельности $z \in B$:

(2.3.4) $C(z) = \min\limits_{y \in Y(z)} \sum\limits_{i \in N} c_i(y)$,

а также множество действий $Y^*(z) = \operatorname{Arg} \min\limits_{y \in Y(z)} \sum\limits_{i \in N} c_i(y)$, на котором этот минимум достигается.

Фиксируем произвольный результат деятельности $x \in B$ и произвольный вектор $y^*(x) \in Y^*(x) \subseteq Y(x)$.

Пусть выполнено одно из следующих предположений:

А.1. $\forall\, x \in B$ множество $Y^*(x)$ состоит из одной точки.

А.2. Затраты агентов сепарабельны, то есть $c_i = c_i(y_i),\ i \in N$.

А.3. $\forall\, i \in N\ \ \forall\, x \in B\ \ \forall\, y^*(x) \in Y^*(x)\ \ \forall\ \hat{y}_i \in A_i$, такого, что

$$Q(\hat{y}_i,\ y^*_{-i}(x)) = x,$$

выполнено $c_i(\hat{y}_i,\ y^*_{-i}(x)) > c_i(y^*(x))$.

По аналогии с тем, как это делается в [33], можно доказать, что:

1) при использовании центром системы стимулирования

(2.3.3) $\sigma^*_{ix}(z) = \begin{cases} c_i(y^*(x)) + \delta_i, & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases}$, $i \in N$,

вектор действий агентов $y^*(x)$ реализуется как единственное равновесие Нэша игры агентов с минимальными затратами центра на стимулирование равными $C(x) + \delta$, где $\delta = \sum\limits_{i \in N} \delta_i$;

2) система стимулирования (2.3.3) является δ-оптимальной.

На втором шаге решения задачи стимулирования найдем наиболее выгодный для центра результат деятельности ОС $x^* \in B$ как решение задачи оптимального согласованного планирования:

(2.3.4) $x^* = \arg \max\limits_{x \in B}\ [h(x) - C(x)]$.

<u>Утверждение 4.</u> Если при $n \geq 2,\ k \geq 2$ и наличии агрегирования выполнено одно из предположений А.1 или А.2, или А.3, то система стимулирования (2.3.3), (2.3.4) δ-оптимальна.

Таким образом, выражения (2.3.3)-(2.3.4) дают решение задачи синтеза оптимальной многокритериальной системы стимулирования за агрегированные результаты совместной деятельности.

В заключение настоящего раздела отметим, что выше рассматривались постановки задач стимулирования, в которых вознаграждение, выплачиваемое агентам, вычиталось из дохода центра. Более простым случаем является наличие фиксированного фонда заработной платы (ФЗП), который необходимо распределить таким образом, чтобы выбираемые (в рамках назначенной центром системы стимулирования) агентами действия максимизировали доход центра. Первый этап решения задачи стимулирования при этом останется без изменений, то есть, центру следует по-прежнему использовать соответствующие компенсаторные системы стимулирования. Отличие будет заключаться в том, что задача согласованного планирования сведется к максимизации функции дохода центра на множестве таких действий (или результатов деятельности) агентов, что их суммарные затраты (компенсируемые центром) не превосходят имеющегося ФЗП.

Подведем краткие итоги второго раздела настоящей работы: сформулированы и решены задачи синтеза оптимальных многокритериальных систем стимулирования для одноэлементных и многоэлементных ОС – см. Табл. 1.

Табл. 1.

Оптимальные многокритериальные ($k \geq 2$)
системы стимулирования

	Агрегирование отсутствует	**Агрегирование присутствует**
$n = 1$	Утверждение 1	Утверждение 3
$n \geq 1$	Утверждение 2	Утверждение 4

Оптимальные системы стимулирования типа (2.1.6), (2.2.5), (2.3.3) основаны на принципе компенсации затрат – при их использовании агент получает в равновесии компенсацию затрат плюс мотивационная надбавка, причем последняя с формальной (математической) точки зрения может быть выбрана сколь угодно малой. Поэтому компенсаторные системы стимулирования отражают такую важную функцию стимулирования как *компенсирую-*

щую, то есть обеспечивающую агентам минимально необходимый уровень полезности. Но у стимулирования существует и *мотивационная функция*, которая побуждает агентов не только выполнять плановые задания, но и делает привлекательной работу именно в данной организации, поощряя повышение качества, делая возможным удовлетворение потребностей более высоких уровней (см., например, формальную модель иерархии потребностей в [8]). Поэтому зачастую на практике используются неоптимальные (с математической точки зрения) системы стимулирования, в которых агентам в случае выполнения плана выплачивается вознаграждение, превышающее их затраты. Примером могут служить рассматриваемые ниже линейные (см. раздел 3) и ранговые (см. раздел 5) системы стимулирования. Возможен и другой вариант – когда в заработной плате агента выделяются две составляющих – «*постоянная*» (тарифная, зависящая от квалификации, должности и т.д.) и «*переменная*» (премиальная, зависящая явным образом от конкретных результатов деятельности агента). Примером здесь могут служить также рассматриваемые ниже бригадные (см. раздел 4) и *тарифно-премиальные системы стимулирования* [16].

Завершив рассмотрение задач синтеза оптимальных многокритериальных систем стимулирования (а, как свидетельствуют результаты подразделов 2.1-2.3, оптимальными являются компенсаторные системы стимулирования), изучим ситуации, в которых класс допустимых систем стимулирования ограничен и не включает в себя компенсаторные системы стимулирования. Типовыми примерами широко распространенных на практике классов систем стимулирования являются последовательно исследуемые ниже линейные системы стимулирования, механизмы «бригадной» оплаты труда и ранговые системы стимулирования.

3. Линейные системы стимулирования

Рассмотрим сначала, следуя [26], случай $n = 1$, $k = 1$, $A = \Re^1_+$, $y_{LCA} = 0$, в отсутствии агрегирования информации.

На практике широко распространены системы оплаты труда, основанные на использовании постоянных *ставок оплаты*: повременная оплата подразумевает существование ставки оплаты единицы рабочего времени (как правило, часа или дня), сдельная оплата – существование ставки оплаты за единицу продукции и т.д. Объединяет эти системы оплаты то, что вознаграждение агента прямо пропорционально его действию (количеству отработанных часов, объему выпущенной продукции и т.д.), а ставка оплаты $\alpha \geq 0$ является коэффициентом пропорциональности:

(3.1) $\sigma_L(y) = \alpha\, y$.

В более общем случае возможно, что часть вознаграждения агента выплачивается ему независимо от его действий, то есть пропорциональная система стимулирования в более общем случае может иметь вид

(3.2) $\breve{\sigma}_L(y) = \sigma_0 + \alpha\, y$.

При использовании пропорциональных (линейных) систем стимулирования и непрерывно дифференцируемой монотонной выпуклой функции затрат агента, выбираемое им действие определяется следующим выражением: $y^* = c'^{-1}(\alpha)$, где $c'^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная производной функции затрат агента.

Известно [26, 32], что эффективность пропорциональных систем стимулирования (3.1) не выше, чем компенсаторных (см. выражение (2.1.6)). Невысокая эффективность пропорциональных систем стимулирования вида (3.1) обусловлена требованием неотрицательности вознаграждений. Если допустить возможность использования систем стимулирования (3.2), где $\sigma_0 \leq 0$, то при выпуклых функциях затрат агента эффективность этой может быть равна эффективности оптимальной (компенсаторной) системы стимулирования. Для обоснования этого утверждения достаточно воспользоваться следующими соотношениями:

$$y^*(\alpha) = c'^{-1}(\alpha),\ \breve{\sigma}_L(y^*) = c(y^*).$$

Последнее выражение дает: $\sigma_0(\alpha) = c(c'^{-1}(\alpha)) - \alpha\, c'^{-1}(\alpha)$.

Оптимальное значение α^* ставки оплаты при этом выбирается из условия максимума целевой функции центра:

$$\alpha^* = \arg \max_{\alpha \geq 0} \ [H(y^*(\alpha)) - \breve{\sigma}_L(y^*(\alpha))].$$

Перейдем теперь к случаю, когда деятельность одного агента ($n = 1$) описывается несколькими параметрами ($k \geq 2$). При этом, если $m \geq 2$, то непонятно, что означает ставка оплаты (конечно, можно использовать несколько ставок оплаты – каждую для своей компоненты вектора результатов деятельности агента, однако, в силу аддитивности стимулирования, получим задачу, схожую со случаем скалярного результата). Поэтому будем считать, что $m = 1$.

Тогда

(3.3) $\sigma_L(z) = \alpha\, z$

и целевая функция агента имеет вид:

(3.4) $f(\alpha, y) = \alpha\, Q(y) - c(y)$.

Обозначим (см. также обозначения в разделе 2.1):

(3.5) $z^*(\alpha) = \arg\max\limits_{z \in B} \, [\alpha\, z - C(z)]$.

Оптимальное с точки зрения центра значение ставки оплаты определяется как

(3.6) $\alpha^* = \arg\max\limits_{\alpha \geq 0} \, [h(z^*(\alpha)) - \alpha\, z^*(\alpha)]$.

Утверждение 5. При $n = 1$, $k \geq 2$, $m = 1$ и наличии агрегирования, система стимулирования (3.6) оптимальна в классе линейных систем стимулирования (3.3).

Многокритериальная линейная система стимулирования вида (3.2) строится аналогично тому, как это делалось выше в одноэлементных системах.

Пример 1. Пусть $k = 2$ и $z = y_1 + \beta\, y_2$, $y_1, y_2 \geq 0$, $h(z) = \lambda \sqrt{z}$, $c(y) = ((y_1)^2 + \gamma\, (y_2)^2) / 2\, r$, где $\beta, \lambda, \gamma, r$ – строго положительные константы.

