Автоматика и телемеханика. 2002. № 12. С. 92 – 95

© 2002 г.

В.Г. Балашов, канд. техн. наук,
А.Ю. Заложнев, канд. физ.-мат. наук,
Д.А. Новиков, д-р техн. наук
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ЗАДАЧА НАЗНАЧЕНИЯ ЦЕНТРА В ЛИНЕЙНОЙ АКТИВНОЙ СИСТЕМЕ

Исследуется задача назначения центра в линейной активной системе. Характеризуется множество равновесий игры участников системы при всевозможных назначениях центром одного из заданного набора агентов.

Отличительной чертой иерархических игр [1, 2] является то, что в них определенным игрокам (агентам) предоставляется возможность делать ход первыми, т.е., в том числе, выбирать свои действия в виде функционалов от будущих действий игроков, делающих ход вторыми.

Рассмотрим активную систему (АС), включающую множество $I = \{1, 2, ..., n\}$ агентов. Неиерархическая некооперативная игра (для обозначения которой будем использовать символ Γ_0) заключается в одновременном выборе ими своих действий. В зависимости от используемых предположений о поведении агентов, решением игры может считаться равновесие в доминантных стратегиях (РДС), множество равновесий Нэша и т.д. [1, 2]. Если некоторому агенту предоставлено право первого хода (этого агента будем называть центром, а остальных агентов – активными элементами (АЭ)), то возможны следующие варианты. Если центр не ожидает получения информации о действиях АЭ, то реализуется игра Γ_1, в которой центр выбирает свое действие и сообщает его АЭ. Если центр ожидает получить информацию о действиях АЭ, то реализуется игра Γ_2, в которой центр выбирает зависимость своего действия от действий АЭ и сообщает ее АЭ. Возможно построение иерархических игр и более высокого порядка, однако рассматривать их не будем по причинам, приведенным в [2].

Таким образом, состояние АС, под которым понимается совокупность равновесных стратегий всех агентов, зависит от того, кто из агентов назначен центром и какого типа игра разыгрывается (Γ_0, Γ_1 или Γ_2). Следовательно, назначение центром того или иного агента может рассматриваться как управление АС. В настоящей работе исследуется задача назначения центра в линейных АС, т.е. таких АС, в которых целевые функции всех агентов линейны [3, 4].

Пусть целевая функция i-го агента, определенная с точностью до аддитивной константы, имеет вид: $f_i(y) = \sum_{j \in I} a_{ij} y_j$, где a_{ij} – действительнозначные константы, y_j – действие j-го агента, $i, j \in I$.

Без ограничения общности предположим, что множество допустимых действий каждого агента составляет отрезок $[0; 1]$. Тогда в игре Γ_0 всегда существует РДС $y_i^d = Sign(a_{ii}),\ i \in I$, где $Sign(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$. Следовательно, если центр отсутствует, то равновесным является состояние АС, в котором каждый агент выбирает свою доминантную стратегию. Легко видеть, что при назначении центром любого агента и разыгрывании им игры Γ_1 равновесным будет то же состояние АС, что и в игре Γ_0, поэтому рассмотрим игру Γ_2.

Пусть центром назначен k-й агент и его стратегией является функция $u_k(y_{-k})$, принимающая значения из $[0; 1]$, где $y_{-k} = (y_1, y_2, ..., y_{k-1}, y_{k+1}, ..., y_n) \in [0; 1]^n$ – обстановка игры для этого агента.

Определим следующие множества:

- $Q_k = \{i \in I \setminus \{k\} \mid Sign(a_{ki}) \neq Sign(a_{ii})\}$ – множество таких АЭ, которые в отсутствие управления выбирают невыгодные для центра действия (очевидно, что если $Sign(a_{kj}) = Sign(a_{jj})$, то j-м агентом с точки зрения k-го агента управлять не требуется);
- $Q_k^- = \{i \in Q_k \mid Sign(a_{ik}) = 0\}$, $Q_k^+ = \{i \in Q_k \mid Sign(a_{ik}) = 1\}$ – множество АЭ, заинтересованных в соответствующем (равном нулю или единице – внутренние точки отрезка $[0; 1]$ можно не рассматривать) выборе центра (очевидно, $Q_k^- \cup Q_k^+ = Q_k$, $k \in I$);

- $P_k^- = \{i\ \hat{I}\ Q_k \mid Sign(a_{ki}) = 0\}$, $P_k^+ = \{i\ \hat{I}\ Q_k \mid Sign(a_{ki}) = 1\}$ – множество АЭ, в соответствующем выборе которых заинтересован центр (очевидно, $P_k^- \cup P_k^+ = Q_k$, $k\ \hat{I}\ I$).

Введем множество АЭ, которые согласятся изменить свои действия, если центр пообещает им выбрать нулевое действие.

(1) $$R_k^- = \{i\ \hat{I}\ Q_k^- \cap P_k^- \mid a_{ii} \pounds -a_{ik}\} \cup \{i\ \hat{I}\ Q_k^- \cap P_k^+ \mid a_{ii}\ {}^3\ a_{ik}\}.$$

Для того, чтобы побудить их к этому, центру в соответствии с результатами, полученными в [5], достаточно использовать стратегию

(2) $$u_k^-(y_{R_k^-}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \forall\, i \in P_k^- \cap R_k^-\ y_i = 0 \text{ и } \forall\, i \in P_k^+ \cap R_k^-\ y_i = 1 \\ 1, & \text{если } \exists\, i \in P_k^- \cap R_k^- : y_i = 1 \text{ или } \exists\, i \in P_k^+ \cap R_k^- : y_i = 0 \end{cases}.$$

Аналогичным образом введем множество АЭ, которые согласятся изменить свои действия, если центр пообещает им выбрать единичное действие.

