Институт проблем управления РАН

Самарский государственный аэрокосмический университет

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

СБОРНИК ***ТРУДОВ***

Выпуск 8

Москва – 2004

Институт проблем управления РАН

Самарский государственный аэрокосмический университет

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 8

Общая редакция – В.Г. Засканов, Д.А. Новиков

Москва – 2004

УДК 007
ББК 32.81
У 67

У67 **Управление большими системами** / Сборник трудов. Выпуск 8. Общая редакция – В.Г. Засканов, Д.А. Новиков. М.: ИПУ РАН, 2004. – 190 с.

В сборнике представлены вводный курс лекций по теории управления организационными системами, а также статьи ученых, специализирующихся в области разработки и внедрения моделей и методов управления социально-экономическими системами.

Утверждено к печати Редакционными советами
ИПУ РАН и СГАУ

Ó ИПУ РАН, СГАУ, 2004

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ……5
1.НОВИКОВ Д.А. ВВОДНЫЙ КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ОРГАНИЗАЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ
ПРЕДИСЛОВИЕ..... 5
ВВЕДЕНИЕ..... 9
ОРГАНИЗАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ..... 10
ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ 12
МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ 14
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР..... 18
ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ИГРЫ 24
КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ..... 31
МОТИВАЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ..... 32
ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ..... 44
МНОГОЭЛЕМЕНТНЫЕ СИСТЕМЫ 47
СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ КОНТРОЛЕМ..... 56
МЕХАНИЗМЫ ПЛАНИРОВАНИЯ..... 62
МЕХАНИЗМЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСА 68
МЕХАНИЗМЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАТРАТ..... 74
МЕХАНИЗМЫ ВНУТРЕННИХ ЦЕН..... 77
МЕХАНИЗМЫ ЭКСПЕРТИЗЫ..... 82
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 87
ЛИТЕРАТУРА..... 87
МЕХАНИЗМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ В ПОЛИКОМПОНЕНТНЫХ СИСТЕМАХ..... 116

2. ПРИКЛАДНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ УПРАВЛЕНИЯ ОРГАНИЗАЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ
(Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева, ИПУ РАН, г. Москва)
БОГАТЫРЕВ В.Д.
ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ ПРОМЫШЛЕННЫМИ КОМПЛЕКСАМИ ПУТЕМ РАЗРАБОТКИ И ВНЕДРЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ СОГЛАСОВАННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ……87
ВАГАПОВА Д.З.
МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИНАНСОВЫХ ПОТОКОВ В ПРОЦЕДУРЕ АМОРТИЗАЦИИ ИПОТЕЧНОГО КРЕДИТА С ПОСТОЯННЫМИ ПО ВЕЛИЧИНЕ ВЫПЛАТАМИ……..105
ГЕРАСЬКИН М.И.
МЕХАНИЗМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ В ПОЛИКОМПОНЕНТНЫХ СИСТЕМАХ……115
ЗАЛОЖНЕВ А.Ю.
МЕТОДИКА ОПИСАНИЯ БУХГАЛТЕРСКОГО УЧЕТА. ФОРМАЛИЗОВАННЫЙ ПОДХОД…...137
ЗАСКАНОВ В.Г.
ОЦЕНКА ЭКОНОМИЧЕСКОЙ БЕЗОПАСНОСТИ КРУПНЫХ ПРОМЫШЛЕННЫХ РЕГИОНОВ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ИХ АВТОНОМНОСТИ И НЕЗАВИСИМОСТИ……..153
ПАВЛОВ О.В.
ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УЧАСТНИКОВ КОРПОРАТИВНЫХ СИСТЕМ……157
СОРОКИНА М.Г.
СИСТЕМА МОДЕЛЕЙ И МЕТОДЫ ИХ АНАЛИЗА ДЛЯ ОБОСНОВАНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ БАНКОМ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ……176

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория управления, как самостоятельный раздел науки формировалась на заре прошлого века. Наиболее интенсивно данное направление развивалось в области управления техническими объектами (теория автоматического регулирования, автоматизация технологических процессов и т.д.). Вместе с тем большинство объектов вне зависимости от их размеров (мировое сообщество, государство, регион, промышленный комплекс, рабочая бригада) включают в свой состав человека, людей с их свойством целенаправленного поведения. Наличие факта целенаправленной реакции объекта управления в организационной системе, т.е. в системе включающей в свой состав помимо техники людей, на управляющие воздействия порождают своеобразные, специфичные задачи, существенно отличные от задач управления техническими объектами. Отметим, что в нашей стране (имеется в виду бывший СССР) вопросы и проблемы управления организационными системами вплоть до 70 годов прошлого века практически не рассматривались. Объяснялось это теми политическими доктринами, которые имели место. Речь идет о том, что СССР представляло собой жестко централизованную систему планирования и управления. Наличие единого центрального органа (ЦК КПСС) с хорошо отлаженными вертикальными связями, позволяло достаточно успешно решать задачи получения сбалансированных планов развития народного хозяйства. Игнорирование интересов, локальных целей исполнительных элементов в определенной степени компенсировалось наличием идеологической системы обработки общественного сознания. Вспомним: планы партии – планы народа; народ и партия едины; меньшинство подчиняется большинству; единица ноль, единица вздор (В. Маяковский) и т.д. Подобный сценарий развития был возможен лишь при наличии жесточайшей системы контроля и надзора, как это было в эпоху И.В. Сталина. Однако по мере перехода на более мягкие, демократичные формы управления (период руководства Н.С. Хрущева и последующих лидеров государства) все более стала сказываться активность людей в выборе стратегий своего поведения. Вопреки плановым установкам – повышать производительность труда, снижать себестоимость продукции, повышать ее качество, в реальной жизни (на этапе вы-

полнения плановых зданий) наблюдалось прямо противоположные тенденции. Экономическая эффективность производства и всего народного хозяйства неуклонно падала вниз. С очевидностью стала необходимость серьезного реформирования всего уклада жизни, организации новых механизмов взаимодействия всех элементов системы народного хозяйства. Однако отсутствие серьезного, глубоко проработанного теоретического аппарата, методических инструментов решения подобных задач привело к тому, что крупные народнохозяйственные решения, а также решения связанные с реорганизацией деятельности предприятий принимались на основе опыта и интуиции. Отметим при этом, что опыт, накопленный в прежней социалистической системе и был мало пригоден для новых условий. Попытки применить классические результаты экономической теории западных стран также не дали положительных результатов т.к. не учитывали специфики переходного периода России к рыночным методам хозяйствования.

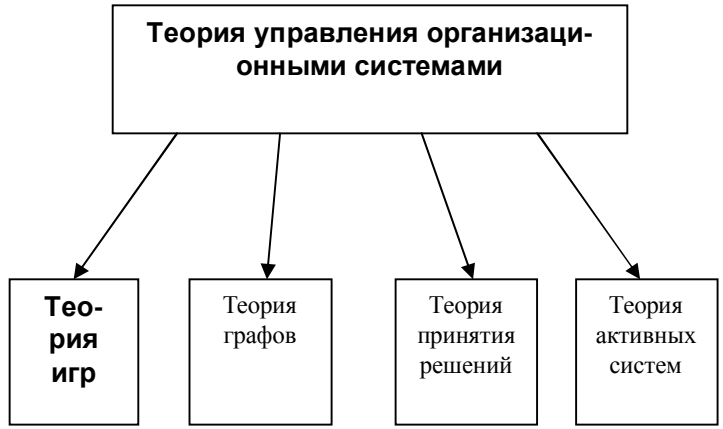
Возникшая, таким образом, объективная потребность в методах и средствах совершенствования хозяйственных механизмов, требует разработки соответствующего теоретического аппарата.

Рассматривая ретроспективно развитие теории управления организационными системами следует выделить самостоятельные ветви данного научного направления, которые начали развиваться задолго до появления термина «организационные системы», но которые органично входят в целостный комплекс рассматриваемой научной дисциплины. К ним относится

- теория игр
- теория графов
- теория принятия решений

Кроме указанных направлений особо следует выделить теорию активных систем, сформировавшуюся в семидесятых годах прошлого века, которая акцентирует внимание на целенаправленность поведения элементов организационных систем, о чем шла речь выше.

Таким образом совокупность теоретических средств, направленных на решение задач управления организационными системами во всей их совокупности можно представить следующей схемой



Развитие теоретического и методического аппарата решения подобного класса задач у нас в стране, что впрочем типично для развития науки, идет по двум направлениям. Разработка фундаментальных теоретических основ, которые определяют концептуальные подходы и принципиальные, основополагающие методы решения задач. Второе направление – это прикладные исследования, направленные на решение задач управления конкретными объектами. Данное направление отражает специфические особенности объектов, позволяет детализировать и уточнять результаты и рекомендации фундаментальных исследований. Оба этих направления взаимосвязаны и дополняют друг друга.

В связи с этим большое значение приобретают контакты представителей этих двух направлений. В результате этих контактов прикладники осваивают передовые достижения фундаментальной науки, а ученые – теоретики знакомятся с результатами прикладных исследований, что позволяет им уточнять и корректировать концепции основополагающих фундаментальных теоретических исследований.

В течение практически тридцати лет Куйбышевский авиационный институт (ныне Самарский государственный аэрокосмический университет) поддерживает творческие отношения с Институтом автоматики и телемеханики (ныне Институт проблем управления РАН) в области исследования и разработки методов управления

организационными системами. Одним из последних мероприятий, осуществленных в рамках этого сотрудничества явился научно-методический семинар, проведенный в июле этого года на факультете экономики и управления СГАУ. Семинар проводился под руководством ведущего научного сотрудника лаборатории активных систем ИПУ РАН, д.т.н., профессора Новикова Дмитрия Александровича, являющегося крупным специалистом в области теории управления организационными системами (автор 13 монографий, 154 опубликованных работ).

В работе семинара приняли участие ведущие профессора (В.Г. Засканов, Г.М. Гришанов, Ю.А. Советкин), докторанты (к.э.н., доцент Сорокина М.Г., к.т.н., доцент Павлов О.В., к.э.н., доцент Богатырев В.Д., к.т.н., доцент Гераськин М.И.), и молодые ученые факультета экономики и управления (к.э.н., ассистент Зиновьева О.Г., к.э.н., ассистент Иванов Д.Ю., ст.преподаватель Голубева Т.В., аспирант Цой И.А., аспирант Клевцов Д.В, аспирант Озернов Р.С., к.э.н., ассистент Цапенко М.В., аспирант Матвеева Ю.В.)

Семинар, проходивший с 15.07.04 по 20.07.04 состоял из цикла лекций, прочитанного профессором Д.А. Новиковым и докладов сделанных докторантами факультета экономики и управления СГАУ Сорокиной М.Г., Богатыревым В.Д, Павловым О.В, Гераськиным М.И. Были обсуждены актуальные проблемы теории и практики организационного управления и намечены пути дальнейшего развития творческого сотрудничества.

Декан факультета экономики
и управления СГАУ, д.т.н., профессор В.Г. Засканов

НОВИКОВ Д.А.

ВВОДНЫЙ КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ОРГАНИЗАЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ

Введение

Настоящий материал представляет собой конспект лекций[1], отражающих содержание вводного курса по *теории управления организационными системами* (ОС).

С методической точки зрения структура учебных курсов «социально-экономического цикла» на кафедре «Проблем управления» Московского физико-технического института следующая (см. рисунок 1):

1. Прикладная математика (теория игр [3], теория графов [1], теория принятия решений) – вводные курсы (каждый по одному семестру), которые дают необходимый математический аппарат.

2. Теория управления организационными системами (два семестра) – курс, содержащий базовые модели и механизмы управления.

3. Прикладные (частные) курсы (по одному семестру) – управление проектами, внутрифирменное управление и т.д., демонстрирующие применение теории в различных прикладных областях.

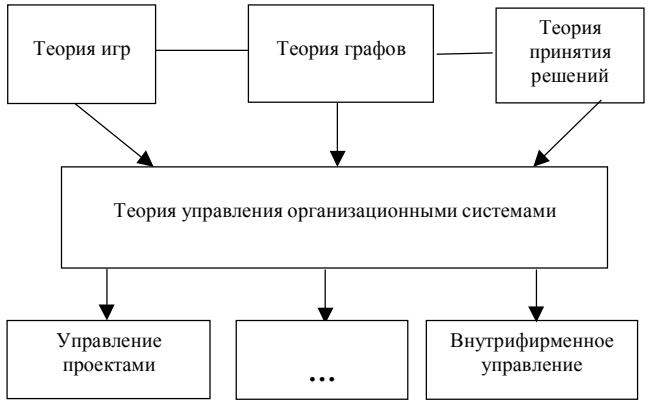


Рис. 1. Структура учебных курсов

[1] *Автор признателен Д.Ю. Иванову и И.А. Цой за большую работу по обработке материала настоящих лекций.*

Курс теории управления ОС является центральным. Все его результаты используются дальше, поэтому он является системообразующим и ключевым. Настоящий материал представляет собой «урезанный» курс (примерно 12-15 академических часов), содержащий минимально необходимые сведения. Учебным пособием по полноценному (годовому) курсу является [5], по «продвинутому» курсу – [2].

Ниже рассматриваются три крупных блока – модели принятия решений и постановка задачи управления (в качестве дополнительной литературы можно рекомендовать [2, 3]), механизмы стимулирования (в качестве дополнительной литературы можно рекомендовать [4]) и механизмы планирования (в качестве дополнительной литературы можно рекомендовать [2, 6]).

Следует отметить, что при редактировании данного материала (как стенограммы лекций) автор стремился сохранить элементы разговорного языка, иногда в ущерб литературности и корректности изложения.

Организационные системы

Предметом теории управления организационными системами являются организации. В «Философском энциклопедическом словаре» приводится следующее определение[1] *организации*: «1) внутренняя упорядоченность, согласованность взаимодействия более или менее дифференцированных и автономных частей целого, обусловленная его строением; 2) совокупность процессов или действий, ведущих к образованию и совершенствованию взаимосвязей между частями целого; 3) объединение людей, совместно реализующих некоторую программу или цель и действующих на основе определенных процедур и правил».

То есть термин "организация" может применяться для обозначения свойства, процесса и объекта. Мы будем использовать последнее определение, то есть под *организационной системой* будем понимать организацию как объединение людей, совместно реализующих некоторую программу или цель и действующих на основе определенных процедур и правил. Отметим, что наличие процедур и

[1] *Вновь вводимые термины выделены курсивом* (*см. также Глоссарий на сайте* www.mtas.ru).

правил, регламентирующих совместную деятельность членов организации (то есть, наличие *механизма функционирования*), является определяющим свойством и отличает организацию от группы и коллектива.

Общее определение *механизма* таково – «система, устройство, определяющее порядок какого-либо вида деятельности». Помимо механизма функционирования можно выделить *механизм управления* – совокупность процедур принятия управленческих решений.

Таким образом, механизмы функционирования и механизмы управления определяют как ведут себя члены организации[1], и как они принимают решения.

Для того, чтобы управляющий орган – *центр* – выбрал ту или иную процедуру принятия решений (тот или иной механизм управления, то есть зависимость своих действий от целей организации и действий управляемых субъектов – *агентов*) он должен уметь предсказывать поведение агентов – их реакцию на те или иные управляющие воздействия. Экспериментировать в жизни, применяя различные управления и изучая реакцию подчиненных, не эффективно и практически никогда не представляется возможным. Здесь на помощь приходит *моделирование* – метод исследования систем управления на моделях. Имея адекватную модель, можно с ее помощью проанализировать реакции управляемой системы (этап *анализа*), а затем выбрать и использовать на практике (этап *синтеза*) то управляющее воздействие, которое приводит к требуемой реакции.

Наличие моделей и механизмов управления привлекательно как с точки зрения управляющего органа – так как позволяет предсказать поведение управляемых субъектов, так и с точки зрения управляемых субъектов – так как делает предсказуемым поведение управляющих органов. То есть, снижение неопределенности за счет использования механизмов управления является одним из существенных свойств организации как социального института.

С точки зрения истории, в конце 1960-х годов XX века, на фоне бурного развития кибернетики, исследования операций, математической теории управления (теории автоматического регулирования –

[1] *С этой точки зрения механизм управления можно рассматривать как синоним метода управления, так как и тот и другой определяют как осуществляется управление.*

ТАР) и интенсивного внедрения их результатов при создании новых и модернизации существующих технических систем, практически одновременно во многих научных центрах как в СССР, так и за рубежом, начали предприниматься попытки применения общих подходов теории управления для разработки математических моделей социальных и экономических систем (теория активных систем – ТАС, теория иерархических игр – ТИИ, Mechanism Design – MD) – см. рисунок 1.

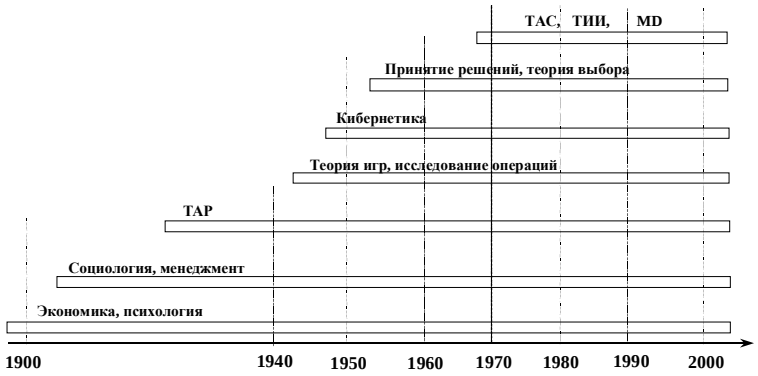


Рис. 2. Хронология развития представлений об организационных системах

Задача управления

Если речь идет об управлении организационными системами, давайте поймем сначала, что такое управление. Формальное определение таково: *управление* – воздействие на управляемую систему с целью обеспечения требуемого ее поведения. Значит надо детализировать, что такое «управляемая система», что такое «воздействие», что такое «поведение», с чьей точки зрения «требуемым» оно должно быть и т.д.

Рассмотрим простейшую входо-выходную модель системы, состоящей из управляющего органа – центра – и управляемого субъекта[1] – агента – см. рисунок 3. Имеются: на входе – управляющее воздействие и внешние воздействия, на выходе – действие управляемого субъекта. Добавляем обратную связь (управляющий орган знает состояние – действие – субъекта) и получаем структуру простейшей системы управления.

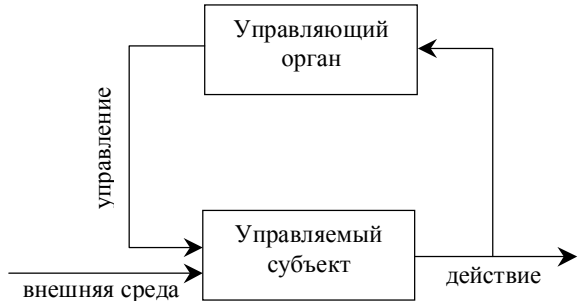


Рис. 3. Входо-выходная модель системы управления

Кто что выбирает из участников системы? Пусть состояние системы описывается действием агента $y \in A$, принадлежащим некоторому допустимому множеству A. Допустим, есть управление $u \in U$, принадлежащее множеству U. Пусть также есть *критерий эффективности функционирования* системы $K(u, y)$, который зависит от переменных, описывающих эту систему, т.е. от управления и от состояния системы. Мы будем пользоваться при описании предпочтений участников и при описании постановки задач управления скалярными моделями, т.е. считать, что все функционалы отображают множества в числовую ось: $K(u, y): A \times U \to \Re^1$. Это значит,

[1] *Зададимся вопросом – в чем разница между управляемым субъектом и объектом управления? Термин «объект» часто применяется в теории управления и в принятия решений. Объект, по определению, не обладает активностью, в то время, как субъект активен и способен самостоятельно принимать решения. Поэтому можно применять оба термина, но, говоря "субъект", мы подчеркиваем, что речь идет о людях. Далее мы будем говорить, центр и агент, подразумевая активность и того, и другого.*

что многокритериальных задач мы рассматривать не будем – у них есть своя специфика.

Предположим, что известна реакция управляемого субъекта на то или иное управление. Пусть зависимость очень простая – состояние объекта является известной функцией от управления: $y = G(u)$, где $G(\cdot)$ – модель управляемого субъекта, которая описывает его реакцию на управляющее воздействие. Коль скоро известна эта зависимость, если мы ее подставим в критерий эффективности функционирования, то получим функционал $\Phi(u) = K(u, G(u))$, который будет зависеть только от управления. Вот этот функционал называется *эффективностью управления*. Дальше задача заключается в поиске *оптимального управления*, то есть допустимого управления, обладающего максимальной эффективностью: $\Phi(u) \to \max\limits_{u \in U}$. Это – задача синтеза оптимального управления, или просто "*задача управления*".

На первый взгляд все выглядит очень просто, в чем же заключается хитрость? Действительно, если все функционалы и множества известны, получим оптимизационную задачу, а решать ее – дело математики. Проблема заключается в том, что модель управляемого субъекта $G(\cdot)$ может быть очень сложной. По крайней мере, она должна быть сложной. Если мы описываем человека, группу, коллектив, организацию, предприятие, то понятно, что объект управления сложный, и модель должна быть адекватно сложной. Поэтому для того, чтобы перейти к детализации задачи управления, необходимо вернуться к построению модели управляемого субъекта. Математическим описанием поведения людей занимается теория принятия решений и теория игр. Поэтому, сделаем маленький экскурс в эти теории для того, чтобы понять, какого рода известными моделями мы можем пользоваться.

Модели принятия решений

Как описывается поведение человека? В экономике с середины XIX века существует концепция максимизации полезности, т.е. концепция экономического человека, который ведет себя таким образом, чтобы максимизировать свою полезность. Несмотря на всю априорную ограниченность этой теории – потому что не всегда понятно, что такое полезность, почему человек стремиться ее максимизировать, – концепция оказалась плодотворной, и ничего лучшего пока не изобретено.