Получаем: $C(z) = \dfrac{\gamma\, z^2}{2r(\beta^2 + \gamma)}$, $z^*(\alpha) = \dfrac{\alpha\, r\, (\beta^2 + \gamma)}{\gamma}$,

$$\alpha^* = \left[\frac{\lambda}{4\sqrt{\dfrac{\gamma}{r(\beta^2 + \gamma)}}} \right]^{2/3} . \bullet[1]$$

Перейдем теперь к постановке и решению задачи синтеза оптимальной линейной многокритериальной системы стимулирования в многоэлементной ОС. Если имеются несколько агентов, то для использования единой ставки оплаты необходимо, чтобы их

[1] *Символ «•» здесь и далее обозначает окончание примера.*

результаты деятельности $z_i \in B_i$, $i \in N$, «измерялись» одинаково, то есть должно существовать множество B_0, такое, что: $B_i = B_0$, $i \in N$.

Пусть центр установил ставку оплаты $\alpha \geq 0$, то есть предложил агентам систему стимулирования:

(3.7) $\sigma_{Li}(z_i) = \alpha\, z_i$, $i \in N$.

Данная система стимулирования является унифицированной, так как ставка оплаты α одинакова для всех агентов. Однако, агенты могут быть различными, поэтому проанализируем, какие действия они будут выбирать при данной системе стимулирования. Целевая функция i-го агента имеет вид:

(3.8) $f_i(y) = \alpha\, Q_i(y) - c_i(y)$, $i \in N$.

Обозначим $P(\alpha)$ – множество равновесий Нэша игры агентов. Тогда задача синтеза оптимальной линейной системы стимулирования сводится к выбору оптимальной ставки оплаты:

(3.9) $\alpha^* = \arg \max\limits_{\alpha \geq 0} \min\limits_{y \in P(\alpha)} [h(Q_1(y), ..., Q_n(y)) - \alpha \sum\limits_{i \in N} Q_i(y)]$.

Исследуем задачу (3.9) с целью получения аналитических решений для ряда практически важных частных случаев.

Обозначим $K_i = \{1, 2, ..., k_i\}$ – множество показателей деятельности i-го агента (множество компонент вектора его действий). Введем следующие предположения.

А.4. Функции затрат агентов аддитивны и сепарабельны:

(3.10) $c_i(y_i) = \sum\limits_{j \in K_i} (y_{ij})^{\gamma_i} / (\gamma_i r_{ij})$, $i \in N$.

А.5. Результат деятельности i-го агента аддитивно зависит только от его собственных действий:

(3.11) $z_i = Q_i(y_i) = \sum\limits_{j \in K_i} \beta_{ij} y_{ij}$, $i \in N$.

Для того чтобы найти «равновесие Нэша» игры агентов, решим следующую задачу:

(3.12) $\begin{cases} c_i(y_i) \to \min\limits_{y_i \geq 0} \\ Q_i(y_i) = z_i \end{cases}$.

В итоге получаем:

$$(3.13)\ y_{ij}^*(z_i) = \frac{z_i(\beta_{ij} r_{ij})^{\frac{1}{\gamma_i - 1}}}{\sum_{\xi \in K_i} (\beta_{i\xi})^{\frac{\gamma_i}{\gamma_i - 1}} (r_{i\xi})^{\frac{1}{\gamma_i - 1}}},\ j \in K_i,\ i \in N.$$

При этом минимальные затраты i-го агента на достижение результата деятельности $z_i \geq 0$ равны

$$(3.14)\ C_i(z_i) = z_i^{\gamma_i} / (\gamma_i\, b_i),\ i \in N,$$

где

$$(3.15)\ b_i = \left[\sum_{\xi \in K_i} (\beta_{i\xi})^{\frac{\gamma_i}{\gamma_i - 1}} (r_{i\xi})^{\frac{1}{\gamma_i - 1}} \right]^{\gamma_i - 1},\ i \in N.$$

Затем находим для i-го агента результат деятельности $z_i^*(\alpha)$, доставляющий максимум его целевой функции $\alpha\, z_i - C_i(z_i)$:

$$(3.16)\ z_i^*(\alpha) = (\alpha\, b_i)^{\frac{1}{\gamma_i - 1}},\ i \in N.$$

В результате задача (3.9) превращается в стандартную оптимизационную задачу:

$$(3.17)\ \alpha^* = \arg \max_{\alpha \geq 0}\ [h(z^*(\alpha)) - \alpha \sum_{i \in N} z_i^*(\alpha)\,].$$

<u>Утверждение 6.</u> Если выполнены предположения А.4 и А.5, то зависимость действий, выбираемых агентами, от ставки оплаты описывается выражением (3.13), а оптимальной является ставка оплаты (3.17).

<u>Пример 2.</u> Пусть $n = 2$, $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 3$, $\beta_{11} = \beta_{21} = 1$, $\beta_{12} = \beta_{22} = 2$, $r_{11} = 2$, $r_{12} = 3$, $r_{21} = 1$, $r_{22} = 4$. Вычисляем в соответствии с (3.15): $b_1 = 8$, $b_2 = 33$.

Из (3.16) находим $z_1^*(\alpha) = 8\,\alpha$, $z_2^*(\alpha) = \sqrt{33\,\alpha}$.

Предположим, что $h(z) = z_1 + z_2$. Решая задачу (3.17), в соответствии с утверждением 6 получаем, что в рассматриваемом примере $\alpha^* \approx 0{,}51$. •

4. Системы «бригадной» оплаты труда

Настоящий раздел посвящен описанию такой разновидности коллективного стимулирования как «бригадные» формы оплаты труда, в рамках которых вознаграждение агента – члена «бригады» (команды, группы, коллектива, организации и т.п.) – определяется *коэффициентом его трудового вклада* (КТВ) и зависит от его действия в сравнении с действиями других агентов (в частном случае – при фиксированном премиальном фонде, в общем случае – когда премиальный фонд определяется агрегированным результатом деятельности всей бригады в целом) [13, 41].

Предполагается, что по результатам своей деятельности коллектив получает премиальный фонд R, который распределяется между агентами полностью. Рассмотрим сначала, следуя [41], «скалярный» случай. Будем считать, что i-ый агент характеризуется показателем r_i, отражающим его квалификацию (эффективность деятельности), то есть индивидуальные затраты i-го агента $c_i = c_i(y_i, r_i)$ монотонно убывают с ростом квалификации r_i, $i \in N$. Действие агента y_i пока будем считать принадлежащим множеству неотрицательных действительных чисел (многокритериальный случай рассматривается в настоящем разделе ниже).

Коллектив, в котором квалификация всех агентов одинаковая, будем называть *однородным*, в противном случае – *неоднородным*. Эффективность системы стимулирования $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ будем оценивать суммой действий агентов: $K(\sigma) = \sum_{i \in N} y_i$.

Целевые функции агентов имеют вид:

(4.1) $f_i(y_i) = \sigma_i - c_i(y_i, r_i), \ i \in N.$

Естественный и простейший способ определения КТВ δ_i агента – пропорционально действию последнего, то есть

(4.2) $$\delta_i = \frac{y_i}{\sum_{j \in N} y_j} \ i \in N.$$

Пусть функции затрат агентов линейны: $c_i(y_i, r_i) = y_i / r_i$. Тогда из (4.1) и (4.2) получаем следующее выражение для целевой функции i-го агента, зависящей уже от действий всех агентов:

(4.3) $$f_i(y) = R \ \frac{y_i}{\sum_{j \in N} y_j} - y_i / r_i, \ i \in N.$$

Следовательно, исследуемую ситуацию можно рассматривать как игру n лиц с функциями выигрыша вида (4.3).

Однородный коллектив. Рассмотрим сначала случай однородного коллектива ($r_i = r,\ i \in N$). Равновесные по Нэшу действия агентов имеют вид:

(4.4) $y_i^* = \dfrac{Rr(n-1)}{n^2},\ i \in N,$

что приводит к следующему значению эффективности:

(4.5) $K_l(R, r, n) = \dfrac{Rr(n-1)}{n}.$

В ряде случаев, возможно повысить суммарный показатель эффективности однородного коллектива, не увеличивая фонд премирования R, за счет иного способа формирования КТВ агентов – возводя в (4.2) действия в одинаковую для всех агентов степень, большую единицы.

В этом случае целевая функция i-го агента может быть представлена в виде:

(4.6) $\hat{f}_i(y) = R\ \dfrac{y_i^\alpha}{\sum_{j \in N} y_j^\alpha} - y_i / r_i,\ i \in N,\ \alpha \geq 1.$

Равновесные по Нэшу действия агентов записываются как:

(4.7) $y_i^* = \dfrac{\alpha Rr(n-1)}{n^2},\ i \in N,$

а значение суммарного показателя эффективности коллектива имеет вид

(4.8) $K_l(R, r, n, \alpha) = \alpha \dfrac{Rr(n-1)}{n}.$

При рассмотрении (4.8) может сложиться впечатление, что, выбрав большое значение α, можно обеспечить получение большого значения суммарного показателя эффективности коллектива. Однако это не так.

Действительно, в ситуации равновесия по Нэшу, значение целевой функции i-го агента имеет вид:

(4.9) $\hat{f}_i^*(y) = \dfrac{R}{n} - \dfrac{\alpha R(n-1)}{n^2},\ i \in N,\ \alpha \geq 1.$

Очевидно, что должно выполняться неравенство $\hat{f}_i^*(y) > 0$.

А отсюда следует, что $\alpha < \frac{n}{n-1}$.

<u>Неоднородный коллектив.</u> Из (4.2) и (4.3) следует, что в неоднородном коллективе ситуации равновесия Нэша соответствуют следующие действия агентов и эффективность:

$$y_i^* = \frac{\sum_{j \in N} 1/r_j - (n-1)/r_i}{(\sum_{j \in N} 1/r_j)^2} R(n-1),\ i \in N,$$

$$K_2(R,\ \vec{r},\ n) = \frac{R(n-1)}{\sum_{j \in N} 1/r_j}.$$

Здесь, также как и для однородного коллектива, можно повысить суммарный показатель эффективности, не увеличивая фонд премирования R, за счет иного способа формирования КТВ агентов. Обозначим через $З_i$, $i \in N$ оклад или тарифную ставку i-го агента и с учетом оклада КТВ каждого агента представим в виде

(4.10) $\delta_i = \dfrac{y_i}{З_i \sum_{j \in N} \dfrac{y_j}{З_j}}$ $i \in N$.

