МЕХАНИЗМЫ СНИЖЕНИЯ ОЖИДАЕМОГО УЩЕРБА В ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Д.А. Новиков
(*Институт проблем управления РАН, Москва*)

Для модели эколого-экономической системы решена задача синтеза системы штрафов, налагаемых на предприятие в зависимости от величины экологического ущерба от его деятельности, являющегося случайной величиной, распределенной по закону Парето.

1. Введение

Рассмотрим следующую модель *эколого-экономической системы* (ЭкЭС) [1], состоящей из управляющего органа (*центра*), *предприятия* и *окружающей среды*. Предприятие выбирает объем выпускаемой им продукции и объем затрат на природоохранные мероприятия. Результатами его *производственной, хозяйственной и иной деятельности* (ПХД) являются как объем выпущенной продукции («экономическая» составляющая), так и уровень риска (или безопасности) – «экологическая» составляющая, отражающая «реакцию» окружающей среды на ПХД. Принимая решения, предприятие стремится максимизировать свою прибыль.

Центр заинтересован в минимизации ожидаемого ущерба, наносимого ПХД предприятия окружающей среде. Возможности центра заключаются в установлении системы штрафов, зависящих от размера ущерба.

На качественном уровне задача центра заключается в выборе таких условий деятельности предприятия (системы штрафов), которые побуждали бы последнее выбирать действия, приводящие к минимальным значениям ущерба.

Величина ущерба окружающей среде, как правило, является недетерминированной величиной, поэтому в настоящей работе рассматриваются механизмы стимулирования снижения уровня ожидаемого ущерба. В качестве вероятностного распределения, описывающего размер ущерба, выбрано распределение Парето. Действия, выбираемые предприятием (например, объем производства на предприятии, затраты на природоохранные мероприятия и т.д.) определяют параметры этого распределения.

Известен так называемый закон Парето, отражающий неравномерность распределения характеристик экономических и социальных явлений и процессов, свойства природных и техногенных катастроф, распределение ущерба от них и т.д. [4, 6, 9]. «Формализацией» закона Парето является распределение Парето случайной величины W, $W \geq W_0 > 0$, характеризуемое двумя параметрами – минимально возможным значением W_0 и показателем степени $\alpha > 0$:

$$(1)\ p(\alpha, W_0, W) = \frac{\alpha}{W_0}\left(\frac{W_0}{W}\right)^{1+\alpha}.$$

Плотности распределения (1) соответствует интегральная функция распределения

$$(2)\ F_\alpha(\alpha, W_0, W) = 1 - \left(\frac{W_0}{W}\right)^{\alpha}.$$

Для распределения Парето существуют только моменты, порядка, меньшего, чем степень α. Например, математическое ожидание случайной величины W с распределением (1) существует при $\alpha > 1$ и равно

$$(3)\ E\,W = \frac{\alpha}{\alpha - 1}\, W_0,$$

где «E» – символ математического ожидания. В рамках предположения о том, что случайная величина распределена по Парето, зная математическое ожидание $E\,W$ и минимальное значение W_0, можно легко вычислить (см. (3)) параметр распределения α:

$$(4)\ \alpha = \frac{EW}{EW - W_0}.$$

2. Описание модели ЭкЭС и постановка задачи

Будем считать, что предприятие выбирает свои действия – объем производства $u \geq 0$, и размер затрат на природоохранные мероприятия $v \geq 0$, которые неизбежно приводят к ущербу $W_0 = W_0(u, v)$. Реализовавшаяся величина ущерба $W \geq W_0$ является случайной величиной, описываемой распределением (1). Центр осуществляет мониторинг за деятельностью предприятия и имеет возможность налагать на последнего штраф $\chi(W)$, зависящий от величины фактического ущерба.

Предположим, что на момент принятия решений участники (центр и предприятие) не знают размера фактического ущерба, а имеют лишь информацию о распределении вероятностей и используют ожидаемую полезность для устранения неопределенности. Таким образом, математическое ожидание целевой функции предприятия имеет вид:

(5) $f(u, V, \chi(\cdot)) = c\,u - z(u) - v - \int \chi(W)\,p(\alpha, W_0(u,v), W)\,dW$

и зависит от выбираемой центром системы штрафов $\chi(\cdot)$ и действий u и v самого предприятия. Принципиально важно, что в рассматриваемой модели ни центр, ни предприятие на момент выбора своих стратегий не знают будущего значения величины ущерба.

