УДК 519.714.3 *Автоматика и Телемеханика. 2000. №6. С. 115 – 125.*

Д.А. Новиков, д-р техн. наук,
С.Н. Петраков, К.А. Федченко
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ДЕЦЕНТРАЛИЗАЦИЯ МЕХАНИЗМОВ ПЛАНИРОВАНИЯ В АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ

Формулируется задача децентрализации механизмов планирования в активных системах, заключающаяся в поиске таких классов механизмов, для которых наличие агрегирования информации при переходе от двухуровневых к многоуровневым структурам системы не приводит к снижению эффективности управления. Приводится конструктивное доказательство произвольной децентрализуемости анонимных механизмов распределения ресурса, механизмов экспертизы и механизмов внутренних цен.

1. Введение

В двухуровневой активной системе (АС), состоящей из одного управляющего органа (центра) на верхнем уровне иерархии и N управляемых субъектов - активных элементов (АЭ) – на нижнем уровне, механизмом планирования называется отображение множества допустимых сообщений, передаваемых активными элементами центру, во множество допустимых планов АЭ. Механизмы планирования (в том числе такие их свойства как эффективность, манипулируемость, т.е. достоверность сообщаемой элементами информации и др.) исследуются в теории активных систем [1–4], теории коллективного выбора [2–5] и др. и включают в себя механизмы распределения ресурса и затрат [4–7], экспертизы [7], внутрифирменного управления [8] и др.

В большинстве работ по теоретико-игровым моделям механизмов планирования рассматриваются именно двухуровневые АС. В то же время, на практике широко распространены многоуровневые (трех- и более уровневые) иерархические структуры управления [4, 9]. Следовательно, возникает задача исследования механизмов планирования в многоуровневых системах. В настоящей работе используется следующий подход. Введение в двухуровневой АС при фиксированном наборе АЭ дополнительных уровней управления называется ее децентрализацией. При децентрализации системы неизбежно (в силу объективно ограниченных возможностей ее участников по переработке информации) возникает необходимость агрегирования информации по мере роста уровня иерархии. Следовательно, возникает задача агрегирования: при каких децентрализациях механизма планирования наличие агрегирования не ухудшает его свойств, в том числе, в первую очередь, не снижает эффективности управления. На сегодняшний день общего решения задачи агрегирования, формальная постановка которой приводится во втором разделе, к сожалению, не существует. Поэтому ниже приводятся ее решения, соответствующие переходу от двухуровневой к трехуровневой АС, для широко распространенных на практике частных случаев: в разделе 3 рассматривается задача децентрализации анонимных механизмов распределения ресурса, в разделе 4 – механизмов экспертизы, в разделе 5 – механизмов внутренних цен. Заключение содержит перечисление основных результатов и обсуждение перспективных направлений дальнейших исследований.

2. Постановка задачи планирования

Рассмотрим трехуровневую АС, состоящую из одного управляющего органа (центра) на верхнем уровне иерархии, n промежуточных центров $\{Ц_j\}$ на втором уровне, $j=\overline{1,n}$, и N управляемых объектов – активных элементов $\{АЭ_{ij}\}$, $i=\overline{1,n_j}$, $j=\overline{1,n}$, $\sum_{j=1}^{n} n_j = N$, на нижнем уровне. Будем считать, что каждый АЭ подчинен одному и только одному центру промежуточного уровня, т.е. структура подчиненности в рассматриваемой АС имеет вид дерева. Совокупность центра $Ц_j$ промежуточного уровня и n_j подчиненных ему АЭ будем называть j-й подсистемой (отметим, что всюду далее в трехуровневых АС индекс i обозначает номер АЭ в подсистеме, индекс j – номер подсистемы). Совокупность центра и промежуточных центров будем называть метасистемой.

Обозначим: s_{ij} Î W_{ij} - сообщение i-го АЭ j-й подсистемы соответствующему центру промежуточного уровня, $i = \overline{1,n_j}$, $j = \overline{1,n}$; $s_j = (s_{1j}, s_{2j}, \dots, s_{n_j j})$ Î $W_j = \prod_{i=1}^{n_j} \Omega_{ij}$ – вектор сообщений активных элементов j-ой подсистемы; $s=(s_1,s_2,\dots,s_n)$ Î $W' = \prod_{i,j} W_{ij}$ – вектор сообщений всех АЭ системы; $S^j = Q_j(s_j)$ Î W^j – сообщение $Ц_j$ центру, зависящее от полученных первым сообщений АЭ соответствующей подсистемы, Q_j: W_j ® W^j – процедура агрегирования информации; $S = (S^1, S^2, \dots, S^n)$ - вектор агрегированных сообщений подсистем; S Î $W = \prod_{j=1}^{n} W^j$.

План X_j, назначаемый центром j-ой подсистеме, определяется процедурой планирования $P(S)$, P : W ® $Â^n$, т.е. $X_j = P_j(S)$, $j=\overline{1,n}$. План x_{ij}, назначаемый j-м центром $АЭ_{ij}$, определяется в соответствии с процедурой планирования $p_j(s_j,X_j)$ вектором s_j сообщений АЭ этой подсистемы и ее планом X_j, т.е. $x_{ij} = p_{ij}(s_j,X_j)$, $i=\overline{1,n_j}$, $j=\overline{1,n}$.