Пусть имеется один субъект, который может выбирать действия из какого-то множества. Предположим, что предпочтения этого субъекта описывается функцией полезности $f(y): A \to \Re^1$ (или целевой функцией, функцией предпочтения – будем использовать эти термины как синонимы), которая отображает множество его *действий* (альтернатив) A на числовую ось $\hat{A}^1$. Значения этой функции позволяют сравнивать разные альтернативы. Если есть два варианта – два элемента из множества допустимых действий, то лучшим будет тот, который приводит к большему значению функции. Следовательно, агент будет максимизировать свою полезность и производить выбор из *множества выбора*, которое представляет собой множество максимумов его целевой функции: $P(f(\cdot), A) = \operatorname{Arg}\max\limits_{y \in A} f(y)$. Значит, множество выбора агента зависит от его предпочтений $f(x)$ и от того множества A, из которого он производит выбор.

Множество выбора зависит от двух составляющих: от функции и от допустимого множества. Описывая модель поведения управляемого субъекта, зная, что управление – некоторое воздействие на субъект, в рамках этой модели видно, что воздействовать на субъект можно, влияя на его целевую функцию и влияя на то множество, из которого он делает выбор. Предположение, что агент производит выбор из множества выбора (то есть, стремится максимизировать свою целевую функцию) называется *гипотезой рационального поведения*, которая заключается в том, что агент выбирает с учетом всей имеющейся у него информации наилучшую с его точки зрения допустимую альтернативу, т.е. ту альтернативу, на которой достигается максимум его целевой функции.

Замечательно, но эта модель слишком простая, и в жизни редко бывает так, что наш выбор однозначно определяет наш выигрыш. Иногда вмешиваются какие-то факторы, которые нам не подконтрольны. Давайте попробуем учесть их в модели следующим образом: пусть существует неопределенный фактор $q \in \Omega$ – *состояние природы*. Наши предпочтения уже зависят от того, что выбираем мы, и от этого состояния природы, т.е. предпочтения определены на

декартовом произведении множества допустимых действий и множества возможный состояния природы, и целевая функция отображает это декартово произведение в числовую ось:

$$f(y,q): A\times\Omega \to R^1.$$

Написать такую же формулу, как и для предыдущего случая, для такой целевой функции мы уже не можем, потому что, если агент будет выбирать действие, максимизирующее его целевую функцию, то максимум будет зависеть от того, каково будет состояние природы. Для того, чтобы описать принятие решений в условиях неопределенности, нужно ввести новую гипотезу – *гипотезу детерминизма*: субъект, принимая решение, стремиться устранить неопределенность и принимать решения в условиях полной информированности. Для этого он должен перейти от целевой функции, зависящей от неопределенных факторов, к целевой функции, которая зависит только от того, что он может выбрать сам.

Здесь возможны следующие варианты:

1. Подстановка какого-то конкретного значения q' состояния природы. Например, я считаю, что завтра будет дождь. И это значение подставляется в целевую функцию и ищется максимум $f(y,q')$ по y. Но не всегда это удается. Значение, выбранное агентом, вопрос психологический (например, я думаю, что курс доллара завтра будет столько-то рублей, но не могу объяснить почему) – ответить за него мы не можем.

2. Предположим, что мы – пессимисты и считаем, что реализуется наихудшее состояние природы. Такой принцип принятия решений называется принципом *максимального гарантированного результата* и заключается в следующем: действие агента будет доставлять максимум его целевой функции при условии, что он рассчитывает на наихудшее для себя значение неопределенного параметра. Тогда он берет сначала минимум по состоянию природы, а потом максимум по своему действию:

$$y^o \in \operatorname{Arg}\max_{y\in A}\min_{q\in\Omega} f(y,q).$$

Преимущества данного принципа принятия решений: он дает оценку снизу значения целевой функции (если мы подставим наше действие в целевую функцию, то меньше данного значения не получим), т.е. это точка отсчета снизу. Он плох своей крайней пессимистичностью, т.к., если природа не настроена против нас, то такое допущение неверно. Если под природой понимать не социально-экономическое окружение, а то, что творится за окном, то в этом смысле природе безразлично то, что мы с вами делаем.

3. Поэтому, естественно, можно использовать и другую крайность – крайний оптимизм. Т.е., рассчитывать на то, что природа к нам благосклонна, и выбирает действие, которое для нас наиболее благоприятно. Тогда нужно выбирать максимум целевой функции при условии реализации наилучшего состояния природы:

$$y^o \in \operatorname{Arg}\max_{y\in A}\max_{q\in\Omega} f(y,q).$$

Это называется *критерий оптимизма*, и он дает оценку сверху. Понятно, что лучше уже не будет. Этим принцип оптимизма хорош, но этим он и плох. Понятно, что крайний оптимизм, как и крайний пессимизм, в жизни редко встречаются и редко выживают.

Возможны любые комбинации этих критериев, можно брать их линейную свертку, то есть, балансировать между оптимизмом и пессимизмом.

Вот три варианта устранения неопределенности в условиях, когда о неопределенном параметре мы знаем только то, что он принадлежит заданному множеству. Такая неопределенность называется *интервальной* – мы знаем «интервал» значений неопределенного параметра. Эту информацию мы используем, когда берем минимум или максимум по множеству возможных значений неопределенного параметра.

Предположим, что у нас появилась дополнительная информация о значении неопределенного параметра q, принадлежащего множеству W. Допустим, что известно распределение вероятностей $p(q)$ на этом множестве (соответствующая неопределенность называется *вероятностной*), тогда логично использовать это знание, и устранять неопределенность следующим образом: у нас есть целевая функция $f(\cdot)$, зависящая от нашего действия и значения неопределенного параметра. Давайте возьмем от нее математическое ожидание по известному распределению, получим функцию *ожидаемой полезности* ("ожидаемой" с точки зрения математического ожидания) $w(y)=\int_\Omega f(y,q)p(q)dq$. Теперь, устранив неопределенность взяти-

ем математического ожидания, снова получили детерминированную модель. Можно максимизировать функцию ожидаемой полезности, зависящей только от действия, выбором этого действия.

Возможны и другие способы устранения неопределенности. Можно рассчитать риск, например, вероятность того, что значение целевой функции окажется меньше, чем заданное. И этот риск минимизировать, т.е. использовать не первый момент распределения, а дисперсию и другие характеристики. Подходы могут быть разные, главное – устранить зависимость от неопределенного параметра, что необходимо в силу гипотезы детерминизма, которая требует, чтобы мы устранили неопределенность, а потом принимали решения в условиях полной информированности.

Возможна другая информация – мы можем знать какие-то значения функций принадлежности для состояний природы (нечеткая неопределенность). Соответствующие модели рассмотрены в [5], заниматься ими подробно мы не будем.

Давайте усложнять ситуацию дальше. Мы начали с того, что была функция, зависящая только от нашего действия, потом добавили неопределенность в виде параметра, описывающего внешнюю среду. Но есть еще другие люди, мы взаимодействуем с другими людьми, а значит, должны описать это взаимодействие.

Элементы теории игр

Теория игр описывает взаимодействие таких рациональных субъектов в ситуации, когда выигрыш одного зависит от действий всех, то есть *игра* определяется как такое взаимодействие субъектов, что выигрыш каждого игрока в общем случае зависит от действий всех.

Давайте формализуем эту ситуацию. Пусть есть множество *игроков* $N = \{1,2,...,n\}$. i-ый игрок выбирает действие y_i из множества своих допустимых действий $y_i \in A_i$, $i \in N$. Действия всех игроков называются *ситуацией игры*: $y = (y_1,...,y_n)$. Целевая функция i-го игрока зависит от вектора действий всех игроков y и является отображением $f_i(y): A' \to \Re^1$ множества, являющегося декартовым произведением множества допустимых действий всех игроков $A' = \prod_{i \in N} A_i$ в числовую ось. Т.е. каждой комбинации действий

игроков соответствует некоторый выигрыш каждого из них. Совокупность множества игроков (агентов), целевых функций и допустимых множеств агентов $\Gamma_0 = \{N, \{f_i(\cdot)\}_{i \in N}, \{A_i\}_{i \in N}\}$ называется *игрой в нормальной форме* при условии, что каждый из игроков выбирает свои действия однократно, одновременно с другими игроками и независимо, то есть, не имея возможности договариваться с ними о своих стратегиях поведения – модель некооперативного поведения.

Давайте посмотрим на целевую функцию i-го игрока и попробуем применить к ней гипотезу рационального поведения. Игрок рационален, i-ый игрок выбирает i-ую компоненту вектора y, и своим выбором пытается максимизировать свою целевую функцию: " $f_i(y) \to \max$ ". Но то его действие, на котором достигается максимум целевой функции, будет зависеть от выбора других агентов. Задача такого вида в некотором смысле бессмысленна, т.к. ее решением будет действие $y_i^*(y_{-i})$, зависящее от действий всех других игроков – вектора $y_{-i} = (y_1,...,y_{i-1},y_{i+1},...,y_n)$, который называется *обстановкой игры* для i-го агента.

Рассмотрим возможные рассуждения отдельного игрока (агента): "Если остальные будут вести себя таким-то образом, то мне нужно вести себя таким образом, который максимизирует мою целевую функцию при данной обстановке. Но для того, чтобы выбрать свое действие, мне нужно знать, как будут себя вести остальные. Значит, нужно делать предположения о поведении остальных игроков". По аналогии с тем, как мы устраняли неопределенность в случае, когда был один субъект, здесь имеется множество игроков с так называемой *игровой неопределенностью*, т.е. неопределенностью, порождаемой целенаправленным поведением других игроков. Каждый игрок не может априори сказать, что сделают остальные. Рассмотрим возможные варианты.

1) Пусть i-ый игрок считает, что все остальные игроки играют против него. Это – критерий пессимизма, который соответствует тому, что есть целевая функция i-го игрока, которая зависит от его действия и от действия остальных игроков, и он выбирает действие

$y_i^{\circ} \in \operatorname{Arg}\max_{y_i \in A_i} \min_{y_{-i} \in A_{-i}} f_i(y_i, y_{-i})$, где $A_{-i} = \prod_{j \neq i} A_j$. Он считает, что остальные игроки, несмотря на свои собственные интересы, будут действовать против него, а уж выбором своего действия он будет максимизировать то, что зависит от него. Конструкция аналогична рассмотренному выше принципу максимального гарантированного результата в условиях интервальной неопределенности: берется сначала минимум по тому, что не зависит от рассматриваемого субъекта, потом – максимум по тому, что от него зависит. Такой принцип хорош тем, что всегда дает какое-то однозначное решение: если функция хорошая, если минимум и максимум достигаются, то мы можем подсчитать этот минимум и максимум. Плох такой принцип тем, что игрок, принимающий решения, считает, что все остальные играют против него, и он забывает про то, что у остальных есть свои интересы, и, наверное, цель каждого игрока – максимизировать свою целевую функцию, а не сделать хуже партнеру (это может быть частным случаем целевой функции, но, к счастью, не всегда в жизни так бывает).

Определенный выше вектор действий игроков называется *максиминным*, или *гарантирующим равновесием*. Это один из вариантов определения исхода игры. Можно сказать, что один из возможных вариантов поведения игроков – каждый из них выберет гарантирующую стратегию, т.е. реализует максиминное равновесие.

Но этот вариант не единственен. И основная проблема теории игр на сегодняшний день заключается в том, что не существует одной концепции решения игры, т.е. мы не можем, глядя на целевые функции и допустимые множества, сказать, что игроки сыграют вот так-то. Необходимо вводить еще какие-то предположения, что приводит к разным прогнозируемым исходам игры. Ввели предположение о гарантирующей стратегии – получили максиминное равновесие. В разных моделях используются разные предположения, которые приводят к различным концепциям равновесия. Поэтому рассмотрим некоторые другие варианты.

2) Представим себе такую ситуацию, что целевая функция i-го игрока $f_i(y)$ достигает максимума по его действию в точке, которая не зависит от действий других игроков, т.е. у игрока существует его действие, которое является наилучшим независимо от того, что

делают оппоненты. Редко в жизни такое бывает, что мы действуем, не оглядываясь на остальных. Но если такое случается, то можно сразу это действие вычислить и сказать, что его и надо предпринимать. Это оптимальное действие, не зависящее от обстановки, называется *доминантной стратегией* агента. Формальная запись говорит следующее: стратегия y_i^d будет доминантной, если какая бы обстановка игры не складывалась и какое бы действие не выбирал i-ый игрок при этой обстановке, его выигрыш будет максимальным при выборе именно доминантной стратегии:

$$\forall y_i \in A_i \quad \forall y_{-i} \in A_{-i} \quad f_i(y_i^d, y_{-i}) \geq f_i(y_i, y_{-i}).$$

Отметим, что в обеих частях неравенства фигурирует произвольная, но одна и та же обстановка.

Если у каждого игрока существует доминантная стратегия, то совокупность доминантных стратегий называется *равновесием в доминантных стратегиях* (РДС) $\{y_i^d\}_{i \in N}$. Это – идеальная ситуация для исследователя, описывающего математическую модель. Если удалось построить такую модель, в которой есть равновесие в доминантных стратегиях игры управляемых субъектов – это замечательно, т.к. сложно описывать взаимодействие субъектов между собой, учитывать, как они друг на друга влияют, как они принимают решения. Если есть равновесие в доминантных стратегиях, то каждый принимает решение независимо. А описывать независимое принятие решений гораздо проще. Представьте сколько попарных зависимостей может быть между n агентами, а тут мы можем управлять каждым независимо. Но такая ситуация встречается очень редко.

3) Гораздо чаще существует *равновесие Нэша* (РН). Джон Нэш, американский математик, в начале 50-х годов XX века предложил следующее: устойчивым исходом взаимодействия агентов можно считать такой вектор их действий, от которого в одиночку никому не выгодно отклоняться. Это значит, что ни один из агентов, в одиночку меняя свою стратегию на другую, не может увеличить свой выигрыш при условии, что остальные своих стратегий не меняют.

Формальное определение равновесия Нэша $y^N \in A'$ таково: $\forall i \in N \quad \forall y_i \in A_i \quad f_i(y_i^N, y_{-i}^N) \geq f_i(y_i, y_{-i}^N)$, то есть для любого агента и для любого допустимого его действия выбор им равновес-

ного по Нэшу действия дает ему выигрыш не меньший, чем при выборе любого другого действия при условии, что остальные игроки играют равновесные по Нэшу стратегии.

Отличие между изложенными подходами заключается в том, что в формулировке равновесия в доминантных стратегиях фигурирует произвольная обстановка, то есть доминантная стратегия – наилучшая при любой обстановке. А стратегия по Нэшу – наилучшая при «нэшевской» обстановке.

Равновесие по Нэшу хорошо тем, что в большинстве моделей оно существует. Одним из его недостатков является то, что оно не всегда единственно. Представьте, если есть два равновесия, то как предсказать, в каком из них окажутся агенты. Нужны дополнительные предположения.

Кроме того, равновесие по Нэшу не устойчиво к отклонению двух и более игроков. По определению одному агенту не выгодно отклоняться, но это не значит, что если два агента договорились и одновременно отклонились, то они не смогут оба выиграть. То есть равновесие Нэша – существенно некооперативная концепция равновесия.

4) Помимо вышесказанного, необходимо ввести понятие точки Парето. Вектор действий агентов $y^P \in A'$, принадлежащий множеству A' допустимых векторов действий, будет *эффективным по Парето*, если для любого другого вектора действий найдется агент такой, что значение его целевой функции будет строго меньше, чем в точке Парето $\forall y \neq y^P \ \ \exists i \in N \ \ f_i(y) < f_i(y^P)$.

Т.е. точка Парето – такая точка, отклоняясь от которой, мы не можем одновременно увеличить значения целевых функций всех игроков. Концепция эффективности по Парето хороша тем, что позволяет говорить, что, если мы можем сделать лучше всем, то это надо делать. Любая разумная модель должна удовлетворять эффективности по Парето.

Вопрос заключается в том, как соотносятся все вышеперечисленные концепции равновесия (максиминное равновесие, РДС и равновесие Нэша) с эффективностью по Парето, т.к. хочется, чтобы результат, приносящий индивидуальный максимум, был бы еще эффективным для общества в целом. Оказывается, что эффектив-

ность по Парето, к сожалению, никак не соотносится ни с одной из трех концепций решения игры, изложенных выше.

<u>Пример 1.</u> Рассмотрим хрестоматийный пример с конкретными целевыми функциями. Пусть каждый игрок выбирает действия из отрезка $A_i = [0;1]$. Выигрыш i-го агента – $f_i(y) = y_i + \sum_{j \neq i}(1 - y_j)$.

Давайте посмотрим, существует ли равновесие в доминантных стратегиях или равновесие по Нэшу.

Если внимательно посмотреть на целевую функцию, то видно, что i-му агенту выгодно, максимизируя свою целевую функцию, выбирать максимальное значение своего действия, независимо от того, что делают остальные (производная по действию i-го агента строго положительна независимо от обстановки). Значит, каждый агент будет выбирать максимальное значение своего действия, т.е. для него существует доминантная стратегия. Чтобы не сделали остальные, он, увеличивая свое действие, выигрывает, а больше единицы он выбрать не может, значит, $y_i^d = 1$, i Î N.

Давайте посчитаем выигрыш каждого агента от равновесия в доминантных стратегиях. Если все выбрали по единице, то каждый получил выигрыш, равный единице: $f_i(y^d) = 1$, i Î N.

Рассчитаем вектор действий, эффективный по Парето (вычислив, например, максимум суммы целевых функций всех агентов). Это – вектор нулевых действий: $y_i^P = 0$, i Î N. Если все выбирают нулевые действия, то выигрыш i-го агента равен $f_i(y^P) = n - 1$, i Î N, и нельзя увеличить выигрыш одновременно всех агентов. Если мы хотим увеличить выигрыш i-го агента и начинаем увеличивать его действие, то тем самым уменьшаем выигрыши остальных, потому что это действие входит с минусом в целевые функции других агентов.

Если играют три или более агентов, то, выбирая действия, эффективные по Парето, они получают строго больше, чем играя доминантные стратегии, так как $n - 1 > 1$ при n ³ 3.

Спрашивается, будет ли точка Парето точкой равновесия Нэша (ведь любое РДС является равновесием Нэша), то есть рациональной с точки зрения индивидуального поведения. Если кто-то из игроков

выберет ненулевую стратегию, он выиграет. Поэтому он увеличивает свое действие до единицы, остальные поступают аналогично, и все "скатывается" к ситуации равновесия в доминантных стратегиях, которая никому не выгодна, но устойчива. •[1]

Рассмотренный пример иллюстрирует, что устойчивость относительно индивидуальных отклонений никак не связана с эффективностью по Парето. Решить эту проблему можно следующим образом: если разыгрывается повторяющаяся игра, и игроки договариваются наказывать того, кто отклоняется от коллективного оптимума, т.е. равновесия по Парето, то оказывается, если наказание достаточно сильно, то каждый будет играть индивидуально устойчиво ту стратегию, которая выгодна для всех.

Другой вариант, как этого можно достичь. Мы, описывая взаимодействие агентов, которые равноправны, принимаем решение посадить над ними начальника, который будет ответственен за то, чтобы они не отклонялись, не пытались локально увеличить свой выигрыш, а играли равновесие, эффективное по Парето. Т.е. функция начальника – предотвратить отклонения агентов от оптимума по Парето. Можно даже рассчитать, сколько агенты могут выделить на содержание такого начальника (как разность между тем, что они получают в сумме в точке Парето и тем, что они имеют при равновесии в доминантных стратегиях). Вот – одно из теоретико-игровых обоснований возникновения иерархий.

Итак, выше описана игра в нормальной форме, где выигрыш каждого агента зависит от действий всех, и все агенты принимают решения одновременно. Рассмотрим модели ситуаций, когда решения принимаются однократно, но последовательно.

Иерархические игры

С точки зрения управления наиболее интересными являются модели игр, в которых агенты принимают решения не одновременно, а последовательно, т.е., если мы говорим, что есть управляющий орган и управляемые субъекты, то сначала начальник определяет правила игры, а дальше субъекты принимают решения, исходя из этих правил. Такие игры называются иерархическими. По определе-

[1] *Символ "·" здесь и далее обозначает окончание примера, доказательства и т.д.*

нию, *иерархическая игра* – игра с фиксированной последовательностью ходов.

Простейшая модель иерархической игры – такая, в которой есть первый игрок – центр, второй игрок – агент (см. рисунок 4).

Последовательность принятия решений такова, что сначала свою стратегию выбирает центр, а потом (при известной стратегии центра) свою стратегию выбирает агент. Тут возможны разные ситуации.

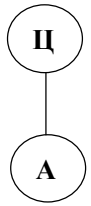


Рис. 4. Базовая структура «центр-агент»

Пусть известна целевая функция центра $\Phi(u, y)$, которая зависит от выбираемого им действия $u \in U$ и действия y Î A агента, и имеется агент, выигрыш которого $f(u, y)$ зависит от тех же самых переменных. С одной стороны, получается игра двух лиц в нормальной форме, поэтому, если не введено условие последовательности выбора стратегий, то возможно достижение равновесия по Нэшу и т.п.