Предприятие выберет действие из множества $P(\chi(\cdot))$ действий, доставляющих максимум математическому ожиданию его функции полезности, то есть:

(6) $P(\chi(\cdot)) = \operatorname{Arg} \max\limits_{u, v \geq 0} f(u, v, \chi(\cdot))$.

Пусть выполнена гипотеза благожелательности (при прочих равных предприятие выбирает наиболее выгодные для центра действия [3]). Тогда задача центра заключается в выборе системы штрафов $\chi(\cdot)$, максимизирующей математическое ожидание критерия центра $E_W\,\Phi(u, v, W)$ (его функции полезности, выигрыша и т.д.) на множестве (6):

(7) $\max\limits_{(u,v) \in P(\chi(\cdot))} E_W\,\Phi(u, v, W) \to \max\limits_{\chi(\cdot)}$.

Общего (для произвольных вероятностных распределений) аналитического решения задачи (7) на сегодняшний день не известно (см. достаточные условия оптимальности различных систем стимулирования в [5]), за исключением нескольких частных случаев, в числе которых – рассматриваемый ниже случай распределения Парето [3].

3. Оптимальные функции штрафов

Фиксируем детерминированный уровень ущерба $w_0 \geq 0$. Вычислим действия предприятия, максимизирующие его выигрыш при условии непревышения этого уровня и соответствующий выигрыш:

(8) $S(w_0) = \operatorname{Arg} \max\limits_{\{u \geq 0, v \geq 0 | W_0(u,V) = w_0\}} [c\,u - z(u) - v]$,

(9) $f_0(w_0) = \max\limits_{\{u \geq 0, V \geq 0 | W_0(u,v) = w_0\}} [c\,u - z(u) - v]$.

Задача принятия решений предприятием, фактически, свелась к выбору того уровня ущерба w_0, на который оно будет ориентироваться

(10) $P_0(\chi(\cdot)) = \operatorname{Arg} \max\limits_{w_0 \geq 0} \ [f_0(w_0) - \int\limits_{w_0}^{+\infty} \chi(W)\, p(\alpha, w_0, W) dW\ ].$

Задача выбора оптимальной по тому или иному критерию системы штрафов при условии, что поведение предприятия описывается (10), является хрестоматийной детерминированной задачей стимулирования, для которой в теории управления организационными системами накоплен большой опыт исследования [5]. Рассмотрим ряд типовых классов систем штрафов.

Линейная система штрафов. Рассмотрим линейную функцию штрафов вида

(11) $\chi_L(\mathrm{W}) = \chi_0 + \mu\, W$.

Тогда гарантированный ущерб w_0 и действия, выбираемые предприятием и приводящие к нему (см. (8)), будут зависеть от двух параметров системы штрафов – χ_0 и μ:

(12) $P_{\mathrm{L}}(\chi_0, \mu) = \operatorname{Arg} \max\limits_{w_0 \geq 0} \ [f_0(w_0) - \chi_0 - \dfrac{\alpha\mu}{\alpha - 1}\ w_0].$

Задачу (7) можно записать в виде следующей оптимизационной задачи:

(13) $\max\limits_{w_0 \in P_L(\chi_0, \mu)} \ \max\limits_{(u,v) \in S(w_0)} \ E_W\, \Phi(u, v, W) \to \max\limits_{\chi_0, \mu \geq 0}.$

Рассмотрим пример. Пусть $W_0(u, V) = b_0\, u / V$, $z(u) = u^2 / 2\, r$. Тогда решение задачи (8)-(9) имеет вид:

$$S = \{r\,(c - b_0 / w_0),\ r\, b_0\,(c - b_0 / w_0) / w_0\},$$

(14) $f_0(w_0) = \dfrac{rc^2}{2} + \dfrac{b_0 r}{w_0}\ (\dfrac{b_0}{2w_0} - c).$

Если $\Phi(u, v, W) = -\,W$, то

(15) $E_W\, \Phi(u, v, W) = -\ \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}\ w_0,\ w_0 \geq b_0 / c,$

то есть центр заинтересован в минимизации гарантированного ущерба (последнее неравенство в (15) обеспечивает неотрицательность объемов производства, при которых достигается максимум выражения (14)).