В этом случае, ситуации равновесия по Нэшу соответствуют следующие действия агентов и эффективность:

(4.11) $$y_i^* = З_i \frac{n-1}{\sum_{j \in N} \frac{З_j}{r_j}} R - \frac{З_i^2 R}{r_i} \left(\frac{n-1}{\sum_{j \in N} \frac{З_j}{r_j}} \right)^2,\ i \in N,$$

(4.12) $$K_3(R,\ \vec{r},\ n,\ \vec{З}) = \frac{n-1}{\sum_{j \in N} \frac{З_j}{r_j}} R \left(\sum_{j \in N} З_j - \frac{n-1}{\sum_{j \in N} \frac{З_j}{r_j}} \sum_{j \in N} \frac{З_j^2}{r_j} \right).$$

В дальнейшем, без ограничения общности будем считать, что

(4.13) $З_1 \geq З_2 \geq \ldots \geq З_n$

(4.14) $r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_n$.

Утверждение 7. Если КТВ неоднородного коллектива определяется как (4.10) и справедливы неравенства

(4.15) $$\frac{З_1}{r_1} \leq \frac{З_2}{r_2} \leq \ldots \leq \frac{З_n}{r_n},$$

то эффективность функционирования коллектива в ситуации равновесия по Нэшу не ниже, чем в случае, когда КТВ определяется как (4.2).

Доказательство. Необходимо показать, что

(4.16) $$\frac{n-1}{\sum_{j \in N} \frac{З_j}{r_j}} R \left(\sum_{j \in N} З_j - \frac{n-1}{\sum_{j \in N} \frac{З_j}{r_j}} \sum_{j \in N} \frac{З_j^2}{r_j} \right) \geq \frac{R(n-1)}{\sum_{j \in N} \frac{1}{r_j}}$$

или

(4.17) $$\sum_{j \in N} З_j - \frac{\sum_{j \in N} \frac{З_j}{r_j}}{\sum_{j \in N} \frac{1}{r_j}} \geq \frac{n}{\sum_{j \in N} \frac{З_j}{r_j}} \sum_{j \in N} \frac{З_j^2}{r_j} - \frac{1}{\sum_{j \in N} \frac{З_j}{r_j}} \sum_{j \in N} \frac{З_j^2}{r_j}.$$

Это неравенство выполняется, если справедливы два следующих неравенства:

(4.18) $$\sum_{j \in N} З_j \geq \frac{n}{\sum_{j \in N} \frac{З_j}{r_j}} \sum_{j \in N} \frac{З_j^2}{r_j}$$

и

(4.19) $$\frac{\sum_{j \in N} \frac{З_j}{r_j}}{\sum_{j \in N} \frac{1}{r_j}} \leq \frac{1}{\sum_{j \in N} \frac{З_j}{r_j}} \sum_{j \in N} \frac{З_j^2}{r_j}.$$

Неравенство (4.18) перепишем в виде

(4.20) $$\frac{\sum_{j \in N} З_j}{n} \times \frac{\sum_{j \in N} \frac{З_j}{r_j}}{n} \geq \frac{\sum_{j \in N} З_j \frac{З_j}{r_j}}{n}.$$

Это неравенство выполняется, т.к. учитывая условия (4.13) и (4.15) можно утверждать, что произведение средних арифметических n положительных чисел больше или равно среднего арифметического произведений этих чисел (неравенство Чебышева).

Теперь неравенство (4.19) перепишем в виде

(4.21) $$\left[\sum_{j\in N}\left(\frac{1}{\sqrt{r_j}}\times\frac{З_j}{\sqrt{r_j}}\right)\right]^2 \le \sum_{j\in N}\frac{1}{r_j}\times\sum_{j\in N}\frac{З_j^2}{r_j}.$$

А это есть неравенство Буняковского-Коши. Таким образом, справедливость неравенств (4.18) и (4.19) доказывает утверждение 7.

Так как показатель r_i, отражает квалификацию i-го агента, то можем предположить, что оклад пропорционален его квалификации, т.е. $З_i = b\, r_i$. Такой способ расчета оклада применяется в организациях бюджетной сферы, где используется единая тарифная сетка (ЕТС).

Эффективность (4.12) функционирования коллектива в этом случае можем записать как

(4.22) $$K_4(R, \vec{r}, n) = \frac{n-1}{n^2}R\sum_{j\in N} r_j.$$

И для этого случая всегда справедливо неравенство

(4.23) $K_4(R, \vec{r}, n) \ge K_2(R, \vec{r}, n)$.

При разработке систем стимулирования часто возникает вопрос. Для повышения эффективности функционирования коллектива надо увеличить фонд премирования, или повысить каждому агенту оклад?

Предположим, что фонд премирования увеличен на величину $Ф$, тогда эффективность функционирования коллектива будет равна

(4.24) $$K_5(R, \vec{r}, n, \vec{З}) = \sum_{j\in N} y_i^* = \frac{n-1}{\sum_{j\in N}\frac{З_i}{r_i}}(R+Ф)\left(\sum_{j\in N}З_i - \frac{n-1}{\sum_{j\in N}\frac{З_i}{r_i}}\sum_{j\in N}\frac{З_i^2}{r_i}\right)$$

Если увеличить каждому агенту оклад на величину $k\,З_i$, причем возможна ситуация, что $\sum_{i\in N} kЗ_i > Ф$, легко видеть, что эффективность функционирования коллектива не измениться. Следовательно, для повышения эффективности функционирования коллектива надо увеличить фонд премирования.

Завершив рассмотрение «скалярного» случая, перейдем к анализу ситуации, в которой действия агентов y_i, $i \in N$, представляют собой векторы, а процедура определения вознаграждения $\sigma_i(z)$, $i \in N$, основывается на трудовых вкладах агентов, вычисляемых на основании результатов их деятельности:

$$(4.25)\ \sigma_i(z) = R\ \frac{z_i}{\sum_{j \in N} z_j},\ i \in N.$$

В случае несепарабельных затрат целевые функции агентов имеют вид:

$$(4.26)\ f_i(y) = R\ \frac{Q_i(y)}{\sum_{j \in N} Q_j(y)} - c_i(y),\ i \in N.$$

В [38] исследован случай, когда выполнено предположение А.5, а затраты агентов сепарабельны и линейны. Для этого случая показано, что равновесными будут комбинации максимально и минимально возможных компонентов действий агентов. Рассмотрим несколько более общий случай.

А именно, предположим, что выполнены предположения А.4 и А.5. Воспользовавшись выражениями (3.10)-(3.15), получим, что целевая функция i-го агента имеет вид (ср. с (4.3)):

$$(4.27)\ f_i(z) = R\ \frac{z_i}{\sum_{j \in N} z_j} - (z_i)^{\gamma_i} / (\gamma_i\, b_i),\ i \in N.$$

Под эффективностью системы стимулирования (4.8) будем понимать сумму результатов деятельности агентов:

$$(4.28)\ K_3 = \sum_{i \in N} z_i$$

Утверждение 8. Если выполнены предположения А.4, А.5 и $\gamma_i = 2$, $i \in N$, то эффективность K_3 многокритериальной бригадной системы стимулирования (4.25) может быть найдена как решение уравнения

(4.29) $\sum_{i \in N} \frac{1}{(K_3)^2 + Rb_i} = \frac{n-1}{(K_3)^2}$.

Пример 3. Пусть в условиях утверждения 8 агенты однородны: $b_i = b$, $i \in N$. Из (4.12) получаем: $K_3 = \sqrt{(n-1)bR}$. •

Отметим, что предположение $\gamma_i = 2$, $i \in N$ в утверждении 8 существенно, так как найти аналитически равновесие Нэша игры агентов, обладающих целевыми функциями (4.27) и выбирающих значения результатов деятельности, в общем случае не удается.

Дело обстоит несколько проще, если вместо (4.25) выбрать систему стимулирования

(4.30) $\sigma_i(z) = R \dfrac{(z_i)^{\gamma_i}}{\gamma_i \sum_{j \in N} (z_j)^{\gamma_j} / \gamma_j}$, $i \in N$.

Найдем равновесие Нэша игры агентов, обладающих целевыми функциями

(4.31) $f_i(z) = R \dfrac{(z_i)^{\gamma_i}}{\gamma_i \sum_{j \in N} (z_j)^{\gamma_j} / \gamma_j} - (z_i)^{\gamma_i} / (\gamma_i b_i)$, $i \in N$.

Получим:

(4.32) $z_i^* = \left[\gamma_i \left(Q - \frac{Q^2}{Rb_i} \right) \right]^{\frac{1}{\gamma_i}}$, $i \in N$,

где $Q = \dfrac{R(n-1)}{\sum_{i \in N} \frac{1}{b_i}}$. Итак, мы обосновали справедливость следующего утверждения.

Утверждение 9. Если выполнены предположения А.4 и А.5, то эффективность $K_4 = \sum_{i \in N} z_i$ многокритериальной бригадной системы стимулирования (4.30) равна:

$$K_4 = \sum_{i \in N} \left[\gamma_i \left(Q - \frac{Q^2}{Rb_i} \right) \right]^{\frac{1}{\gamma_i}}.$$

Близкими к бригадным формам оплаты труда являются так называемые ранговые системы стимулирования, в которых для коллективного стимулирования используются процедуры соревнования, установления системы нормативов и т.д.

5. Ранговые системы стимулирования

В рассмотренных выше моделях стимулирования вознаграждение агентов зависело от абсолютных значений их результатов деятельности. В то же время, на практике достаточно распространены *ранговые системы стимулирования* (РСС), в которых величина вознаграждения агента определяется либо принадлежностью результата его деятельности некоторому наперед заданному множеству – так называемые *нормативные* РСС, либо местом, занимаемым агентом в упорядочении результатов деятельности всех агентов – так называемые *соревновательные* РСС.

