© 2006 г. Д.А. Новиков, д-р. техн. наук
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ЗАДАЧА СТИМУЛИРОВАНИЯ ПАРЕТО-АГЕНТА

Предложена теоретико-игровая модель, в рамках которой сформулирована и решена задача стимулирования Парето-агента, т.е. такого агента, результаты деятельности которого описываются распределением Парето.

1. Введение

Задачи стимулирования в условиях внешней вероятностной неопределенности относительно результатов деятельности управляемого субъекта – агента – исследуются в теории управления организационными системами [1] и в теории контрактов [2, 3]. Качественно, задача заключается в определении зависимости вознаграждения, выплачиваемого агенту управляющим органом – центром, от результатов деятельности агента. Результат деятельности агента зависит от выбираемого им действия (которое не наблюдаемо для центра) и случайной величины – состояния природы. Аналитическое решение этой задачи на сегодняшний день получено для очень ограниченного числа частных случаев (см. [1-3]). Оказывается, что простое решение можно получить и для задачи стимулирования Парето-агента, т.е. такого агента, результаты деятельности которого описываются распределением Парето. Во втором разделе настоящей работы описываются известные свойства распределения Парето, используемые в ходе дальнейшего изложения. В разделе 3 приводится краткий обзор работ, посвященных использованию распределения Парето для описания индивидуальных различий агентов. Раздел 4 содержит постановку и решение собственно задачи стимулирования. Описание примеров использования результатов можно найти в [4].

2. Закон Парето и распределение Парето

Известен так называемый закон Парето (иногда его называют «закон 80 / 20», на жаргоне – «пивной закон», в соответствии с которым 20 % людей выпивают 80 % пива), отражающий неравномерность распределения характеристик экономических и социальных явлений и процессов [5]:

- 20 % населения владеют 80 % капиталов (первоначальная формулировка самого В. Парето [6], см. также обзор современных моделей в [7, 8]);
- 80 % стоимости запасов на складе составляет 20 % номенклатуры этих запасов;
- 80 % прибыли от продаж приносят 20 % покупателей;
- 20 % усилий приносят 80 % результата;
- 80 % проблем обусловлены 20 % причин;
- за 20 % рабочего времени работники выполняют 80 % работы;
- 80 % работы выполняют 20 % работников и т.д.

«Формализацией» закона Парето является распределение Парето случайной величины $z \geq y > 0$, характеризуемое двумя параметрами – минимально возможным значением y и показателем степени $\alpha > 0$:

(1) $$p(\alpha, y, z) = \frac{\alpha}{y}\left(\frac{y}{z}\right)^{1+\alpha}.$$

Плотности распределения (1) соответствует интегральная функция распределения

(2) $$F(\alpha, y, z) = 1 - \left(\frac{y}{z}\right)^{\alpha}.$$

Распределение Парето обладает свойством самоподобия: распределение значений, превышающих величину $z^0 \geq y$, также является распределением Парето:

(3) $\forall z^0 \geq y \;\; p(\alpha, z^0, z) = p(\alpha, y, z) / (1 - F(\alpha, y, z^0)) = \dfrac{\alpha}{z^0}\left(\dfrac{z^0}{z}\right)^{1+\alpha}$.

Для распределения Парето существуют только моменты, порядка, меньшего, чем степень α. Например, математическое ожидание случайной величины z с распределением (1) существует при $\alpha > 1$ и равно

(4) $E\,z = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}\, y$,

где «E» – символ математического ожидания. Отметим, что с ростом α распределение «вырождается» и математическое ожидание (4) стремится к y. Это свойство распределения Парето используется в следующих разделах для иллюстрации принципа соответствия – при предельном переходе от случая вероятностной неопределенности к детерминированному случаю.

Кроме того, в рамках предположения о том, что случайная величина распределена по Парето, зная математическое ожидание Ez и минимальное значение y, можно легко вычислить параметр распределения α (см. (4)): $\alpha = \dfrac{Ez}{Ez - y}$.

Приведем «формальную» интерпретацию «закона 80 / 20». Определим вероятность того, что значение случайной величины, распределенной по Парето, меньше математического ожидания:

(5) $\text{Prob}\ \{z \leq Ez\} = \left(\dfrac{\alpha - 1}{\alpha}\right)^{\alpha}$.