Функция предпочтения АЭ: $j_{ij}(x_{ij},r_{ij})$: $Â^2$ ® $Â^1$ зависит от назначенного центром плана x_{ij} и некоторого параметра r_{ij}. Относительно функций предпочтения, отражающих интересы АЭ, предположим, что они являются однопиковыми, т.е. непрерывны, строго монотонно возрастают до точки пика (идеальной точки) r_{ij} и строго монотонно убывают после точки пика [10].

Примем следующую последовательность функционирования: центр сообщает подсистемам процедуру $P(\cdot)$, затем промежуточные центры сообщают АЭ процедуры $p(\times,\times)$, после чего АЭ одновременно и независимо сообщают информацию промежуточным центрам, а те, в свою очередь, сообщают центру агрегированную информацию.

Предположим, что участники трехуровневой АС обладают следующей информацией: функции предпочтения АЭ (с точностью до параметров) и допустимые множества известны всем участникам АС; АЭ известно точное значение параметра его собственной функции предпочтения, а также все процедуры планирования; промежуточным центрам известна процедура планирования, выбранная центром, и становятся известны сообщения АЭ; центру верхнего уровня становятся известны агрегированные сообщения и неизвестны сообщения АЭ в подсистемах.

Будем считать, что АЭ ведут себя некооперативно, выбирая доминантные или равновесные по Нэшу стратегии [3]. Пусть s^* – вектор равновесных стратегий. Очевидно, что любое фиксированное равновесное сообщение $s^* = s^*(r)$ зависит от r – вектора точек пика.

Естественно, в общем случае все участники системы (в том числе и управляющие органы всех уровней) обладают свойством активности, т.е. имеют собственные интересы и преследуют собственные цели. Для механизмов планирования, при изучении которых основной акцент традиционно делается на их манипулируемости (достоверности сообщаемой информации), это означает, что и АЭ, и центры промежуточных уровней могут искажать информацию. В настоящей работе мы ограничимся частным случаем "пассивных" центров промежуточного уровня, отнеся анализ общего случая к перспективным направлениям будущих исследований. Следовательно, в рассматриваемой модели считается, что центры промежуточных уровней выполняют роль передатчиков информации. При этом трехуровневая АС может рассматриваться как двухуровневая АС, в которой центр получает агрегированную информацию от групп АЭ (подсистем).

Таким образом, выше описан механизм планирования, т.е. модель трехуровневой активной системы с сообщением информации. Если бы требовалось решить задачу синтеза оптимальной процедуры планирования, то следовало ввести целевые функции центров и промежуточных центров, определить эффективность как значение целевой функции на множестве решений игры АЭ (стратегией АЭ при этом в общем случае является выбор как некоторых действий, так и сообщений [3]), а затем максимизировать построенный критерий выбором процедуры планирования. В настоящей работе мы не будем решать задачу синтеза в явном виде, ограничившись задачей агрегирования, т.е. сравнением механизмов планирования в двухуровневой и трехуровневой АС.

Поясним последнее положение более подробно. Пусть дана трехуровневая АС с некоторым механизмом планирования. Соответствующей ей двухуровневой системой назовем АС, состоящую из центра верхнего уровня и тех же АЭ (и наоборот). В соответствующей двухуровневой АС стратегией каждого из АЭ является сообщение центру некоторой информации $s_{ij}\,\hat{I}\,W_{ij}$, $i = \overline{1, n_j}$, $j = \overline{1, n}$. Центр на основании сообщенной ему информации назначает АЭ планы $x_{ij} = g_{ij}(s)$, где g_{ij} – процедура (механизм) планирования, $s \hat{I}\ W' = \prod_{i,j} W_{ij}$ – вектор сообщений всех АЭ.

Соответствующим механизму $g : W' ® \hat{A}^N$ прямым механизмом планирования $h(\times): \hat{A}^{\ N} ® \hat{A}^{\ N}$ называется механизм $h(r)= g(s^*(r))$, ставящий в соответствие вектору точек пика АЭ вектор планов. Если в соответствующем прямом механизме сообщение достоверной информации является равновесной стратегией, то такой механизм называется эквивалентным прямым (неманипулируемым) механизмом. Определим для данного механизма планирования в трехуровневой АС эквивалентный (непрямой) механизм планирования в соответствующей двухуровневой АС:

(1) $g_{ij}(s) = p_{ij}(s_j,X_j) = p_{ij}(s_j,P_j(S)) = p_{ij}(s_j,\ P_j\ (Q_1(s_1),\ Q_2(s_2),\ \ldots,\ Q_n(s_n)))$.

Таким образом, для любого механизма планирования в трехуровневой АС существует двухуровневая АС с тем же набором АЭ и механизм планирования в ней, которые приводят к тому же назначению планов и, следовательно, к тем же равновесным сообщениям. Значит, можно утверждать, что для любого механизма планирования в трехуровневой АС существует эквивалентный (в том числе не меньшей эффективности) непрямой механизм планирования в соответствующей двухуровневой АС.

Рассмотрим теперь обратную задачу. Пусть имеется двухуровневая АС с некоторым механизмом планирования. Вопрос заключается в том, существует ли трехуровневая АС (с тем же составом АЭ; такую АС выше предложено называть соответствующей) и механизм планирования в ней такие, чтобы равновесные сообщения и назначаемые планы в этих АС были одинаковы. Эту задачу будем в дальнейшем называть задачей децентрализации механизмов планирования.

