© 2006 г. Д.А. Заложнев, А.О. Калашников, канд. техн. наук,
Д.А. Новиков, д-р. техн. наук
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

МОДЕЛИ ТАРИФНО-ПРЕМИАЛЬНЫХ СИСТЕМ СТИМУЛИРОВАНИЯ

Предложена теоретико-игровая модель, в рамках которой сформулирована и решена задача синтеза оптимальной тарифно-премиальной системы стимулирования (оплаты труда). Получены оценки сравнительной эффективности компенсаторных, линейных и аккордных тарифно-премиальных систем стимулирования.

1. Введение

На практике распространены тарифно-премиальные системы оплаты труда, в рамках которых вознаграждение агента складывается из двух составляющих – тарифной и премиальной [1]. Тарифная составляющая определяется квалификацией агента и не зависит от результатов его деятельности. Премиальная составляющая, наоборот, в основном, определяется именно результатами деятельности агента. Известные теоретико-игровые модели стимулирования в организационных системах [2, 3] не позволяют адекватно описывать тарифно-премиальные системы стимулирования. Поэтому ниже приводятся оригинальные результаты постановки (раздел 2) и решения задачи синтеза оптимальной тарифно-премиальной системы оплаты труда, в том числе – модели компенсаторных (раздел 3), линейных (раздел 4) и аккордных тарифно-премиальных (раздел 4) систем стимулирования. Описание примеров использования результатов можно найти в [4].

2. Общая постановка задачи

Рассмотрим модель n-агентной организационной системы (ОС), в которой деятельность i-го управляемого субъекта – агента, характеризуемого типом $r_i > 0$, описывается его скалярным действием $y_i \geq 0,\ i \in N = \{1, ..., n\}$, где N – множество агентов. Обозначим тарифную составляющую заработной платы $t(r_i)$, премиальный фонд – $R \geq 0$. Введем следующие предположения.

А.1. Относительно функции затрат i-го агента $c_i(y_i, r_i)$ предположим, что она зависит только от его собственного действия и является гладкой, выпуклой и неубывающей по действию y_i, невозрастающей по типу r_i функцией, а ее смешанная производная неположительна.

А.2. Относительно типов агентов (эффективностей их деятельности) будем считать, что агенты упорядочены по их возрастанию: $r_1 \leq ... \leq r_n$.

А.3. Относительно тарифной составляющей заработной платы предположим, что она является кусочно-постоянной неубывающей (прогрессивной), непрерывной справа функцией.

В рамках предположения А.3 прогрессивная тарифная система оплаты труда $t(\cdot)$ описывается кортежем $\wp = \{w,\ 0 = v_1 \leq ... \leq v_w,\ q_1 \leq ... \leq q_w\}$, где w – число тарифных разрядов, а размер вознаграждения в зависимости от типа агента (его квалификации) определяется следующим образом: $t(r_i) = \max\limits_{\{j=\overline{1,w} \mid r_i \geq v_j\}} q_j,\ i \in N$. Премиальную составляющую заработной платы i-го агента обозначим $\pi_i(y)$, $i \in N$, где $y = (y_1,..., y_n) \in \Re^n_+$ – вектор действий агентов.

Таким образом, вознаграждение i-го агента $\sigma_i(y, r_i)$, складывающееся из тарифной и премиальной составляющих, имеет вид: $\sigma_i(y, r_i) = t(r_i) + \pi_i(y),\ i \in N$.

Введем ограничение резервной полезности $u(\cdot)$, определяющее минимальное значение целевой функции агента (в зависимости от его типа), которое должно быть ему обеспечено, т.е. $u(r_i)$ – резервная полезность i-го агента, $i \in N$.

Обозначим $r = (r_1, ..., r_n)$ – вектор типов агентов, $\pi(y) = (\pi_1(y), ..., \pi_n(y))$ – вектор-функцию премиального стимулирования.