Пусть $\alpha = 2$, $c = 1$, $b_0 = 4$, $r = 6$. Подставляя (14) в (12), можно найти комбинацию параметров (χ_0, μ) функции штрафа, при которых предприятию, максимизирующему целевую функцию

$$3 + \frac{24}{w_0}\ (\frac{2}{w_0} - 1) - \chi_0 - 2\, \mu\, w_0$$

выбором $w_0 \geq 4$, выгодно выбирать минимальный уровень гарантированного ущерба $w_0 = 4$. Вычислим выигрыш предприятия при выборе $w_0 = 4$ (отметим, что это достаточно экзотический случай – предприятие всю выручку от производства тратит на природоохранные мероприятия). Этот выигрыш равен $-\chi_0 - 8\,\mu$. Потребуем, чтобы ожидаемый выигрыш предприятия был неотрицателен. Для этого достаточно взять $\chi_0 = -8\,\mu$. Тогда легко найти минимальное значение μ, равное примерно 0,12, при котором максимум выигрыша предприятия будет достигаться при выборе минимального уровня гарантированного ущерба. Размер штрафа за уровень ущерба $w_0 = 4$ равен примерно - 0,48 (отметим, что штраф отрицателен, то есть центр стимулирует предприятие за стремление минимизировать ожидаемый ущерб).

Компенсаторная система штрафов. Задача синтеза оптимальной компенсаторной системы штрафов заключается в нахождении такой системы штрафов $\chi_K(W)$, математическое ожидание которой с точностью до константы равно выигрышу предприятия (9):

$$(16)\quad \int_{w_0}^{+\infty} \chi_K(W)\, p(\alpha, w_0, W)\, dW \; - f_0(w_0) = \text{Const}.$$

Если условие (16) выполнено для любых w_0, то в силу (10) математическое ожидание выигрыша предприятия не зависит от размера гарантированного ущерба, на который он ориентируется. Поэтому, в силу гипотезы благожелательности, предприятие выберет действия, наиболее предпочтительные с точки зрения центра.

В рамках рассматриваемого примера из (14) и (16) при $\alpha = 2$ получаем:

$$(17)\quad \int_{w_0}^{+\infty} \chi_K(W)\, d\left(\frac{1}{W^2}\right) = -\frac{rc^2}{2(w_0)^2} - \frac{b_0 r}{(w_0)^3}\left(\frac{b_0}{2w_0} - c\right).$$

Решение уравнения (17) имеет вид:

$$(18)\quad \chi_K(W) = \frac{rc^2}{2} + \frac{(b_0)^2 r}{(w_0)^2} - \frac{3cb_0 r}{2w_0}.$$

Для выбранных выше числовых значений параметров получаем:

$$\chi_K(W) = 3 + \frac{96}{(w_0)^2} - \frac{36}{w_0}.$$

На Рис. 1 изображена компенсаторная система штрафов (график выигрыша предприятия (14) приведен пунктирной линией). Видно, что за невысокие величины ущерба (от 4 до 8) центр вынужден доплачивать предприятию (штраф отрицателен, но так как он входит в целевую функцию предприятия со знаком минус, получается, что он в указанном диапазоне играет роль поощрения).

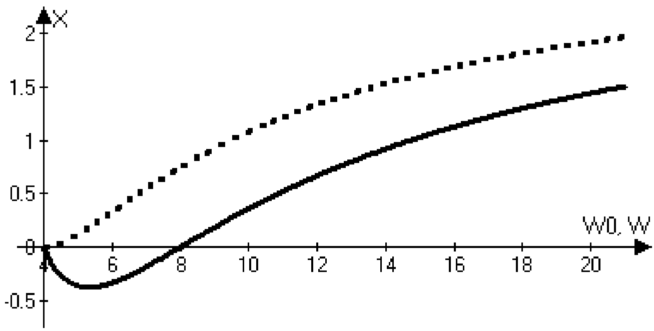

Рис. 1. Компенсаторная система штрафов

Если предприятие выберет минимальное значение гарантированного ущерба, равное 4, то математическое ожидание размера штрафа равно нулю.

Ступенчатая система штрафов. Известно (см. [2, 5]), что и в детерминированном случае, и, зачастую, в условиях вероятностной неопределенности, оптимальна ступенчатая система штрафов. Поэтому исследуем систему штрафов

(19) $\chi_C(W_x, W) = \begin{cases} \chi_0, & W \geq W_x, \\ 0, & W < W_x, \end{cases}$

в которой предприятие штрафуется на сумму χ_0 в случае, если ущерб превышает значение W_x (условно можно рассматривать этот показатель как предельно допустимый ущерб), и не штрафуется вовсе, если фактический ущерб меньше этой величины.