Нормативные РСС (НРСС) характеризуются наличием процедур присвоения рангов агентам в зависимости от результатов их деятельности. Для описания, согласно [33], «скалярного» случая, введем следующие предположения. Во-первых, будем считать, что множества возможных действий агентов одинаковы и составляют множество неотрицательных действительных чисел. Во-вторых, предположим, что функции затрат агентов монотонны и затраты от выбора нулевого действия равны нулю.

Пусть $N = \{1, 2, ..., n\}$ – множество агентов, $\mathfrak{I} = \{1, 2, ..., w\}$ – множество возможных рангов, где w – размерность НРСС, $\{q_j\}$, $j = \overline{1, w}$ – совокупность w неотрицательных чисел, соответствующих вознаграждениям за «попадание» в различные ранги; Ψ_i: $A_i \to \mathfrak{I}$, $i \in N$ – процедуры классификации. Тогда НРСС называется кортеж $\{w, \mathfrak{I}, \{\Psi_i\}, \{q_j\}\}$.

В работе [40] показано, что для любой системы стимулирования существует НРСС не меньшей эффективности. Основная идея обоснования этого утверждения заключается в том, что для любой системы стимулирования и для любого агента всегда можно подобрать индивидуальную процедуру классификации его действий так, чтобы он при использовании НРСС выбирал то же действие, что и при использовании исходной системы стимулирования.

Однако на практике использование для каждого агента собственной процедуры классификации нецелесообразно, а зачастую и невозможно. Поэтому рассмотрим случай, когда процедура классификации одинакова для всех агентов ($\Psi_i(\cdot) = \Psi(\cdot),\ i \in N$) – так называемая *унифицированная* НРСС (УНРСС).

При использовании УНРСС агенты, выбравшие одинаковые действия, получают одинаковые вознаграждения. Введем вектор $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_w)$, такой, что $0 \le Y_1 \le Y_2 \le \ldots \le Y_w < +\infty$, который определяет разбиение множества $\Re^1_+$. Унифицированная НРСС задается кортежем $\{w, \{Y_j\}, \{q_j\}\}$, причем вознаграждение i-го агента σ_i определяется следующим образом (считаем $Y_{w+1} = +\infty$): $\sigma_i(y_i) = \sum_{j=1}^{w} q_j I(y_i \in [Y_j; Y_{j+1}))$, где $I(\cdot)$ – функция-индикатор, $Y_0 = 0$, $q_0 = 0$. Унифицированная НРСС называется *прогрессивной*, если вознаграждения возрастают с ростом действий: $q_0 \le q_1 \le q_2 \le \ldots \le q_w$ [40]. Эскиз графика прогрессивной УНРСС приведен на Рис. 2 [33].

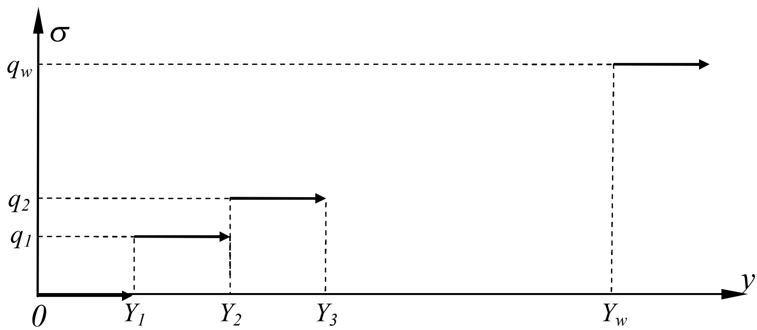

Рис. 2. Пример прогрессивной УНРСС

Так как УНРСС кусочно-постоянна, то в силу монотонности функций затрат очевидно, что агенты будут выбирать действия с минимальными затратами на соответствующих отрезках. Иначе говоря, условно можно считать, что при фиксированной системе стимулирования множество допустимых действий равно

$Y = \{Y_1, Y_2, ..., Y_w\}$, причем, так как $c_i(0) = 0$, то $q_0 = 0$. Действие y_i^*, выбираемое i-ым агентом, определяется парой векторов (Y, q), то есть имеет место $y_i^*(Y, q) = Y_{k_i}$, где

(5.1) $k_i = \arg \max\limits_{k=\overline{0,w}} \{q_k - c_i(Y_k)\}, i \in N.$

Обозначим $y^*(Y, q) = (y_1^*(Y, q), y_2^*(Y, q), ..., y_n^*(Y, q))$. Задача синтеза оптимальной УНРСС заключается в выборе размерности УНРСС w, вектора $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ и множества Y, удовлетворяющих заданным ограничениям, которые максимизировали бы целевую функцию центра $\Phi(\cdot)$:

(5.2) $\Phi(y^*(Y, q)) \to \max\limits_{w, Y, q}$.

Фиксируем вектор действий $y^* \in \Re_+^n$, который мы хотели бы реализовать с помощью УНРСС. Из того, что при использовании УНРСС агенты выбирают действия только из множества Y, следует, что минимальная размерность системы стимулирования должна быть равна числу попарно различных компонент вектора действий, который требуется реализовать. Следовательно, использование УНРСС размерности, большей, чем n, нецелесообразно. Без потери общности будем считать, что $w = n$ (если в результате решения задачи синтеза оптимальной УНРСС окажется, что некоторые оптимальные нормативы попарно совпадают, то может оказаться, что $w < n$).

Для фиксированного вектора действий y^* положим $Y_i = y_i^*$, $i \in N$, и обозначим $c_{ij} = c_i(Y_j)$, $i \in N$, $j = \overline{0, w}$. Из определения реализуемого действия (см. (5.1)) следует, что для того, чтобы УНРСС реализовывала вектор y^* (то есть, побуждала агентов выбирать соответствующие действия) необходимо и достаточно выполнения следующей системы неравенств:

(5.3) $q_i - c_i(y_i^*) \geq q_j - c_i(y_j^*)$, $i \in N, j = \overline{0, w}$.

Обозначим суммарные затраты центра на стимулирование по реализации действия y^* УНРСС

(5.4) $\vartheta(y^*) = \sum\limits_{i \in N} q_i(y^*)$,

где $q(y^*)$ удовлетворяет (5.3).

Задача синтеза оптимальной (минимальной) УНРСС заключается в минимизации (5.4) при условии (5.3). При заданных размерах вознаграждений исследование УНРСС сводится к необходимости ответа на следующий вопрос – какие векторы действий агентов могут быть реализованы в этом классе систем стимулирования (иначе говоря, для каких действий система неравенств (5.3) имеет решение).

Обозначим $\alpha_{ij}(y^*) = c_i(Y_j) - c_i(Y_i),\ i \in N,\ j = \overline{0, w}$. Введем в рассмотрение n-вершинный граф $G_\alpha(y^*)$, веса дуг в котором определяются $\|\alpha_{ij}(y^*)\|$. В [33] доказано, что для того чтобы вектор y^* был реализуем в классе УНРСС, необходимо и достаточно, чтобы граф $G_\alpha(y^*)$ не имел контуров отрицательной длины. В упомянутой работе приведен также алгоритм поиска минимальных вознаграждений (за «попадание» в соответствующие диапазоны), реализующих заданный вектор действий агентов. Введем следующее предположение, в рамках которого задача может быть решена аналитически.

А.6. Агентов можно упорядочить в порядке убывания затрат и предельных затрат: $\forall\, y \geq 0\ \ c_1'(y) \geq c_2'(y) \geq \ldots \geq c_n'(y)$,

Фиксируем некоторый вектор $y^* \in \Re_+^n$, удовлетворяющий следующему условию:

(5.5) $y_1^* \leq y_2^* \leq \ldots \leq y_n^*$,

то есть, чем выше затраты агента, тем меньшие действия он выбирает.

Введенным предположениям удовлетворяют, например, такие распространенные в экономико-математическом моделировании функции затрат агентов, как: $c_i(y_i) = \xi_i\, c(y_i)$, $c_i(y_i) = \xi_i\, c(y_i/\xi_i)$, где $c(\cdot)$ – монотонная дифференцируемая функция, а коэффициенты (отражающие эффективность деятельности агентов) упорядочены: $\xi_1 \geq \xi_2 \geq \ldots \geq \xi_n$ (частными случаями являются линейные функции затрат, функции затрат типа Кобба-Дугласа и др.).

В [33] доказано, что в рамках предположения А.6:

1) унифицированными нормативными ранговыми системами стимулирования реализуемы такие и только такие действия, которые удовлетворяют (5.5);

2) оптимальная УНРСС является прогрессивной;

3) минимальные индивидуальные вознаграждения в УНРСС, реализующей вектор y^*, удовлетворяют:

(5.6) $q_1 = c_{11},\ \ q_i = \sum_{j=1}^{i} (c_j(y_j^*) - c_j(y_{j-1}^*)),\ i \in N \setminus \{1\}$.

Выражение (5.6) позволяет исследовать свойства УНРСС – вычислять оптимальные размеры вознаграждений, строить оптимальные процедуры классификаций, сравнивать эффективность УНРСС с эффективностью компенсаторных систем стимулирования и т.д. [33].

Из (5.6) следует, что, если ФЗП R фиксирован, то в рамках предположения А.6 реализуемы такие и только такие векторы действий агентов, которые удовлетворяют одновременно условию (5.5) и

(5.7) $\sum_{i \in N} (n - i + 1)\,[c_i(y_i^*) - c_i(y_{i-1}^*)] \le R$.

Перейдем теперь к рассмотрению многокритериальной системы стимулирования

(5.8) $\sigma_i(z_i) = \sum_{j=1}^{w} q_j I(z_i \in [Z_j; Z_{j+1}))$, $i \in N$,

основывающейся на рангах агрегированных результатов деятельности агентов.