Если на класс возможных трехуровневых АС не наложено никаких ограничений, то ответ на поставленный вопрос, очевидно, положителен: взяв $n=N$ и выбрав в качестве функций агрегирования тождественное преобразование (такую трехуровневую АС назовем тривиальной), получим механизм, удовлетворяющий (1). Содержательно, в этом случае число промежуточных центров равно числу АЭ и агрегирование отсутствует – вся информация без "искажений" передается от АЭ центру.

Сложнее дело обстоит в случае, когда класс допустимых трехуровневых АС ограничен, например, может быть фиксирован состав подсистем и процедуры планирования для подсистем, или могут быть фиксированы функции агрегирования и т.д. Понятно, что в общем случае не для всякой двухуровневой АС (не для всяких ограничений) можно сконструировать эквивалентную в смысле (1) трехуровневую АС. Приведем формальные определения.

Пусть имеется двухуровневая АС с механизмом планирования $g_{ij}(s)$. Обозначим: $X_p = \{p_{ij}\}$ – класс процедур планирования в подсистемах, $X_P = \{P_j\}$ – класс процедур планирования в метасистеме, $X_Q = \{Q_j\}$ – класс процедур агрегирования, $X = \{X_p,\ X_P,\ X_Q\}$ – класс допустимых механизмов планирования в трехуровневой АС (ниже в основном исследуется частный случай: $g_{ij}(s)$ $\hat{I}$ $X_P = X_p$, т.е. случай, когда механизмы планирования в двухуровневой АС, метасистеме и всех подсистемах принадлежат одному классу).

Будем говорить, что механизм планирования $g_{ij}(s)$ в двухуровневой АС допускает идеальное агрегирование в классе *X*, если для *некоторой* нетривиальной соответствующей трехуровневой АС существует механизм планирования $\tilde{p}_{ij}(s)$, определяемый:

(2) $\tilde{p}_{ij}(s) = p_{ij}(s_j, P_j(Q_1(s_1), Q_2(s_2), \ldots, Q_n(s_n)))$,

который принадлежит *X* и удовлетворяет:

(3) $''\ s\ \hat{I}\ W',\ \tilde{p}_{ij}(s) = g_{ij}(s)$.

Будем говорить, что механизм планирования $g_{ij}(s)$ в двухуровневой АС допускает произвольную децентрализацию в классе *X*, если для *любой* соответствующей нетривиальной трехуровневой АС существует механизм $\tilde{p}_{ij}(s)$, определяемый (2), который принадлежит *X* и удовлетворяет (3).

Содержательно, при идеальном агрегировании существует хотя бы одна соответствующая нетривиальная трехуровневая АС (хотя бы одно разбиение АЭ на подсистемы) с эквивалентным механизмом планирования. Если же допустима произвольная децентрализация, то АЭ могут быть распределены по подсистемам произвольным образом и для каждого из разбиений найдется эквивалентный механизм планирования из заданного класса.

Очевидно, что любой механизм, допускающий при некоторых ограничениях *X* произвольную децентрализацию, допускает при тех же ограничениях и идеальное агрегирование (но не наоборот). Более того, можно утверждать, что, если механизм планирования в двухуровневой АС обладает некоторой эффективностью, и/или неманипулируем и допускает идеальное агрегирование, то эквивалентный механизм планирования в соответствующей трехуровневой АС обладает в точности той же эффективностью и/или неманипулируем (оба свойства непосредственно следуют из (3) и определений эффективности и неманипулируемости [2,4]).

Таким образом, задача децентрализации заключается в определении классов механизмов планирования, допускающих при заданных ограничениях произвольную децентрализацию и/или идеальное агрегирование. К сожалению, общих необходимых и/или достаточных условий идеального агрегирования и произвольной децентрализации для механизмов планирования на сегодняшний день не существует – этот класс задач, с одной стороны, чрезвычайно трудоемок (даже такого сильного требования, как, например, существование равновесия в доминантных стратегиях [2,3], оказывается недостаточно для идеального агрегирования), а с другой стороны, практически не исследован. Поэтому первоначально целесообразным представляется изучение некоторого множества конкретных механизмов планирования, результаты исследования которых, быть может, облегчат в будущем решение общей задачи [4]. Последующие разделы настоящей работы содержат конструктивные доказательства произвольной децентрализуемости ряда широко распространенных на практике механизмов планирования.

3. Децентрализация анонимных механизмов распределения ресурса

Напомним постановку задачи распределения ресурса в двухуровневой АС [1,7]. Пусть в распоряжении центра имеется ресурс в количестве R. Стандартная формулировка задачи распределения ресурса подразумевает нахождение такого его распределения между АЭ, которое максимизировало бы некоторый критерий эффективности, например, суммарную эффективность использования ресурса активными элементами. Если эффективность использования ресурса конкретным АЭ не известна центру, то он вынужден использовать сообщения АЭ, например, о требуемых количествах ресурса. Понятно, что если имеется дефицит ресурса, то возникает проблема манипулируемости – АЭ могут сообщать центру недостоверную информацию, стремясь получить оптимальное для себя количество ресурса. Перейдем к описанию формальной модели.