Целевая функция i-го агента, являющаяся разностью между вознаграждением и затратами, имеет вид:

(1) $f_i(y, \pi_i(\cdot), t(\cdot), r_i) = t(r_i) + \pi_i(y) - c_i(y_i, r_i),\ i \in N.$

Целевая функция управляющего органа – центра – $\Phi(\cdot)$ представляет собой разность между доходом $H(y)$ от деятельности агентов и вознаграждением, выплачиваемым агентам:

(2) $\Phi(y, \pi(\cdot), t(\cdot), r) = H(y) - \sum_{i \in N} \pi_i(y) - \sum_{i \in N} t(r_i)$.

Пусть $P(r, \pi(\cdot))$ – множество равновесий Нэша игры агентов при заданной тарифно-премиальной системе стимулирования (отметим, что оно не зависит от тарифной составляющей – см. выражение (1)); $S(r, R) = \{\pi(\cdot) \mid \forall\, y \in P(r, \pi(\cdot)) \mid \sum_{i \in N} \pi_i(y) \le R\}$ – множество премиальных систем стимулирования, таких что для любого соответствующего равновесного вектора действий агентов суммарное премиальное стимулирование не превышает премиального фонда; $U(r, \pi(\cdot), t(\cdot)) = \{y \in \Re^n_+ \mid t(r_i) + \pi_i(y) - c_i(y_i, r_i) \ge u(r_i),\ i \in N\}$ – множество векторов действий агентов, при которых значения их целевых функций удовлетворяют ограничениям резервной полезности.

Эффективность тарифно-премиальной системы стимулирования определим как гарантированное значение целевой функции центра на множестве решений игры агентов, удовлетворяющих условиям индивидуальной рациональности:

(3) $K(t(\cdot), \pi(\cdot), r) = \min_{y \in P(r, \pi(\cdot)) \cap U(r, \pi(\cdot), t(\cdot))} [H(y) - \sum_{i \in N} \pi_i(y) - \sum_{i \in N} t(r_i)]$.

Общая постановка задачи синтеза оптимальной тарифно-премиальной системы стимулирования имеет вид:

(4) $K(t(\cdot), \pi(\cdot), r) \to \max_{\pi(\cdot) \in S(r, R),\, t(\cdot),\, R \ge 0}$,

т.е., требуется найти оптимальные (с точки зрения критерия эффективности (3)) тарифные выплаты $t(\cdot)$, премиальный фонд R и правила его распределения (премиальную систему стимулирования $\pi(\cdot)$), которые обеспечивали бы всем агентам в равновесии, как минимум, заданную резервную полезность.

В качестве отступления отметим, что, умея решать задачу (4) или ее упрощенные модификации, можно ставить и решать задачи синтеза оптимального состава организационной системы (определения набора включаемых в нее агентов) по аналогии с тем, как это делается в [5].

Задачу (4) трудно решать в общем виде. Обычно на практике ее решение разбивается на несколько этапов.

Первым этапом является задача синтеза тарифной составляющей системы стимулирования. Необходимость ее решения может и отсутствовать, так как во многих государственных организациях используются установленные законом унифицированные тарифные системы оплаты (примеры – единая тарифная сетка, отраслевые системы оплаты труда и др.). Если все же выбор тарифной составляющей является прерогативой организации, то для решения этой задачи (отдельно от задачи выбора премиальной составляющей) могут быть использованы описанные в [2] методы поиска оптимальных систем скачкообразных или нормативных ранговых систем стимулирования.

Вторым этапом является выбор премиальной составляющей оплаты труда при фиксированной тарифной составляющей и фиксированном размере премиального фонда.

И, наконец, третьим этапом является выбор оптимального размера премиального фонда. Эта задача (при известных результатах первых двух этапов) обычно сводится к задаче условной оптимизации и решается достаточно легко.

Иногда размер премиального фонда фиксирован априори, тогда третий этап пропускают. Иногда второй и третий этап совмещают, не акцентируя внимания на размере суммарного премиального фонда, а получая его «автоматически» в процессе решения.

Относительно функции дохода центра для простоты предположим:

А.4. $H(y) = \sum_{i \in N} y_i$.