(3) $$R_k^+ = \{i\ \hat{I}\ Q_k^+ \cap P_k^- \mid a_{ik}\ {}^3\ a_{ii}\} \cup \{i\ \hat{I}\ Q_k^+ \cap P_k^+ \mid a_{ik}\ {}^3 -a_{ii}\}.$$

Для того, чтобы побудить их к этому, центру в соответствии с результатами, полученными в [5], достаточно использовать стратегию

(4) $$u_k^+(y_{R_k^+}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \forall\, i \in P_k^- \cap R_k^+\ y_i = 0 \text{ и } \forall\, i \in P_k^+ \cap R_k^+\ y_i = 1 \\ 0, & \text{если } \exists\, i \in P_k^- \cap R_k^+ : y_i = 1 \text{ или } \exists\, i \in P_k^+ \cap R_k^+ : y_i = 0 \end{cases}.$$

Таким образом, у центра имеются три альтернативы:

1) разыграть игру Γ_0 или игру Γ_1;

2) разыграть игру Γ_2, обещая в соответствии с (2) АЭ из множества (1) выбрать нулевое действие, если они выберут наиболее выгодные для центра действия;

3) разыграть игру Γ_2, обещая в соответствии с (4) АЭ из множества (3) выбрать единичное действие, если они выберут наиболее выгодные для центра действия.

Вычислим следующие величины, характеризующие выигрыши центра в перечисленных трех ситуациях:

(5) $$f_k^d = \sum_{i \in I} a_{ki} Sign(a_{ii}),$$

(6) $$f_k^- = \sum_{i \in (I \setminus (Q_k \cup \{k\})) \cup Q_k^+ \cup (Q_k^- \setminus R_k^-)} a_{ki} Sign(a_{ii}) + \sum_{i \in R_k^- \cap P_k^+} a_{ki},$$

(7) $$f_k^+ = \sum_{i \in (I \setminus (Q_k \cup \{k\})) \cup Q_k^- \cup (Q_k^+ \setminus R_k^+)} a_{ki} Sign(a_{ii}) + a_{kk} + \sum_{i \in R_k^+ \cap P_k^+} a_{ki}.$$

Утверждение 1. Максимальный выигрыш k-го агента при назначении его центром в линейной АС равен $f_k = \max\{f_k^d, f_k^-, f_k^+\}$.

Доказательство утверждения 1 заключается в непосредственной проверке того, что выбор рекомендуемых центром действий является равновесием Нэша игры АЭ из соответствующего множества. То, что центру следует использовать управления вида (2) или (4), а не управления, определенные на некоторых подмножествах множеств R_k^- и R_k^+, следует из структуры целевых функций. Выражения (5)-(7) исчерпывают множество возможных выигрышей центра при разыгрывании игр Γ_0, Γ_1 и Γ_2.

Из полученных результатов следует, что в зависимости от соотношения величин (5)-(7) реализуется одно из следующих множеств действий агентов:

- если максимум достигается на f_k^d, то все агенты выберут доминантные стратегии;
- если максимум достигается на f_k^-, то агенты из множества $(I\backslash(Q_k\backslash\{k\}))\cup Q_k^+ \cup (Q_k^- \backslash R_k^-)$ выберут доминантные стратегии, агенты из множества $(R_k^- \cap P_k^-)\cup\{k\}$ – нулевые действия (в том числе и центр), а агенты из множества $R_k^- \cap P_k^+$ – единичные действия;
- если максимум достигается на f_k^+, то агенты из множества $(I\backslash(Q_k\backslash\{k\}))\cup Q_k^- \cup (Q_k^+ \backslash R_k^+)$ выберут доминантные стратегии, агенты из множества $R_k^+ \cap P_k^-$ – нулевые действия, а агенты из множества $(R_k^+ \cap P_k^+)\cup\{k\}$ (в том числе и центр) – единичные действия.

Отметим, что результат утверждения 1 справедлив и для случая сепарабельных [2] целевых функций агентов.

Итак, приведена характеризация состояний АС при назначении центром произвольного агента. Если на множестве состояний АС задан функционал эффективности, то решение задачи назначения центра заключается в определении агента, назначение которого центром будет максимизировать эффективность [6].

Полученные результаты свидетельствуют о том, что, во-первых, далеко не все состояния системы могут быть реализованы изменением структуры линейных АС, а во-вторых, что решение задачи назначения центра даже для линейных АС (являющихся в некотором смысле простейшими) достаточно трудоемко. Обусловлено это, в частности, тем, что, выбирая некоторую стратегию, центр не может одновременно поощрять или наказывать всех АЭ. Возможным выходом представляется введение побочных платежей [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Губко М.В., Новиков Д.А.* Теория игр в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2002.

2. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.

3. *Леонтьев С.В., Новиков Д.А., Петраков С.Н.* Критериальное и мотивационное управление в активных системах // А и Т. 2002. № 7. С. 104 – 113.

4. *Новиков Д.А.* Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. М.: Фонд «Проблемы управления», 1999.

5. *Новиков Д.А., Цветков А.В.* Механизмы стимулирования в многоэлементных организационных системах. М.: Апостроф, 2001.

6. *Воронин А.А., Мишин С.П.* Алгоритмы поиска оптимальной структуры организационной системы // А и Т. 2002. № 5. С. 120 – 132.

7. *Новиков Д.А., Цветков А.В.* Механизмы функционирования организационных систем с распределенным контролем. М.: Ин-т проблем управления, 2001.