Для того чтобы эта вероятность равнялась 0,8 (80 %) показатель степени α должен быть равен примерно 1,55. Если $\alpha = 2$, то $\text{Prob}\ \{z \leq Ez\} = 0{,}25$, что соответствует «закону 75 / 25».

3. Индивидуальные различия агентов

В задачах стимулирования существенными являются характеристики агентов, отражающие их индивидуальные различия – производительность труда, эффективность деятельности и т.д. Оказывается, что во многих случаях, как индивидуальные характеристики агентов, так и результаты их деятельности, хорошо аппроксимируются распределением Парето.

Модели распределения способностей обсуждались в литературе неоднократно. Использовать степенное распределение для описания различий способностей людей предложил первоначально сам В. Парето [8], и его идеи развивали многие другие исследователи [10, 11]. Например, предполагалось, что вероятность дополнительной «единицы способностей» не зависит от текущего уровня способностей [12] – такая модель приводит к тому, что способности подчиняются нормальному распределению. К распределению Парето приводят модели марковских цепей [13], потоковые модели [10] или модели процессов гибели и размножения [12]. Объединяет их то, что все они рассматривают стохастические мультипликативные процессы, в которых на каждом шаге текущее значение умножается на случайную величину, с произвольной нетривиальной функцией распределения (корректно говоря, распределение Парето является предельным распределением такого мультипликативного стохастического процесса). Кроме того, отметим, что распределение Парето хорошо описывает статистические характеристики катастроф и стихийных бедствий, населения городов, потоков информации в телекоммуникационных сетях, употребимости слов и др. [5, 11, 14, 15, 16].

Содержательным объяснением, является, наверное, следующее. Известно, что процессы научения хорошо описываются экспоненциальными кривыми [17], т.е. зависимость уровня научения (производительности труда, объема выполняемых работ или перерабатываемой информации и т.д.) от времени носит замедленно-асимптотический характер. Качественно, экспонента «порождается» предположением, что скорость научения (производная уровня научения) пропорциональна уже достигнутому уровню научения. Если допустить, что вероятность прекращения деятельности в течение единицы времени постоянна (продолжительность деятельности описывается распределением Пуассона), то получим, что средний результат распределен по Парето [18].

Хрестоматийным примером показателя, описываемого распределением Парето, является эффективность научной деятельности [18]. Первым, кто пытался еще в конце XIX века изучить связь числа публикаций с эффективностью научной деятельности, был англичанин Фрэнсис Голтон [19]. Статистические подходы одним из первых в данной области стал использовать Альфред Лотке, который в 1926 году предложил следующую обратную квадратичную зависимость, известную теперь как закон Лотки [20]: $p(q) = 6 / (\pi^2 q^2)$, где $p(q)$ – доля авторов, опубликовавших q научных работ (в некоторой фиксированной предметной области). Более общим является гиперболический закон $p(q) = p_1 / q^{1 + \alpha}$, где α – характеристический показатель распределения. Для закона Лотки он равен единице. Непрерывным аналогом закона Лотки является распределение Парето, описывающее плотность распределения числа ученых с $z \geq y$ статьями при минимальной продуктивности y.

4. Задача стимулирования Парето-агента

Постановка задачи. Рассмотрим задачу стимулирования, в которой присутствует внешняя вероятностная неопределенность – результат деятельности агента z является случайной величиной, распределение которой зависит от его действия y (термин «внешняя неопределенность» используется потому, что обычно считают, что результат деятельности агента определяется его действием и внешними неопределенными факторами). Подобные задачи являются предметом исследования в теории контрактов [2, 3] – разделе теории управления в социально-экономических системах, изучающем механизмы стимулирования в организационных системах, функционирующих в условиях внешней вероятностной неопределенности (см. также монографию [1], посвященную задачам стимулирования в условиях неопределенности).