Пусть АЭ сообщают центру информацию s_{ij} Î $W_{ij} = [0;D_{ij}]$ Í $\hat{A}^1$ – заявки на ресурс, $i = \overline{1,n_j}$, $j = \overline{1,n}$. Центр на основании сообщенной ему информации назначает АЭ планы (выделяет ресурс) $x_{ij} = g_{ij}(s,R)$, где g_{ij} – процедура распределения ресурса (планирования). Содержательно, точки пика r_{ij} Î $\hat{A}^1$ (точки максимума целевых функций АЭ) соответствуют оптимальному для них количеству ресурса. В дальнейшем мы будем предполагать выполненной гипотезу дефицитности: $\sum_{i,j} r_{ij} > R$. Относительно процедуры распределения ресурса предположим, что $g_{ij}(s,R)$ непрерывны, строго монотонно возрастают по s_{ij} и R и строго монотонно убывают по s_{kl}, k ¹ i, l ¹ j; весь ресурс распределяется полностью: $\sum_{i,j} x_{ij} = R$; ресурс делим в произвольных пропорциях, причем любой АЭ может отказаться от ресурса вообще: " s_{-ij} Î $W_{-ij} = \prod_{k\neq i, j\neq l} W_{kl}$ $g_{ij}(0,s_{-ij},R) = 0$, где s_{-ij} - обстановка для ij-го АЭ.

В [6,7] доказано, что для любого механизма из рассматриваемого класса механизмов распределения ресурса существует эквивалентный прямой механизм, т.е. неманипулируемый механизм, в котором все АЭ сообщают оценки точек пика и получают в равновесии то же количество ресурса, что и в исходном механизме.

Перейдем к рассмотрению механизмов распределения ресурса в трехуровневых АС. Пусть АЭ сообщают соответствующим центрам промежуточного уровня свои заявки s_{ij} Î $W_{ij} = [0,D_{ij}]$ Í $\hat{A}^1$, затем каждый из промежуточных центров сообщает центру верхнего уровня сумму поступивших к нему заявок $S^j = Q_j(s_j) = \sum_{i=1}^{n_j} s_{ij}$, после чего происходит распределение ресурса R между подсистемами: $X_j = P_j(S,R)$, и, наконец, ресурс распределяется между АЭ внутри каждой из подсистем: $x_{ij} = p_{ij}(s_j, X_j)$. Относительно $(n+1)$ процедуры распределения ресурса $\{P(\cdot), p_{\cdot j}\}$ будем считать, что они удовлетворяют тем же предположениям, что и описанные выше механизмы распределения ресурса в двухуровневых АС.

Таким образом, характерной особенностью механизмов распределения ресурса в многоуровневых АС как классе механизмов планирования является то, что агрегированием информации в подсистемах является суммирование заявок АЭ.

Легко показать, что например, механизмы распределения ресурса, основывающиеся на принципе обратных приоритетов [6,7], не допускают произвольной децентрализации. В то же время, обширным классом механизмов распределения ресурса, допускающих произвольную децентрализацию, являются анонимные механизмы. Напомним, что анонимным механизмом называется механизм, симметричный относительно перестановок АЭ. Для механизмов распределения ресурса это означает, что в анонимном механизме множества возможных сообщений АЭ одинаковы: $W_{ij} = [0; D]$, а процедура планирования симметрична по заявкам АЭ. Интуитивно понятно, что так как в анонимных механизмах АЭ "равноправны", то, скорее всего, их можно группировать (по подсистемам в процессе децентрализации) произвольным образом. Сформулируем корректно это качественное предположение, приведя алгоритм децентрализации любой анонимной процедуры планирования.

Теорема 1. Любой анонимный механизм распределения ресурса допускает произвольную децентрализацию.

Для того, чтобы доказать утверждение теоремы, докажем ряд простых лемм.

Лемма 1. Любой анонимный механизм распределения ресурса в двухуровневой АС эквивалентен механизму пропорционального распределения:

(4) $x_{ij}(s) = \dfrac{s_{ij}}{\sum\limits_{i,j} s_{ij}} R.$

Справедливость леммы 1 следует из того факта, что все анонимные механизмы эквивалентны (в [6,11] доказано, что любой анонимный механизм эквивалентен механизму последовательного распределения ресурса [11]), а механизм пропорционального распределения (4) является анонимным.

Лемма 2. Для любого механизма пропорционального распределения ресурса в трехуровневой АС существует эквивалентный механизм пропорционального распределения в двухуровневой АС, и наоборот.

Справедливость утверждения леммы 2 следует из следующей цепочки равенств: если $X_j(S) = \dfrac{S_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} S_j} R$, где $S_j = \sum\limits_{i} s_{ij}$, то

$$(5)\ x_{ij}(s) = \frac{s_{ij}}{\sum_{i=1}^{n_j} s_{ij}}\ X_j(S) = \frac{s_{ij}}{\sum_{i=1}^{n_j} s_{ij}}\ \frac{S_j}{\sum_{j=1}^{n} S_j}\ R = \frac{s_{ij}}{\sum_{i,j} s_{ij}}\ R.$$

Отметим, что равенства типа (5) имеют место в АС с любым числом уровней иерархии и любым разбиением АЭ на подсистемы.

Пусть имеется некоторый анонимный механизм распределения ресурса в двухуровневой АС. По лемме 1 он эквивалентен механизму пропорционального распределения (4), для которого по лемме 2 можно построить АС с любым числом уровней иерархии и эквивалентным в силу (5) пропорциональным механизмом распределения ресурса. В обратную сторону, для любого анонимного механизма в многоуровневой АС можно построить эквивалентный анонимный механизм в двухуровневой АС. Теорема 1 доказана.