Пусть выполнены предположения А.4 и А.5, а также следующее предположение.

А.7. Агентов можно упорядочить так, что

$$b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n \text{ и } \gamma_1 \ge \gamma_2 \ge \ldots \ge \gamma_n.$$

Тогда из выражения (3.14) получаем, что для рассматриваемого случая справедлив следующий аналог предположения А.6:

(5.9) $\forall z \ge 0\ \ C_1(z) \ge C_2(z) \ge \ldots \ge C_n(z)$.

Получаем, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 10. Если выполнены предположения А.4, А.5 и А.7, то:

1) унифицированными нормативными многокритериальными ранговыми системами стимулирования реализуемы такие и только такие векторы z^* результатов деятельности агентов, которые удовлетворяют

(5.10) $z_1^* \le z_2^* \le \ldots \le z_n^*$.

2) оптимальная УНРСС является прогрессивной;

3) минимальные индивидуальные вознаграждения в многокритериальной УНРСС, реализующей вектор z^*, удовлетворяют:

(5.11) $q_1 = C_1(z_1^*),\ q_i = \sum_{j=1}^{i} (C_j(z_j^*) - C_j(z_{j-1}^*)),\ i \in N \setminus \{1\}$.

Соревновательные системы стимулирования. Рассмотрим кратко свойства соревновательных ранговых систем стимулирования (СРСС), в которых центр задает число классов и число мест в каждом из классов, а также величины поощрений агентов, попавших в тот или иной класс. То есть в унифицированной СРСС индивидуальное поощрение i-го агента $q_i(z^*)$ не зависит непосредственно от абсолютной величины выбранного им действия, а определяется тем местом, которое он занял в упорядочении показателей деятельности всех агентов.

По аналогии с тем как это делается выше для многокритериальных УНРСС (см. также результаты исследования однокритериальных СРСС в [33]), обосновывается справедливость следующего утверждения.

<u>Утверждение 11.</u> Если выполнены предположения А.4, А.5 и А.7, то:

1) многокритериальными соревновательными ранговыми системами стимулирования реализуемы такие и только такие векторы z^* результатов деятельности агентов, которые удовлетворяют условию (5.10);

2) данный вектор реализуем следующей системой стимулирования, обеспечивающей минимальность затрат центра на стимулирование:

(5.12) $q_i(z^*) = \sum_{j=2}^{i} \{C_{j-1}(z_j^*) - C_{j-1}(z_{j-1}^*)\},\ i \in N$.

<u>Пример 4.</u> Пусть $\gamma_i = \gamma,\ \beta_{ij} = \beta_j,\ j \in K_i,\ i \in N$. Тогда для того, чтобы выполнялось условие (5.9), а также имело место предположение А.7, достаточно, чтобы «эффективности» агентов были упорядочены следующим образом:

$$r_{ij} \le r_{i+1,\,j},\ j \in K_i,\ i \in N.$$

Подведем краткие итоги разделов 2-5: исследованы свойства оптимальных многокритериальных систем стимулирования различных типов – см. сводку результатов в Табл. 2

Табл. 2.

Оптимальные многокритериальные системы стимулирования различных типов

Системы стимулирования	**Утверждения**
Компенсаторная	1 – 4
Линейная	5, 6
«Бригадная»	7, 8
Ранговая	9, 10

Подводя промежуточные итоги, отметим, что при решении задач синтеза оптимальных многокритериальных систем стимулирования выше использовался следующий типовой «прием»: для каждого агента вычислялся вектор действий, приводящий к заданному результату его деятельности (см. выражения (2.1.8), (2.3.3)) с минимальными затратами (или этот поиск производился сразу для всех сильно взаимосвязанных агентов на множестве решений их игры) – см. выражения (2.1.5), (2.3.4), (3.12), (5.11), (5.12), после чего задача сводилась к той или иной модификации стандартной «скалярной» задачи стимулирования. Первый – наиболее трудоемкий – этап: вычисление минимальных затрат агентов на достижение заданного результата деятельности. Эти затраты, по большому счету, определяются функциями затрат агентов и оператором агрегирования. Вопросам анализа и идентификации функций затрат агентов посвящено множество работ – см. [2, 21, 31] и обзоры в них. Основная идея заключается в том, что, если агент осуществляет несколько видов деятельности (выбирает вектор компонентов деятельности), то делает он это, стремясь максимизировать свою функцию полезности. Взаимосвязь между различными компонентами вектора действий устанавливается, в том числе, системой стимулирования, что позволяет, изменяя систему стимулирования, влиять на выбираемые агентом действия. Идентификация функции затрат может производиться на основании результатов наблюдения (или «моделирования» посредством проведения опросов, анкетирования и т.д. – см. [2]) выбираемых агентом действий.

6. Роль системы оценки деятельности

Проведенный анализ многокритериальных систем стимулирования свидетельствует, что равновесие игры агентов, деятельность каждого из которых описывается вектором его действий, существенно зависит от оператора агрегирования (например, в рамках предположения А.5 – от тех весов, с которыми складываются компоненты вектора действий при вычислении соответствующего значения агрегированного результата деятельности). Оператор агрегирования является компонентой *системы оценки деятельности* [32], которая ставит в соответствие «детальным» действиям агентов менее подробные показатели, характеризующие эффективность деятельности с точки зрения организации.

Поэтому одной из задач управления, которая может и должна решаться совместно с синтезом оптимальных многокритериальных систем стимулирования, является выбор оптимальной системы оценки деятельности. Приведем соответствующие примеры решения задач управления.

На протяжении настоящего раздела будем считать, что выполнены предположения А.4 и А.5. Для простоты положим

А.8. $\gamma_i = 2,\ i \in N$

(в случае различных значений показателей степеней, фигурирующих в функциях затрат агентов, все качественные выводы останутся в силе, лишь усложнятся выкладки). Рассмотрим последовательно задачи выбора операторов агрегирования для различных систем многокритериального стимулирования, описанных выше. При этом будем считать, что:

А.9. Функция дохода центра представляет собой взвешенную сумму компонентов векторов действий агентов:

(6.1) $H(y) = \sum_{i \in N} \sum_{j \in K_i} \Delta_{ij} y_{ij}$,

где веса $\Delta = \{\Delta_{ij}\}$ отражают приоритеты центра.

Предположим, что центр (в целях унификации стимулирования и снижения информационной нагрузки) по-прежнему стимулирует агентов за агрегированные результаты деятельности, то есть его целевая функция имеет вид:

(6.2) $\Phi(y,\ \sigma(\cdot)) = H(y) - \sum_{i \in N} \sigma_i(z)$.

Компенсаторная система многокритериального стимулирования в одноэлементной ОС. Пусть $n = 1$ и центр использует компенсаторную систему стимулирования (2.1.10). Обозначим $\beta = \{\beta_{ij}\}$. Тогда из (3.14), опуская при рассмотрении одноэлементной ОС индекс, обозначающий номер агента, получаем:

(6.3) $C(z,\ \beta) = \dfrac{z^2}{2\sum_{j \in K} \beta_j^2 r_j}$.

Из (3.13) следует, что

(6.4) $y_j^*(z, \beta) = \dfrac{z\beta_j r_j}{\sum_{\xi \in K} \beta_\xi^2 r_\xi}$, $j \in K$.

Подставляя (6.3) и (6.4) в (6.2), с учетом (2.10) находим оптимальное с точки зрения центра значение агрегированного результата деятельности агента:

(6.5) $z^*(\beta) = \sum_{j \in K} \Delta_j \beta_j r_j$.

Действия, выбираемые агентом, и, следовательно, его результат деятельности, зависят от функции агрегирования (которая в рамках предположения А.5 задается набором «весов» β). Если выбор функции агрегирования (системы оценки деятельности) является прерогативой центра, то одним из «инструментов» управления является назначение таких весов, которые приводили бы к наиболее выгодному для центра (с точки зрения значения его целевой функции (6.2)) поведению агента.

Поэтому рассмотрим *задачу выбора системы оценки деятельности* (весов $\beta = \{\beta_{ij}\}$):

(6.6) $\Phi(y^*(\beta),\ \sigma_K(z^*(\beta))) \to \max_{\beta}$.

Для рассматриваемого случая получаем, что решение этой задачи дается следующим утверждением.

Утверждение 12. Если выполнены предположения А.4, А.5, А.8 и А.9, то в одноэлементной ОС оптимальная система оценки деятельности должна удовлетворять следующему условию:

(6.7) $\dfrac{\beta_j}{\beta_\xi} = \dfrac{\Delta_j}{\Delta_\xi}, j,\ \xi \in K.$

Содержательно условие (6.7) означает, что относительный приоритет компонентов вектора деятельности агента, устанавливаемый системой оценки его деятельности, должен определяться приоритетами центра. Такой вывод вполне соответствует здравому смыслу. Интересно отметить, что при этом параметры системы оценки деятельности не зависят от индивидуальных характеристик агента, отражаемых в рассматриваемой модели вектором $r = (r_1, r_2, ..., r_k)$ «эффективностей» его деятельности по каждой из оцениваемых компонент вектора действий.

Линейная система многокритериального стимулирования в многоэлементной ОС. Воспользуемся результатами раздела 3, а именно – утверждением 6.

Вычисляем:

(6.8) $y_{ij}^*(\alpha) = \alpha\, \beta_{ij}\, r_{ij},\ j \in K_i,\ i \in N.$

(6.9) $\Phi(y^*(\beta),\ \sigma_L(z^*(\beta))) = \dfrac{\left[\sum\limits_{i \in N} \sum\limits_{j \in K_i} \Delta_{ij} \beta_{ij} r_{ij}\right]^2}{2\sum\limits_{i \in N} \sum\limits_{j \in K_i} (\beta_{ij})^2 r_{ij}}.$

Находя максимум (6.9) по параметрам системы оценки деятельности, получаем следующий аналог утверждения 12:

Утверждение 13. Если выполнены предположения А.4, А.5, А.8 и А.9, то в многоэлементной ОС при использовании линейной системы многокритериального стимулирования оптимальная система оценки деятельности должна удовлетворять следующему условию:

(6.10) $\dfrac{\beta_{ij}}{\beta_{i\xi}} = \dfrac{\Delta_{ij}}{\Delta_{i\xi}}, j,\ \xi \in K_i,\ i \in N.$

Системы бригадной оплаты труда.