Базовой моделью теории контрактов является одноэлементная статическая задача стимулирования в организационной системе (ОС) с внешней вероятностной неопределенностью и симметричной информированностью участников. Будем считать, что агент выбирает действие $y \geq 0$, которое под влиянием внешней среды приводит к реализации результата деятельности $z \geq 0$. Пусть задана плотность распределения вероятности $p(z, y)$ – вероятность реализации результата деятельности z при выборе агентом действия y.

Предположим, что на момент принятия решений участники (центр и агент) не знают результата деятельности, а имеют лишь информацию о распределении $p(z, y)$ и используют ожидаемую полезность для устранения неопределенности, т.е. целевыми функциями участников являются математические ожидания соответствующих функций полезности: функции полезности центра $\tilde{\Phi}(z, y) = H(y) - \tilde{\sigma}(z)$ и функции полезности агента $\tilde{f}(z, y) = \tilde{\sigma}(z) - c(y)$, где $\tilde{\sigma}(z)$ – функция стимулирования, $H(y)$ – функция дохода центра, $c(y)$ – функция затрат агента, относительно которой предположим, что она является гладкой, выпуклой и неубывающей функцией.

Порядок функционирования и информированность участников ОС следующие: центр сообщает агенту систему стимулирования $\tilde{\sigma}(z)$, т.е. зависимость вознаграждения агента от результата его деятельности, после чего агент выбирает свое действие, ненаблюдаемое для центра. Принципиально важно, что в рассматриваемой модели ни центр, ни агент на момент выбора своих стратегий не знают будущего значения результата деятельности.

Агент выберет действие из множества $P(\tilde{\sigma}(\cdot))$ действий, доставляющих максимум математическому ожиданию его функции полезности, т.е.:

$$(6)\ P(\tilde{\sigma}(\cdot)) = \operatorname{Arg}\max_{y \geq 0} \left[\int \tilde{\sigma}(z) p(z, y) dz - c(y)\right].$$

Пусть выполнена гипотеза благожелательности (при прочих равных агент выбирает наиболее выгодные для центра действия). Тогда задача стимулирования заключается в выборе системы стимулирования $\tilde{\sigma}(\cdot)$, максимизирующей эффективность стимулирования – математическое ожидание функции полезности центра на множестве (6):

$$(7)\ \max_{y \in P(\tilde{\sigma}(\cdot))} \left[H(y) - \int \tilde{\sigma}(z) p(z, y) dz\right] \to \max_{\tilde{\sigma}(\cdot)}.$$

Общего аналитического решения задачи (7) на сегодняшний день не известно (см. достаточные условия оптимальности различных систем стимулирования в [1]).

Простой активный элемент. Хрестоматийной моделью вероятностной ОС, в которой удается получить простое аналитическое решение задачи стимулирования, является модель простого активного элемента [21]. Пусть интегральная функция $F(z, y)$ распределения $p(z, y)$ может быть представлена в виде:

$$(8)\ F(z,y)=\begin{cases}F(z), z<y\\ 1, z\geq y\end{cases},$$

где $F(z)$ – некоторая интегральная функция распределения, зависящая только от результата деятельности. Очевидно, что вероятность того, что результат деятельности окажется строго больше действия, равна нулю. Т.е. наличие неопределенности приводит к тому, что результат деятельности агента оказывается не больше его действия. Организационная система, в которой интегральная функция распределения представима в таком виде, называется системой с простым активным элементом.

В [1] доказано, что в системе с простым активным элементом в рамках гипотезы благожелательности оптимальна компенсаторная система стимулирования (равная затратам агента). Более того, компенсаторная система стимулирования оптимальна и в случае, если затраты агента также зависят от результата, а не от действия. Для затрат агента $\widetilde{c}(z)$, зависящих от действия, в [22] показано, что система стимулирования $\widetilde{w}(z)=\int_0^z \frac{\widetilde{c}'(x)}{1-F(x)}dx$ оптимальна, где $\widetilde{w}(z):=u(\widetilde{\sigma}(z))$, при следующих предположениях: функция стимулирования неотрицательна, резервная полезность равна нулю, агент не склонен к риску (его функция полезности $u(\cdot)$ – вогнутая). Т.е. $\widetilde{w}(z)$ – «компенсаторная в смысле математического ожидания» функция стимулирования.