Если тарифная составляющая фиксирована и фиксирован премиальный фонд R, то в рамках предположения А.4 целевая функция центра имеет вид:

(5) $\Phi(y, \pi(\cdot), t(\cdot), r) = \sum_{i \in N} y_i - R.$

Эффективность премиальной системы стимулирования может быть определена как

(6) $K_\pi(\pi(\cdot), R, r) = \min\limits_{y \in P(r, \pi(\cdot)) \cap U(r, \pi(\cdot))} [\sum\limits_{i \in N} y_i - R]$,

а задача (4) примет вид

(7) $K_\pi(\pi(\cdot), R, r) \to \max\limits_{\pi(\cdot) \in S(r, R)}$.

Обозначим $\pi^*(\cdot, r, R)$ – решение задачи (7). Тогда оптимальный размер премиального фонда равен

(8) $R^*(r) = \arg \max\limits_{R \geq 0} \min\limits_{y \in P(r, R, \pi^*(\cdot, r, R)) \cap U(r, R, \pi^*(\cdot, r, R))} [\sum\limits_{i \in N} y_i - R]$.

Рассмотрим ряд классов тарифно-премиальных систем стимулирования, для которых решим задачу (4) и/или (7).

3. Компенсаторная премиальная система стимулирования

Будем искать премиальную составляющую оплаты труда i-го агента в виде «компенсаторной» системы стимулирования [2]:

(9) $\pi_{Ki}(y_i) = \begin{cases} a_i, & y_i \geq x_i \\ 0, & y_i < x_i \end{cases}$,

где $x_i \geq 0$ – план i-го агента, за выполнение которого ему выплачивается премия a_i, $i \in N$. Для того чтобы задать систему стимулирования (9), необходимо для каждого из агентов определить значения двух параметров – плана и вознаграждения за его выполнение.

Обозначим $y_{-i} = (y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)$ – обстановку игры для i-го агента. Запишем условие того, что выбор действий, совпадающих с планами, будет выгоден для агентов (является равновесием в доминантных стратегиях [6] их игры):

(10) $\forall\, i \in N,\ \forall\, y_{-i} \in \Re_+^{n-1},\ \forall\, y_i \geq 0\ \ f_i(x_i, y_{-i}) \geq f_i(y_i, y_{-i})$.

Распишем с учетом (9) выражение (10) для i-го агента:

$$\forall\, y_{-i} \in \Re_+^{n-1},\ \forall\, y_i \geq 0\ \ t(r_i) + a_i - c_i(x_i, r_i) \geq t(r_i) - c_i(y_i, r_i).$$

В силу предположения А.1 получаем:

(11) $a_i \geq c_i(x_i, r_i) - c_i(0, r_i)$, $i \in N$.

Так как вознаграждение, выплачиваемое агентам, входит в целевую функцию центра (2) со знаком «минус», то, получаем, что, независимо от обстановки игры и независимо от тарифной составляющей размер премии должен обращать (11) в равенство, т.е.:

(12) $a_i = c_i(x_i, r_i) - c_i(0, r_i)$, $i \in N$.

Отметим, что сделанный вывод останется в силе даже в случае, когда затраты каждого агента зависят от действий всех агентов: в соответствии с результатами, полученными в [2], если предположение А.1 выполнено для любой обстановки игры, то для того, чтобы имело место (10), достаточно компенсировать агенту фактические затраты в случае выполнения им плана:

$$\pi_{Ki}(y) = \begin{cases} c_i(x_i, y_{-i}, r_i) - c_i(0, y_{-i}, r_i), & y_i = x_i \\ 0, & y_i \neq x_i \end{cases},\ i \in N.$$

Введем следующее предположение:

А.5. $u(\cdot)$ – неубывающая функция.

Содержательно данное предположение означает, что более квалифицированные работники характеризуются более высокой резервной полезностью.

Запишем условия обеспечения агентам резервной полезности в случае выполнения ими планов:

(13) $t(r_i) + a_i - c_i(x_i, r_i) \geq u(r_i)$, $i \in N$.

Подставляя (12) в (13), получаем:

(14) $t(r_i) \geq c_i(0, r_i) + u(r_i)$, $i \in N$.

Система неравенств (14) не зависит от планов (премиальной составляющей стимулирования), а, так как центр заинтересован в минимизации выплат агентам, получаем, что оптимальная тарифная составляющая имеет вид:

(15) $t(r_i) = c_i(0, r_i) + u(r_i)$, $i \in N$.