Предположим, что ситуация такая: центр выбрал свою стратегию и сообщил ее агенту. Соответствующая игра называется *игрой* Γ_1 и описывается следующим образом: каким образом будет вести себя агент, зная выбор центра. Найдем множество тех действий, на которых достигается максимум целевой функции агента при фиксированном выборе центра: $P(u) = \operatorname{Arg}\max\limits_{y \in A} f(u, y)$. Понятно, что это множество зависит от того выбора u Î U, который сделал центр. Если центр и агент знают целевые функции и допустимые множества друг друга, то центр может предсказать, как отреагирует агент: «если агент рационален, то в ответ на мое действие, он выберет одно из

действий из множества действий, доставляющих максимум его целевой функции». Какова же стратегия центра, побуждающая агента выбрать то, что нужно центру? Зная свой выигрыш $\Phi(u, y)$, который зависит от действия центра и агента, центр должен определить, какое действие выберет агент из известного множества $P(u)$. Это множество может состоять из одной точки или нескольких. Во втором случае нужно ввести определенное предположение, как поведет себя агент. Типичных предположений два: критерии оптимизма и пессимизма (см. модели принятия решений выше).

Критерий оптимизма выглядит следующим образом. Агенту в принципе все равно (с точки зрения его целевой функции), какое действие из множества $P(u)$ выбирать. Центр может рассуждать так: если агенту все равно, какое действие выбирать, будем считать, что он выберет действие, которое выгодно мне. Разумно! Это предположение соответствует принципу оптимизма. Научно оно называется *гипотезой благожелательности*. Т.е. агент настроен благожелательно к центру и выбирает из множества действий, которые максимизируют его целевую функцию, то действие, которое наилучшее для центра.

Если взят максимум по действию агента, то осталась зависимость только от действий центра. Центр, как рациональный игрок, будет выбирать такое свое действие, которое будет максимизировать его целевую функцию.

Значит, оптимальным управлением (решением иерархической игры) будет действие центра, которое доставляет максимум по множеству допустимых управлений от такого функционала, в который мы подставили максимум по множеству $P(u)$ "реакций" агента:

$$u^o \in \operatorname{Arg}\max_{u\in U}\max_{y\in P(u)} \Phi(u, y).$$

Пессимистический подход – центр думает так: агенту все равно, какое действие выбрать из множества $P(u)$, поэтому рассмотрю-ка я наихудший случай. Тогда решение следующее:

$$u_g^o \in \operatorname{Arg}\max_{u\in U}\min_{y\in P(u)} \Phi(u, y),$$

то есть центр берет минимум своей целевой функции по действию агента из множества $P(u)$, а дальше максимизирует выбором своего действия.

Таким образом, мы получаем два различных решения игры. Первое определение решения игры называется *решением Штакельберга* (немецкий экономист, в 1938 году разработавший такую модель игры). Второе решение дает максимальный гарантированный результат центра в игре Γ_1.

Рассмотрим теперь игру, когда центр говорит агенту не конкретное значение управления, которое он выбирает, а сообщает зависимость того, каким будет управление в зависимости от действия агента. Простейшим примером является система стимулирования: начальник говорит подчиненному, если ты сделаешь 10 деталей, то получишь 10 рублей, а за 20 – 25 рублей. Т.е. он сообщает подчиненному зависимость вознаграждения от действия подчиненного (не конкретное значение, как в игре Γ_1, а именно зависимость).

Эта ситуация моделируется *игрой* Γ_2, которая имеет следующий вид: выбор центра является функцией от действия агента $u = \tilde{u}(y)$. Дальнейшая логика рассуждений аналогична предыдущей: центр может предсказать, что в зависимости от той функции, которую он назначит, агент выберет действие, которое будет максимизировать его целевую функцию, в которую подставлен выбор центра: $P(u(\cdot)) = \operatorname{Arg}\max_{y\in A} f(\tilde{u}(y), y)$.

Зная это, центр может решать задачу, например, такую:

$$\min_{y\in P(\tilde{u}(\cdot))} \Phi(\tilde{u}(\cdot), y) \to \max_{\tilde{u}(\cdot)}.$$

Данная запись является стандартной записью простейшей *теоретико-игровой задачи управления*.

С содержательной точки зрения задача очень простая: есть два агента, известны их целевые функции, допустимые множества, нет никакой неопределенности.

С точки зрения математики: есть функционал, мы должны взять минимум этого функционала по переменной, которая принадлежит множеству, зависящему от искомой функции. Потом то, что получено, нужно максимизировать выбором этой функции. Как решать эту задачу в общем виде науке было не известно до тех пор, пока в конце 60-х годов XX века великий советский математик Юрий Борисович Гермейер не доказал, что решение имеет очень простую структуру. Соответствующая теорема достаточно громоздкая, но идея качест-

венно заключается в следующем: функция $\tilde{u}(\cdot)$ имеет очень простой вид, и управление состоит из двух режимов: *режима наказания* и *режима поощрения*. Наказывать агента нужно, если он не делает то, что нужно центру (то есть выбирает действие *y*, отличное от того действия *x*, которое требуется центру – это действие в задачах управления называется *планом*). Поощрять нужно в ситуации, когда агент делает то, что нужно центру:

$$\tilde{u}(y) = \begin{cases} u_{наказание}, y \neq x \\ u_{поощрение}, y = x \end{cases}.$$

Далее, как искать функции поощрения, наказания и план x – дело техники.

Итак, идея заключается в существовании двух режимов и соответствующем решении на их основе задачи Γ_2. Теперь давайте посмотрим последовательно на игры Γ_1 и Γ_2. В игре Γ_1 первым ход делает центр и сообщает свою безусловную стратегию, т.е. не зависящую от действия агента. Получаем игру Штакельберга. В игре Γ_2 центр ведет себя более сложным образом: он говорит агенту зависимость своего действия от действия агента. Получаем *игру Гермейера* Γ_2.

Кроме того, можно построить игру Γ_3, в которой центр будет сообщать агенту зависимость управления от того, как в зависимости от управления будет вести себя агент. Т.е. стратегия агента становится "функцией", а стратегия центра становится функцией от этой функции (для сравнения – в Γ_1 имеем два "скаляра", в игре Γ_2 "навесили" функцию на действие центра).

Возможно построить игру Γ_4, где стратегия центра будет функцией от функции от функции от функции.

Т.е. с точки зрения математики усложнять это можно до бесконечности – строить игры любого сколь угодно большого порядка, только проинтерпретировать это будет сложно.

У игры Γ_3 простая интерпретация: начальник говорит подчиненному: «Я тебе выделяю ресурс, ты сообщи мне, как ты его будешь использовать в зависимости от того, сколько я тебе выделю. А в зависимости от этого, я буду его выделять».

У Γ_4 интерпретация уже сложнее. Возникает вопрос: а дает ли что-нибудь начальнику вложенность игр («уровень рефлексии»)? Выгоднее ли ему Γ_{106}, чем Γ_{1015}? К счастью, оказалось, что нет необходимости рассматривать игры высоких порядков.

Николай Серафимович Кукушкин (советский математик) доказал теорему, которая утверждает, что все четные игры вида $\Gamma_{2\kappa}$, где $k = 1, 2, \ldots$, эквивалентны с точки зрения выигрыша центра игре Γ_2. Все нечетные игры $\Gamma_{2\kappa+1}$ эквивалентны игре Γ_3. Т.е. всю бесконечную совокупность иерархических игр (порядка больше трех) свели к двум играм – Γ_2 и Γ_3. Кроме этого было доказано, что с точки зрения центра эффективность этих игр упорядочена следующим образом: $\Gamma_1 \leq \Gamma_3 \leq \Gamma_2$

Вывод из *теоремы Кукушкина* следующий: если центр может, то ему надо играть игру Γ_2, она для него наиболее выгодная и наиболее простая. Если не может, то игру Γ_3, если не может разыграть и ее, то – Γ_1. Играть же игры порядка 4 и выше не имеет смысла никогда.

Логичным продолжением перехода от игр в нормальной форме к иерархическим играм является следующее рассуждение: можно усложнять структуру дальше, но на самом деле существует единая технология описания теоретико-игровых задач управления в различных структурах.

Рассмотрим основную идею, которая позволяет видеть картину целиком и следить за логикой перехода от более простых к более сложным задачам, чтобы более сложная задача могла быть декомпозирована на более простые, и не казалась чем-то необычным.

Рассмотрим следующую картинку – см. рисунок 5. Был у нас один субъект (рисунок 5а), мы рассматривали его с точки зрения гипотезы рационального поведения (ГРП) как стремящегося максимизировать свою функцию полезности. Далее мы усложнили ситуацию и рассмотрели несколько субъектов на одном уровне (рисунок 5б). Описали это взаимодействие игрой Γ_0 в нормальной форме. Далее была рассмотрена ситуация с двумя агентами, но взаимодейст-

вующими по вертикали (рисунок 5в). Описали их взаимодействие игрой Γ_i, где i = 1,2,3.

Представим себе, что у нас есть структура «один начальник – несколько подчиненных» (рисунок 5г). Как мы можем ее описать? Взаимодействие агентов, находящихся на одном уровне, можно описывать игрой Γ_0. Взаимодействие «начальник-подчиненный» мы описываем игрой Γ_i. Тогда условно такую структуру можно представить игрой Γ_i, определенной на игре Γ_0. Т.е. иерархическая игра, но уже не на одном субъекте, который максимизирует свою целевую функцию, а на наборе субъектов, разыгрывающих свою игру.

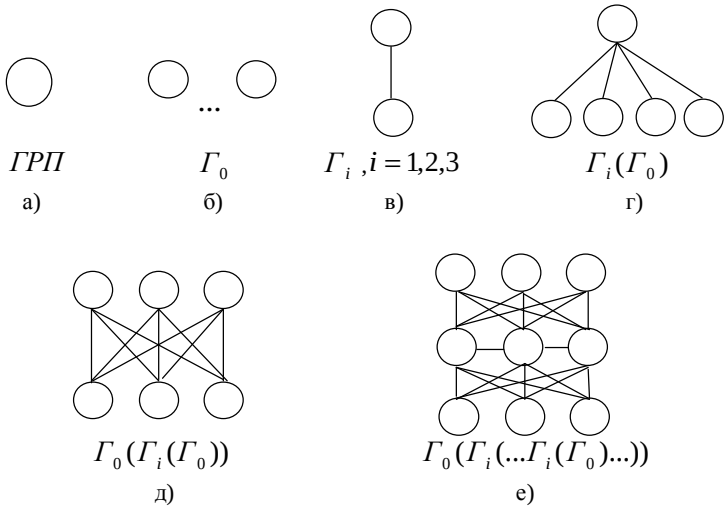


Рис. 5. Игры и структуры

Далее пусть есть несколько начальников (центров) и несколько подчиненных – агентов (рисунок 5д). В общем случае каждый связан с каждым. Как мы можем это описать? На нижнем уровне агенты играют игру Γ_0. Над ними центры играют иерархическую игру Γ_i, но центры в свою очередь разыгрывают на своем уровне игру Γ_0. Получаем игру вида $\Gamma_0(\Gamma_i(\Gamma_0))$. Такова конструкция: мы берем слож-

ную структуру и разбиваем ее на более простые. Понятно, что данная игра отличается от предыдущей игрой центров.

Можно взять более сложную структуру с более сложным взаимодействием (например, рисунок 5е). Это будет иерархическая игра между уровнями, на уровнях – обычная игра и т.д. Качественно ничего не меняется, усложняется только формальная задача, идеология описания остается та же.

Далее мы поговорим о классификации задач управления, а затем начнем рассматривать последовательно задачи управления для структур 5в-5д.

Классификация задач управления

Как отмечалось выше, игра в нормальной форме $\Gamma_0 = \{N, f_i(\cdot), A_i\}$, описывается множеством игроков, целевыми функциями и допустимыми множествами. Тогда мы можем в ней управлять:

1) составом игроков (N) (этого уволить, этого нанять) – *управление составом*;

2) целевыми функциями ($f_i(\cdot)$). Такое управление называется *мотивационным управлением*;

3) допустимыми множествами (A_i) – *институциональное управление*.

4) если ситуация более сложная, и мы можем управлять тем, кто кому подчинен, кто на кого может или не может воздействовать, тогда у нас появляется *управление структурой*;

5) мы считали, что все участники одинаково информированы, но мы можем сообщать или не сообщать ту или иную информацию, тогда объектом управления является информированность – возникает *информационное управление*.

Т.е. пять компонентов модели организационной системы (состав, структура, целевые функции, допустимые множества и информированность) порождают пять *типов управления*: управление составом, структурой, целевыми функциями, допустимыми множествами, информированностью. Можно использовать их в любых комбинациях, управлять одновременно всем, но, традиционно, с методической точки зрения, во всех учебных курсах мы начинаем с мотивационного управления, т.к. оно наиболее простое и, наверное

поэтому, более исследованное (с конца 60-х гг. исследования были посвящены именно этому направлению, задачи управления составом, структурой, институционального управления, информационного управления стали ставиться и решаться в последние десять лет). Естественно, развитие этих направлений науки во многом копировало развитие мотивационного управления, поэтому, прежде чем рассматривать их, необходимо изучить классику. Именно задачи мотивационного управления составляют основу курса «Теория управления организационными системами». Остальные типы управления обычно даются в виде факультативных курсов. Они гораздо более сложные, менее зрелые с теоретической точки зрения.

Мотивационное управление

Содержательная интерпретация мотивационного управления – это задача стимулирования. Несмотря на то, что под мотивацией в общем случае понимается и материальная, и моральная сторона, поощрения, побуждения к совершению требуемых действий, но, к сожалению, формальных моделей того, как человек реагирует на моральное вознаграждение, на сегодняшний день нет. Зато есть модель материального стимулирования. Можно строить аналогично и модели морального стимулирования. Но если при построении модели материального стимулирования мы вводим вполне реальные предположения (например, предприятие стремится максимизировать прибыль), то при построении моделей морального стимулирования мы должны говорить, предположим, что на такие-то стимулы человек будет реагировать так-то, а на такие-то – так-то. Это предположение обосновать уже сложно. Модели морального стимулирования более уязвимы для критики, а психология сегодня не дает нам должной основы. Поэтому будем описывать материальное стимулирование.

Рассмотрим систему, состоящую из одного центра (начальника) и одного подчиненного (агента), то есть приведенную на рисунке 4 (или рисунке 5в).

Есть центр, есть агент. Агент выбирает действие $y \in A = R_1^+$. Содержательная интерпретация действия агента: отрабатываемые часы, объем выпускаемой продукции. Начальник выбирает управление, т.е. зависимость вознаграждения агента от его действия. Эта зависимость называется *функцией стимулирования*.

Любую модель организационной системы будем описывать по тем пяти компонентам, которые перечислены выше при классификации задач управления (состав, структура, целевая функция, допустимые множества, информированность). Состав: центр, агент. Структура: начальник – подчиненный. Агент выбирает действие, центр выбирает стимулирование. Допустимые множества: множество допустимых действий – положительная полуось: часы, штуки, килограммы и т.п. Функцию стимулирования $s(y)$ будем считать неотрицательной и, когда потребуется, дифференцируемой.

Целевая функция центра зависит от системы стимулирования агента и представляет собой разность между функцией дохода (от деятельности подчиненного начальник получает доход (например, продает на рынке то, что произвел подчиненный)) и то стимулирование, которое выплачивается подчиненному:

$$\Phi(s(\cdot), y) = H(y) - s(y),$$

где $H(y)$ – функция дохода центра.

Целевая функция агента: то стимулирование, которое он получает, минус затраты, т.к. в зависимости от выбираемого действия подчиненный несет затраты:

$$f(s(\cdot), y) = s(y) - c(y),$$

где $c(y)$ – функция затрат агента

Предположим, что функция дохода неотрицательна при любом действии y и принимает максимальное значение при $y \neq 0$: $\forall y \geq 0$ $H(y) \geq 0$, $0 \notin \operatorname{Arg}\max_{y \in A} H(y)$.

Относительно функции затрат предположим, что она неотрицательна, неубывающая и в нуле равна нулю: $\forall y \geq 0$ $c(y) \geq 0$, $c(0) = 0$.

Последние два предположения не очень существенны с формальной точки зрения, но ноль – хорошая точка отсчета. Содержательная интерпретация: выбор агентом действия, равного нулю, т.е. отказ от работы, соответствует нулевому объему работы. Логично взять равной нулю и точку отсчета затрат.

Сформулируем задачу управления: агент будет выбирать действия из множества тех действий, которые обеспечивают максимум его

целевой функции: $P(s(\cdot)) = \operatorname{Arg}\max_{y\geq 0}\ [s(y) - c(y)]$. Это – игра Γ_2 в чистом виде (точнее – с побочными платежами). Реакция агента на управление – это множество тех действий, на котором достигается максимум целевой функции как разности между вознаграждением и затратами. Центр может предсказать поведение агента, значит задача заключается в том, что целевая функция центра зависит от действий и вознаграждения агента, он берет минимум из всех действий агента по множеству всех действий, на которых максимальна целевая функция агента (это соответствует принципу максимального гарантированного результата), и дальше центр хочет максимизировать эту величину выбором функции стимулирования, т.е. выбором зависимости вознаграждения от действий агента: $\min_{y\in P(s(\cdot))} \Phi(s(\cdot), y) \to \max_{s(\cdot)}$. С формальной точки зрения даже при конкретном виде целевой функции задача получается сложная. Но мы можем воспользоваться теоремой Гермейера о том, что управление в данном случае имеет два режима: наказание и поощрение, а можем получить решение и более простым способом: сначала угадать его, а потом доказать его оптимальность. Что мы и сделаем.

Нашей задачей является нахождение функции стимулирования, которая максимизировала бы гарантированное значение целевой функции центра на множестве действий агента, которое представляет собой множество максимумов его целевой функции при заданной системе стимулирования. В данной задаче, которая является частным случаем игры Γ_2, теорему Гермейера можно сформулировать в простых, интерпретируемых терминах.

<u>Утверждение 1.</u> Предположим, что использовалась некоторая система стимулирования $s(\cdot)$, такая, что при ее реализации агент выбирал какое-то действие $x \in P(s(\cdot))$. Утверждается, что, если мы возьмем другую систему стимулирования $\tilde{s}(\cdot)$, которая будет равна нулю всюду, кроме точки x, и будет равна старой системе стимулирования в точке x, то и при новой системе стимулирования это же действие агента будет доставлять максимум его целевой функции.

Т.е., если центр использует некоторую систему стимулирования, и агент выбирает действие x, то центр говорит: "я меняю систему стимулирования и буду платить по-другому, т.е. вознаграждения не

будет нигде, кроме точки x, а за эту точку я буду платить по-старому" (см. рисунок 6), то утверждается, что агент по-прежнему будет выбирать то же действие, что и ранее: $x \in P(\tilde{s}(\cdot))$, где

$$\tilde{s}(y) = \begin{cases} s(x), & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}$$

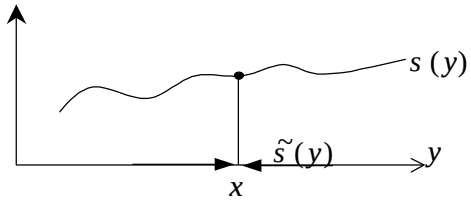


Рис. 6. Иллюстрация утверждения 1

Приведем формальное доказательство утверждения 1. Условие того, что выбор действия x доставляет максимум целевой функции агента при использовании системы стимулирования $s(\cdot)$, можно записать в следующем виде: разность между стимулированием и затратами будет не меньше, чем при выборе любого другого действия: $s(x) - c(x) \geq s(y) - c(y)\ \ \forall y \in A$.

Давайте заменим систему стимулирования $s(\cdot)$ на систему стимулирования $\tilde{s}(\cdot)$, тогда получим следующее: в точке x система стимулирования $\tilde{s}(\cdot)$ по-прежнему равна системе стимулирования $s(\cdot)$. В правой части будет тогда записана система стимулирования $\tilde{s}(\cdot)$: $s(x) - c(x) \geq 0 - c(y)\ \ \forall y \neq x$.

Если выполнялась первая система неравенств, то выполняется и новая система неравенств, т.к. мы в ней ослабили правую часть – здесь стояло какое-то положительное число, и если эта разность составляет положительное число (доход минус затраты), то тем более она будет больше, чем ноль минус затраты. Следовательно, $x \in P(\tilde{s}(\cdot))$. Таким образом, утверждение 1 доказано. •

Итак, пусть центр использует некую систему стимулирования со сложной зависимостью вознаграждения агента от его действий. Утверждение 1 говорит, что центру достаточно ограничиться классом систем стимулирования, в которых стимулирование отлично от

нуля в одной точке. Т.е. центр может использовать систему стимулирования, которая называется *компенсаторной* и имеет следующий вид:

$$s_k(x,y)=\begin{cases} l, & y=x \\ 0, & y\neq x \end{cases}.$$

Т.е. для любой сложной системы стимулирования найдется компенсаторная система стимулирования, которая приведет к тому же выбору агента, т.е. ничего не изменится ни для центра, ни для агента. Но изменится с точки зрения сложности задачи стимулирования, и понимания агентом того, как и за что его стимулируют. Представьте, одно делу вы говорите, что система стимулирования представляет собой «логарифм тангенса в квадрате», нормальный человек этого не поймет. Гораздо проще будет, если вы скажете человеку: «Тебе нужно сделать такое действие, за него ты получишь вот столько, если ты его не сделаешь, то ничего не получишь». Просто и понятно с точки зрения практики, а что это значит с точки зрения математики? Мы свели задачу поиска функции, принадлежащей множеству всех положительнозначных функций, к задаче поиска двух чисел: действия x и вознаграждения l, которое надо платить за выбор именно этого действия. Два числа найти проще, чем функцию!

Теперь давайте попробуем понять, каким должно быть число l, т.е. попытаемся еще упростить задачу и свести все к одному числу x. Для этого будем рассуждать следующим образом.

Предположим, есть функция затрат агента $c(y)$ (см. рисунок 7), ранее мы предположили, что эта функция неотрицательна, в нуле равна нулю и не убывает. Неубывание означает, что чем больше агент работает, тем больше у него затраты. Предположим, что есть функция дохода центра $H(y)$, которая достигаем максимума при ненулевых действиях агентов. Это существенное условие, т.к. если максимум доходов центра достигается при нулевых действиях агента, то нет и задачи стимулирования: зачем стимулировать агента, если максимум выигрыша центра достигается, когда подчиненный ничего не делает.