Парето-агент. Будем называть Парето-агентом такого агента, у которого $p(z, y) = p(\alpha, y, z)$, т.е. распределение результатов которого описывается распределением Парето с минимальным значением, равным действию агента (см. выражение (1)). Содержательно, агент выбирает свой уровень усилий (гарантированное значение результата деятельности), и результат будет заведомо не меньше действия, а может оказаться и больше, причем вероятность больших значений результата достаточно высока (распределение Парето принадлежит классу «распределений с тяжелыми хвостами»). Решим задачу (7) для Парето-агента с $\alpha > 1$.

Общим принципом, используемым ниже, является выбор такой системы стимулирования, зависящей от результата деятельности агента, что ее математическое ожидание равно затратам агента в точке плана (или равно значению оптимальной детерминированной системы стимулирования), а точка плана при этом является точкой максимума ожидаемой полезности центра. Из детерминированной теории стимулирования [23] известно, во-первых, что минимальные затраты на реализацию (т.е. побуждению к выбору) любого действия агента (при нулевой резервной полезности) равны затратам агента по выбору этого действия. Во-вторых, известно [1], что ожидаемые затраты центра на стимулирование в случае наличия неопределенности не ниже, чем в детерминированном случае. Следовательно, если в условиях вероятностной неопределенности удается реализовать некоторое действие так, что математическое ожидание затрат центра на стимулирование равно затратам агента по выбору этого действия, то такая система стимулирования оптимальна. Применим этот общий подход для различных классов систем стимулирования.

Линейная система стимулирования. Математическое ожидание функции полезности агента равно:

$$(9)\ E\widetilde{f}(z, y) = E\widetilde{\sigma}(z) - c(y).$$

Фиксируем план $x \geq 0$. Из результатов решения детерминированных задач стимулирования [23] известно, что оптимальной линейной системой стимулирования, реализующей план x, является следующая:

$$(10)\ \sigma_L(x, y) = c'(x)\,(y - x) + c(x).$$

Найдем линейную систему стимулирования $\widetilde{\sigma}_L(x, z) = a z + b$, где a и b – константы, такую, что $E\widetilde{\sigma}_L(x, z) = \sigma_L(x, y)$. Легко вычислить, что константы a и b должны быть следующими: $a = \frac{\alpha-1}{\alpha}c'(x)$, $b = c(x) - c'(x)\,x$. Итак, получаем, что линейная система стимулирования

$$(11)\ \widetilde{\sigma}_L(x, z) = \frac{\alpha-1}{\alpha}c'(x)\,z + c(x) - c'(x)\,x$$

реализует план x (побуждает агента выбрать действие, совпадающее с планом), и ее математическое ожидание в точности равно (для любого $y > 0$) оптимальной детерминированной системе стимулирования (10).

Зная, что агент выберет действие, совпадающее с планом, оптимальный план можно найти из решения следующей задачи:

(12) $x^* = \arg \max\limits_{x \ge 0} \; [H(x) - c(x)]$.

Отметим, что оптимальный план в рассматриваемой вероятностной модели такой же, что и в соответствующем детерминированном случае. Кроме того, с уменьшением неопределенности (росте α) правая часть выражения (11) стремится к правой части выражения (10).

Таким образом, обоснована справедливость следующего утверждения.

Утверждение 1. В модели Парето-агента оптимальна линейная система стимулирования (*11*), (*12*).

Компенсаторная система стимулирования. Задача синтеза оптимальной компенсаторной системы стимулирования в организационной системе с Парето-агентом заключается в нахождении такой системы стимулирования $\tilde{\sigma}_K(z)$, математическое ожидание которой равно затратам агента:

(13) $E\tilde{\sigma}_K(z) = c(y),\ y \ge 0$.

Распишем условие (13) более подробно:

(14) $\alpha\, y^{\alpha} \int\limits_{y}^{+\infty} \frac{\tilde{\sigma}_K(z)}{z^{\alpha+1}}\, dz = c(y),\ y \ge 0$.