Подчеркнем, что оптимальное решение (15) в некотором смысле вырожденное – центр вынужден устанавливать тарифную составляющую оплаты труда каждого агента в зависимости от его резервной полезности и минимальных затрат. Интересно отметить, что в случае, когда минимальные затраты агентов равны нулю, тарифная составляющая оплаты труда каждого агента в точности равна его резервной полезности.

Осталось найти оптимальные планы. Обозначим $x = (x_1,..., x_n)$ – вектор планов, $x \in \Re^n_+$.

Целевая функция центра с учетом (12) и (15) имеет вид:

(16) $\Phi(x) = H(x) - \sum_{i \in N} c_i(x, r_i) - \sum_{i \in N} u(r_i)$.

Оптимальным будет план, максимизирующий целевую функцию центра (16). Таким образом, мы обосновали справедливость следующего утверждения.

Утверждение 1. Пусть выполнены предположения А.1-А.3 и А.5. Тогда оптимальная тарифно-премиальная система стимулирования имеет вид:

(*17*) $w = n,\ v_i = r_i,\ q_i = c_i(0, r_i) + u(r_i),\ i \in N$.

(*18*) $\pi_{Ki}(y_i) = \begin{cases} c_i(x_i^*, r_i) - c_i(0, r_i), & y_i \ge x_i^* \\ 0, & y_i < x_i^* \end{cases},\ i \in N,$

где

(*19*) $x^* = arg \max_{x \in \Re^n_+} [H(x) - \sum_{i \in N} c_i(x, r_i)]$.

Введем следующее предположение:

А.6. $c_i(y_i, r_i) = \frac{1}{\gamma}\ (y_i)^\gamma (r_i)^{1-\gamma},\ \gamma \ge 1,\ i \in N$.

В рамках предположений А.1-А.6 можно получить решение в явном виде:

Утверждение 2. Пусть выполнены предположения А.1-А.6. Тогда оптимальная тарифно-премиальная система стимулирования имеет вид: (*18*),

(20) $w = n,\ v_i = r_i,\ q_i = u_i(r_i),\ i \in N$.

(*21*) $x_i^* = r_i,\ i \in N$,

а ее эффективность (*максимальный выигрыш центра*) *равна*

(*22*) $K_K = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\ H - \sum_{i \in N} u(r_i)$,

где $H = \sum_{i \in N} r_i$.

Отметим, что (20) является частным случаем (17) и (18), а (21) – частным случаем (19).

Из (22) следует, что в рамках введенных предположений эффективность тарифно-премиальной системы стимулирования пропорциональна сумме типов агентов (величина H условно может интерпретироваться как суммарная эффективность деятельности коллектива агентов) и убывает с увеличением резервной полезности.

При достаточно больших значениях резервной полезности может оказаться, что выигрыш центра (22) отрицателен, т.е. ему невыгодно нанимать на работу данный коллектив агентов (обычно считается, что в случае отказа от взаимодействия центр получает нулевой выигрыш). Условие выгодности взаимодействия центра с агентами ($K_K \ge 0$) можно записать в виде:

(23) $(\gamma - 1) \sum_{i \in N} r_i \ge \gamma \sum_{i \in N} u(r_i)$.

Например, для однородных (одинаковых) агентов с типом r_0 условие (23) примет вид:

(24) $\frac{u(r_0)}{r_0} \le \frac{\gamma - 1}{\gamma}$.

Рассмотрим задачу синтеза оптимального состава организационной системы – выбора агентов, которых следует включать в ОС. Пусть задано множество $N_0 = \{1, ..., n_0\}$ агентов – претендентов на участие в ОС – с типами $r_1 \le ... \le r_{n0}$ соответственно. В общем случае задача синтеза оптимального состава организационной системы имеет вид: найти подмножество N множества N_0, максимизирующее целевую функцию центра, представляющую собой разность между доходом $h(N)$ от вектора $x_N = \{x_i\}_{i \in N}$ деятельности агентов из множества N и затратами на их стимулирование: $\Phi_0(N) = h(N) -$