В то же время, следует признать, что, несмотря на то, что класс анонимных механизмов достаточно широк, задача децентрализации для произвольных механизмов распределения ресурса требует дальнейших исследований. Рассматриваемые в следующих разделах классы механизмов планирования свидетельствуют, что произвольную децентрализацию допускают не только анонимные механизмы.

4. Децентрализация механизмов экспертизы

Под механизмом экспертизы в двухуровневой АС понимается следующая модель [7]. Имеется N АЭ – экспертов, каждый из которых имеет собственные представления r_{ij} Î [d; D] Í Â^1 (идеальные точки, точки пика функций предпочтения АЭ) об оцениваемой скалярной величине и сообщает центру информацию s_{ij} Î [d; D] о своих представлениях. Итоговое мнение (коллективное решение – результат экспертизы) x Î [d; D] определяется в соответствии с процедурой планирования $p(s)$, т.е. есть $x = p(s)$. Относительно процедуры планирования (принятия коллективного решения) будем предполагать, что она непрерывна, строго монотонно возрастает по всем переменным и удовлетворяет условию единогласия: " t Î [d; D] $p(t, t, ..., t) = t$. Без потери общности можно положить $d = 0$, $D = 1$. Если предположить, что каждый из экспертов заинтересован в том, чтобы результат экспертизы был максимально близок к его истинному мнению, то в общем случае он может сообщать недостоверную информацию, стремясь повлиять на результат в требуемую с его точки зрения сторону. Следовательно, возникает проблема манипулируемости механизма экспертизы.

В [7] доказано, что для любого механизма экспертизы, удовлетворяющего введенным выше предположениям, существует эквивалентный прямой (неманипулируемый) механизм, причем итоговое мнение в равновесии определяется совокупностью истинных мнений экспертов $r = \{r_{ij}\}$ и числами $w(p) = \{w_i(p)\}_{i=0}^{N}$, определяемыми следующим образом: если собственные истинные представления всех экспертов различны и упорядочены в порядке возрастания, то

$$(6)\ w_k(p) = p\,(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{N-k}),\ k = \overline{0, N}.$$

При этом равновесное итоговое мнение (коллективное решение) x^* определяется [7]:

$$(7)\ x^*(r, w(p)) = \max_{k=1,N} \min\,(w_{k-1}, r_k).$$

Понятно, что последовательность $w(p)$ зависит от упорядочения идеальных точек экспертов. В общем случае существует 2^N разбиений вида (6), однако, так как (7) является соответствующим механизму π прямым механизмом, все дальнейшие рассуждения мы будем проводить для некоторого фиксированного упорядочения.

Определим линейный механизм:

$$(8)\ p_L(s) = \sum_{k=1}^{N} a_k s_k,$$

где $a_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{N} a_k = 1$. Последовательность $w(p)$ для линейного механизма имеет вид:

$$(9)\ w_k(p_L) = 1 - \sum_{i=1}^{k} a_i,\ k = \overline{1, N},\ w_0(p_L) = 1.$$

Рассмотрим механизм экспертизы в трехуровневой активной системе, который определяется $(n+1)$ двухуровневыми механизмами: $P(S)$ и $\{p_j(s_j)\}$, причем $S_j = p_j(s_j)$, т.е. в качестве функций агрегирования в многоуровневых механизмах экспертизы выступают процедуры принятия коллективных решений в подсистемах.

Теорема 2. Любой механизм экспертизы в многоуровневой АС допускает произвольную децентрализацию.

Для того, чтобы доказать утверждение теоремы, докажем справедливость ряда простых лемм для любого фиксированного упорядочения идеальных точек экспертов.

Лемма 3. Для любого прямого механизма экспертизы в двухуровневой АС существует эквивалентный линейный механизм экспертизы.

Пусть имеется некоторый механизм экспертизы $p(\cdot)$ в двухуровневой АС. Вычислим для него в соответствии с (6) последовательность $w(p)$, соответствующую имеющемуся упорядочению идеальных точек. По данной последовательности $w(p)$ вычислим N чисел $\{a_k\}$:

(10) $a_k = w_{k-1} - w_k,\ k = \overline{1, N}$,

которые однозначно определяют некоторый линейный механизм.

У исходного механизма экспертизы и у построенного линейного механизма в силу (10) одна и та же последовательность $\{w_k\}$. Значит, из (7) следует, что для любых идеальных точек АЭ $\{r_{ij}\}$ в обоих механизмах коллективные решения одинаковы.

Лемма 4. а) Любой линейный механизм (8), являющийся механизмом экспертизы, удовлетворяет $a_k > 0$, $k = \overline{1, N}$; б) для любого механизма экспертизы все элементы последовательности $w(p)$, определяемой (6), различны.

Справедливость утверждения леммы 4 следует из того, что согласно введенным выше предположениям процедура планирования в механизме экспертизы должна быть непрерывна и строго монотонна по всем переменным.

Лемма 5. Линейный механизм экспертизы допускает произвольную децентрализацию.

Пусть имеется линейный механизм экспертизы в трехуровневой АС. Тогда: $X_j = \sum_{i=1}^{n_j} a_{ij} s_{ij}$. Коллективное решение $x = \sum_{j=1}^{n} a_j X_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} a_j a_{ij} s_{ij}$, т.е.:

(11) $x = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} b_{ij} s_{ij}$,

где $b_{ij} = a_j a_{ij}$.