Решать уравнение (14) относительно $\tilde{\sigma}_K(z)$ в общем виде – достаточно сложная задача. Поэтому исследуем ее для случая, когда агент имеет функцию затрат типа Кобба-Дугласа: $c(y) = \frac{1}{\gamma}\,(y)^{\gamma}(r)^{1-\gamma}$, $\gamma \ge 1$, и будем искать решение в классе степенных функций:

(15) $\tilde{\sigma}_K(z) = \frac{1}{\beta_0}\; z^{\beta_1}\; r^{1-\beta_2}$.

Подставляя (15) в (14), получаем, что решение $\beta_0 = \frac{\alpha\gamma}{\alpha - \gamma}$, $\beta_1 = \gamma$, $\beta_2 = \gamma$, существует при условии

(16) $1 \le \gamma < \alpha$.

Таким образом, обоснована справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2. Если выполнено условие (*16*)*, то в модели Парето-агента с функцией затрат типа Кобба-Дугласа оптимальна «компенсаторная» система стимулирования*

(17) $\tilde{\sigma}_K(z) = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha\gamma}\; z^{\gamma}\, r^{1-\gamma}$,

в которой план определяется выражением (*12*).

Отметим, с уменьшением неопределенности (росте α) «компенсаторная» система стимулирования (17) стремится к функции затрат агента, т.е. к компенсаторной системе стимулирования, оптимальной в детерминированном случае.

Тарифная (скачкообразная система) стимулирования. Известно (см. [23]), что в детерминированном случае оптимальна скачкообразная система стимулирования

(18) $\sigma_C(x, y) = \begin{cases} c(x), & y \ge x \\ 0, & y < x \end{cases}$,

в которой оптимальное значение плана определяется выражением (12).

Рассмотрим следующую скачкообразную систему стимулирования в модели Парето-агента:

(19) $\tilde{\sigma}_C(x, z) = \begin{cases} c(x), & z \ge x \\ 0, & y < x \end{cases}$.

Вычислим математическое ожидание выражения (19):

(20) $E\tilde{\sigma}_C(x, z) = c(x) \begin{cases} 1, & y \ge x \\ \left(\frac{y}{x}\right)^{\alpha}, & y \le x \end{cases}$.

Условие выгодности для агента выбора действия $x \ge 0$ имеет вид:

(21) $\forall\, y \in [0; x]\ \ \frac{c(y)}{y^{\alpha}} \ge \frac{c(x)}{x^{\alpha}}$.

Таким образом, обоснована справедливость следующего утверждения.

Утверждение 3. Если выполнено

(22) $\forall\, y \in [0;\, x^*]\ \ \dfrac{c(y)}{y^\alpha} \geq \dfrac{c(x^*)}{(x^*)^\alpha}$,

то в модели Парето-агента оптимальна скачкообразная система стимулирования (*19*)*, в которой план определяется выражением* (*12*)*. Если, дополнительно, агент имеет функцию затрат типа Кобба-Дугласа, то условие* (*22*) *переходит в условие* (*16*)*.*

Отметим, с уменьшением неопределенности (росте α) скачкообразная система стимулирования (19) стремится к скачкообразной системе стимулирования (18), которая оптимальна в детерминированном случае.

5. Заключение

Итак, для модели Парето-агента получено решение задачи синтеза оптимальной системы стимулирования. Доказано, что оптимальна линейная система стимулирования, получен ее явный вид (утверждение 1). Приведены достаточные условия оптимальности «компенсаторной» (утверждение 2) и скачкообразной (утверждение 3) систем стимулирования.

Отдельного обсуждения заслуживает влияние неопределенности на эффективность стимулирования. Во-первых, все приведенные выше результаты решения задачи стимулирования в условиях неопределенности удовлетворяют принципу соответствия: при предельном переходе («стремлении» неопределенности к «нулю») вероятностная модель переходит в детерминированную, а оптимальные решения задач стимулирования в условиях неопределенности – в оптимальные решения соответствующих детерминированных задач стимулирования. Во-вторых, эффективность стимулирования Парето-агента (функционирующего в условиях неопределенности) тождественно равна эффективности стимулирования в соответствующей детерминированной организационной системе. Данный факт представляется довольно нетривиальным, так как в [1] доказано, что эффективность стимулирования в условиях вероятностной неопределенности не выше, чем в условиях полной информированности.