$\sum_{i \in N} c_i(x_N, r_i) - \sum_{i \in N} u(r_i) \to \max_{x_N \in \Re_+^N,\, N \subseteq N_0}$, при выполнении условий ограниченности премиального фонда R: $\sum_{i \in N} [c_i(x_i^*, r_i) - c_i(0, r_i)] \le R$, и, быть может, условий обеспечения агентам, не включаемым в ОС, некоторой резервной полезности $u_0(\cdot)$ при ограниченном резервном фонде R_0: $\sum_{i \in N_0 \setminus N} u_0(r_i) \le R_0$. Отметим, что ограниченность премиального фонда и затраты на выплаты не включаемым в состав ОС агентам, могут быть учтены в целевой функции центра по аналогии с тем, как это делалось выше.

В рамках предположений А.1-А.6 из (22) следует, что задача синтеза оптимального состава ОС заключается в нахождении подмножества множества N_0, максимизирующего (22), т.е.:

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma} \sum_{i \in N} r_i - \sum_{i \in N} u(r_i) \to \max_{N \subseteq N_0}.$$

Обозначим N^* – решение задачи (23), которая в общем случае является задачей дискретной оптимизации. В ряде частных случаев, описываемых следующим утверждением, удается получить аналитическое ее решение.

Утверждение 3. Пусть выполнены предположения А.1-А.6. Тогда

а) в случае однородных агентов, если имеет место (24), то $N^* = N_0$, в противном случае $N^* = \varnothing$;

б) если резервная полезность u_0 одинакова для всех агентов, то в ОС следует включать всех агентов, кроме тех, тип которых меньше, чем $\gamma\, u_0 / (\gamma - 1)$.

Пункт а) утверждения 3 можно усилить: максимальный состав будет оптимален ($N^* = N_0$), если $\forall\, i \in N_0 \;\; \frac{u(r_i)}{r_i} \le \frac{\gamma - 1}{\gamma}$.

Итак, в настоящем разделе получено решение задачи синтеза оптимальной тарифно-премиальной системы стимулирования, которая оказалась принадлежащей классу компенсаторных. Рассмотрим линейную тарифно-премиальную систему стимулирования и сравним ее эффективность с эффективностью соответствующей оптимальной системы стимулирования.

4. Линейная премиальная система стимулирования

Пусть тарифная составляющая $t(\cdot)$ фиксирована, и центр использует унифицированную (одинаковую для всех агентов) линейную (L-типа) систему стимулирования

(25) $\pi_{Li}(y_i) = \alpha\, y_i,\ i \in N.$

Тогда агенты выберут следующие действия, максимизирующие их целевые функции, равные разности между стимулированием и затратами:

(26) $y_i^*(\alpha, r_i) = \xi_i(\alpha, r_i),\ i \in N,$

где $\xi_i(\cdot, r_i)$ – функция, обратная производной по y_i функции $c_i(y_i, r_i),\ i \in N.$

В рамках предположения А.4 и без учета затрат центра на стимулирование, эффективность системы стимулирования (25) равна

(27) $K'_L(\alpha, r) = \sum_{i \in N} y_i^*(\alpha, r_i)$.

Решая задачу

(28) $$\begin{cases} \sum_{i \in N} \xi_i(\alpha, r_i) \to \max_{\alpha \ge 0} \\ \alpha\, \xi_i(\alpha, r_i) - c_i(\xi_i(\alpha, r_i), r_i) \ge u(r_i) - t(r_i),\ i \in N, \\ \alpha \sum_{i \in N} \xi_i(\alpha, r_i) \le R \end{cases}$$

получим оценку K'_L эффективности деятельности коллектива агентов, характеризуемого вектором типов $r = (r_1, \dots, r_n)$.