Теперь давайте рассмотрим рисунок 7 с точки зрения центра и агента. Ноль характеризуется тем, что если агент ничего не делает,

то его затраты равны нулю, и если центр ему за это ничего не платит, то агент получает нулевую полезность. Таким образом, оценка снизу выигрыша агента – ноль: ничего не делает, ничего не получает. Значит, агент согласится что-то делать, если вознаграждение, которое будет платить ему центр, будет не меньше, чем его затраты. Таким образом, у нас есть ограничение: вознаграждение должно быть не меньше затрат агента. Значит, агента устраивает все, что лежит выше функции затрат $c(y)$.

С точки зрения центра: центр может получить какую-то полезность в случае нулевого действия агента, т.е. если он ничего ему не платит. И он точно не заплатит агенту больше, чем доход, который он получает от деятельности агента. Т.е. с точки зрения центра, мы «живем» под функцией дохода центра $H(y)$ (см. рисунок 7).

Пересечение этих двух областей дает нам некоторую область. Формально, множество $S=\{y\in A \mid H(y)\geq c(y)\}$ – множество таких действий агента, что доход центра от деятельности агента не превосходит затраты последнего. Совокупность множества действий S и вознаграждений за эти действия, устраивающих одновременно и центра и агента (то есть размер вознаграждения должен быть не меньше затрат агента и не больше дохода центра) называется *областью компромисса*. Она заштрихована на рисунке 7.

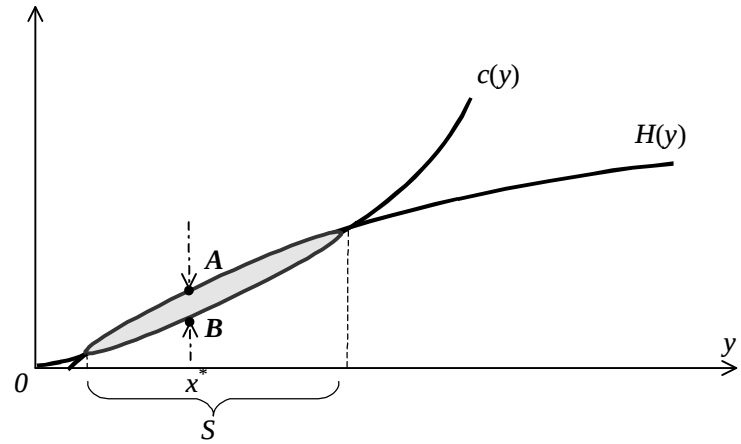


Рис. 7. Область компромисса в задаче стимулирования

Таким образом, мы определили, что речь идет не обо всем множестве действий и вознаграждений, а только об области *S*, т.к. выше нее не согласится центр, а ниже – агент. Спрашивается, а какую точку в этой области стоит выбирать.

Рассмотрим целевую функцию центра. Стимулирование агента входит в нее со знаком минус – вознаграждение агента центр старается минимизировать, т.е., желательно чтобы подчиненный работал за минимально возможную оплату. С точки зрения центра необходимо двигаться вниз по области компромисса.

С точки зрения агента – наоборот. При фиксированных затратах он хотел бы получить вознаграждение побольше.

Но, несмотря на желание агента, у нас есть иерархия, и решения первым принимает центр. Поэтому центр должен рассуждать так: сколько, как минимум, надо заплатить агенту за некое действие, чтобы он согласился его выполнить. Понятно, что центр должен «работать» на кривой затрат агента, т.е. должен сказать агенту: «Ты выбираешь такое-то действие, я тебе за него компенсирую затраты. А за любое другое действие я тебе ничего не заплачу».

Компенсаторная система стимулирования принимает следующий вид: l должна быть равна затратам агента плюс еще что-то, т.е. не меньше, чем затраты агента. С точки зрения центра эту величину надо сделать минимальной, то есть $s(x) = c(x) + d$, следовательно:

$$s_K(x, y) = \begin{cases} c(x) + d, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}.$$

Нарисуем целевую функцию агента (см. рисунок 8). У него затраты со знаком минус. К ним добавляется такая система стимулирования: в точке x центр платит ему $c(x) + d$. Во всех остальных точках стимулирование равно нулю.

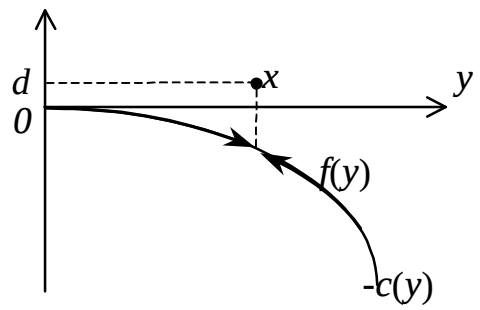


Рис. 8. Целевая функция агента

Вычитая из положительного стимулирования затраты, получаем, что целевая функция агента имеет следующий вид – жирная линия на рисунке 8. Она всюду равна отрицательным затратам, кроме точки x. В точке x она равна величине d.

Определим значение d ³ 0. Оно должно быть минимальным с точки зрения центра. А дальше – ее значение зависит от того, как мы ставим задачу.

Если предполагается, что агент благожелательно относится к центру и готов среди двух точек, имеющих одинаковую для него предпочтительность, выбрать точку, наилучшую для центра, то достаточно положить *d*, равной 0. Тогда, если $d = 0$, то точка максимума лежит на горизонтальной оси (см. рисунок 8), максимум полезности агента (разности между стимулированием и затратами), равный нулю, будет достигаться в двух точках: 0 (ничего не делать) и точно такую же нулевую полезность агент получит в точке плана x – действии, которого хочет от него добиться центр. Во всех остальных случаях его полезность отрицательна. Множество максимумов целевой функции агента состоит из двух точек, и, если агент благожелательно настроен к центру, то он выберет x.

Если же центр не вправе рассчитывать на благожелательность агента, а хочет гарантировать, чтобы агент выбрал какое-то действие, отличное от нуля, то ему достаточно положить *d*, равной любому сколь угодно малому, строго положительному числу, чтобы значение целевой функции агента в точке x было строго больше нуля. Другими словами, *d* характеризует различие между принципа-

ми пессимизма и оптимизма. Различие это невелико, так как d может быть выбрано сколь угодно малой.

Таким образом, мы сначала перешли от системы стимулирования общего вида к системе стимулирования, зависящей от двух скалярных параметров: точки плана – то, чего хочет центр добиться от агента, и вознаграждения агента l. Потом нашли значение l, равное затратам агента плюс d. В этот параметр d для любой задачи можно «зашить» любую моральную составляющую, т.е. его можно интерпретировать, как *мотивационную надбавку*. С формальной точки зрения агент выбирает точку максимума своей целевой функции, но если $d = 0$, его полезность равна 0 независимо от того, не работает ли он вообще или выполняет план, т.е. понятно, что в этом с точки зрения практики есть что-то подозрительное, т.к. не работает – получает 0 и работает – получает 0. Тогда d – мотивационная надбавка – показывает, сколько мы обещаем человеку за то, что он работает, и работает именно в нашей организации. Таким образом, все побуждающие мотивационные аспекты могут быть заложены в d. Какова она должна быть – эта величина d, это не наше, математиков и экономистов, дело. Этими аспектами занимаются менеджмент и психология.

Теперь осталось сделать последний шаг: найти оптимальное значение параметра x – плана.

Посмотрим на целевую функцию центра. Она представляет собой (при использовании компенсаторной системы стимулирования с $l = c(x) + d$) разность между доходом центра и стимулированием агента, причем последнее в случае выполнения агентом плана равно его затратам, т.е.: $\{H(x) - c(x)\}$ (если учесть d = Const, то далее ее использовать бессмысленно, т.к. на точку максимума она не влияет). Следовательно, нужно выбрать x^*, который будет доставлять максимум по x разности $\{H(x) - c(x)\}$.

Таким образом, была сложная система стимулирования – ее упростили до системы с двумя параметрами. Первый параметр – l – рассчитали. Он оказался равным затратам агента. Осталось найти второй параметр. Он должен быть такой, чтобы максимизировать разность между доходом центра и системой стимулирования, равной в точности затратам агента. В результате оптимальным решением

задачи стимулирования будет компенсаторная система стимулирования такого вида, в которой размер вознаграждения равен затратам агента, а *оптимальный план* равен плану, максимизирующему разность между доходом центра и затратами агента. Окончательно оптимальное решение будет выглядеть следующим образом:

$$x^* \in \operatorname{Arg}\max_{x \in A}\{H(x) - c(x)\}.$$

Рассмотрим выражение для оптимального плана x^*. Это выражение означает, что разность между доходом центра и затратами агента – «толщина» области компромисса (см. рисунок 7) – максимальна. При дифференцировании в точке x^* угол наклона касательной к функции дохода центра будет равен углу наклона касательной к функции затрат агента. В экономике это интерпретируется, как точка оптимума, в которой предельная производительность равна предельным затратам.

Значит, точка x^* является оптимальной с точки зрения центра и реализуется исход, определяемый точкой B на рисунке 7. Возможна другая ситуация. Рассмотрим модель, в которой первое предложение делает агент. Он предлагает: я буду делать столько-то, а вы мне будете платить столько-то. Если центр это устраивает, он соглашается.

Вопрос: что должен предложить агент? Агент должен предложить центру то же самое действие x^*, а плату запросить максимальную, на которую еще согласится центр (см. точку A на рисунке 7). В этой ситуации всю прибыль $[H(x^*) - c(x^*)]$ будет забирать агент.

Другими словами, в данной игре выигрывает тот, кто делает ход первым. Если начальник, то он "сажает" на ноль подчиненного, если подчиненный, то он "сажает" на ноль начальника. В рамках формальной модели и тот, и другой на это согласится.

Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть есть целевые функции центра и агента, то есть имеется функция дохода центра и другой параметр – затраты агента. Переменная – функция стимулирования – является внутренней характеристикой системы, отражающей взаимодействие между центром и агентом: сколько центр отдал, столько агент и получил. Если мы сложим целевые функции центра и агента, то сократятся значения функции стимулирования, и останется разность доходов и затрат. Значит, действие x^*, которое является реше-

нием задачи стимулирования, оказывается, максимизирует и сумму целевых функций. Т.е. действие агента, которое реализует центр, оптимально по Парето.

Можно ставить задачи определения точки внутри отрезка АВ внутри области компромисса (см. рисунок 7). Мы рассмотрели две крайности:

1. всю прибыль себе забирает центр;
2. всю прибыль забирает агент.

Возможно определение компромисса между ними, т.е. центр и агент могут договориться делить эту прибыль, например, пополам. Агент, кроме компенсации затрат, получает половину этой прибыли. Или другой принцип: фиксированный норматив рентабельности, т.е. пусть стимулирование агента составляет не только затраты, а затраты, умноженные на единицу плюс норматив рентабельности. Аналогично анализируются и другие модификации задачи стимулирования.

Связь данных задач с практикой следующая: содержательная интерпретация понятна: описаны ситуации, в которых можно платить, а можно не платить за действия агента. Как это связано с другими системами стимулирования, которые используются в жизни? Рассмотрим эти системы.

Если есть система стимулирования, то *квазисистемой* стимулирования называется система стимулирования, полученная из нее обнулением всех, кроме одной точки. На самом деле в рамках гипотезы благожелательности она тоже будет побуждать выбирать это действие (см. утверждение 1). Таким образом, из любой системы стимулирования можно получить квазисистему, обнулив ее всюду, кроме одной точки.

Решение задачи найдено – компенсаторная система стимулирования с планом x^*. Единственно ли оно? Рассуждение очень простое: пусть есть функция затрат агента, и есть план x^*. Оптимальная система стимулирования – квазикомпенсаторная – побуждает агента выбирать x^*, и центр несет затраты на стимулирование в точности равные затратам агента.

Возьмем другие системы стимулирования, которые побуждают агента выбирать то же действие, а центр платить столько же. Для

того чтобы такая система стимулирования существовала, достаточно, чтобы функция стимулирования проходила через точку $(x^*, c(x^*))$.

<u>Утверждение 2.</u> Для того чтобы агент по-прежнему выбирал действие $y = x^*$, достаточно, чтобы функция стимулирования проходила через точку $(x^*, c(x^*))$, а во всех остальных точках была не больше, чем затраты агента.

Докажите это утверждение самостоятельно.

Если мы возьмем любую систему стимулирования из изображенных на рисунке 9, то она тоже будет побуждать агента выбирать действие x^*, и центр будет платить столько же.

Можно взять скачкообразную систему стимулирования – всюду ноль, а потом константа – так называемая *аккордная оплата*: выполнил план – получил вознаграждение не меньшее затрат, не выполнил – ничего не получил, выполнил больше – все равно получил столько же. Мы можем выбрать монотонную систему стимулирования, но чтобы она проходила через точку $(x^*, c(x^*))$, и всюду лежала ниже затрат. Т.е. любая кривая, проходящая через точку $(x^*, c(x^*))$ и лежащая ниже функции затрат, будет решением задачи стимулирования. Кривых таких – континуум, т.е. имеется бесконечное число решений этой задачи.

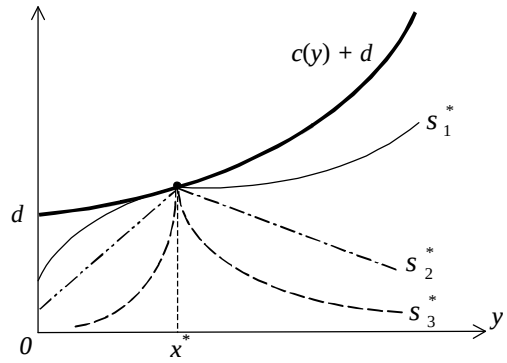


Рис. 9. Оптимальные системы стимулирования

Вопрос: какие из этого континуума задач разумны с содержательной точки зрения? Разумна аккордная система оплаты, когда мы

платим только при превышении действия над некоторым нормативом плана. Рассмотрим некоторые другие варианты.

Пропорциональные системы стимулирования

При применении на практике такой распространенной системы оплаты труда, как пропорциональная оплата, то есть – почасовая оплата, сдельная оплата и т.д., происходит следующее. Формализуем понятие «сдельная оплата» в нашей задаче: сдельная оплата – линейная функция стимулирования, когда существует *ставка оплаты* в единицу времени, за единицу выпущенной продукции и т.п., и вознаграждение пропорционально действию агента.

Сформулируем задачу стимулирования следующим образом. Целевая функция агента в случае использования центром пропорциональной системы стимулирования $s_L(y) = a\ y$, где a – ставка оплаты) выглядит следующим образом:

$$f(s(\cdot), y) = a\ y - c(y).$$

Графически ее можно представить следующим образом (см. рисунок 10). Угол наклона прямой $s_L(y)$ и есть ставка оплаты.

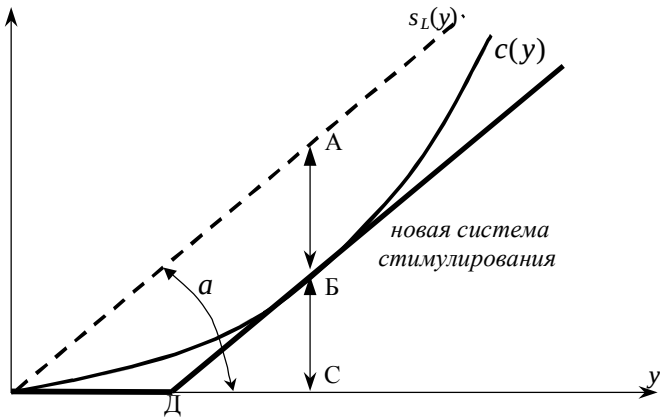


Рис. 10. Пропорциональная система стимулирования

Утверждение 3. Если функция затрат $c(\cdot)$ – выпуклая, то пропорциональная система стимулирования $s_L(y) = a\ y$ не лучше компенсаторной системы стимулирования.

Это значит, что для побуждения агента к одному и тому же действию при использовании пропорциональной системы стимулирования центр должен заплатить больше, чем при использовании компенсаторной системы стимулирования.

Содержательная интерпретация проста: предположим, что мы используем некоторую пропорциональную систему стимулирования. Какое действие выберет агент? Из условия максимума его целевой функции следует, что он выберет такое действие, при котором угол наклона касательной к его функции затрат равен ставке оплаты a. Если мы найдем эту точку, то за выбор данной точки при пропорциональной системе стимулирования мы должны заплатить АС (см. рисунок 10), а при компенсаторной – компенсировать затраты БС. Т.е. АБ мы агенту переплачиваем сверх необходимого минимума.

Тогда почему же на практике так распространены системы пропорциональной оплаты? Для того чтобы сделать систему пропорциональной оплаты такой же хорошей, как и компенсаторная, глядя на график, нужно ее сделать ломанной.

Т.е. начнем платить с какого-то норматива Д, а норматив и угол наклона подберем так, чтобы прямая касалась нашей кривой в нужной точке Б. Эта система стимулирования обладает той же эффективностью, что и компенсаторная, т.к. побуждает агента выбрать то же действие, и затраты центра на стимулирования такие же.

Любую систему стимулирования, которая встречается на практике, можно изложить в терминах рассматриваемых моделей, то есть можно составить из линейных, скачкообразных, компенсаторных и *комиссионных функций стимулирования*, имеющих следующий вид: $s_d(y) = xH(y)$, где $x \in [0,1]$ – доля дохода центра, которую он отдает агенту в качестве вознаграждения.

Итак, существуют четыре системы стимулирования: пропорциональная, скачкообразная, компенсаторная и комиссионная, и они позволяют сконструировать любую другую систему стимулирования.

Рассмотрим второй аспект привязки к практике, более тонкий. Он заключается в следующем: формулы для описания модели получены, они достаточно просты, но в этих формулах фигурируют такие функции, как доход центра, затраты агента. На практике их можно рассчитать: с функцией дохода центра, как правило, все достаточно просто, т.к. если центр – юридическое лицо или какое-то подразде-

ление, то есть имеется бухгалтерская отчетность, можно выделить вклад подчиненного, можно выделить, что это за функция, у нее есть интерпретация, она может быть разложена на отдельные составляющие. Если агент является тоже юридическим лицом (ситуация стимулирования – модель «заказчик-исполнитель», «подрядчик-субподрядчик», т.е. две фирмы заключают договор и т.д.), тогда затраты можно измерить, или известны нормативы, либо ищется предыстория, используется бухгалтерская отчетность.

Самой сложной является ситуация, в которой агентом является человек. Что такое затраты человека по выбору действия? Как определить его затраты в деньгах (моральное стимулирование, усталость и т.п. сложно измеримо)? Для этого проводят специальные исследования, изучая свойства функций затрат и их зависимость от индивидуальных характеристик [4].

Многоэлементные системы

Выше мы рассмотрели простейшую систему, состоящую из одного центра и одного агента, и решили для этой простейшей модели задачу стимулирования, в которой целевая функция центра представляла собой разность между доходом и затратами на стимулирование, выплачиваемое агенту. Мы доказали, что оптимальной является компенсаторная система стимулирования, которая имеет следующий вид: агент получает вознаграждение, равное затратам, в случае выполнения плана, и вознаграждение, равное нулю, во всех остальных случаях. Оптимальный план определялся как план, максимизирующий разность между доходом центра и затратами агента.

Давайте теперь начнем усложнять эту задачу – переходить от простейших структур (см. рисунок 5) к более сложным. Какие могут быть более сложные случаи? Первое, что приходит в голову – это организационная система, состоящая из нескольких агентов, подчиненных одному центру. Т.е. от структуры, приведенной на рисунке 5в, переходим к простейшей веерной структуре – см. рисунок 11 (и рисунок 5г).

Мы с вами помним, что любая организационная система (точнее ее модель) описываются пятью параметрами: состав, структура, целевые функции, допустимые множества и информированность. Тогда состав этой системы понятен: есть центр, и есть n агентов, структура представлена рисунком 11 – все агенты находятся на

нижнем уровне, центр – на верхнем уровне, всего уровней иерархии два. Целевые функции и допустимые множества:

$$y_i \in A_i,\ s_i(y_i),\ i \in N = \{1,2,\mathbf{K},n\}.$$

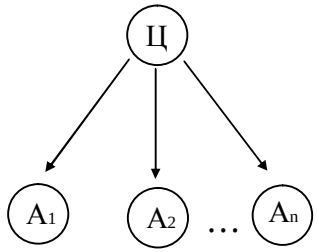


Рис. 11. Веерная структура

Будем считать, что i-ый агент выбирает действие y_i из множества A_i, центр выбирает стимулирование i-го агента $s_i(y_i)$, которое зависит от действия, которое выбирает i-й агент, где i принадлежит множеству агентов N.

Целевая функция центра представляет собой разность между доходом $H(y)$, который он получает от деятельности агентов, где $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – вектор действий всех агентов, и суммарным стимулированием, выплачиваемым агентам, т.е. сумму по всем агентам тех вознаграждений, которые он им выплачивает:

$$\Phi(s(\cdot), y) = H(y) - \sum_{i \in N} s_i(y_i)\ .$$

Мы обобщили предыдущую более простую модель: целевая функция агента имеет тот же вид, только появляется индекс i. И таких целевых функций у нас n штук, т.е. i-ый агент получает стимулирование за свои действия от центра и несет затраты, зависящие только от его собственных действий:

$$f_i(s(\cdot), y_i) = s_i(y_i) - c_i(y_i), i \in N\ .$$

Давайте посмотрим на целевую функцию в предыдущей одноэлементной модели, которую мы уже исследовали, и на целевую функцию, которая выписана для веерной структуры с несколькими агентами. Стимулирование i-го агента зависит только от его собственных действий, затраты тоже зависят только от его собственных

действий, следовательно, и целевая функция i-го агента зависит только от его стимулирования и от его собственных действий, т.е. агенты между собой, фактически, никак не связанны. Итак, полноценной игры между агентами нет, потому что тот выигрыш, который получает любой агент, зависит только от того, что делает он сам и не зависит от того, что делают остальные агенты.