Достаточно часто, когда деятельность агентов не может быть измерена в одних и тех же показателях, Центр для определения эффективности работы каждого агента может оценить его деятельность по качеству и точности выполнения им своей должностной инструкции. Если в должностной инструкции *i-го* агента b_i

пунктов, то один из вариантов построения оценки деятельности - это оценить успешность выполнения агентами пунктов своих должностных инструкций по m - балльной шкале. В этом случае по каждому пункту i-му агенту Центр выставляет оценки O_{ij} $i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, b_i$. Один из вариантов определения результирующей оценки деятельности O_i i-го агента – это определение среднего арифметического значения полученных оценок по всем пунктам должностной инструкции

$$(6.11)\quad O_i = \frac{1}{b_i}\sum_{j=1}^{b_i} O_{ij}\ .$$

В этом случае КТВ каждого агента можем представить в виде

$$(6.12)\quad \delta_i = \frac{O_i}{З_i \sum_{j \in N} \frac{O_j}{З_j}} = \frac{\sum_{k=1}^{b_i} O_{ik}}{З_i b_i \sum_{j \in N} \frac{1}{З_j b_j} \sum_{k=1}^{b_j} O_{jk}}\quad i \in N.$$

Будем считать, что затраты агентов сепарабельны и линейны по оценкам за каждый пункт должностной инструкции. В этом случае целевая функция каждого агента имеет вид

$$(6.13)\quad f_i(O) = R\ \frac{\sum_{k=1}^{b_i} O_{ik}}{З_i b_i \sum_{j \in N} \frac{1}{З_j b_j} \sum_{k=1}^{b_j} O_{jk}} - \sum_{k=1}^{b_i} \frac{O_{ik}}{r_{ik}},\ i \in N.$$

Под эффективностью системы бригадной оплаты труда будем понимать сумму результатов деятельности агентов:

$$(6.14)\quad K_6 = \sum_{j \in N} \sum_{k=1}^{b_j} O_{jk}$$

При этом сумма оценок агентов в равновесии по Нэшу записываются как:

$$(6.15)\quad \sum_{k=1}^{b_i} O_{ik}^{*} = З_i b_i \frac{(n-1)R}{\sum_{j \in N} \frac{З_j b_j}{C_j}} \left(1 - \frac{З_i b_i}{C_i} \frac{(n-1)}{\sum_{j \in N} \frac{З_j b_j}{C_j}} \right),\ i \in N,$$

где $C_i = \dfrac{b_i}{\sum_{m=1}^{b_i} \dfrac{1}{r_{im}}}$ – среднее гармоническое коэффициентов квалификации i-го агента. Значение суммарного показателя эффективности коллектива имеет вид

$$(6.16)\ K_6 = \frac{(n-1)R}{\sum_{j \in N} \frac{З_j b_j}{C_j}} \left(\sum_{j \in N} З_j b_j - \frac{n-1}{\sum_{j \in N} \frac{З_j b_j}{C_j}} \sum_{j \in N} \frac{З_j^2 b_j^2}{C_j} \right).$$

В [38] было показано, что в равновесии эффективности коллектива представляет собой комбинации максимальных и минимальных оценок действий агентов. Это значит, что агенты выполняют на максимальную оценку те пункты должностной инструкции, выполнение которых требует от них минимальных затрат (показатель квалификации максимальный) и, соответственно, на минимальную оценку пункты должностной инструкции, выполнение которых требует от них максимальных затрат (показатель квалификации минимальный).

Простейший способ обеспечить повышение минимальных оценок агентов в ситуации равновесия – это учитывать при формировании КТВ только минимальные оценки. В этом случае КТВ каждого агента можем представить в виде

$$(6.17)\ \delta_i = \frac{\min\limits_k O_{ik}}{З_i \sum_{j \in N} \frac{\min\limits_q O_{jq}}{З_j}} \quad i \in N, k = 1, \ldots, b_i.$$

Очевидно, что при таком способе формирования КТВ рациональной стратегией агентов будет обеспечение одинаковых оценок по всем видам деятельности. А это значит, что целевая функция каждого агента может быть записана как

$$(6.18)\ f_i(O) = R \frac{O_i}{З_i b_i \sum_{j \in N} \frac{O_j}{З_j b_j}} - \frac{O_i}{b_i} \sum_{k=1}^{b_i} \frac{1}{r_{ik}},\ i \in N.$$

Оценки агентов по выполнению каждого пункта должностных инструкций в равновесии по Нэшу определяются как:

$$(6.19)\quad O_{im}^{*} = \frac{(n-1)З_i R}{\sum\limits_{j\in N}\frac{З_j b_j}{C_j}}\left(1-\frac{З_i b_i}{C_i}\frac{n-1}{\sum\limits_{j\in N}\frac{З_j b_j}{C_j}}\right),\ i \in N,\ m=1,\dots,b_i.$$

А отсюда вытекает следующее утверждение.

Утверждение 14. Распределение фонда поощрения R на основе КТВ, определяемого в соответствии с процедурой (6.12), в ситуации равновесия по Нэшу обеспечивает такую же суммарную оценку агентов за выполнение пунктов должностной инструкции, как и для КТВ, определяемого в соответствии с процедурой (6.17).

Еще один способ гарантировать получение агентами в ситуации равновесия по Нэшу не нулевых оценок– это определение результирующей оценки деятельности O_i *i-го* агента как среднего геометрического значения полученных оценок по всем пунктам должностной инструкции. То есть

$$(6.20)\quad \delta_i = \frac{\left(\prod\limits_{k=1}^{b_i} O_{ik}\right)^{1/b_i}}{З_i \sum\limits_{j\in N}\frac{1}{З_j}\left(\prod\limits_{k=1}^{b_j} O_{jk}\right)^{1/b_j}}.$$

При этом очевидно, что даже если по одному пункту должностной инструкции оценка будет равна нулю, то и результирующая оценка равна нулю.

В этом случае, в равновесии по Нэшу оценка i-го агента по m-му пункту должностной инструкции записывается как:

$$(6.21)\quad \hat{O}_{im} = \frac{З_i r_{im}}{A_i}\frac{n-1}{\sum\limits_{j\in N}\frac{З_j b_j}{A_j}}\left[1-\frac{З_i b_i}{A_i}\frac{n-1}{\sum\limits_{j\in N}\frac{З_j b_j}{A_j}}\right]R,\ i \in N,\ m = 1,\ \dots,\ b_i,$$

где $A_i = \left(\prod_{k=1}^{b_i} r_{ik} \right)^{1/b_i}$ – среднее геометрическое коэффициентов квалификации.

Обозначим $x_i = \dfrac{З_i b_i}{A_i \sum\limits_{j \in N} \dfrac{З_j b_j}{A_j}}$, $y_i = \dfrac{З_i b_i}{C_i \sum\limits_{j \in N} \dfrac{З_j b_j}{C_j}}$, тогда (6.19) можем записать в виде

(6.22) $O_{im}^{*} = y_i [1 - (n-1) y_i] \dfrac{(n-1)}{b_i} C_i R$, $i \in N$, $m = 1, \ldots, b_i$.

Соответственно, (6.21) записывается как

(6.23) $\hat{O}_{im} = x_i [1 - x_i (n-1)] \dfrac{(n-1) r_{im}}{b_i} R$, $i \in N$, $m = 1, \ldots, b_i$.

Очевидно, что (6.22) и (6.23) имеют смысл, если выполняются условия

(6.24) $\dfrac{З_i b_i}{C_i \sum\limits_{j \in N} \dfrac{З_j b_j}{C_j}} \le \dfrac{1}{n-1}$, $i \in N$, $m = 1, \ldots, b_i$.

(6.25) $\dfrac{З_i b_i}{A_i \sum\limits_{j \in N} \dfrac{З_j b_j}{A_j}} \le \dfrac{1}{n-1}$, $i \in N$, $m=1,\ldots,b_i$.

Покажем, что возможна ситуация, когда использование среднего геометрического значения полученных оценок позволяет в ситуации равновесия по каждому пункту должностной инструкции получить большее значение оценки деятельности, чем в случае, когда при формировании КТВ используются минимальные оценки.

Для этого должно выполняться неравенство

(6.26) $x_i [1 - x_i (n-1)] r_{im} > y_i [1 - (n-1) y_i] C_i$ $i \in N$.

Обозначим $d_i = \max\limits_m \dfrac{C_i}{r_{im}} = \dfrac{C_i}{\min\limits_m r_{im}}$. Так как $d_i \ge 1$, то (6.26) можно переписать как

(6.27) $x_i [1 - (n-1) x_i] > d_i y_i [1 - (n-1) y_i]$.

А это неравенство выполняется когда

$$(6.28)\quad \frac{1-\sqrt{1-4y_i\left[1-(n-1)y_i\right]d_i(n-1)}}{2(n-1)} < x_i < \frac{1+\sqrt{1-4y_i\left[1-(n-1)y_i\right]d_i(n-1)}}{2(n-1)}.$$

При этом должны быть справедливы условия

$$(6.29)\quad y_i \le \frac{\sqrt{d_i}-\sqrt{d_i-1}}{2(n-1)\sqrt{d_i}},\ i \in N.$$

или

$$(6.30)\quad \frac{\sqrt{d_i}+\sqrt{d_i-1}}{2(n-1)\sqrt{d_i}} \le y_i \le \frac{1}{n-1},\ i \in N.$$

Легко показать, что, если у всех агентов по каждому виду работы квалификация одинаковая, то есть $r_{im}= r_i$, $m=1,...,b_i$, $i \in N$, , то $d_i=1$, и неравенство (6.28) можно переписать в виде $y_i < x_i < \frac{1}{n-1} - y_i \;\; i \in N$. Но так как $\sum_{j\in N} x_j = \sum_{j\in N} y_j = 1$, то для всех $i \in N$ это условие невыполнимо.