Если выполнено предположение А.6, то $y_i^*(\alpha, r_i) = r_i\, \alpha^{\frac{1}{\gamma - 1}},\ i \in N,\ K'_L(\alpha, r) = \alpha^{\frac{1}{\gamma - 1}} H$, где $H = \sum_{i \in N} r_i$, а задача (28) примет вид:

$$(29)\quad \begin{cases} \alpha^{\frac{1}{\gamma-1}} H \to \max\limits_{\alpha \ge 0} \\ \alpha \ge \max\limits_{i \in N} \left[\dfrac{\gamma}{\gamma-1} \dfrac{u(r_i) - t(r_i)}{r_i} \right]^{1-\frac{1}{\gamma}} \\ \alpha \le \left[\dfrac{R}{H} \right]^{1-\frac{1}{\gamma}} \end{cases} .$$

Утверждение 4. Если выполнены предположения А.1, А.4 и А.6, то задача (*29*) *имеет решение, если*

$$(30)\quad H \frac{\gamma}{\gamma-1} \max_{i \in N} \left[\frac{u(r_i) - t(r_i)}{r_i} \right] \le R\,;$$

при этом (27) примет вид:

$$(31)\ K'_L = H^{1-\frac{1}{\gamma}} R^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Условие (30) имеет прозрачную содержательную интерпретацию – премиального фонда R, совместно с тарифной оплатой труда, в равновесии должно хватать на обеспечение резервной полезности агентов.

Подчеркнем, что эффективности K_K и K'_L несравнимы, так как первая определялась как разность между суммой действий агентов и стимулированием, а вторая – просто как сумма действий агентов. Из выражения (21) следует, что при использовании центром оптимальной компенсаторной тарифно-премиальной системы стимулирования сумма действий агентов равна величине H. Если выбор тарифной составляющей оплаты труда является прерогативой центра, то в соответствии с выражением (15) получаем, что, когда тарифная составляющая в точности равна резервной полезности, то (30) выполнено всегда.

Оптимальный размер премиального фонда R^* может быть найден из максимизации разности между выражением (31) и R. Получаем:

$$(32)\ R^* = \arg \max_{R \ge 0}\ [H^{1-\frac{1}{\gamma}} R^{\frac{1}{\gamma}} - R] = H\, \gamma^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}.$$

Тогда эффективность линейной премиальной системы стимулирования равна

$$(33)\ K_L = H\, \gamma^{\frac{1}{1-\gamma}}\ \frac{\gamma-1}{\gamma} - \sum_{i \in N} u(r_i).$$

Утверждение 5. Пусть выполнены предположения А.1-А.6. Тогда

$$K_K - K_L = \frac{\gamma}{\gamma-1}\ H\,(1 - \gamma^{\frac{1}{1-\gamma}}) \ge 0.$$

Т.е., эффективность оптимальной линейной тарифно-премиальной системы стимулирования не выше эффективности оптимальной компенсаторной тарифно-премиальной системы стимулирования.

5. Аккордная (соревновательная) премиальная система стимулирования

Пусть система стимулирования такова, что центр устанавливает минимальный «норматив» – план $z \ge 0$ – значение результата деятельности, за достижение (и превышение) которого агент получает фиксированное вознаграждение $g(R, q(z)) = R / q(z)$, где $q(z) \in \overline{1,n}$ – число агентов, выполнивших план z, R – премиальный фонд. Такая система стимулирования называется аккордной (соревновательной) [2].

Из предположения А.1 следует, что перевыполнять план агентам не выгодно, поэтому каждый агент должен принять решение, выгодно ли ему выполнение плана при заданной аккордной премиальной системе стимулирования (если выполнение плана невыгодно, то агент выбирает нулевое действие, минимизирующее его затраты).

Введем следующие предположения.

А.7. $\forall\, i \in N\ \ c_i(0, r_i) = 0$.

А.8. $\forall\, i = \overline{1, n-1},\ \forall\, y \geq 0\ \ c_i(y, r_i) > c_{i+1}(y, r_{i+1})$.

А.9. $r_1 < ... < r_n$.

Отметим, что из А.9 следует А.2, из А.6 и А.9 следует А.7 и А.8.

Обозначим $m(z)$ – число агентов, выполняющих в равновесии Нэша их игры план z, $M(z) \subseteq N$ – множество таких агентов.

Утверждение 6. Если выполнены предположения А.1, А.5 и А.7-А.9, а тарифная составляющая определяется выражением (15), то одно из равновесий Нэша есть:

(34) $M(z) = \{n, ..., n - m(z) + 1\}$,

где $m(z)$ таково, что

(35) $c_{n-m(z)+1}(x, r_{n-m(z)+1}) \leq R / m(z)$,

(36) $c_{n-m(z)}(z, r_{n-m(z)}) > R / (m(z) + 1)$.