Эта сложная система может быть разбита на n подсистем, каждая из которых имеет вид, приведенный на рисунке 4, и рассматривать мы их можем, в принципе, независимо. Применим для каждой из них по отдельности результат утверждений 1 и 2.

Мы с вами из одноэлементной модели знаем, что каждого из агентов можно стимулировать независимо, и каждому из них достаточно компенсировать затраты. Поэтому задачу надо решать так: мы знаем, что доход центра будет $H(y)$, и заплатить он должен i-му агенту за выбор действия y_i ровно $c_i(y_i)$. Подставляем оптимальную систему стимулирования в целевую функцию центра, получаем разность $H(y) - \sum_{i \in N} c_i(y_i)$. Ищем оптимальный план, который будет максимизировать целевую функцию центра на множестве допустимых векторов действия агентов:

$$H(y) - \sum_{i \in N} c_i(y_i) \ ® \ \max_{y \in A'}.$$

Это – оптимизационная задача, здесь никакой глубокой управленческой сути нет, и проблем с решением этой задачи не возникает.

Давайте проговорим еще раз полученный результат. Каким образом будет принимать решение отдельный агент? Его целевая функция зависит только от его собственного действия, и при известной системе стимулирования, сообщенной ему центром, он будет решать задачу выбора своего собственного действия, которое будет максимизировать его целевую функцию – разность между вознаграждением и затратами. Т.к. его целевая функция зависит только от его собственного действия, то выбираемое им действие не будет зависеть от того, что делают остальные агенты. В этом смысле агенты независимы, т.е. у каждого есть доминантная стратегия. Получилось, что мы агентов добавили, а никакого качественно нового эффекта не появилось – можно рассматривать взаимодействие между центром и агентами независимо. На практике это не всегда так. Поэтому давайте усложнять модель.

Первым шагом усложнения будет введение ограничения на фонд заработной платы, потому что иначе агенты ничем не объединены. Такие системы называются *системами со слабо связанными агентами*. Поэтому добавим фонд заработной платы R:

$$\sum_{i \in N} s_i(y_i) \le R.$$

Т.е. на стимулирование наложим ограничение, что сумма вознаграждений, которые выплачиваются агентам, должна быть не больше, чем некоторая известная величина, которую содержательно можно интерпретировать как фонд заработной платы.

Посмотрим, что при этом изменится. Поведение агентов не изменится, потому что целевая функция каждого агента зависит только от его собственных действий. Изменится задача, которую должен решать центр. Центр знает, что при использовании оптимальной системы стимулирования он должен компенсировать затраты каждому агенту, а теперь у него есть дополнительное ограничение, и он должен проводить максимизацию не по всем векторам действия агентов, а только по тем из них, которые будут удовлетворять бюджетному ограничению. Задача меняется – мы должны проводить максимизацию по множеству A' в пересечении с множеством таких векторов действий y, что сумма $\sum_{i \in N} c_i(y_i)$ £ R, то есть, должно быть выполнено *бюджетное ограничение*.

С точки зрения центра по-прежнему оптимально каждому из агентов компенсировать затраты на выполнение плана, т.е. система стимулирования остается. Целевая функция агентов, по-прежнему, зависит только от системы стимулирования, которую задал центр и от действия данного агента. И агента не интересует наличие бюджетного ограничения – он производит свой выбор при сообщенной ему системе стимулирования. Получили задачу условной оптимизации:

$$H(y) - \sum_{i \in N} c_i(y_i) \ ® \ \max_{\{y \in A' | \sum_{i \in N} c_i(y_i) \le R\}}.$$

Все, задача стимулирования решена – она сведена к задаче условной оптимизации. Рассмотрим пример.

Пример 2. Пусть есть два агента ($n = 2$), функция дохода центра представляет собой сумму действия агентов:

$$H(y) = y_1 + y_2$$

Функция затрат *i*-го агента является квадратичной:

$$c_i(y_i) = \frac{y_i^2}{2r_i},\ i = 1,2$$

где константа $r_i > 0$ может интерпретироваться как эффективность деятельности агента, его квалификация – чем больше квалификация, тем меньше затраты.

Целевая функция центра при использовании компенсаторной системы стимулирования – это сумма действий агентов, минус сумма их затрат. Ее можно максимизировать по y_1 и $y_2 \geq 0$ при ограничении, что сумма компенсируемых затрат не больше, чем фонд заработной платы:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 - \dfrac{y_1^2}{2r_1} - \dfrac{y_2^2}{2r_2} \to \max\limits_{(y_1, y_2) \geq 0}; \\ \dfrac{y_1^2}{2r_1} + \dfrac{y_2^2}{2r_2} \leq R. \end{cases}$$

Задача стимулирования сводится к определению двух параметров: y_1 и y_2. Теперь давайте искать эти параметры:

$$y_1^{\max} = r_1,\ y_2^{\max} = r_2$$

$$\frac{(y_1^{\max})^2}{2r_1} + \frac{(y_2^{\max})^2}{2r_2} \leq R.$$

Это – безусловный максимум целевой функции: если мы возьмем максимум по y_1 и продифференцируем, то получим $1 - y_1/r_1$. Затраты первого агента равны $r_1/2$. Значит, если $\frac{r_1 + r_2}{2} \leq R$, то оптимальное решение – $x_1 = r_1$, $x_2 = r_2$. Если $\frac{r_1 + r_2}{2} > R$, то бюджетное ограничение становится существенным и тогда можно пользоваться методом множителей Лагранжа.

Запишем лагранжиан:

$$(y_1 + y_2) - (1 + l)\left(\frac{y_1^2}{2r_1} + \frac{y_2^2}{2r_2}\right) - lR.$$

Дифференцируем по y_1, получаем: $1 - (1 + l)\frac{y_1}{r_1}$. Приравниваем нулю – нашли оптимальное действие в зависимости от множителя Лагранжа. Следовательно, $y_1 = (1 + l)r_1$. Аналогично $y_2 = (1 + l)r_2$. Подставляем в бюджетное ограничение, которое выполняется как равенство: $\frac{(1 + l)^2 r_1^2}{2r_1} + \frac{(1 + l)^2 r_2^2}{2r_2} = R$. Откуда $(1 + l) = \sqrt{\frac{2R}{r_1 + r_2}}$. Следовательно, оптимальное решение будет иметь следующий вид $x_i = r_i\sqrt{\frac{2R}{r_1 + r_2}}$, $i = 1, 2$.

Итак, если фонд заработной платы меньше чем полусумма констант r_1 и r_2, то оптимально назначать планы $x_1 = r_1$, $x_2 = r_2$; если фонд заработной платы больше полусуммы r_1 и r_2, то оптимальны планы $x_i = r_i\sqrt{\frac{2R}{r_1 + r_2}}$, $i = 1, 2$. Обратите внимание, что решение получилось непрерывным, т.е. при R, равном полусумме r_1 и r_2, решения "состыковываются". •

Кроме того, заметим, что, рассматривая задачу стимулирования слабо связанных агентов, на самом деле бо́льшую часть времени мы потратили на решение задачи согласованного планирования, т.е. на решение задачи условной оптимизации, которая к управлению никакого отношения не имеет, потому что мы уже воспользовались готовым результатом, что в оптимальной компенсаторной функции стимулирования вознаграждение в точности равно затратам и агенты будут выполнять план.

Будем усложнять задачу дальше. Логика была такая: мы от одноэлементной системы перешли к такой, где все агенты были независимы и ограничений не было, затем добавили ограничение на

фонд заработной платы. Предположим теперь, что агенты *сильно связаны*, и эту связь будем отражать следующим образом: давайте предположим, что затраты каждого агента зависят не только от его собственных действий, но и от действий других агентов. Соответственно вознаграждение будет зависеть от действия всех агентов.

Целевая функция центра:

$$\Phi(s(\cdot), y) = H(y) - \sum_{i \in N} s_i(y_i);\ y = (y_1, \mathbf{K}, y_n),$$

целевые функции агентов:

$$f_i(s(\cdot), y_i) = s_i(y_i) - c_i(y_i), i \in N.$$

Мы предположили, что на нижнем уровне агенты взаимодействуют таким образом, что затраты каждого зависят от вектора действий всех, и вознаграждение каждого, в общем случае, зависит от вектора действий всех. Это сильно осложняет дело, так как непосредственно воспользоваться результатом анализа одноэлементной модели мы уже не можем.

Давайте формулировать задачу управления. Как агенты будут принимать решения? Первый ход делает центр: сообщает им систему стимулирования, т.е. каждому говорит зависимость вознаграждения от вектора действий всех агентов. Агенты это узнали, дальше они должны выбирать действия. Если выигрыш каждого зависит от действий всех, значит, они играют в игру. Исходом игры является ее равновесие, например, равновесие Нэша. Обозначим вектор-функцию стимулирования $s(\cdot) = (s_1(\cdot), \mathbf{L}, s_n(\cdot))$, и запишем определение множества равновесий Нэша игры агентов в зависимости от системы стимулирования, которую использует центр:

$$E_N(s(\cdot)) = \left\{ y^N \in A' \middle| \begin{array}{l} s_i(y^N) - c_i(y^N) \geq s_i(y_i, y_{-i}^N) - c_i(y_i, y_{-i}^N) \\ \forall i \in N, \forall y_i \in A_i \end{array} \right\}.$$

Теперь сформулируем задачу управления:

$$\min_{y \in E_N(s(\cdot))} [H(y) - \sum_{i \in N} s_i(y)] \to \max_{s(\cdot)}.$$

Целевая функция центра зависит от функции стимулирования и от действий агентов. Агенты при фиксированной функции стимулирования выберут действия, являющиеся равновесием Нэша их игры. Давайте возьмем гарантированный результат целевой функции

центра по множеству равновесий Нэша игры агентов при заданной системе стимулирования. Эта конструкция будет уже зависеть только от функции стимулирования. Дальше нужно ее максимизировать выбором вектор-функции стимулирования, т.е. центр должен найти такой набор стимулирований агентов, который бы максимизировал гарантированное значение его целевой функции на множестве равновесий Нэша игры агентов.

Вид этой задачи почти такой же, как и одноэлементной, только раньше (когда у нас была одноэлементная система) не было суммы и было множество максимумов целевой функции агента. В многоэлементной системе вместо множества максимумов целевой функции агента появляется множество равновесий Нэша, и появляется сумма стимулирований агентов. Задача сложна, т.к. мы сначала должны взять минимум некоторого функционала по множеству, которое зависит от вектор-функции, которая входит в этот функционал, а потом минимизировать выбором вектор-функции.

Если посмотреть на определение множества равновесий Нэша, то увидим, что это множество зависит от вектор-функции и определяется бесконечной системой неравенств. Решим эту задачу. При решении сложных задач важно угадать решение. Решение этой задачи угадывалось достаточно долго. Сформулировали эту задачу в 1984 году, а решение нашли в 1998. Идея на самом деле очень простая: если в одноэлементной задаче есть компенсаторная система стимулирования – простая и понятная, то какую надо придумать компенсаторную систему стимулирования для решения многоэлементной задачи?

Есть параметр – план, и мы агенту платим в зависимости от действия y. Понятно, что мы не должны ничего платить, если агент выбирает действие, не равное соответствующей компоненте плана. Сколько ему нужно платить, если он выбирает действие, совпадающее с планом? Ему нужно платить что-то совпадающее с его затратами, но затраты каждого агента зависят от действий всех. Нужно помнить, что мы должны платить так, чтобы агент выполнял план, т.е. выполнение плана должно быть равновесием Нэша игры агентов. Оказывается, нужно оплачивать агенту фактические затраты (в случае если он сделал то что нужно).

Затраты агента зависят от того, что делает он сам, и от действий всех остальных агентов. Мы говорим: "делай план, обещаем компенсировать фактические затраты по выполнению плана, независимо от того, что сделают остальные агенты":

$$s_i(x,y)=\begin{cases} c_i(x_i,y_{-i}),\ y_i=x_i; \\ 0,\ y_i\neq x_i. \end{cases},\ i\ \hat{I}\ N.$$

Давайте убедимся, что при такой системе стимулирования выполнение плана является равновесием Нэша. Для этого надо подставить эту систему стимулирования в определение равновесия Нэша и доказать, что вектор x является равновесием Нэша. При выполнении плана i-ый агент получает компенсацию затрат, и несет такие же затраты. В случае невыполнения плана он получает нулевое вознаграждение и несет какие то затраты:

$$c_i(x_i,x_{-i})-c_i(x_i,x_{-i})\geq 0-c_i(x_i,y_{-i}).$$

Получили выражение "минус затраты меньше нуля". Это неравенство всегда выполняется. Это неравенство будет выполняться всегда – при любых обстановках игры, т.е. каждому агенту выгодно выполнять план, независимо от того, что делают другие агенты. Вспомним, что доминантная стратегия агента – это такое его действие, которое доставляет максимум целевой функции, независимо от действий остальных агентов. В данном случае выполнение плана будет максимизировать целевую функцию агента независимо от действий остальных, т.е. выполнение плана будет равновесием в доминантных стратегиях.

Итак, мы доказали, что предложенная компенсаторная система стимулирования реализует заданный вектор планов как равновесие в доминантных стратегиях игры агентов. Можно ли заставить агентов выбрать какой-либо вектор действий как равновесие их игры, и заплатить им в сумме меньше, чем сумма их затрат? Целевая функция центра зависит от суммы стимулирований с минусом, хотелось бы эту сумму минимизировать. Штрафы мы не можем накладывать, так как стимулирование неотрицательное (можно наказать только ничего не заплатив). Можем ли мы неотрицательным стимулирование побудить агентов выбрать какой то вектор действий, и заплатить им сумму меньше, чем сумма их затрат. Утверждается, что нет!

Введем предположение, что затраты агента в случае выбора им нулевого действия равны 0, независимо от того, что делают остальные: $\forall y_i\in A_i,\ c_i(0,y_{-i})=0,\ i\ \hat{I}\ N.$

Целевая функция каждого агента – вознаграждение минус затраты. Фиксируем некоторый вектор действий, который хотим от агентов добиться. Если мы говорим, что сумма стимулирований по реализации этого вектора меньше чем сумма затрат агентов, то это значит, что найдется хотя бы один агент, у которого вознаграждение будет меньше затрат, что противоречит предположению о неотрицательности затрат и возможности каждого агента обеспечить себе нулевые затраты выбором нулевого действия.

Значит, помимо того, что компенсаторная система стимулирования реализует вектор планов как равновесие в доминантных стратегиях игры агентов, при этом центр платит минимально возможную величину. Следовательно, эта система стимулирования оптимальна. Осталось найти, каким должен быть вектор планов. Также как и в одноэлементной модели, нужно в целевую функцию центра подставить вместо стимулирования затраты агентов и минимизировать полученное выражение выбором плана:

$$\left[H(y)-\sum_{i\in N}c_i(y)\right]\to\max_{y\in A}.$$

То есть, нужно найти такое допустимое действие, которое максимизировало бы целевую функцию центра, и назначить это действие в качестве плана, подставив его в систему стимулирования. Задача решена!

Обратим внимание, что здесь, как и в одноэлементной модели, как и в системе со слабо связанными агентами, имея результат об оптимальности компенсаторных систем стимулирования, дальше решаем только задачу планирования. В данном случае доказательство оптимальности декомпозирующей системы стимулирования было сложнее, чем в одноэлементной системе, потому что здесь была игра агентов. Но мы угадали решение, и эту игру как бы "развалили на части", т.е. за счет управления центр декомпозировал взаимодействие агентов. Использование таких управлений, которые декомпозируют взаимодействие агентов, превращают их игру в игру, в которой

существует равновесие в доминантных стратегиях, называется *принцип декомпозиции игры агентов*. Он "работает" в многоэлементных системах и по аналогии он работает в динамике, там, где декомпозиция идет по периодам времени.

Сформулируем полученные результаты в виде следующего утверждения.

Утверждение 4. Оптимальна компенсаторная система стимулирования, декомпозирующая игру агентов, с планом, максимизирующим доход центра за вычетом суммы затрат агентов.

Системы с распределенным контролем

Усложним задачу дальше. Решим задачу управления для структуры, приведенной на рисунке 12. Такие структуры называются *системами с распределенным контролем*.

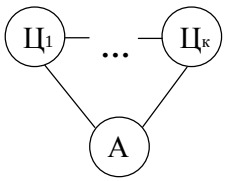


Рис. 12. Система с распределенным контролем

Это – перевернутая веерная структура, в которой один агент подчинен нескольким начальникам. Ситуация достаточно распространена, в частности, в проектном управлении: есть агент, который работает по какому-то проекту – он подчинен руководителю проекта, в то же время, он работает в подразделении – подчинен своему функциональному руководителю. Или преподаватель прикреплен к кафедре, и его приглашают читать лекции на другую кафедру или факультет.

Система с распределенным контролем характеризуется тем, что, если в веерной структуре имела место игра агентов, то в этой структуре имеет место игра центров. Если мы добавим сюда еще нескольких агентов, каждый из которых подчинен разным центрам, то получится игра и тех, и других на каждом уровне (см. рисунок 5д). Опишем модель, которая сложнее рассмотренной выше многоэлементной системы, т.к., если игра агентов заключается в выборе действий, то игра центров заключается в выборе функций стимулирования агента, зависящих от его действий. В игре центров стратегией каждой из них является выбор функции.

Целевая функция i-го центра имеет следующий вид:

$$\Phi_i(s(\cdot), y) = H_i(y) - s_i(y_i), i \in K = \{1, 2, \mathbf{L}, n\},$$

и представляет собой разность между его доходом, который он получает от действия агента, и стимулированием, выплачиваемым агенту.

Целевая функция агента: $f_i(s(\cdot), y) = \sum_{i \in K} s_i(y) - c(y)$, то есть он получает стимулирования от центров, которые суммируются, и несет затраты.

Предположим, что действия агента принадлежат множеству A, которое будет уже не отрезком действительной оси (часы, шт. и т.д.), а может быть многомерным множеством (отражать разные виды деятельности), тогда функция затрат будет отображать множество действий во множество действительных чисел.

Определим множество выбора агента – множество максимумов его целевой функции в зависимости от стимулирования со стороны центров:

$$P(s(\cdot)) = \operatorname{Arg}\max_{y \in A}\left[\sum_{i \in K} s_i(y) - c(y)\right],$$

где $s(\cdot) = \{s_1(\cdot), s_2(\cdot), \ldots, s_n(\cdot)\}$ – вектор-функция стимулирования.

Поведение агента понятно: в зависимости от вектора стимулирований агент будет выбирать действие, которое будет максимизировать его целевую функцию, представляющую собой разность между его суммарным вознаграждением и затратами.

Тогда центры должны решить, какое стимулирование назначать агенту. Причем, каждый должен решить сам, как ему управлять подчиненным. Центры оказываются "завязанными" на одного подчиненного, и что он будет делать, зависит от того, что ему предложит каждый из центров.

Каждый из центров не может рассуждать по отдельности, т.е. если он попросит агента сделать что-то, то тот не обязательно это сделает, т.к. другой центр может попросить от него другого и пообещает заплатить больше. Таким образом, центры вовлечены в игру и должны прийти к равновесию, подбирая соответствующие функ-

ции стимулирования и прогнозируя, что в ответ на вектор стимулирований будет выбирать агент.

Задача достаточно громоздка, поэтому приведем несколько известных результатов, которые позволяют ее упростить.

Первый результат говорит следующее. В теории игр принято использовать два основных подхода: равновесие Нэша и эффективность по Парето, которые, как сказано выше, не всегда совпадают. Оказывается, что в системе с распределенным контролем множество равновесий Нэша пересекается с множеством Парето, т.е. можно из множества равновесий Нэша выбрать такое, которое является эффективным по Парето. Есть теорема, которая говорит, что существует класс простых функций стимулирования, которые гарантируют Парето-эффективность равновесия Нэша игры центров. Эти функции стимулирования имеют компенсаторный вид:

$$s_i(x,y)=\begin{cases} l_i, & y=x \\ 0, & y\neq x \end{cases}, i\in K.$$

Содержательно эта система стимулирования значит, что существует некоторое действие агента (план x), относительно которого центры договорились выплачивать агенту стимулирование в случае, если он выберет это действие. При этом i-ый центр платит l_i за выполнение плана. В случае, если агент выполняет другое действие, то он не получает вознаграждения вовсе. Таким образом, этот результат позволяет нам перейти от игры центров, в которой стратегией каждого является выбор функции, к игре, в которой стратегией является выбор одного действия агента и размера вознаграждения.

Причем относительно вектора вознаграждений мы можем сказать следующее. Посмотрим на целевую функцию агента: он получает сумму вознаграждений, и несет какие-то затраты. Если затраты в нуле равны нулю, то мы должны быть уверены, что с точки зрения агента суммарное стимулирование должно быть не меньше, чем затраты: $\sum_{i\in K} l_i \geq c(x)$.

С другой стороны Парето-эффективными с точки зрения центров являются такие суммы вознаграждений, которые нельзя уменьшить, не изменив действия агента. Значит, сумма вознаграждений должна быть в точности равна затратам.