В то же время (6.27) может выполняться, когда квалификация агентов разная.

Пример 5. Пусть r_{11}=0,37, r_{12}=0,4, r_{13}=9,5, r_{21}=10,5, r_{22}=0,35, r_{23}=0,44, r_{31}=2, r_{32}=1, $З_1$=5300, $З_2$=5200, $З_3$=1500 и R=600.

При формировании КТВ на основе минимальных значений оценок равновесные по Нэшу оценки принимают следующие значения $O^*_{11} = O^*_{12} = O^*_{13} = 1{,}24$, $O^*_{21} = O^*_{22} = O^*_{23} = 3{,}03$, $O^*_{31} = O^*_{32} = 14{,}42$. Если же КТВ формируется как среднее геометрическое значение оценок, то в ситуации по Нэшу равновесные оценки агента по каждому пункту должностной инструкции принимают значения $\hat{O}_{11} = 1{,}46$, $\hat{O}_{12} = 1{,}58$, $\hat{O}_{13} = 37{,}52$, $\hat{O}_{21} = 96{,}28$, $\hat{O}_{22} = 3{,}21$, $\hat{O}_{23} = 4{,}03$, $\hat{O}_{31} = 36{,}83$, $\hat{O}_{32} = 18{,}42$. Отсюда легко видеть что, $\Delta_{11} = \hat{O}_{11} - O^*_{11} = 0{,}22$, $\Delta_{12} = 0{,}34$, $\Delta_{13} = 36{,}28$, $\Delta_{21} = 93{,}25$, $\Delta_{22} = 0{,}18$, $\Delta_{23} = 1$, $\Delta_{31} = 22{,}42$, $\Delta_{32} = 4$.

Если коэффициенты квалификации агентов таковы, что справедливо

(6.31) $\frac{A_i}{C_i} = L \;\; i \in N,$

то $x_i = y_i$ и поэтому (6.27) можно переписать как $1 > \frac{C_i}{\min\limits_m r_{im}}$. А это значит, что если справедливо (6.31), то неравенство (6.27) выполняться не будет.

Нетрудно заметить, что условия, при выполнении которых, равновесные оценки по каждому пункту должностной инструкции при одном способе формирования КТВ были выше, чем при другом в общем случае труднореализуемы. Однако, реализуемость условий, при которых суммарная оценка деятельности каждого агента в ситуации по Нэшу при формировании КТВ на основе минимальных значений оценок ниже, чем при формировании КТВ на основе средних геометрических значений оценок значительно повышается. Действительно, сумма оценок (6.22) записывается в виде

(6.32) $O_i^* = \sum\limits_{m=1}^{b_i} O_{im}^* = y_i\left[1-(n-1)y_i\right]C_i(n-1)R\,,\; i \in N,$

а сумму оценок (6.23) можно записать как

(6.33) $\hat{O}_i = \sum\limits_{m=1}^{b_i} \hat{O}_{im} = x_i\left[1-x_i(n-1)\right](n-1)\frac{\sum\limits_{m=1}^{b_i} r_{im}}{b_i}R\,,\; i \in N.$

Обозначим $B_i = \frac{\sum\limits_{m=1}^{b_i} r_{im}}{b_i}$ - среднее арифметическое коэффициентов квалификации.

Для того чтобы имело место $\hat{O}_i > O_i^*$, должно выполняться неравенство

(6.34) $x_i\left[1-(n-1)x_i\right] > \frac{C_i}{B_i}\, y_i\left[1-(n-1)y_i\right],\; i \in N.$

Известно, что $B_i \geq A_i \geq C_i$, причем $B_i = A_i = C_i$, только когда $r_{im} = r_i$, $m = 1, ..., b_i$ и для этого случая, как было показано выше, неравенство (6.34) выполняться не может. Поэтому будем рассматривать ситуацию, когда $\frac{C_i}{B_i} < 1$. В этом случае, если справедливо (6.31), то неравенство (6.34) записывается в виде

(6.35) $$x_i\left[1-(n-1)x_i\right] > \frac{C_i}{B_i} x_i\left[1-(n-1)x_i\right],$$

а это значит, что при выполнении условий (6.31) суммарная оценка деятельности каждого агента в ситуации равновесия по Нэшу при формировании КТВ на основе минимальных значений оценок всегда ниже, чем при формировании КТВ на основе средних геометрических значений оценок.

Если в трудовом коллективе зарплата *i-го* агента формируется в соответствии с процедурой $З_i = pb_iA_i$, где p – некоторый пересчетный коэффициент то $x_i = \frac{b_i^2}{\sum_{j\in N} b_j^2}$, а $y_i = \frac{A_i b_i^2}{C_i \sum_{j\in N} \frac{A_j b_j^2}{C_j}}$. И неравенство (6.34) принимает вид

(6.36) $$\frac{b_i^2}{\sum_{j\in N} b_j^2}\left[1-(n-1)\frac{b_i^2}{\sum_{j\in N} b_j^2}\right] > \frac{C_i}{B_i} y_i\left[1-(n-1)y_i\right],\ i \in N.$$

А это неравенство справедливо всегда, если выполняется условие

(6.37) $$\frac{C_i}{B_i} < 4(n-1)\frac{b_i^2}{\sum_{j\in N} b_j^2}\left[1-(n-1)\frac{b_i^2}{\sum_{j\in N} b_j^2}\right],\ i \in N.$$

В случае, когда количество пунктов в должностной инструкции одинаково и равно b неравенство (6.37) можно представить в виде

(6.38) $\frac{C_i}{B_i} < \frac{4(n-1)}{n^2}$, $i \in N$.

Отсюда видно, что при $n = 2$, это неравенство всегда выполняется, и, следовательно, выполняется (6.34).

Пример 6. Пусть коллектив состоит из пяти агентов. Фонд премирования $R = 1000$, значения коэффициентов эффективности и оклады агентов представлены в Табл. 3.

При формировании КТВ на основе минимальных значений оценок равновесные оценки в ситуации равновесия по Нэшу принимают значения, представленные и Табл. 4.

Табл. 3

Агент / Пункт инструкции	1	2	3	4	5
1	0,4	0,3	0,1	0,5	0,7
2	0,05	0,1	0,4	0,6	0,03
3	0,3	0,5	0,3	0,04	0,5
4	1	0,9	0,03	0,4	0,1
Оклад	2227	2727	1102	2106	1440

Табл. 4

Агент / Пункт инструкции	1	2	3	4	5
1	5,5	14,4	3,9	2,9	1,5
2	5,5	14,4	3,9	2,9	1,5
3	5,5	14,4	3,9	2,9	1,5
4	5,5	14,4	3,9	2,9	1,5
Сумма	22	57,6	15,6	11,6	6

При формировании КТВ как среднего геометрического значения оценок в ситуации по Нэшу равновесные оценки агента по каждому пункту должностной инструкции принимают значения, представленные и Табл. 5.

Табл. 5

Агент / Пункт инструкции	1	2	3	4	5
1	16	12	4	20	28
2	2	4	16	24	1,2
3	12	20	12	1,6	20
4	40	36	1,2	16	4
Сумма	70	72	33,2	61,6	53,2

Отсюда видно, что суммарные оценки деятельности каждого агента во втором случае выше, чем в первом.

Если же в трудовом коллективе зарплата i-го агента формируется в соответствии с процедурой $З_i = p b_i C_i$, то $x_i = \dfrac{C_i b_i^2}{A_i \sum\limits_{j \in N} \dfrac{C_j b_j^2}{A_j}}$, а,

$y_i = \dfrac{b_i^2}{\sum\limits_{j \in N} b_j^2}$. Неравенство (6.34) принимает вид

$$(6.39)\quad x_i\left[1-(n-1)x_i\right] > \frac{b_i^2}{\sum\limits_{j \in N} b_j^2}\left[1-(n-1)\frac{b_i^2}{\sum\limits_{j \in N} b_j^2}\right]\frac{C_i}{B_i},\ i \in N.$$

Перепишем это неравенство в виде

$$(6.40)\quad \frac{B_i}{C_i} > \frac{1}{x_i\left[1-(n-1)x_i\right]}\frac{b_i^2}{\sum\limits_{j \in N} b_j^2}\left[1-(n-1)\frac{b_i^2}{\sum\limits_{j \in N} b_j^2}\right],\ i \in N.$$

Если в должностной инструкции каждого агента одинаковое количество пунктов (6.40) можно переписать в виде

$$(6.41)\quad \frac{C_i}{B_i} < x_i\left[1-(n-1)x_i\right]n^2,\ i \in N.$$

Утверждение 15. Если квалификации агентов r_{im}, $m = 1, ..., b_i$ $i \in N$, таковы, что выполняются неравенства (6.38), то всегда выполняются неравенства (6.41).

Доказательство. Для доказательства необходимо показать, что

(6.42) $\dfrac{4(n-1)}{n^2} < x_i\left[1-(n-1)x_i\right]n^2 \;\; i \in N.$

Перепишем неравенство (6.42) в виде

(6.43) $\dfrac{4(n-1)}{n^4} < x_i\left[1-(n-1)x_i\right] \;\; i \in N.$

Максимальное значение правой части (6.43) равно $\dfrac{1}{4(n-1)}$. И поэтому, теперь достаточно показать, что

$\dfrac{4(n-1)}{n^4} < \dfrac{1}{4(n-1)}$ или $-(n-2)^2\left[(n+2)^2-8\right] < 0$, $i \in N$.

Отсюда видно, что последнее неравенство выполняется всегда, если $n > 2\left(\sqrt{2}-1\right)$. А это значит, что (6.42) выполняется для любого $n > 1$, а этот факт и доказывает утверждение 15.

В общем случае, для выполнения (6.34) достаточно, чтобы выполнялись неравенства (6.28), когда $d_i = \dfrac{C_i}{B_i}$.