Вычислим математическое ожидание выражения (19):

(20) $E\,\chi_C(W_x, W) = \chi_0 \begin{cases} 1, & w_0 \geq W_x, \\ \left(\dfrac{w_0}{W_x}\right)^{\alpha}, & w_0 < W_x, \end{cases}$

то есть предприятие безусловно штрафуется на максимальную величину, если ориентируется на минимальный ущерб, превышающий предельное установленное центром значение. В случае же, если он ориентируется на минимальный ущерб, не превышающий установленный центром, то штраф оказывается меньше. Дальше задача сводится к выбору двух параметров системы штрафов (20), приводящих к наиболее предпочтительному для центра выбору предприятия:

В рамках рассматриваемого примера из (10), (14) и (20) получаем, что задача, решаемая предприятием, имеет вид:

$$(21)\quad \frac{rc^2}{2} + \frac{b_0 r}{w_0}\left(\frac{b_0}{2w_0} - c\right) - \chi_0 \begin{cases} 1, & w_0 \ge W_x \\ \left(\dfrac{w_0}{W_x}\right)^{\alpha}, & w_0 < W_x \end{cases} \to \max_{w_0 \ge b_0 / c}.$$

Найдем значения параметров функции штрафов (19), при которых предприятию выгодно выбирать минимальный уровень гарантированного ущерба $w_0 = 4$, и при этом (для сравнимости с рассмотренными выше системами штрафов) он будет получать нулевой ожидаемый выигрыш.

Подставляя выбранные выше числовые значения, из последнего условия получаем: $16\, \chi_0 / W_x = 0$, что невозможно. Значит, невозможно ступенчатыми системами штрафов побудить предприятие выбрать данное действие. Содержательно это объясняется тем, что штрафы (20) положительны («тяжелый хвост» распределения Парето приводит к тому, что, ориентируясь даже на минимальный ущерб, при достаточно большом предельно допустимом значении предприятие все равно будет оштрафован на конечную величину), то есть центр не может поощрять предприятие за низкий уровень ожидаемого ущерба.

На Рис. 2 изображен выигрыш предприятия при использовании центром ступенчатой системы штрафов:

1) график выигрыша предприятия (14), то есть в отсутствии и штрафов, приведен пунктирной линией;

2) жирная непрерывная линия соответствует «слабым штрафам» – значениям $\chi_0 = 1$, $W_x = 8$;

3) тонкая штрихпунктирная линия соответствует ужесточению требований (по сравнению со вторым случаем), то есть снижению предельно допустимого ущерба: $\chi_0 = 1$, $W_x = 6$;

4) тонкая непрерывная линия соответствует ужесточению наказания: $\chi_0 = 2$, $W_x = 8$.

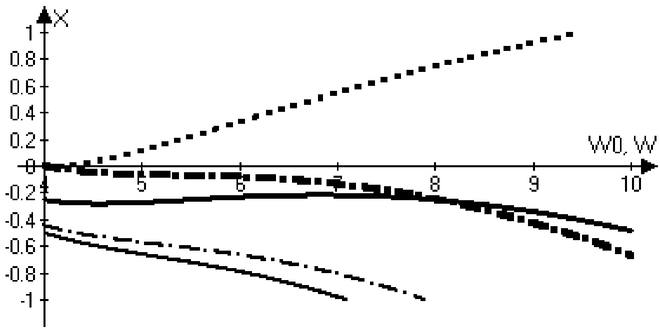

Рис. 2. Выигрыш предприятия при ступенчатой системе штрафов

Видно, что при слабых штрафах (случай 1) предприятие будет ориентироваться на ожидаемый ущерб примерно равный 7, то есть чуть меньше, чем в два раза больший минимально возможного. При ужесточении требований или ужесточению наказания (случаи 3 и 4 соответственно) предприятию выгодно выбирать минимальное значение ожидаемого ущерба, равное 4. Однако в последних двух случаях его выигрыш отрицателен.