Выражение (11) определяет эквивалентный линейный механизм в двухуровневой АС. Пусть теперь имеется линейный механизм экспертизы в двухуровневой АС, задаваемый числами $\{b_{ij}\}$. Разобьем экспертов на группы таким образом, чтобы в каждой подсистеме оказался хотя бы один эксперт, мнение которого учитывается с ненулевым весом, т.е. разбиение на подсистемы должно удовлетворять: $\forall\ j = \overline{1, n}\ \ \sum_{i=1}^{n_j} b_{ij} > 0$. Такое разбиение в силу леммы 4 и (11) всегда возможно (более того, введенному условию удовлетворяет любое разбиение).

Вычислим

(12) $a_j = \sum_{i=1}^{n_j} b_{ij}$, $a_{ij} = b_{ij} / a_j$.

Выражение (12) определяет линейный механизм экспертизы в трехуровневой АС, эквивалентный исходному линейному механизму.

Объединяя результаты лемм 3–5, получаем результат теоремы 2. Действительно, для любого механизма экспертизы в двухуровневой АС существует эквивалентный линейный механизм экспертизы, для которого, в свою очередь, существует эквивалентный линейный механизм экспертизы в трехуровневой АС.

Если при определении механизма экспертизы отказаться от требований непрерывности и строгой монотонности процедуры планирования, то результат теоремы 2 останется в силе при условии, что $'' j = \overline{1,n}\ a_j > 0$ (при этом результат леммы 4 не требуется).

5. Децентрализация механизмов внутренних цен

Классическим примером АС, в которой возможно идеальное агрегирование, ставшей, в частности поэтому, чрезвычайно популярной в экономико-математическом моделировании, является АС, в которой АЭ имеют функции затрат типа Кобба–Дугласа. В настоящем разделе приводится краткое описание механизмов внутренних цен (механизмов открытого управления с внутренними ценами) [1,4,8] сначала для двухуровневой АС, затем результаты обобщаются на случай трехуровневых систем.

Пусть в двухуровневой АС функция затрат ij-го АЭ: $c_{ij}(y_{ij},r_{ij}) = \frac{1}{a}\ y_{ij}{}^{a} r_{ij}{}^{1-a}$, где y_{ij} Î A_{ij} Í $Â^1$ - действие АЭ, a ³ 1, $r_{ij} > 0$. Предположим, что задача центра заключается в побуждении коллектива АЭ выбрать набор действий, сумма которых равна заданной величине R. Пусть центр устанавливает цену l, тогда целевая функция ij-го АЭ равна разности между доходом $l y_{ij}$ и затратами:

(13) $f_{ij}(y_{ij},r_{ij}) = l y_{ij} - c_{ij}(y_{ij},r_{ij})$.

Решая задачу минимизации суммарных затрат активных элементов выбором $(\{x_{ij}\},\ l)$ при условии $x_{ij} = \arg\max\limits_{y_{ij} \in A_{ij}} f_{ij}(y_{ij},r_{ij})$ и ограничении $\sum\limits_{i,j} x_{ij} = R$, получаем:

$$x_{ij}{}^{*}(R,r) = \frac{r_{ij}}{W} R,\quad l^{*}(R,r) = (R / W)^{a-1},\ \text{где } W = \sum_{i,j} r_{ij}.$$

Рассматриваемая формальная модель имеет множество содержательных интерпретаций. В том числе: распределение объемов работ в коллективе (l – ставка оплаты) [10], распределение ресурса с ценой за ресурс l [7], распределение заказов в объединении (l – внутрифирменная цена) [8] и др.

Выше оптимальное решение было получено в предположении, что центру известны коэффициенты $\{r_{ij}\}$ функций затрат АЭ. Если эти коэффициенты ему неизвестны и сообщаются элементами, то возникает задача манипулируемости используемого механизма планирования.

Уникальностью рассматриваемой модели является то, что для нее существует эквивалентный прямой механизм, т.е. механизм открытого управления (неманипулируемый), в котором при гипотезе слабого влияния ((ГСВ) заключается в том, что влияние каждого АЭ на общее управление – цену $l(R,s)$ – мало) сообщение достоверной информации является доминантной стратегией каждого активного элемента [1]. При этом механизм внутренних цен, т.е. управляющие параметры $(\{x_{ij}^*\},\ l^*)$, определяется из решения следующей задачи:

$$(14)\ \sum_{i,j} x_{ij}(s,l) = R,$$

$$(15)\ x_{ij}(s,l) = \arg\max_{y_{ij}\in A_{ij}} \{l(s)\, y_{ij} - c_{ij}(y_{ij},s_{ij})\}.$$

Содержательно, центр подставляет в целевые функции АЭ сообщенные ими оценки (принимая их за истинные) и назначает АЭ наиболее выгодные для них при этих оценках планы (см. условие (15)). Параметр l выбирается таким образом, чтобы планы $x_{ij}(s,l)$ удовлетворяли балансовому ограничению (14).

Решение задачи (14), (15) (механизм внутренних цен) имеет вид

$$(16)\ x_{ij}^*(R,s) = \frac{s_{ij}}{V}R,\ \ l^*(R,s) = (R\,/\,V)^{a-1},$$

где $V = \sum_{i,j} s_{ij}$, s – вектор сообщений АЭ.