Пользуясь этим результатом, охарактеризуем равновесие игры центров, то есть найдем такие условия, при которых они договорятся, чего хотят добиться от агента. Для этого рассчитаем следующие величины:

$$W_i=\max_{y\in A}[H_i(y)-c(y)],\ i\ \hat{I}\ K.$$

Если i-ый центр сам взаимодействует (работает в одиночку) с агентом, то он будет использовать компенсаторную систему стимулирования, и прибыль, которую он получит, будет равна величине W_i (это следует из решения одноэлементной задачи – см. выше).

Найдем условия того, что каждому центру будет выгодно взаимодействовать с другими центрами (совместно управлять агентом), по сравнению с индивидуалистическим поведением, когда он говорит: пусть подчиненный работает только на меня.

Запишем эти условия следующим образом:

$$H_i(x)-l_i\geq W_i,\ i\in K.$$

В случае если центры взаимодействуют друг с другом, i-ый центр получает доход $H_i(x)$ от выбора агентом действия x и платит агенту l_i. При этом значение его целевой функции должно быть не меньше, чем если бы он взаимодействовал с агентом в одиночку, что даст ему полезность W_i. Кроме того, должно быть выполнено условие, что сумма вознаграждений агента должна быть равна его затратам.

Обозначим множество действий агента и векторов компенсаций его деятельности со стороны центров, таких, что сумма этих компенсаций в точности равна затратам агента по реализации этого действия, и каждый из центров получает выигрыш, не меньший, чем если бы он действовал в одиночку

$$\Lambda=\left\{x\in A,\ \overset{\mathbf{r}}{l}\geq 0\,|\,\sum_{i\in K} l_i=c(x),\ H_i(x)-l_i\geq W_i,\ i\in K\right\}$$

Область Λ представляет собой подмножество декартова произведения множества A на k-мерный положительный октант. Множество Λ есть *множество компромисса* для системы с распределенным контролем. Она содержательно и интуитивно похожа на область компромисса в игре одного центра и одного агента.

<u>Утверждение 5.</u>

1) Если область компромисса Λ не пуста, тогда имеет место *сотрудничество центров*: центры могут договориться, какой вектор действия агенту выбирать и кто сколько должен заплатить;

2) Возможна ситуация, когда эта область Λ пуста. Тогда это будет ситуация *конкуренции центров*.

В случае конкуренции исходом игры центров в содержательном смысле будет следующее: начальники между собой не договорились, как использовать подчиненного. Тогда первый начальник считает, что бы он хотел получить от подчиненного, действуя в одиночку. Аналогично остальные. Каждый из начальников говорит подчиненному: «Давай ты будешь работать на меня – я тебе плачу столько-то». Начинает он с компенсации затрат. Каждый сказал, подчиненный сидит на нуле. Кто-то из начальников догадывается, и говорит: "я тебе оплачу затраты и выдам еще надбавку при условии, что ты будешь работать на меня". Это лучше для подчиненного, т.к. он получает не ноль, а что-то сверх компенсации затрат. Начинается конкуренция центров, каждый центр "перетягивает" на себя агента. В такой ситуации наилучшее положение у агента. Из центров победит тот, у которого больше значение W_i, т.е. параметр, характеризующий прибыль, которую получает центр от взаимодействия с агентом. Кто более эффективно взаимодействует с агентом, тот его и "переманит".

Если мы упорядочим центры в порядке убывания W_i: $W_1 \geq W_2 \geq \mathbf{K} \geq W_k$, то победит тот, у кого W_i максимально, заплатив агенту, помимо компенсации затрат, W_2 плюс бесконечно малую величину, чтобы переманить агента у другого (второго в данном упорядочении) центра.

Ситуация упорядочения центров по эффективности, когда побеждает тот, кто обладает максимальной эффективностью, причем побеждает по цене следующего за ним, называется *аукционным решением* (аукцион второй цены).

Найдем условия существования режима сотрудничества. Введем следующую величину: максимум суммарного выигрыша центров, т.е. определим действие агента, которое доставляет максимум суммы доходов центров минус затраты агента:

$$W_0 = \max_{y \in A}\left[\sum_{i \in N} H_i(y) - c(y)\right].$$

Утверждение 6. Режим сотрудничества может быть реализован, т.е. область компромисса не пуста, тогда и только тогда, когда сумма индивидуальных выигрышей центров от их деятельности по отдельности не больше, чем суммарный выигрыш системы при совместном взаимодействии центров: $\Lambda \neq 0 \Leftrightarrow \sum_{i \in K} W_i \leq W_0$.

Содержательная интерпретация утверждения 6 следующая: *свойство эмерджентности* системы (целое больше, чем сумма частей). В данном случае целое – сотрудничество центров – должно быть больше, чем сумма частей. Т.е., если в системе присутствует синергетический эффект, то центры смогут прийти к компромиссу.

Механизмы планирования

Ранее речь шла о задачах мотивационного управления организационными системами, в частности, основной акцент делался на задачах стимулирования, в которых центр решал следующую задачу: установить систему вознаграждения своих подчиненных с тем, чтобы побудить их выбрать требуемое действие. Основной результат рассмотрения этих задач сводился к тому, что во всех моделях – как простейших одноэлементных, так и более сложных многоэлементных – решение разбивается на два этапа: определить систему стимулирования, которая является согласованной с предпочтениями агентов (как правило, такой системой стимулирования была компенсаторная система стимулирования, когда центр платил вознаграждение за выполнение плана и ничего не платил в случае невыполнения плана), а второй этап заключался в поиске оптимального согласованного плана.

Основные теоретические сложности возникали как раз на этапе определения согласованной системы стимулирования: имея результат, что оптимальной является компенсаторная система стимулирования, дальше все сводилось к оптимизационным задачам.

Далее мы будем рассматривать другой класс задач, который также является задачами мотивационного управления, т.к. управляющее воздействие направлено на целевые функции управляемых агентов. Этот класс задач условно называется *механизмом планиро-*

вания. Термин "планирование" употребляется в двух смыслах. Во-первых, план это – образ действий. В более узком смысле *план* это – желательное состояние системы (желательное с точки зрения центра). Под *механизмом планирования* в теории управления понимается несколько более узкая вещь, а именно процедура определения планов в зависимости от сообщений агентов. Затем же нужны сообщения агентов?

Когда мы с вами рассматривали модели принятия решений, то говорили, что имеет место гипотеза рационального поведения, т.е. субъекты максимизируют свою полезность выбором тех действий, которые от них зависят. Кроме того, имеет место гипотеза детерминизма, в соответствии с которой субъект принимает решение, стремясь устранить всю имеющеюся неопределенность и принимать решения в условиях полной информированности. Так, начальник, устанавливая какие-то параметры управляющего воздействия, т.е. плана, должен принимать решения в соответствие с гипотезой детерминизма, устранив неопределенность. Что значит неопределенность? Это – недостаточная информированность, она может быть как относительно существенных характеристик окружающей среды, так и относительно управляемых субъектов. Понятно, что субъекты, как правило, лучше знают свои характеристики, чем начальник. Поэтому, если у начальника не хватает информации для принятия решения, то у него есть несколько путей устранения неопределенности.

Возможный путь – использование максимального гарантированного результата, когда начальник рассчитывает на наихудшее значение параметров подчиненных. Но, возникает мысль: если подчиненные знают что-то лучше нас, то давайте их и спросим о том, что мы не знаем. Мы их спрашиваем, они сообщают нам информацию, на основе этой информации мы принимаем решение, но наши подчиненные активны, они обладают своими интересами, в том числе для них те или иные наши управленческие решения могут быть предпочтительней в той или иной степени. Значит, имея возможность своими сообщениями влиять на те решения, которые мы будем принимать, они постараются сообщить такую информацию, чтобы было принято наиболее выгодное для них решение. То есть та

информация, которую агенты сообщат, вовсе необязательно будет достоверной.

Этот эффект искажения информации называется *эффектом манипулирования* информацией. Возникает вопрос, какие процедуры принятия решения будут неманипулируемы, т.е. будут побуждать управляемых субъектов сообщать достоверную информацию? Желательно было бы использовать такие правила принятия решений, при которых управляемым субъектам было бы выгодно говорить правду. Вот этой задачей мы и будем заниматься.

Задача манипулирования механизмов принятия решений – классическая задача теории выбора и теории голосований. Например, при голосовании: предположим, что у нас есть механизм выбора того или иного человека на ту или иную должность. Всегда ли избирателю будет выгодно голосовать в соответствии с тем, как он действительно считает нужным, т.е. должен ли избиратель честно выражать свое мнение, или в каких-то ситуация ему выгодно проголосовать за другого кандидата, чтобы получить более выгодный для себя результат? Во многих случаях избирателям выгодно искажать свои предпочтения. Мы будем заниматься этой проблемой применительно к задачам управления организационными системами.

Рассмотрим следующую модель. Пусть имеется управляющий орган – центр – и множество $N = \{1, 2, \mathbf{K}, n\}$ агентов. Каждый агент характеризуется параметром $r_i \in \Omega_i$, $i \in N$, который будем называть его *типом*. Это – параметр, который отражает все существенные характеристики данного агента. Примером может быть эффективность деятельности агента, или то количество ресурса, которое ему нужно, или то состояние природы, которое с его точки зрения имеет место.

Агент i сообщает центру информацию $s_i \in S_i$, о значении своего типа $r_i \in \Omega_i$, $i \in N$. Обратим внимание на то, что тип принадлежит одному множеству, а сообщения принадлежат другому множеству. В частном случае эти множества совпадают между собой, т.е. агент может непосредственно сообщать информацию о своем типе, но в общем случае он может и давать информацию другого рода – косвенную информацию, имеющую опосредованное значение по отношению к своему типу.

Если обозначить вектор сообщений $s = (s_1, s_2, \mathbf{K}, s_n)$, то *механизмом планирования* будет отображение множества возможных сообщений во множество планов, то есть $p = p(s) : S \to X$, где множество возможных сообщений является декартовым произведением множества возможных сообщений агентов, множество планов является декартовым произведением множества возможных планов агентов: $s = \prod_{j \in N} S_j;\ X = \prod_{i \in N} X_i;\ x_i = p_i(s);\ i \in N$. Планы, назначаемые каждому агенту, – это соответствующая компонента механизма планирования. Мы видим, что план, назначаемый *i*-му агенту, зависит от сообщений всех агентов, значит, они будут вовлечены в игру.

Пусть $s^* \hat{I} S$ – равновесие игры агентов, $s^* = s^*(r)$, где $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ – вектор типов агентов. Предположим, центр сначала сообщаем агентам механизм планирования, т.е. отображение $p(\cdot)$, затем агенты выбирают свои сообщения. Выбираемые ими сообщения будут равновесиями их игры (тип равновесия оговаривать пока не будем, но в большинстве случаев речь будет идти о равновесии Нэша), и эти равновесия, очевидно, зависят в общем случае от вектора типов агентов.

Для того чтобы в явном виде записать, что такое равновесие, надо определить целевую функцию *i*-го агента, которая зависит от назначаемого ему плана и его типа: $f_i(x_i, r_i)$.

Обратим внимание на то, что предпочтения *i*-го агента зависят только от его собственного плана, т.е. *i*-го агента не интересует, какие планы назначили другим агентам. Такие предпочтения называются *сепарабельными*. Давайте в целевую функцию подставим план, зависящий от сообщений: $f_i(p_i(s), r_i)$, и запишем, что такое равновесие: $s^*(r)$ будет равновесием Нэша тогда и только тогда, когда (по определению, равновесие Нэша – это вектор, одностороннее отклонение от которого не выгодно никому из агентов)

$$\forall i \in N, \forall s_i \in S_i \quad f_i(p_i(s^*(r), r_i)) \geq f_i(p_i(s_i, s^*_{-i}(r), r_i).$$

Видно, что сообщение *i*-го агента зависит в общем случае от вектора типов всех агентов, т.е. это система неравенств, записанная для всех *n* агентов, в качестве решения даст вектор $s^*(r)$.

Таким образом, можно провести параллель между механизмами стимулирования и планирования: стратегией агента в механизме стимулирования был выбор действия; стратегией агента в механизме планирования является выбор сообщения. Стратегией центра в механизме стимулирования было назначение функции стимулирования (вектор-функции, ставящей в соответствие вектору действий агентов их вознаграждения); стратегией центра в механизме планирования является выбор процедуры планирования (вектор-функции, ставящей в соответствие вектору сообщений агентов вектор планов, назначаемых этим агентам) – см. таблицу 1.

Таблица 1

Соответствие между механизмами стимулирования и механизмами планирования

Стимулирование	**Планирование**
$y_i \in A_i$	$s_i \in S_i$
$s(\cdot)$	$p(\cdot)$
$f_i(s_i(\cdot), y)$	$f_i(p_i(\cdot), s)$

План, назначаемый каждому агенту, является отображением множества возможных сообщений во множество планов. Сообщения агентов равновесны, они зависят от типов агентов. Мы можем сделать замену переменных: ввести механизм, зависящий от типов агентов, и определить его как сложную функцию: $h(r) = p(s^*(r))$. Если вместо сообщений подставить сообщения, зависящие от типов агентов, то процедура принятия решений может быть определена как отображение вектора типов агентов в вектор планов $h(r) = p(s^*(r)) : \Omega \to X, \Omega = \prod_{j \in N} \Omega_j$. Отметим, что при такой подстановке, если имеется несколько равновесий, то нужно определить, какое из равновесий в каждом конкретном случае подставляется.

Механизм $h(\cdot)$ называется *соответствующим* механизму $p(\cdot)$ *прямым механизмом*. Термин "прямой механизм" возник потому, что исходный механизм $p(\cdot)$, который отображал какие-то сообще-

ния агентов во множество планов, иногда называется *непрямым*, так как агенты в нем могут сообщать косвенную информацию о своих типах. Механизм $h(\cdot)$ является прямым в том смысле, что в нем агенты непосредственно (прямо) сообщают информацию о своих типах. Связь между ними такова: почему механизм $h(\cdot)$ соответствует исходному механизму $p(\cdot)$? Потому что он определяется в явном виде через механизм $p(\cdot)$, т.е. сначала берется непрямой механизм, потом для него строится соответствующий прямой механизм.

Можно переписать определение равновесия Нэша в терминах прямого механизма: $r^*(r)$ – равновесие Нэша тогда и только тогда, когда

$$\forall i \in N, \forall \tilde{r}_i \in \Omega_i \quad f_i(h_i(r^*(r), r_i)) \geq f_i(h_i(\tilde{r}_i, r^*_{-i}(r), r_i)\,.$$

Под сообщением достоверной информации будем понимать следующее: $\forall r \in \Omega, \forall i \in N \;\; r_i^*(r) = r_i$, то есть, каков бы ни был вектор типов агентов, всем агентам выгодно сообщать достоверную информацию, т.е. для любого вектора типов, для любого агента равновесным является сообщением достоверной информации о своем типе.

Прямой механизм, который является неманипулируемым, т.е. в котором всем агентам выгодно сообщать центру достоверную информацию, называется *эквивалентным прямым механизмом*.

Для каких процедур принятия решения агентам будет выгодно сообщать достоверную информацию? Общих результатов, характеризующих необходимые и достаточные условия для каких-либо достаточно обширных классов механизмов принятия решений, нет.

Известно, что, если в системе имеется один агент, то для любой процедуры планирования существует механизм, при котором данному агенту будет выгодно сообщать достоверную информацию. Это свойство основано на том, что для того, чтобы агентам было выгодно сообщать достоверную информацию, необходимо и достаточно, чтобы в исходном механизме существовало равновесие в доминантных стратегиях. Если имеется один агент, то у него по определению стратегия, выбираемая им при максимизации его целевой функции, является доминантной. В таком случае, когда существует один агент, оказывается, что для любого механизма планирования существует эквивалентный прямой механизм. Если агентов несколько, этот

результат не имеет места, и каждый случай нужно исследовать отдельно.

На сегодняшний день известно несколько процедур принятия решений, которые, с одной стороны, обладают хорошими содержательными интерпретациями, а, с другой стороны, обладают свойством неманипулируемости. Исследование в каждом конкретном случае свойства манипулируемости является достаточно трудоемкой задачей. Но это оправданно, потому что, если процедура принятия решения неманипулируема, то мы можем не задумываться о том, что агенты могут искажать информацию, а воспринимать их сообщения как достоверные, потому что им выгодно будет говорить правду.

Механизмы распределения ресурса

Задача распределения ресурсов – одна из классических (типовых) задач экономики. Пусть у центра имеется некоторый ресурс, и он необходим агентам. Задача центра – распределить его между агентами. Если центр знает эффективность использования ресурса подчиненными, то задача заключается в том как распределить ресурс чтобы, например, суммарный эффект от его использования был максимальным. Если агенты являются активными, а центр не знает эффективности использования ими ресурса, и спрашивает: кому сколько ресурса нужно, и кто как будет его использовать, то, если ресурс ограничен, то сообщения агентов в общем случае могут не быть правдивыми. Возникнет проблема с достоверностью информации – не обязательно информация, полученная центром, будет достоверна. В каких ситуациях управляющий орган может предложить такую процедуру, т.е. правило распределения ресурсов между агентами, которая была бы неманипулируема, т.е. такую процедуру, чтобы каждому из агентов было выгодно говорить правду?

Рассмотрим механизм распределения ресурсов $p(s)$, который обладает следующими свойствами:

1) Процедура планирования непрерывна и монотонна по сообщениям агентов (монотонность означает, что чем больше просит агент ресурса, тем больше он его получает).

2) Если агент получил некоторое количество ресурса, то он может получить и любое меньшее количество ресурса.

3) Если количество ресурса, распределяемое между группой агентов, увеличилось, то каждый из агентов этой группы может получить не меньшее количество ресурсов, чем раньше.

Целевая функция i-го агента $f_i(x_i, r_i)$ зависит от типа r_i данного агента, который в случае механизмов распределения ресурса будет рассматриваться как оптимальное для данного агента количество ресурсов, и называться *точка пика*.

Допустим, что целевая функция агента имеет единственный максимум по x_i в точке пика. Т.е. агенту нужно некоторое количество ресурса, если ему недодают ресурса – его полезность при этом меньше, если ему дают лишний ресурс – его полезность тоже меньше. Единственным максимумом может быть и бесконечность, т.е. целевая функция может монотонно возрастать. Т.е. по мере удаления агента от точки пика полезность агента убывает. Такие функции предпочтения называются однопиковые (см. рисунок 13).

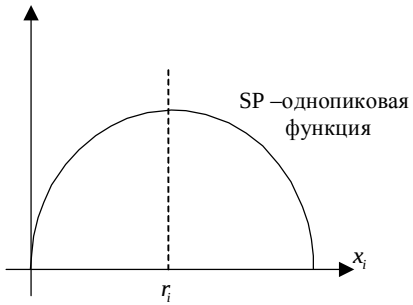


Рис. 13. Однопиковая функция

Рассмотрим сначала пример, а потом приведем общие результаты.

<u>Пример 3.</u> $n = 3$, $x_i = p_i(s) = \dfrac{s_i}{s_1 + s_2 + s_3} R$, R – количество ресурса, $s_i \in [0; R]$, $i = 1, 2, 3$. Пусть $R = 1$; $r_1 = 0{,}3$; $r_2 = 0{,}4$; $r_3 = 0{,}5$.

Имеем: $r_1 + r_2 + r_3 = 1{,}2 > R = 1$.

1) Пусть каждый агент сообщает правду:

если $s_i = r_i$, то $x_1 = 0{,}25$; $x_2 = 0{,}333$; $x_3 \approx 0{,}4$.

2) Пусть $s_i = R \Rightarrow x_i = \dfrac{R}{3} = 0{,}33 \in (r_1; r_2)$.

Первый агент должен найти такое свое сообщение, которое обеспечивает ему оптимальное количество ресурса при условии, что оба его оппонента сообщают максимальные заявки. То есть, он решает задачу: $\dfrac{s_1}{s_1 + 2} = 0{,}3 \Rightarrow s_1 = 6/7$. Получаем следующее равновесие Нэша:

$$s_1^* = 6/7;\ s_2^* = 1;\ s_3^* = 1 \Rightarrow x_1^* = 0{,}3;\ x_2^* = 0{,}35;\ x_3^* = 0{,}35.$$

Процедура распределения ресурса пропорционально заявкам, называется *механизмом пропорционального распределения*, это – самый распространенный способ распределения ресурса. Видно, что данная процедура распределения ресурса удовлетворяет условию нормировки – при любых комбинациях сообщений агентов распределяется в точности весь ресурс. Условия непрерывности и монотонности также выполнены.

Предположим, что сообщение каждого агента лежит от нуля до всего количества ресурсов, т.е., как минимум, агент может отказаться от ресурса, как максимум – может попросить весь ресурс, который имеется у центра.

Если агент получил некоторое количество ресурса, то, уменьшая заявку, в силу непрерывности и монотонности процедуры распределения ресурса, он всегда может получить меньшее количество, вплоть до нуля. Данная процедура распределения ресурса монотонна по количеству ресурса, имеющегося у центра, т.е., если количество ресурса, распределяемое между агентами, увеличилось, то при фиксированных сообщениях каждый агент получит его не меньше.

Если каждый агент скажет правду, сколько ресурса ему нужно, тогда он получит меньше, что логично, потому что ресурса на всех не хватает – агенты сказали правду и были "пропорционально урезаны".

Предположим, что игру центр разыгрывает неоднократно. На втором шаге агенты попросят больше. Если каждый будет просить максимально возможную заявку, то все получат поровну. Если кому-то этого много, то излишки он может отдать другому, но кому-то все равно не хватает.

Данный механизм является манипулируемым, потому что агентам невыгодно сообщать достоверную информацию о своих типах – тех количествах ресурса, которое им необходимо. •

Итак, рассмотрен пример механизма распределения ресурса. Рассчитано равновесие. Запишем результаты исследования таких механизмов в общем виде. Для этого попробуем сначала понять, какими свойствами характеризуется равновесие. Агентов можно разделить на две категории:

- «приоритетные» агенты (*диктаторы*) – те, кто получают абсолютно оптимальные для себя планы, то есть планы, равные их типам (при механизме распределения ресурса – те агенты, которые получают ресурса ровно столько, сколько им нужно),

- «обделенные» агенты – те, кому не хватает ресурса, те, кто хоть и просит по максимуму, но в равновесии получает меньше, чем ему нужно.