Легко показать, что всегда справедливо неравенство

(6.44) $J_i^2 = 1-4y_i\left[1-(n-1)y_i\right]\dfrac{C_i}{B_i}(n-1) > 0$.

Подставляя вместо y_i его значение, можем записать

(6.45) $J_i = \dfrac{\sqrt{\left(B_i\sum\limits_{j\in N}\dfrac{З_j b_j}{C_j} - 2(n-1)З_i b_i\right)^2 + 4(n-1)^2 З_i^2 b_i^2\,\dfrac{B_i - C_i}{C_i}}}{B_i\sum\limits_{j\in N}\dfrac{З_j b_j}{C_j}}$.

Утверждение 16. Если квалификации агентов r_i и их тарифные ставки $З_i$, $i \in N$ таковы, что выполняются неравенства

$$\frac{A_i}{З_i b_i B_i}\left(B_i \sum_{j\in N}\frac{З_j b_j}{C_j} - J_i\right) < 2(n-1)\frac{\sum\limits_{j\in N}\frac{З_j b_j}{C_j}}{\sum\limits_{j\in N}\frac{З_j b_j}{A_j}} < \frac{A_i}{З_i b_i B_i}\left(B_i \sum_{j\in N}\frac{З_j b_j}{C_j} + J_i\right),$$

то в ситуации равновесия по Нэшу процедура формирования КТВ (6.20) обеспечивает большую суммарную оценку агентов за выполнение пунктов должностной инструкции, чем при использовании (6.17).

Пример 7. Пусть коллектив состоит из пяти агентов. Фонд премирования R=1000, значения коэффициентов эффективности и оклады агентов представлены в Табл. 6. При формировании КТВ на основе минимальных значений оценок равновесные оценки в ситуации равновесия по Нэшу принимают значения, представленные и Табл. 7.

Табл. 6

Агент / Пункт инструкции	1	2	3	4	5
1	4	4	2	3	3
2	2	2	3	4	6
3	3	5		2	5
4	5				7
Оклад	2800	4500	3000	3500	5000

Табл. 7

Агент / Пункт инструкции	1	2	3	4	5
1	13,27	6,79	29,77	13,3	8,99
2	13,27	6,79	29,77	13,3	8,99
3	13,27	6,79		13,3	8,99
4	13,27				8,99
Сумма	53,08	20,37	59,54	39,9	35,96

При формировании КТВ как среднего геометрического значения оценок в ситуации по Нэшу равновесные оценки агента по каждому пункту должностной инструкции принимают значения, представленные и Табл. 8.

Табл. 8

Агент / Пункт инструкции	1	2	3	4	5
1	17,31	11,27	24,61	13,70	5,71
2	8,65	5,64	36,91	18,26	11,41
3	12,98	14,09		9,13	9,51
4	21,64				13,32
Сумма	60,68	31,00	61,52	41,09	39,95

Нетрудно заметить, что для первого агента $O_{12}^{*} > \hat{O}_{12}$, $O_{13}^{*} > \hat{O}_{13}$, для второго агента $O_{22}^{*} > \hat{O}_{22}$, для третьего агента $O_{31}^{*} > \hat{O}_{31}$, для четвертого $O_{43}^{*} > \hat{O}_{43}$ и, наконец, для пятого агента $O_{51}^{*} > \hat{O}_{51}$. В то же время суммарные оценки деятельности каждого агента во втором случае выше, чем в первом.

Заключение

Сформулированы и решены задачи синтеза оптимальных многокритериальных систем стимулирования для одноэлементных и многоэлементных организационных систем, в том числе – в условиях агрегирования информации (утверждения 1-4). Исследованы свойства оптимальных многокритериальных систем стимулирования различных типов – линейные (утверждения 5, 6), «бригадные» (утверждения 7-9) и ранговые (утверждение 10-11) многокритериальные системы стимулирования. Значительное внимание уделено исследованию роли систем оценки деятельности агентов (утверждения 12-16).

Литература

(работы, отмеченные звездочкой, можно найти в электронной библиотеке на сайте <u>*www.mtas.ru*</u>)

1 Адамчук В.В., Кокин Ю.П., Яковлев Р.А. Экономика труда. М.: Финстатинформ, 1999. – 431 с.

2 Баркалов С.А., Новиков Д.А., Попов С.С. Индивидуальные стратегии предложения труда: теория и практика. М.: ИПУ РАН, 2002. – 109 с.

3 Бурков В.Н., Горгидзе И.А., Ловецкий С.Е. Прикладные задачи теории графов. Тбилиси: Мецниереба, 1974. – 234 с.

4 *Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А. Теория графов в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2001. – 124 с.

5 Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981. – 384 с.

6 *Васильев Д.К., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А., Цветков А.В. Типовые решения в управлении проектами. М.: ИПУ РАН, 2003. – 74 с.

7 *Воронин А.А., Мишин С.П. Оптимальные иерархические структуры. М.: ИПУ РАН, 2003. – 214 с.

8 *Галинская Е.В., Иващенко А.А., Новиков Д.А. Модели и механизмы управления развитием персонала. М.: ИПУ РАН, 2005. – 68 с.

9 Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976. – 327 с.

10 *Гилев С.Е., Леонтьев С.В., Новиков Д.А. Распределенные системы принятия решений в управлении региональным развитием. М.: ИПУ РАН, 2002. – 54 с.

11 *Губко М.В. Механизмы управления организационными системами с коалиционным взаимодействием участников. М.: ИПУ РАН, 2003. – 118 с.

12 *Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2002. – 148 с.

13 Динова Н.И. Бригадные формы оплаты труда / Механизмы управления социально-экономическими системами. М.: ИПУ РАН, 1988. С. 79 – 82.

14 Егоршин А.П. Управление персоналом. Н. Новгород: НИМБ, 1997. – 607 с.

15 Еловиков Е.А. Экономика труда. Часть 2: Оплата труда. Омск: ОмГУ, 1996. – 133 с.

16 *Заложнев Д.А., Новиков Д.А. Модели тарифно-премиальных систем оплаты труда. М.: ИПУ РАН, 2006. - 75 с.

17 *Караваев А.П. Модели и методы управления составом активных систем. М.: ИПУ РАН, 2003. – 151 с.

18 Клейнер Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение. М.: Финансы и статистика, 1986. – 238 с.

19 Козелецкий Ю. Психологическая теория решений. М.: Прогресс, 1979. – 504 с.

20 *Коргин Н.А. Механизмы обмена в активных системах. М.: ИПУ РАН, 2003. – 126 с.

21 *Кочиева Т.Б., Новиков Д.А. Базовые системы стимулирования. М.: Апостроф, 2000. – 108 с.

22 *Новиков Д.А., Глотова Н.П. Модели и механизмы управления образовательными сетями и комплексами. М.: ИУО РАО, 2004. – 142 с.

23 *Новиков Д.А. Институциональное управление организационными системами. М.: ИПУ РАН, 2003. – 68 с.

24 *Новиков Д.А. Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. М.: Фонд «Проблемы управления», 1999. – 150 с.

25 Новиков Д.А. Обобщенные решения задач стимулирования в активных системах. М.: ИПУ РАН, 1998. – 68 с.

26 Новиков Д.А. Стимулирование в организационных системах. М.: Синтег, 2003. – 312 с.

27 Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). М.: ИПУ РАН, 1998. – 216 с.

28 *Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. М.: Синтег, 1999. – 108 с.

29 *Новиков Д.А. Сетевые структуры и организационные системы. М.: ИПУ РАН, 2003. – 102 с.

30 *Новиков Д.А., Смирнов И.М., Шохина Т.Е. Механизмы управления динамическими активными системами. М.: ИПУ РАН, 2002. – 124 с.

31 *Новиков Д.А., Суханов А.Л. Модели и механизмы управления научными проектами в ВУЗах. М.: Институт управления образованием РАО, 2005. – 80 с.

32 Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. М.: МПСИ, 2005. – 584 с.

33 *Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы стимулирования в многоэлементных организационных системах. М.: Апостроф, 2000 – 184 с.

34 *Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы функционирования организационных систем с распределенным контролем. М.: ИПУ РАН, 2001. – 118 с.

35 Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексивные игры. М.: Синтег, 2003. – 160 с.

36 *Петраков С.Н. Механизмы планирования в активных системах: неманипулируемость и множества диктаторства. М.: ИПУ РАН, 2001. – 135 с.

37 Старобинский Э.Е. Как управлять персоналом. М.: Бизнес-школа «Интел-синтез», 1998. – 368 с.

38 Толстых А.В., Щепкина М.А. Стимулирование в коллективе по нескольким показателям / Труды Международной конференции «Теория активных систем – 2005». М.: ИПУ РАН, 2005. С.41 – 43.

39 *Цветков А.В. Стимулирование в управлении проектами. М.: Апостроф, 2001. – 144 с.

40 Цыганов В.В. Адаптивные механизмы в отраслевом управлении М.: Наука, 1991. – 166 с.

41 *Щепкин А.В. Механизмы внутрифирменного управления. М.: ИПУ РАН, 2001. – 80 с.

42 Эренберг Р.Дж., Смит Р.С. Современная экономика труда. Теория и государственная политика. М.: Изд-во МГУ, 1996.–800 с.

43 Юдкевич М.М., Подколзина Е.А., Рябинина А.Ю. Основы теории контрактов: модели и задачи. М.: ГУ ВШЭ, 2002. – 352 с.

44 Armstrong M. Reward management. London, 2000. – 804 p.

45 Hart O.D., Holmstrom B. Theory of contracts // Advances in economic theory. 5-th World Congress. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. P. 71 – 155.

46 Mas-Collel A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic theory. N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995. – 981 p.

47 Myerson R.B. Game theory: analysis of conflict. London: Harvard Univ. Press, 1991. – 568 p.
48 Sapsford D., Tzannatos Z. The economics of the labor market. London: Macmillan, 1993. – 463 p.