Докажем сначала, что одно из равновесий Нэша игры агентов таково, что план z выполняют первые $m(z)$ агентов в их упорядочении по возрастанию затрат (убыванию типов) – см. выражение (34). Любой агент из множества $M(z)$ в силу (35) и предположений А.7-А.9 получает неотрицательный выигрыш. При одностороннем отклонении от равновесия (невыполнении плана) он получит в силу предположения А.7 нулевой выигрыш. Значит отклонение ему не выгодно. Любой агент из множества $N \setminus M(z)$ получает в силу А.7 нулевой выигрыш. При выполнении плана в силу (36) и А.8, А.9 его выигрыш станет строго отрицательным. Значит и ему отклонение не выгодно.

Исследуем, существуют ли другие равновесия Нэша. Для любого равновесия (характеризуемого множеством $M(z)$ агентов, выполняющих план) должно выполняться

(37) $\max\limits_{i \in M(z)} c_i(z, r_i) \leq R / |M(z)|$,

(38) $\forall\, j \in N \setminus M(z)\ \ c_j(z, r_j) > R / (|M(z)| + 1)$.

Итак, равновесием Нэша является выполнение плана агентами из любого множества $M(z)$, удовлетворяющего (37) и (38). Множество (34) при этом является частным случаем.

Исследуем теперь множество равновесий в безопасных стратегиях (РБС). Напомним, что угрозой агенту называется такая игровая ситуация, при которой какой-либо из его партнеров может изменить свою стратегию, увеличив при этом свой выигрыш и одновременно уменьшив выигрыш того, кому он угрожает. Равновесием в безопасных стратегиях является такой набор стратегий, при отклонении от которого в одиночку любой игрок или уменьшает значение своего выигрыша, или попадает в угрожающее ему состояние [7].

Агент $j \in N \setminus M(z)$ угрожает агенту $i \in M(z)$, если

(39) $R / (|M(z)| + 1) < c_i(z, r_i) \leq R / |M(z)|$

и

(40) $c_j(x, r_j) \leq R / (|M(x)| + 1)$.

Выражение (39) выполнено всегда, когда имеет место (37). Отрицанием (40) является (38), поэтому в рассматриваемом случае множество равновесий Нэша совпадает со множеством РБС (напомним, что в [7] доказано, что любое строгое равновесие Нэша является РБС).

Утверждение 7. Если выполнены предположения А.6 и А.9, то равновесие имеет вид: $\frac{r_{n-m(z)+1}}{A(z,r)} \leq [m(z)]^{\frac{1}{\gamma-1}}$, $\frac{r_{n-m(z)}}{A(z,r)} > [m(z)+1]^{\frac{1}{\gamma-1}}$, *где* $A(x, r) = (\gamma\ R\ z^{-\gamma})^{\frac{1}{\gamma-1}}$, *а эффективность унифицированной аккордной тарифно-премиальной системы стимулирования равна*

$$K_{UA} = \max_{z \geq 0,\ R \geq 0}\ [m\ (z, R)\ z - R] - \sum_{i \in N} u(r_i)\,.$$

Существенным недостатком аккордной тарифно-премиальной системы стимулирования, рассмотренной выше, является то, что при ее использовании центром существует множество равновесий Нэша игры агентов (см. (37) и (38)). Т.е., априори предсказать исход игры агентов затруднительно. Равновесие (34) является в некотором смысле «фокальным» [6] – в нем планы выполняют, в первую очередь, агенты, характеризуемые минимальными затратами; и можно предположить, что именно в этом равновесии число агентов, выполняющих план, максимально. Содержательно, множественность равновесий Нэша обусловлена тем, что система стимулирования является унифицированной [2] – план z одинаков для всех агентов, и премиальный фонд распределяется поровну между всеми агентами, выполнившими план.