Утверждение 7. 1) Если некоторый агент в равновесии получает строго меньше ресурса, чем ему необходимо: $x_i^* < r_i$, то в равновесии он запросит максимально возможное количество ресурса: $s_i^* = R$.

2) Если кто-то из агентов в равновесии просит строго меньше максимума: $s_i^* < R$, то это значит, что он получает количество ресурса, оптимальное для него: $x_i^* = r_i$, т.е. является диктатором.

Утверждение 7 дает два свойства, характеризующие равновесие в механизмах распределения ресурса.

Введем определение *анонимного механизма* принятия решений, т.е. механизма, симметричного относительно перестановок агентов. Анонимность – демократическое требование, например, в процедурах выборов она отражается в том, что на избирательном участке обмен между двумя избирателями пустыми бланками бюллетеней не меняет результата выборов. Т.е. все находятся в равных условиях. Тогда, переставляя местами агентов, мы соответственно переставляем и планы этих агентов.

Утверждение 8.

1) Все анонимные механизмы распределения ресурса эквивалентны между собой, т.е. приводят при одних и тех же предпочтениях агентов к одним и тем же равновесным количествам ресурса, которые они получают.

2) Так как механизм пропорционального распределения является анонимным (все агенты входят в него симметрично: если мы поменяем их местами, ничего не изменится), а все анонимные механизмы эквивалентны между собой, то это значит, что все механизмы распределения ресурсов, которые являются анонимными, эквивалентны механизму пропорционального распределения.

Таким образом, любая анонимная процедура, удовлетворяющая перечисленным выше трем требованиям, приводит к одним и тем же результатам. А механизм пропорционального распределения (который является анонимным) достаточно прост по своему виду, поэтому прост и для исследования, и для агентов (ресурс делится пропорционально запросам),

Таким образом, утверждение 8 говорит, что, если мы ограничимся классом анонимных механизмов, то не нужно выдумывать сложных механизмов распределения ресурса – достаточно рассмотреть механизм пропорционального распределения. Кроме того, оказывается, что механизм пропорционального распределения эквивалентен механизму последовательного распределения, рассчитать равновесие для которого совсем просто.

Механизмы последовательного распределения ресурса. Механизм пропорционально распределения хорош тем, что он имеет простой вид и для него просто посчитать равновесие.

Механизм последовательного распределения заключается в следующем. Это – прямой механизм, т.е. каждого агента спрашивают о том, сколько ресурса ему нужно.

Предположим, что агенты сделали свои сообщения. Упорядочим их по возрастанию сообщений (первый попросил меньше всех ресурса, потом второй и т.д.): $\tilde{r}_1 \le \tilde{r}_2 \le \mathbf{K} \le \tilde{r}_n$. Дальше применяем следующий *алгоритм последовательного распределения* (*положив* $x_i := 0$, i Î N):

Шаг 1. Если мы можем дать каждому агенту столько, сколько попросил первый агент, то даем всем по $\tilde{r}_1$ (если $n \cdot \tilde{r}_1 \le R$, то $x_i := x_i + \tilde{r}_1, , i \in N; \tilde{r}_i := \tilde{r}_i - r_1; R = R - n \cdot r_1$). Если не можем, рас-

пределяем ресурс между всеми агентами поровну (если $n \cdot \tilde{r}_1 > R$, то $x_i := \frac{R}{n}, i \in N$) и останавливаем алгоритм.

Шаг 2. Исключаем первого агента из рассмотрения, перенумеровываем агентов и возвращаемся к шагу 1.

Пример 4. $R = 1, r_1 = 0{,}3; r_2 = 0{,}4; r_3 = 0{,}5; 0{,}3 \le 0{,}4 \le 0{,}5.$ Предположим, что все сообщили правду, тогда мы можем дать всем одновременно по минимуму – 0,3: $x_1 = 0{,}3; x_2 = 0{,}3; x_3 = 0{,}3.$

После первого шага: $r_1 = 0; r_2 = 0{,}1; r_3 = 0{,}2; R = 0{,}1.$ Первый агент удовлетворен полностью. Поэтому мы забываем про него и повторяем для тех, кто что-то еще требует. Остаток ресурса, равный 0,1, недостаточен для того, чтобы дать обоим агентам столько, сколько требует первый (бывший второй) – по 0,1, следовательно, мы должны остаток ресурса поделить поровну, т.е. по 0,05.

В результате второй агент получит 0,35, третий тоже 0,35:

$$x_2 := x_2 + \frac{0.1}{2} = 0{,}35.$$

Так работает механизм последовательного распределения. Понятно, что максимум через n шагов, где n – количество агентов, процедура остановится.

Утверждение 9. В механизме последовательного распределения ресурса агентам выгодно сообщать достоверную информацию, т.е. сообщение достоверной информации является доминантной стратегией каждого агента.

Другими словами, механизм последовательного распределения является неманипулируемым прямым механизмом.

Рассмотрим на предыдущем примере, может ли кто-то из агентов, сообщая неправду, улучшить свое положение?

Первый агент получает оптимальное количество ресурса, ему нет нужды искажать информацию. Предположим, что начинает изменять свое сообщение второй агент (завышает заявку или занижает). Если он будет уменьшать свою заявку, все изменится в тот момент, когда разность от сообщения окажется такой, чтобы, выдавая столько, сколько просит второй агент, нам хватало бы ресурса. Такая разность равна 0,05 (деление поровну). Это значит, что второй

агент должен заявить 0,35. Если он заявляет 0,35, то он получает 0,35, что и получал до этого, т.е. никакой выгоды занижение ему не принесло. Если же он сообщит меньше, чем 0,35, то он и получит столько, сколько сообщит, т.е. меньше 0,35. Ему это не выгодно, т.к. в действительности ему требуется 0,4. Таким образом, уменьшать заявку ему не выгодно.

Если же он начинает просить больше, чем 0,4, то вообще ничего не изменится, т.к. на втором шаге ресурса и так не хватает, и его остаток делится поровну между вторым и третьим агентами.

Аналогично для других агентов показывается, что, увеличивая или уменьшая до определенного уровня заявку, они ничего для себя не меняют, а дальнейшее уменьшение заявки дает уменьшение количества получаемого ресурса.

Утверждение 9 говорит о том, что при механизме последовательного распределения агентам выгодно сообщать достоверную информацию. Анонимность (симметричность агентов) необходима для того, чтобы мы могли распределять минимум всем и/или делить ресурс поровну.

Следствием утверждения 9 является следующее: для механизма пропорционального распределения и, соответственно, для любого анонимного механизма (в силу утверждения 8) существует механизм последовательного распределения, в котором доминантной стратегией каждого агента является сообщение достоверной информации.

Механизмы распределения затрат

Двойственными с содержательной точки зрения к механизмам распределения ресурса являются механизмы распределения затрат. Задача распределения затрат формулируется следующим образом: если нужно разделить затраты, то каждый агент стремится свои затраты минимизировать, и проблема возникает, когда мы не знаем, насколько эффективно функционирует агент, например, хорошо ли работает подразделение и насколько велик его вклад в общий доход или прибыль предприятия. Тогда мы начинаем спрашивать цеха, подразделения о данных показателях. При этом все начинают сообщать такую информацию, чтобы минимизировать свои затраты.

Пример 5. Пусть на заводе есть два подразделения и требуется сделать новую систему охраны или проложить новую дорогу, т.е. сделать то, чем смогут пользоваться оба подразделения. Это называ-

ется *общественное благо* – такое благо, уклониться от потребления которого не может, не хочет ни один из агентов. Если мы строим новую дорогу, то по ней будут ездить сотрудники обоих подразделений. Следовательно, оба подразделения заинтересованы в создании общественного блага. Предположим, что затраты на создание блага (строительство дороги) равны 1 ($c = 1$). Предположим также, что каждое из подразделений может оценить свою личную пользу от строительства этого блага: первый получает 0,4 единиц полезности ($h_1 = 0{,}4$) от использования блага, а второй – 0,8 ($h_2 = 0{,}8$). Это, например, удовольствие от того, что и те, и другие могут ездить по новой хорошей дороге. Видно, что ни один из агентов в одиночку построить дорогу не может, т.к. полезность каждого меньше, чем затраты.

На первый взгляд видно, что если они будут действовать совместно, то создание общественного блага выгодно, т.к. сумма полезностей равна 1,2, что больше необходимых суммарных затрат, равных 1. Значит, имеем 0,2 единиц прибыли, и задача распределения затрат преобразуется в задачу распределения этой прибыли.

Пусть x_1 – плата (взнос) первого, x_2 – второго за строительство дороги. Можно использовать разные принципы принятия решений относительного того? кто сколько должен заплатить.

Первое требование, которому должен удовлетворять принцип распределения затрат, что сумма затрат (взносов агентов) должна быть не меньше требуемой. Понятно, что больше, чем необходимо, платить не следует, но и меньше нельзя, т.к. иначе дорога не будет построена. По западной терминологии, эта задача называется задача о безбилетном пассажире (Free Rider Problem: пассажиры ездят на автобусе, автобус – общественное благо, но никто не хочет платить за проезд). Т.е. принцип должен удовлетворять требованию сбалансированности: сумма плат цехов, подразделений должна окупать затраты.

Далее если мы – дирекция завода, то можем поделить поровну затраты между подразделениями. В принципе, с одной стороны, это хорошо, т.к. это – неманипулируемый механизм, т.к. мы ни у кого ничего не спрашиваем. Но, если мы априори знаем, что полезность подразделений от использования блага будет разной, то мы не должны заставлять платить их поровну. Т.е. в нашем примере, польза от

строительства дороги 0,4 меньше, чем половина затрат – 0,5. Тогда первое подразделение откажется или разорится. Т.е. принцип равного распределения затрат не всегда допустим.

Прежде чем рассматривать другие варианты распределений, давайте посмотрим, какие условия удовлетворят агентов. Для этого нарисуем на плоскости их взносов ограничения (см. рисунок 14). Первое ограничение: $x_1 + x_2 = c$. Второе ограничение: очевидно, что первый заплатит не больше, чем получит пользы от этого блага. Для первого ограничение: он готов платить меньше, чем 0,4, а второй меньше, чем 0,8.

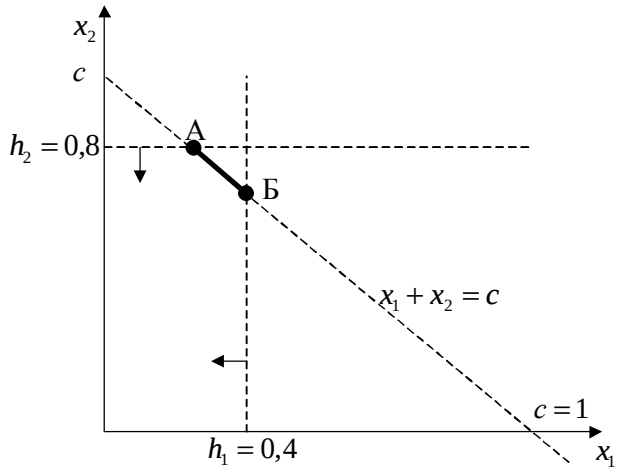


Рис. 14. Пример задачи распределения затрат

Тогда допустимым является отрезок АБ на рисунке 14. Здесь возможны следующие варианты.

Предположим, что центра нет, и агенты должны сами между собой договориться, тогда они разыгрывают игру, в которой каждый (одновременно с оппонентом) называет сумму, которую он готов заплатить. Каждый из них, если они оба знают пользу оппонента от использования общественного блага, может посчитать отрезок АБ. Легко показать, что отсутствие строительства вообще (точка (0; 0)) плюс данный отрезок есть множество равновесий Нэша их игры. Т.е. опять остается неопределенность – агенты априори не могут сказать,

какое равновесие им выбрать, потому что все равновесия из отрезка АБ Парето-эффективны и (кроме краев отрезка) доминируют точку (0;0), но один агент хочет одного, а второй другого. Первый агент хочет попасть в точку равновесия А, а второй – в Б. Поэтому, если их будут спрашивать последовательно, то оптимальная стратегия первого: «Я вношу 0,2», тогда второму ничего не остается, кроме, как вносить 0,8. Если первый ход делает второй агент, то он внесет 0,6, а первый – 0,4.

Прием последовательного сообщения хорошо применим для центра – если он хочет реализовать ту или иную крайнюю точку из отрезка АБ (например, точку А), то нужно принимать решение не коллегиально, а последовательно, т.е. вызвать первого агента и предложить ему сказать, сколько он может заплатить (0,2). После этого вызывается второй агент, которому говориться, что имеется проект, в котором первый платит 0,2, а в сумме нужно 1. И второй соглашается платить 0,8. Это – другой принцип принятия решений.

Итак, задача распределения затрат является, во-первых, содержательно двойственной задаче распределения ресурсов, во-вторых, возможно использование различных принципов принятия решений. Однозначно рекомендации относительно того, какой принцип принятие решений лучше, дать нельзя. Единственное, что может предложить математик реальному руководителю – смоделировать поведение подчиненных: как они будут вести себя, куда их можно привести управлением.

Продолжим рассмотрение механизмов планирования, для которых существуют эквивалентные прямые (неманипулируемые) механизмы.

Механизмы внутренних цен

Рассмотрим систему, состоящую из центра и n агентов. Целевая функция i-го агента представляет собой разность между вознаграждением, выплачиваемым i-му агенту, и затратами, которые квадратичным образом зависят от действия агента:

$$f_i(l, y_i) = l y_i - \frac{y_i^2}{2r_i}, \quad i \in N.$$

Коэффициент r_i, стоящий в знаменателе функции затрат – тип агента, который характеризует эффективность его деятельности. Чем

больше эффективность (чем больше значение типа), тем меньше затраты на выполнение одних и тех же действий. Параметр l – *внутрифирменная цена* – стоимость единицы продукции, выпускаемой агентом, y_i – объем этой продукции.

Рассмотрим следующую задачу: предположим, что центр хочет, чтобы агенты выбрали действия, сумма которых равна заданной величине R, т.е. должно выполняться следующее условие:

$$\sum_{i \in N} y_i = R.$$

Например, центр хочет добиться выполнения подразделениями корпорации суммарного заказа R. Считается, что подразделения выпускают однородную продукцию, в сумме надо добиться некоторого выпуска. Это – первое ограничение.

Кроме того, центр хочет, чтобы заказ был выполнен с минимальными затратами. Т.е. сумма затрат агентов должна быть минимальна: $\sum_{i \in N} \frac{y_i^2}{2r_i} \to \min$.

Но, центр имеет возможность управлять только путем выбора функции стимулирования, т.е. зависимости вознаграждения агента от результатов его деятельности. Этот параметр l, который называется внутрифирменной ценой, один и тот же для всех агентов. Агенты, зная внутрифирменную цену, будут выбирать действия, которые максимизируют их целевые функции. Агенты в данном случае независимы друг от друга, так как их целевые функции зависят только от их индивидуальных действий, поэтому задачей центра является выбор внутрифирменной цены таким образом, чтобы затраты агентов были минимальны, было выполнено суммарное действие, и агенты выбирали действия, исходя из максимизации своих целевых функций.

Опишем поведение агента, вычислив точку максимума его целевой функции. Целевая функция агента вогнутая, имеет единственный максимум. Продифференцировав, найдем зависимость действия, выбираемого агентом, от параметра l: $y_i^*(l) = r_i l$, i Î N. Получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} l^2 \sum_{i \in N} \frac{r_i}{2} \to \min \\ l \sum_{i \in N} r_i = R \end{cases}$$

Обозначим $\sum_{i \in N} r_i = H$. В этой задаче не остается никаких свободных переменных, т.к. первое ограничение нам однозначно определит l, а значение l, определенное из ограничения, даст значение целевой функции: а именно, l должно быть равно отношению $l = \frac{R}{H}$. Оптимальным значением целевой функции является величина $\frac{R^2}{2H}$.

Т.е. центр имеет полную централизацию, агентам назначаются планы, и агентам выгодно их выполнять. Остается только понять, какие планы назначать агентам, чтобы достичь минимума затрат агентов при выполнении программы суммарного выпуска. Решая эту задачу, получим следующее.

Запишем лагранжиан (m – множитель Лагранжа):

$$\sum_{i \in N} \frac{y_i^2}{2r_i} - m(\sum_{i \in N} y_i - R) \to \min .$$

Получаем: $\frac{y_i}{r_i} - m = 0,\ \ y_i = m\, r_i,\ i\ \hat{I}\ N,\ m = \frac{R}{H} = l$.

Следовательно, $y_i^* = r_i \frac{R}{H},\ i\ \hat{I}\ N$, то есть оптимальное действие агента пропорционально его типу.

Таким образом, сформулированы две разные задачи и получены одинаковые решения. Первая задача: центру необходимо выбрать такую внутрифирменную цену, чтобы сумма затрат агента была минимальна, при условии, что агенты выбирают свои действия из условия максимизации своих целевых функций. Вторая задача: найти оптимальный набор планов, таких, что сумма этих планов равна R, а сумма затрат агентов минимальна. В результате множитель Лагранжа в этой задаче – внутрифирменная цена ($m = l$). Интересно, что в данной модели оптимальной оказалась пропорциональная система стимулирования, и, более того, оптимальной оказалась система стимулирования, в которой ставки оплаты для всех агентов одинаковы (такая система стимулирования называется *унифицированной*). Ведь можно было бы каждому агенту назначать свою цену, но оптимальна равная цена для всех подразделений.

Содержательной интерпретацией этой модели может быть не только задача корпорации (внутрифирменная цена корпорации), но это может быть и ставка оплаты труда агента внутри бригады. Кроме того, известна такая задача: выполняется проект и есть задача сокращения критического пути (времени выполнения проекта). Тогда тем агентам, кто выполняет критические операции, нужно дополнительно доплачивать, чтобы они сокращали время выполнения операций, а в сумме они должны сократить длительность проекта на заданную величину. Если участники проекта, выполняющие критические операции, имеют квадратичные затраты, а мы им за единицу сокращения времени платим l, то получается такая же задача с аналогичным решением.

Естественно, результат, который мы получили: решения задач совпадают, оптимальным является система стимулирования, когда ставки всех агентов одинаковы (унифицированная система стимулирования) – получен только в рамках тех предположений, которые мы ввели, а именно: в данной модели существенным является предположение о виде функций затрат агента (квадратичная функция). Это свойство степенных функций дает в экономико-математических моделях много хороших свойств:

1. оптимальность унифицированной системы стимулирования (оптимальность единой ставки оплаты);

2. возможность решения задач агрегирования, т.е. решая задачи минимизации затрат с данным набором агентов с характеристиками r_i, получили, что затраты на выполнение данного заказа имеют такой же вид, что и затраты одного агента с характеристикой H – все агенты могут быть заменены на одного агента, действие которого равно сумме их действий, и тип которого равен сумме их типов.

Такие свойства присущи квадратичным функциям, функциям типа Кобба-Дугласа: $\frac{1}{a} r_i^{1-a} y_i^a$, $a \geq 1$. Это можно доказать и для

функций более общего вида: $r_i j\,(\frac{y_i}{r_i})$, где $j\,(\cdot)$ – возрастающая выпуклая функция.

Выше мы считали, что все параметры известны, и решали задачу, полагая, что, в частности, нам известны параметры r_i функций затрат агентов. Если мы не обладаем этой информацией, то можно спросить у агентов значения их типов.

Рассмотрим задачу, когда информацией о типах агентов r_i центр не обладает, тогда пусть s_i – сообщение i-го агента о своем типе.

Центр на основании сообщений решает задачу планирования, т.е. определяет, какими должны быть вектор планов $x(s)$ и значение внутрифирменной цены $l(s)$ в зависимости от сообщений агентов.

Первое, что приходит в голову – воспользоваться решениями задач, которые получены при полной информированности о функциях затрат агентов. Т.е. центр может подставить сообщения агентов в параметры механизмов, которые мы определили решая задачу в условиях полной информированности, и назначать планы в соответствии с полученными механизмами.

Данный путь приведет к тому, что значение l будет следующим: $l(s) = \frac{R}{\sum_{i\in N} s_i}$, а план, назначаемый i-му агенту, равен (подставляем вместо типов сообщения):

$$x_i(S) = \frac{S_i}{\sum_{j\in N} S_j} R,\ i\ \hat{I}\ N.$$

Получили так называемый *механизм внутренних цен* (который похож на механизм пропорционального распределения ресурса). Но информация, сообщаемая центру, зависит от типов агентов. Рассмотрим их целевые функции, подставив в них зависимости $l(s)$ и $x_i(s)$ для того, чтобы понять, будет ли агенту выгодно выполнять назначенный план, и какую информацию ему будет выгодно сообщать:

$$f_i(l,s) = \frac{R^2 s_i}{(\sum_{j\in N} s_j)^2} - \frac{s_i^2 R^2}{2(\sum_{j\in N} s_j)^2 r_i} = \frac{R^2}{(\sum_{j\in N} s_j)^2}(s_i - \frac{s_i^2}{2r_i}),\ i\ \hat{I}\ N.$$

Получили целевую функцию, которая зависит не от действий, а от сообщений агентов. Какие сообщения будет делать агент, чтобы максимизировать свою целевую функцию?