Если выполнена ГСВ, то, подставляя (16) в (13), находим, что при любых сообщениях остальных АЭ максимум целевой функции ij-го АЭ по его сообщению достигается при $s_{ij} = r_{ij}$, т.е. при ГСВ сообщение достоверной информации является доминантной стратегией каждого АЭ [1,8]. Отметим, что в ряде частных случаев выполнения ГСВ не требуется. Так, например, в механизмах внутрифирменного управления, если в целевой функции подразделения ее прибыль нормируется на сумму прибылей всех подразделений, то цена, входящая и в числитель, и в знаменатель, сокращается [8]. Другим примером "борьбы" с требованием слабого влияния является использование обобщенных оценок [1] и др.

Механизм внутренних цен (16) обладает рядом привлекательных свойств. Во-первых, он является неманипулируемым механизмом (механизмом открытого управления), имеющим ту же эффективность, что и оптимальный механизм в условиях полной информированности. Во-вторых, он минимизирует суммарные затраты АЭ на выполнение общего планового задания. И, наконец, в-третьих, он допускает произвольную децентрализацию. Докажем последнее утверждение конструктивно, указав процедуры планирования и агрегирования в соответствующей трехуровневой АС.

Предположим сначала, что имеет место случай полной информированности. Обозначим цены в метасистеме и произвольным образом выделенных подсистемах соответственно:

$$(17)\ l = (R\,/\,W)^{a-1},\quad l_j = (X_j\,/\,W_j)^{a-1},$$

где $W = \sum_{i,j} r_{ij}$, $W_j = \sum_{i} r_{ij}$, X_j – плановое задание j-й подсистемы. Пусть планы подсистемам и внутри подсистем назначаются в соответствии со следующей процедурой:

(18) $X_j = \dfrac{W_j}{W} R, \quad x_{ij} = \dfrac{r_{ij}}{W_j} X_j.$

Из (17), (18) следует, во-первых, что цены в подсистемах и в метасистеме одинаковы: $'' j = \overline{1,n} \quad l_j = l$, а, во-вторых, что план каждого АЭ совпадает с планом, назначаемым ему в соответствующей двухуровневой АС, т.е. $x_{ij} = \dfrac{r_{ij}}{W}$.

Таким образом, каждая подсистема может рассматриваться как один элемент, действием которого является сумма действий входящих в нее АЭ, имеющий функцию затрат типа Кобба–Дугласа с параметром, равным сумме параметров соответствующих АЭ:

(19) $Y_j = \sum_{i} y_{ij}$, $c_j(Y_j) = \frac{1}{a} Y_j^{a} W_j^{1-a}$.

Следовательно, центр промежуточного уровня имеет целевую функцию: $F_j(Y_j,W_j) = l\ Y_j - \frac{1}{a} Y_j^{a} W_j^{1-a}$, а целевая функция центра верхнего уровня равна: $F(Y,W) = l\,Y - \frac{1}{a} Y^{a} W^{1-a}$, где $Y = \sum_{i,j} y_{ij} = \sum_{j} Y_j$, $W = \sum_{i,j} r_{ij} = \sum_{j} W_j$.

Анализ приведенных выражений свидетельствует, что механизм внутренних цен допускает идеальное агрегирование в виде (17)–(19).

Более того, во-первых, так как механизмы и целевые функции в двухуровневой и трехуровневой АС совпадают, то в случае неполной информированности для построенного механизма планирования в трехуровневой АС существует эквивалентный неманипулируемый механизм (механизм открытого управления). Во-вторых, так как при переходе от двухуровневой АС к соответствующей трехуровневой не оговаривалось разбиение АЭ на подсистемы, то рассматриваемый механизм допускает не только идеальное агрегирование, но и произвольную децентрализацию. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3. Если АЭ имеют функции затрат типа Кобба–Дугласа, то механизм внутренних цен допускает произвольную децентрализацию.

Результат теоремы 3 может быть усилен, т.е. обобщен на случай, когда функции затрат активных элементов имеют вид: $c_{ij}(y_{ij}, r_{ij}) = r_{ij}\ j\ (\dfrac{y_{ij}}{r_{ij}})$, где $j(\cdot)$ – гладкая монотонно возрастающая выпуклая функция (функции Кобба–Дугласа соответствует: $j(t) = \frac{1}{a} t^{a}$). При этом цена за ресурс определяется следующим выражением: $l(R, s) = j\,'\,(R / V)$ (ср. с (17)), а оптимальные планы – по-прежнему, выражением (18).

В заключение настоящего раздела исследуем эффективность рассматриваемого выше механизма внутренних цен. До сих пор мы считали, что целевая функция центра определяется доходом от выполненных работ суммарным объемом R (при постоянном объеме доход постоянен) и суммарными затратами АЭ по выполнению этих работ. Механизмы (16) и (18) минимизируют суммарные затраты активных элементов при условии, что центр назначает единую для всех АЭ цену. Если центр имеет собственные интересы, заключающиеся, наряду с выполнением заданного объема работ, в минимизации суммарных выплат активным элементам, то механизм с внутренними ценами может рассматриваться не только как механизм планирования, но и как механизм стимулирования L-типа, в котором вознаграждение АЭ пропорционально его действию [10]. Коэффициент пропорциональности при этом является ставкой зарплаты.