Кроме того, отметим, что выше, помимо предположения о конкретном параметрическом виде распределения, введено предположение о нейтральности агента к риску (его функция полезности линейна по вознаграждению): в моделях с нейтральным к риску центром и агентом всегда существует много оптимальных систем стимулирования [1-3, 23].

Линейные системы стимулирования вида $a\,z + b$ всегда оптимальны для монотонных выпуклых функций затрат, имеющих в нуле нулевую производную [23]. Но такие системы стимулирования обладают «неприятным» свойством – они отрицательны для некоторых значениях результатов деятельности. Для Парето-агента можно показать, что при определенных условиях типа (22) неотрицательная функция стимулирования вида max $[0;\, a\,z + b]$ также будет оптимальной.

В общем же случае для безразличного к риску Парето-агента можно использовать приближение так называемой квазикомпенсаторной функции стимулирования – функция стимулирования равна нулю везде, кроме некоторой малой окрестности планового результата. Функция подбирается так, чтобы ее математическое ожидание при выборе планового действия компенсировало затраты. Эта функция стимулирования обеспечивает выбор агентом действия, близкого к плану, при наиболее слабых ограничениях на функцию затрат, но будет неоптимальной для несклонного к риску агента. Подобные задачи и подходы к их решению подробно описаны в [1] и выходят за рамки настоящего исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 *Новиков Д.А.* Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). М.: ИПУ РАН, 1998.

2 *Юдкевич М.М., Подколзина Е.А., Рябинина А.Ю.* Основы теории контрактов: модели и задачи. М.: ГУ ВШЭ, 2002.

3 *Mas-Collel A., Whinston M.D., Green J.R.* Microeconomic theory. N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995.

4 *Заложнев Д.А., Новиков Д.А.* Модели тарифно-премиальных систем оплаты труда. М.: ИПУ РАН, 2006.

5 *Кох Р.* Принцип 80/20. Минск: Попурри, 2004..

6 *Pareto V.* Cours d'Economique Politique. Vol. 2. 1897.

7 *Levy M.* Market efficiency, the Pareto wealth distribution and the Levy distribution of stock returns. Jerusalem: Hebrew University, 2001.

8 *Wold H., Whittle P.* A model, explaining a Pareto distribution of wealth // Econometrica. 1957. Vol. 25. P. 591 – 595.

9 *Pareto V.* Manuele d'Economia Politica. 1906.

10 *Simon H.* On a class of skew distributions / Biometrica. 1957. Vol. 42. P. 425 – 440.

11 *Zipf G.* Human behavior and the principle of least effort. Cambridge: Addison-Westley, 1949.

12 *Davis H.* The analysis of economic time series. Monograph № 6 of the Cowles Commission for Research in Economics, 1941.

13 *Champernowne D.G.* A model of income distribution // Economic Journal. 1953. Vol. 63. P. 318 – 351.

14 *Токарев Д.В.* Оценка вероятностей возникновения аварий // Нефтегазовое дело. 2005. (www.ogbus.ru).

15 *Juran J.* Quality control handbook. NY: McGraw-Hill, 1951.

16 *Krugman P.* The self-organizing economy. Cambridge: Blackwell, 1996.

17 *Новиков Д.А.* Закономерности итеративного научения. М.: ИПУ РАН, 1998.

18 *Яблонский А.И.* Модели и методы исследования науки. М.: Эдиториал УРСС, 2001.

19 *Арутюнов В.С., Стрекова Л.Н.* Социологические основы научной деятельности. М.: Наука, 2003.

20 *Lotka A.* The frequency distribution of scientific productivity // Journal of Washington Academy of science. 1926. Vol. 16. P. 317 – 323.

21 *Бурков В.Н.* Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977.

22 *Губко М.В.* Задача теории контрактов для модели простого активного элемента / Управление в социально-экономических системах. Сборник трудов молодых ученых ИПУ РАН. М.: Фонд «Проблемы управления», 2000. С. 9 – 19.

23 *Новиков Д.А.* Стимулирование в организационных системах. М.: Синтег, 2003.