Для того чтобы сделать выигрыш предприятия при выборе $w_0 = 4$ равным нулю, в рассматриваемом примере достаточно использовать систему штрафов

(22) $\chi_\varepsilon(W_x, W) = \begin{cases} \chi_0, & W \geq W_x, \\ -\varepsilon, & W < W_x, \end{cases}$

математическое ожидание которой равно

(23) $E\,\chi_\varepsilon(W_x, W) = \begin{cases} \chi_0, & w_0 \geq W_x, \\ -\varepsilon + (\chi_0 + \varepsilon)\left(\dfrac{w_0}{W_x}\right)^{\alpha}, & w_0 < W_x. \end{cases}$

Выберем $\varepsilon = \chi_0 / 3$, тогда выигрыш предприятия (как и ожидаемый штраф!) при выборе $w_0 = 4$ равен нулю при $W_x = 8$. Например[1], при $\chi_0 = 1$ (ср. со случаем «слабых штрафов» выше) предприятию выгодно

[1] *Множество тех значений χ_0, при которых агенту выгодно выбирать минимальный уровень ожидаемого ущерба, в рассматриваемом примере определяется условием отрицательности целевой функции агента при любых $w_0 \geq 4$.*

выбирать минимально возможный уровень ожидаемого ущерба – см. жирную штрихпунктирную линию на Рис. 2.

4. Сравнение различных систем штрафов

Выше были рассмотрены три системы штрафов – линейная, компенсаторная и ступенчатая. Общим их характеристическим свойство является наличие двух режимов – при малом уровне ожидаемого ущерба предприятие поощряется, при большом – наказывается. Это свойство редко наблюдается на практике, так как обычно функции поощрения (стимулирования, мотивации) и наказания (контроля, надзора, обеспечения выполнения нормативны требований) выполняют различные органы. Тем более привлекательным представляется совмещение в одном механизме управления обоих этих черт.

Рассмотренные системы штрафов имеют различную содержательную интерпретацию: в линейном механизме штрафов имеется ставка платы за ущерб, в компенсаторном от предприятия требуется «компенсация» нанесенного им ущерба, в ступенчатой системе штрафов предприятие наказывается за нарушение нормативов (последний случай наиболее близок к используемым на практике мерам административного воздействия на нарушителей экологических нормативов).

С точки зрения предприятия во всех трех случаях он получает при минимальном уровне ожидаемого ущерба одинаковый выигрыш. С точки зрения центра в первом случае он несет бóльшие ожидаемые затраты – см. Табл. 1, в которой представлена сводка результатов настоящего раздела (числовые данные соответствуют рассмотренному примеру).

Табл. 1. Сравнение различных систем штрафов

Система штрафов	**Выражение**	**Выбор предприятия (w_0)**	**Математическое ожидание выигрыша предприятия**	**Математическое ожидание затрат центра**
Линейная	(11)	4	0	0,48
Компенсаторная	(16)	4	0	0
Ступенчатая	(22)	4	0	0

В заключение отметим, что, используя приведенную технику анализа механизмов стимулирования снижения ожидаемого ущерба, можно решать задачи синтеза оптимальных систем штрафов более сложного вида, в том числе – при наличии ограничений и т.д. Кроме того, следует помнить, что рассматривался случай внешней неопределенности, то есть считалось, что внутренняя неопределенность отсутствует – центр полностью информирован о всех существенных параметрах. Учет внутренней неопределенности можно производить по аналогии с тем, как это делалось в [5, 7].

5. Литература

1 Бурков В.Н., Новиков Д.А., Щепкин А.В. Механизмы управления эколого-экономическими системами. – М.: Физматлит, 2008. – 252 с.

2 Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. – М.: Наука, 1981. – 384 с.

3 Воронин А.А., Губко М.В., Мишин С.П., Новиков Д.А. Математические модели организаций. – М.: Ленанд, 2008. – 360 с.

4 Кох Р. Принцип 80/20. – Минск: Попурри, 2004. – 352 с.

5 Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах (математические модели). – М.: ИПУ РАН, 1998. – 216 с.

6 Levy M. Market efficiency, the Pareto wealth distribution and the Levy distribution of stock returns. – Jerusalem: Hebrew University, 2001. – 52 p.

7 Novikov D.A. Management of active systems: stability or efficiency // Systems Science. 2001. Vol. 26. № 2. P. 85 – 93.

8 Pareto V. Manuele d'Economia Politica. 1906.

9 Zipf G. Human behavior and the principle of least effort. – Cambridge: Addison-Westley, 1949. – 573 p.