Известно, что при монотонных непрерывных функциях затрат пропорциональные системы стимулирования (L-типа) неэффективны. В частности, если АЭ имеют функции затрат типа Кобба–Дугласа, то оптимальные квазикомпенсаторные механизмы стимулирования (QK-типа) имеют строго большую эффективность, чем пропорциональные [4, 10]. Проиллюстрируем это утверждение. Отношение минимальных затрат на стимулирование по реализации (побуждении АЭ к выбору) заданного вектора действий x Î $A = \prod_{i,j} A_{ij}$ равно a ³ 1, не зависит от вектора действий и показывает во сколько раз центр "переплачивает" АЭ, используя единую внутреннюю цену, по сравнению с минимально необходимыми для реализации заданного вектора действий затратами на стимулирование. Следовательно, хотелось бы найти механизм управления (стимулирования и планирования), для которого, как и для механизма с внутренней ценой, существовал бы эквивалентный механизм открытого управления (обеспечивающий неманипулируемость в случае неполной информированности центра о моделях АЭ), но который имел бы большую – желательно такую же или "почти" такую же, как и у оптимального квазикомпенсаторного механизма стимулирования – эффективность.

Такой механизм существует. Пусть АЭ имеют функции затрат типа Кобба–Дугласа, а центр использует в условиях полной информированности следующий механизм управления, предложенный В.Н. Бурковым (назовем его B-типа):

(20) $s_{ij}(y_{ij},r_{ij}) = \frac{l}{g}\, y_{ij}^{\,g}\, r_{ij}^{\,1-g}$, $g > 1$.

Тогда целевая функция АЭ имеет вид (ср. с (13)):

(21) $f_{ij}(y_{ij},r_{ij}) = s_{ij}(y_{ij},r_{ij}) - c_{ij}(y_{ij},r_{ij})$.

Теорема 4. Если АЭ имеют функции затрат типа Кобба-Дугласа и $g = a - d > 1$, *где* $d > 0$, *то:*

а) механизм (20) e-оптимален, где

(22) $e \approx d\ / (a - d)$;

б) в рамках ГСВ для механизма (16)–(20) существует эквивалентный механизм открытого управления.

Решая задачу условной оптимизации, получаем:

(23) $l^* = (\frac{R}{W})^d, \quad x_{ij}^* = \frac{r_{ij}}{W} R.$

Следовательно,

(24) $J_B(x) / J_{QK}(x) = \frac{a}{a - d} \xrightarrow[d \to 0]{} 1.$

Пункт а) теоремы доказан. Докажем неманипулируемость механизма (16)–(20). Если центр использует механизм открытого управления (см. (14), (15)), то:

(25) $x_{ij}(R,s) = \frac{s_{ij}}{V} R, \ \ l(R,s) = (R / V)^d.$

Подставляя (25) в (21) убеждаемся, что в рамках ГСВ сообщение достоверной информации – доминантная стратегия каждого АЭ. Теорема 4 доказана.

По аналогии с доказательством теоремы 3 (ср. (23), (25) и (16), (17)) можно показать, что механизм B-типа допускает произвольную децентрализацию.

Следствием теорем 3 и 4 является вывод о том, что механизмы B-типа при управлении многоуровневыми АС e-оптимальны в условиях неполной информированности и для них существуют эквивалентные прямые (неманипулируемые) механизмы.

6. Заключение

Таким образом, в настоящей работе сформулирована задача децентрализации механизмов планирования в активных системах и доказана произвольная децентрализуемость анонимных механизмов распределения ресурса, механизмов экспертизы и механизмов внутренних цен.

С точки зрения эффективности управления центру целесообразно, наряду с задачей децентрализации, решать также задачу синтеза структуры – какие АЭ следует включать в те или иные подсистемы. В качестве гипотезы можно выдвинуть предположение, что децентрализация, совместно с целенаправленным выбором структуры АС, может оказаться достаточно эффективной для конкурсных механизмов [7]. Задачи синтеза состава и структуры многоуровневых АС, а также изучение общих случаев задачи децентрализации представляются актуальными и перспективными направлениями будущих исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурков В.Н.* Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977.
2. *Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А.* Механизмы функционирования социально-экономических систем с сообщением информации. // А и Т. 1996. № 3. С. 3 - 25.
3. *Бурков В.Н., Кондратьев В.В.* Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981.
4. *Новиков Д.А.* Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. М.: Фонд «Проблемы управления», 1999.
5. *Мулен Э.* Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. М.: Мир, 1991.
6. *Бурков В.Н., Горгидзе И.И., Новиков Д.А., Юсупов Б.С.* Модели и механизмы распределения затрат и доходов в рыночной экономике. М.: ИПУ РАН, 1997.
7. *Бурков В.Н., Данев Б., Еналеев А.К. и др.* Большие системы: моделирование организационных механизмов. М.: Наука, 1989.
8. *Ануфриев И.К., Бурков В.Н., Вилкова Н.И., Рапацкая С.Т.* Модели и механизмы внутрифирменного управления. М.: ИПУ РАН, 1994.
9. *Месарович М., Мако Д., Такахара И.* Теория иерархических многоуровневых систем. М.: Мир, 1973.
10. *Новиков Д.А.* Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). М.: ИПУ РАН, 1998.
11. *Moulin H., Shenker S. Serial cost sharing* // Econometrica. 1992. V. 60. №5. P. 1009-1037.