Поэтому рассмотрим персонифицированную систему стимулирования, в которой i-му агенту назначается план $x_i \geq 0$, за выполнение которого он получает вознаграждение, равное части (одинаковой для всех премируемых агентов) премиального фонда, определяемой числом агентов, выполнивших свои планы. Такая система стимулирования является частным случаем скачкообразной системы стимулирования [2], отличаясь от нее тем, что размер вознаграждения за выполнение плана одинаков для всех агентов. Поэтому она в общем случае имеет эффективность, не превышающую эффективности скачкообразной системы стимулирования.

Предположим, что центр хочет, чтобы множество агентов, выполняющих план, составляло $M = \{n, ..., n - m + 1\}$, где $m \in N$ фиксировано. Для этого вектор планов $x = (x_1, ..., x_n)$ должен удовлетворять следующим условиям: $c_i(x_i, r_i) \leq R / m,\ i \in M$, и

(41) $c_j(x_j, r_j) > R / (m + 1), j \in n \setminus M$.

Для выполнения (41) в рамках предположения А.1 и строгой монотонности функций затрат по действиям агентов достаточно выбрать планы следующим образом: $x^*_j = c_j^{-1}(R / (m + 1)) + \varepsilon$, $j = \overline{1, n-m}$, где ε – произвольная сколь угодно малая строго положительная константа.

Максимальный план, который выполнит i-ый агент из множества M, равен $x^*_i = c_i^{-1}(R / m)$, $i = \overline{n-m+1, n}$.

Получаем, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 8. а) Если выполнены предположения А.1, А.4, А.7 и А.9, то эффективность аккордной тарифно-премиальной системы стимулирования равна

$$K_A = \max_{m=\overline{1,n},\, R\geq 0} \Big[\sum_{i=n-m+1}^{n} c_i^{-1}(R/m) - R\Big] - \sum_{i\in N} u(r_i)\,.$$

б) Если выполнены предположения А.6 и А.9, то оптимальный размер премиального фонда равен $R^*(m) = \dfrac{\left[\sum_{i=n-m+1}^{n} r_i^{1-\frac{1}{\gamma}}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\gamma^{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)^2} m^{\frac{1}{\gamma-1}}}$, *а оптимальное число агентов* m^*, *выполняющих план, равно*

$$m^* = \arg\max_{m=\overline{1,n}} \frac{\left[\sum_{i=n-m+1}^{n} r_i^{1-\frac{1}{\gamma}}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{m^{\frac{1}{\gamma-1}}}.$$

Легко видеть, что имеют место следующие оценки сравнительных эффективностей различных тарифно-премиальных систем стимулирования: $K_K \geq K_A$, $K_A \geq K_{UA}$.

6. Заключение

Сформулирована в общем виде задача синтеза тарифно-премиальной системы оплаты труда. Ее решение основывается на принципе компенсации затрат и обладает следующими свойствами. Во-первых, оптимальный размер тарифной составляющей оплаты труда должен равняться сумме минимальных затрат и резервной полезности агента заданной квалификации. Во-вторых, премиальная составляющая должна компенсировать затраты агента по достижению требуемого центру результата. И, наконец, в третьих, оптимальные планы, назначаемые агентам со стороны центра, должны максимизировать разность между его доходом и затратами на стимулирование агентов. Применение этого общего подхода позволило найти оптимальные компенсаторные (утверждения 1 и 2), линейные (утверждение 4) и аккордные (утверждения 6 и 7) тарифно-премиальные системы оплаты труда, а также получить оценки их сравнительной эффективности (утверждения 5 и 8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 *Armstrong M.* Reward management. London, 2000.

2 *Новиков Д.А.* Стимулирование в организационных системах. М.: Синтег, 2003.

3 *Mas-Collel A., Whinston M.D., Green J.R.* Microeconomic theory. N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995.

4 *Заложнев Д.А., Новиков Д.А.* Модели тарифно-премиальных систем оплаты труда. М.: ИПУ РАН, 2006.

5 *Караваев А.П.* Модели и методы управления составом активных систем. М.: ИПУ РАН, 2003.

6 *Myerson R.B.* Game theory: analysis of conflict. London: Harvard Univ. Press, 1991.

7 *Искаков М.Б.* Равновесие в безопасных стратегиях // Автоматика и телемеханика. 2005. № 3. С. 139 – 153.