Будем искать максимум целевой функции i-го агента по его сообщению s_i. Для дифференцирования неудобен знаменатель, т.к. он тоже включает в себя s_i. Избавляются от этого "недостатка" введением *гипотезы слабого влияния*: предположим, что агентов достаточно много, т.е. так много, что каждый агент своим сообщением практически не влияет на общий для всех агентов управляющий параметр – внутрифирменную цену. Знаменатель целевой функции тогда не будет зависеть от сообщения отдельного агента. Получим, что $s_i = r_i$, $i\ \hat{I}\ N$, то есть сообщение достоверной информации выгодно всем агентам – механизм является неманипулируемым.

Итак, для механизма внутренних цен выполняется:

1) требование сообщения агентами достоверной информации;

2) балансовое ограничение: сумма действий равна требуемой величине;

3) суммарные затраты агентов минимальны.

Отличный механизм!

Рассмотрим еще один механизм планирования, в котором агентам выгодно сообщение достоверной информации.

Механизмы экспертизы

Экспертиза – выявление свойств объекта, процесса, явления путем опроса экспертов. Человек, принимающий решения, не может быть универсалом, обладать исчерпывающей информацией обо всех сторонах жизни, поэтому ему приходится привлекать экспертов.

Эксперты имеют свои предпочтения, поэтому может сложиться ситуация, когда при проведении экспертизы эксперт будет сообщать недостоверную информацию.

Это может происходить в следующих случаях: собрались эксперты для принятия решения в какой-то области. В ходе обсуждения один из экспертов видит, что решение, которое они собираются принять, сильно отличается от того что он считает нужным сделать. Например, принимают решения, куда вкладывать деньги универси-

тета. Один из деканов считает, что нужно покупать вычислительную технику. Но чувствует, что сейчас примут решение о ремонте. И если этот декан раньше считал, что 30% можно потратить на ремонт, а 70% – на закупку техники, то он скажет: «Ничего не нужно на ремонт, давайте все отдадим на компьютерную технику». Тем самым, исказив информацию.

Тем более искажение информации существенно, если эксперты решают (или готовят информацию для принятия решений), как разделить деньги между ними или субъектами, интересы которых они лоббируют. Искажение может происходить по благородным и неблагородным мотивам. С точки зрения математического моделирования важно, что искажение информации может иметь место, если каждый из экспертов заинтересован в том, чтобы результат экспертизы (коллективное решение) был как можно ближе к его мнению.

Предположим, что результатом экспертизы является величина $x \in [d, D]$, s_i – сообщение i-го эксперта, s_i Î $[d; D]$, r_i – истинное мнение эксперта, $r_i \in [d, D]$. Результат экспертизы x – известная функция от мнения экспертов – отображение (*процедура экспертизы*) $p(\cdot) : [d, D]^n \to [d, D]$ множества возможных сообщений $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ Î $[d; D]^n$ во множество возможных решений, то есть $x = p(s)$.

Условия, налагаемые на механизм экспертизы:

1) непрерывность;

2) монотонность;

3) *условие единогласия*: $\forall a \in [d, D]\ p(a, a, \ldots, a) = a$. Если все эксперты сообщили одно и то же мнение, то это мнение должно быть принято в качестве коллективного решения.

Рассмотрим сначала пример, а потом приведем общие результаты.

<u>Пример 6.</u> Пусть результат экспертизы принадлежит отрезку [0; 1]. Пусть имеется три эксперта. Мнение первого эксперта – оцениваемая величина равна 0,3, второго – 0,5, третьего – 0,7. Процедура экспертизы: берется среднее арифметическое мнений экспертов. Такая функция удовлетворяет всем введенным выше требованиям. Легко убедиться, что среднее арифметическое непрерывно, монотонно и удовлетворяет условию единогласия. Итак:

$$x \in [0,1],\ n = 3,\ r_1 = 0{,}3,\ r_2 = 0{,}5,\ r_3 = 0{,}7,$$

$$x = p(S) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} s_i .$$

Рассмотрим, как могут действовать эксперты. Пусть все эксперты сообщили правду: $s_i = r_i$. Тогда принимаемое решение будет 0,5 (среднее арифметическое) $x(\vec{r}) = 0{,}5$. Посмотрим на поведение отдельных экспертов. Каждый эксперт хочет, чтобы результат экспертизы был как можно ближе к его мнению. Второй эксперт абсолютно доволен, т.к. результат совпадает с тем, что он хочет. Первый недоволен, т.к. ему требуется меньший результат. Третий эксперт также недоволен, т.к. он хочет, чтобы результат был больше.

Следовательно, т.к. функция монотонна, то первый эксперт будет уменьшать сообщение, а третий – увеличивать. Пусть первый говорит 0, второй – 0,5, третий – 1. Тогда результат – 0,5, т.е. не изменился, т.к. на сколько первый уменьшил, на столько третий увеличил: $s_1 = 0$, $s_2 = 0{,}5$, $s_3 = 1$.

Данный вектор сообщений является равновесием Нэша игры экспертов, т.к. второй эксперт сообщение менять не будет, первый хотел бы сделать результат поменьше, но сделать этого не может, так как сообщает минимум, третий хотел бы сделать результат побольше, но сделать этого не может, так как сообщает максимум. Аналогично в других ситуациях равновесия: кто хочет меньше – не может, т.к. "упирается" в нижнее ограничение; кто хочет больше – не может, т.к. "упирается" в верхнее ограничение. •

Значит, в общем случае агенты сообщают недостоверную информацию. Спрашивается, можно ли сделать что-то, чтобы заставить их сообщать свои истинные мнения?

<u>Утверждение 10.</u> (аналогично утверждению 7 для механизмов распределения ресурса).

1) если в равновесии решение оказывается больше, чем мнение некоторых экспертов: $x^* > r_i$, то эти эксперты в равновесии будут сообщать минимальную оценку: $s_i^* = d$.

2) если в равновесии решение оказывается меньше, чем мнение некоторых экспертов: $x^* < r_i$, то эти эксперты в равновесии будут сообщать максимальную оценку: $s_i^* = D$.

3) если в равновесии некоторые эксперты сообщают мнение, не равное границам отрезков: s_i^* $\hat{I}$ (*d; D*), то это значит, что принимаемое решение их устраивает: $x^* = r_i$.

Опираясь на утверждение 10, можно построить равновесие в механизме экспертизы и исследовать его.

Упорядочим экспертов по возрастанию их мнений: $r_1 < r_2 < \ldots < r_n$ (будем считать, что мнения экспертов попарно различны). В ситуации, если на отрезке [*d, D*] было принято некоторое решение, то в соответствии утверждением 10 те эксперты, мнения которых расположены левее принятого решения, будут сообщать нижнюю границу, те, кто правее – верхнюю.

Значит, вектор равновесных сообщений будет иметь вид

$$s^* = (d, d, \ldots, d, s_k^*, D, D, \ldots, D).$$

Эксперты с "маленькими" номерами хотят сдвинуть равновесие влево и сообщают минимальные заявки; быть может, какой-то эксперт с номером *k* сообщает s_k^* в отрезке [*d,D*], эксперты с большими номерами хотят сдвинуть равновесие вправо и сообщают максимальные заявки.

Равновесное сообщение s_k^* должно быть таким, чтобы выполнялось: $p(d, \ldots, d, s_k, D, \ldots, D) = r_k$.

Данное уравнение позволяет найти вектор равновесных сообщений агентов. Но здесь неизвестно, на какой позиции находится s_k: сколько агентов сообщают максимальное значение, а сколько – минимальное, а какой (один или ни одного) эксперт сообщает отличную от границ оценку. Если мы будем это знать, то подставив s_k, решив это уравнение, определим вектор равновесных сообщений.

В рассмотренном выше примере *k*-ым экспертом является второй. Он рассчитывает, если первый говорит – 0, а третий – 1, то что необходимо сказать ему, чтобы итоговое решение было 0,5? Сообщение должно быть 0,5. Такой эксперт называется диктатором.

Чтобы найти его номер в общем случае, введем последовательность чисел:

$$w_i = p(\underbrace{d, \ldots, d}_{i}, \underbrace{D, \ldots, D}_{n-i}), \quad i = \overline{0, n}$$

Фиксируем число экспертов, сообщающих минимальные мнения, остальные сообщают максимальные. Варьируя число экспертов, которые сообщают минимальные заявки, от 0 до *n*, получаем убывающую последовательность точек. Точка w_0 совпадает с правой границей *D*, поскольку, если все сообщили правую границу, то в силу условия единогласия такое решение и будет принято. Аналогично, если все сообщили нижнюю оценку *d*, то решение равно w_n.

У нас есть две последовательности чисел: первая – возрастающая последовательность истинных мнений экспертов r; вторая – убывающая последовательность точек w. Утверждается, что рано или поздно эти последовательности пересекутся. Найдем крайнюю правую точку пересечения этих последовательностей, т.е. нужно взять минимум из этих двух чисел, соответствующих одному и тому же номеру, и взять максимум по всем номерам. Следовательно, существует эксперт с номером $k = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \min(r_i, w_{i-1})$.

В рассмотренном выше примере: для первого агента – минимум из его мнения и его действия равен r_1, для второго – r_2, для третьего агента происходит "поворот" – минимум равен 1/3. Максимум из этих трех точек равен 0,5. Значит, формула дает номер того эксперта, который будет диктатором. В примере *k = 2*.

Предположим, что мы используем не исходный механизм $p(\cdot)$, а предлагаем экспертам следующий *прямой механизм экспертизы*: итоговое мнение будет определяться по вашим сообщениями $\{r_i\}$ в соответствии с процедурой (где сообщения сначала упорядочиваются по возрастанию): $\hat{x}^* = \max\limits_i \min(r_i, w_{i-1})$.

В итоге приходим к следующему утверждению.

<u>Утверждение 11.</u> При использовании прямого механизма экспертизы сообщение достоверной информации является доминантной стратегией экспертов.

Заключение

Таким образом, в данном лекционном курсе отражены основы построения и исследования теоретико-игровых и оптимизационных моделей управления организационными системами. Изложенные подходы и математические средства открывают перспективу как дальнейшего освоения и развития теоретических моделей, так и их детализации и конкретизации с учетом специфики объектов, форм и организаций, совершенствованием которых занимаются исследователи-прикладники.

Литература[1]

1 Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А. Теория графов в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2001. –124 с.

2 Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять организациями. М.: Синтег, 2004. – 400 с.

3 Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2002. – 148 с.

4 Новиков Д.А. Стимулирование в организационных системах. М.: Синтег, 2003. – 312 с.

5 Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. М.: Синтег, 1999. – 108 с.

6 Петраков С.Н. Механизмы планирования в активных системах: неманипулируемость и множества диктаторства. М.: ИПУ РАН, 2001. – 135 с.

[1] *Все работы в электронном виде можно найти на сайте теории управления организационными системами* www.mtas.ru.

ПРИКЛАДНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ УПРАВЛЕНИЯ ОРГАНИЗАЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ

(Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П. Королева)

Богатырев В. Д.

Повышение эффективности управления промышленными комплексами путем разработки и внедрения механизмов согласованного взаимодействия

Исследования, посвященные разработке моделей и методов управления организационно-экономическими системами, основываются на идее согласованного взаимодействия, которое учитывает человеческий фактор. Теоретической базой для решения задач согласованного взаимодействия является теория активных систем, основы которой были заложены в 60-70 годах Бурковым В. Н.

Задача синтеза механизма взаимодействия сводится к выбору отдельных или совокупности его компонент с позиции критерия эффективности активной системы, а именно: целевых функций центра и элементов, процедур формирования планов, механизмов оценки деятельности. Однако в реальных производственных условиях часто выбором только функций стимулирования или только изменением параметров функционирования элементов не обеспечивается согласованное взаимодействие между центром и элементами.

Это объясняется тем, что функции стимулирования и параметры могут изменяться в ограниченной области, а это не позволяет в полной мере согласовать экономические интересы участников системы. В связи с этим возникает проблема одновременного выбора таких функций стимулирования и величин изменения параметров, которые обеспечивают согласованное, а, следовательно, эффективное функционирование системы.

Данное направление исследования механизмов согласованного взаимодействия изучено недостаточно. Поэтому является актуаль-

ным дальнейшее развитие методов согласованного управления активными системами, основанных на одновременном определении функций стимулирования и величин изменения параметров, при реализации которых обеспечивается получение каждым элементом дополнительного эффекта, компенсирующего возможные потери при выполнении плана центра, а также использование полученных результатов на практике при управлении реальными производственными системами.

Кроме того, для анализа затрат, необходимых для согласования интересов центра и элементов, возможно разработать единый подход. В работе исследуются дополнительный эффект который получает система и элементы при согласованном взаимодействии, а также потери центра и каждого элемента при выполнении планового задания. Автором сделан вывод, что реализация согласованного взаимодействия в системе возможна только в том случае, если дополнительный эффект центра и всех элементов от согласованного взаимодействия превышает их потери. Если же дополнительный эффект меньше потерь, то согласованное взаимодействие в системе при данных параметрах, нормах, технологии производства не возможно.

Исследование согласованного взаимодействия проводится на моделях многоэлементной системы. Изучаемые в работе модели включают управляющую подсистему верхнего уровня – центр и управляемые подсистемы нижнего уровня - активные элементы. Центр координирует работу элементов задавая им план и стимулирующие воздействия, а элементы осуществляют реализацию плановых заданий, определяя при этом фактические состояния с позиции собственных интересов (см. рис. 1).

Вводятся следующие понятии и обозначения, необходимые для формирования условий согласованного взаимодействия между центром и N элементами:

$x_n \in Y_n$, $y_n \in Y_n$ - плановые и фактические состояния n-го элемента и множества их допустимых значений;

$f_n(y_n) \in F_n$ - целевая функция n-го элемента и допустимая область ее значений;

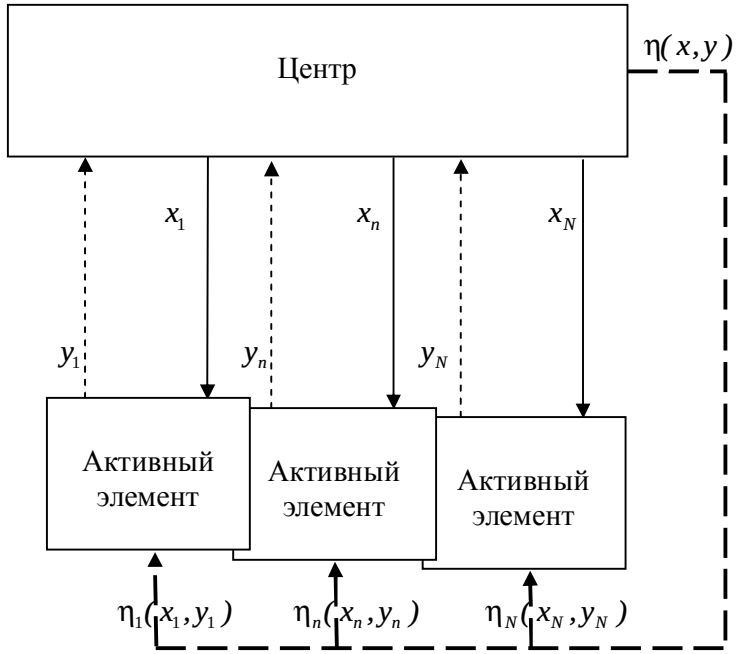


Рис. 1. Взаимодействие в активной многоэлементной системе при использовании стимулирующих воздействий.

$x = (x_1,...,x_n,...,x_N) \in Y = \prod_{n=1}^{N} Y_n$ - вектор плановых состояний элементов, устанавливаемых центром, и множество его допустимых значений;

$y = (y_1,...,y_n,...,y_N) \in Y$ - вектор фактических состояний элементов и множество его допустимых значений;

$f(y) = (f_1(y_1),..., f_n(y_n),..., f_N(y_N)) \in F = \prod_{n=1}^{N} F_n$ - вектор целевых функций элементов и допустимое множество его значений;

$P_n(f_n) = Arg \max_{y_n \in Y_n} f_n(y_n)$ - множество локально - оптимальных состояний n-го элемента;

$P(f) = \prod_{n=1}^{N} P_n(f_n)$ -множество локально-оптимальных состояний системы;

$g_n(f_n) = \max_{y_n \in Y_n} f_n(y_n)$ - максимальное значение целевой функции для n-го элемента;

$\Delta g_n(x_n) = g_n(f_n) - f_n(x_n)$ - потери n-го элемента, связанные с реализацией им плана центра x_n;

$\eta_n(x_n, y_n) \in \Theta_n$ - стимулирующее воздействие, получаемое n-ым активным элементом, и допустимое множество функций (см. рис. 1);

$\eta(x,y) = (\eta_1(x_1, y_1), \ldots, \eta_n(x_n, y_n), \ldots, \eta_N(x_N, y_N)) \in \Theta$ - вектор стимулирующих воздействий и множество его видов;

$\Delta f_n(x_n, \eta_n, y_n)$ - изменение целевой функции n-го элемента, вызванное стимулирующим воздействием;

$f_n(y_n, x_n, \eta_n) = f_n(y_n) + \Delta f_n(x_n, \eta_n, y_n)$ - целевая функция n-го элемента с учетом его поощрения при реализации плана x_n;

$\Phi(x) \in \Xi$ - целевая функция центра и множество ее возможных значений Ξ;

$\Psi(\Phi) = \max_{x \in Y} \Phi(x)$ - максимальное значение целевой функции центра;

$X(\Phi) = Arg\Psi(\Phi)$ - множество оптимальных планов системы в целом;

$\Psi(f) = \max_{y \in P(f)} \Phi(y)$ - значение целевой функции центра на множестве локально-оптимальных состояний элементов;

$\Delta\Psi(x) = \Psi(\Phi) - \Psi(f)$ - дополнительный эффект, получаемый центром от согласованного взаимодействия;

$\Phi(x, y, \eta) = \Phi(x) - \Delta\Phi(x, \eta, y)$ - целевая функция центра с учетом стимулирования элементов;

$\Delta\Phi(x, \eta, y)$ - изменение целевой функции центра, вызванное стимулированием элементов.

С учетом введенных обозначений дано описание $\Theta(x, f) = \prod_{n=1}^{N} \Theta_n(x_n, f_n)$ - множества стимулирующих воздействий в системе, причем $\Theta_n(x_n, f_n) = \{\eta_n(x_n, y_n) \in \Theta_n \mid \forall y_n \in Y_n \quad \Delta f_n(x_n, \eta_n, y_n) \geq \Delta g_n(x_n)\}$ - множество стимулирующих воздействий, обеспечивающее максимум целевой функции n-го элемента, $\Theta(x, f, \Phi)$ - такие стимулирующие воздействия, при которых $\Theta(x, f, \Phi) = \{\eta(x, y) \in \Theta \mid \forall y \in Y \quad \Delta\Psi(x) \geq \Delta\Phi(x, \eta, y)\}$ - обеспечивается превышение дополнительного эффекта от согласованного взаимодействия над затратами центра на стимулирование.

Множество механизмов взаимодействия, таким образом, должно выбираться и с точки зрения целевой функции центра, и с точки зрения целевых функций элементов. Для этого необходимо, чтобы пересекались множества стимулирующих воздействий, согласованных по оптимальному плану с позиции целевых функций элементов $\Theta(x, f)$ и центра $\Theta(x, f, \Phi)$, то есть, $\Theta(x, f) \mathbf{I} \Theta(x, f, \Phi) \neq \varnothing$.

В качестве стимулирующих воздействий могут выступать денежные суммы, выплачиваемые в явном виде, либо стимулирование можно реализовать косвенно, путем изменения различных параметров моделей функционирования элементов, например, путем перераспределения объемов заказа на поставку продукции между элементами.

При использовании в качестве стимулирующих воздействий компенсаторных функций стимулирования

$$u_n(x_n, y_n) = \begin{cases} u_n(x_n), & если\ y_n = x_n \\ 0, & если\ y_n \neq x_n \end{cases}$$

целевые функции элементов примут вид:

$$f_n(r_n, y_n, x_n, u_n) = f_n(r_n, y_n) + u_n(x_n, y_n), \quad (n = \overline{1, N}).$$

Величина $u_n(x_n, y_n)$ представляет собой стимулирующее воздействие η_n, получаемое n–ым элементом в случае реализации плановых заданий центра $x_n \in Y_n(r_n)$.

В этом случае множество функций стимулирования $u_n(x_n)$, при которых учитываются интересы элементов, будет следующим:

$$F_u(x) = \{u(x) | u_n(x_n) \geq \Delta g_n(x_n), x_n \in Y_n(r_n), (n = \overline{1,N})\}.$$

А множество функций стимулирования учитывающих интересы центра: $F_\Phi(x) = \{u(x) \left| \Delta\Psi(x) \geq \sum_{n=1}^{N} u_n(x_n) \geq 0 \right.\}$.

Для случая, когда стимулирование осуществляется путем параметрической координации, вектор координирующих параметров для каждого элемента представлен в следующем виде:

$$r_n(x_n, y_n) = r_n^н + \Delta r_n(x_n, y_n), \quad (n = \overline{1,N}),$$

где $r_n^н$ - номинальное значение параметра;

$\Delta r_n(x_n, y_n) = \begin{cases} \Delta r_n, & если \quad y_n = x_n \\ 0, & если \quad y_n \neq x_n \end{cases}$, $(n = \overline{1,N})$ - переменная составляющая параметра, представляющая собой координирующее воздействие центра на n-ый элемент ($\eta_n = \Delta r_n$).

Причем $f_n(x_n, \Delta r_n, y_n) = f_n(r_n, y_n) + \Delta f_n(x_n, \Delta r_n, y_n)$- целевая функция n-го элемента с учетом параметрической координации при реализации всевозможных состояний y_n, где

$\Delta f_n(x_n, \Delta r_n, y_n) = \begin{cases} \Delta f_n(x_n, \Delta r_n), & если \ y_n = x_n \\ 0, & если \ y_n \neq x_n \end{cases}$ - изменение целевой функции n-го элемента, вызванное изменением параметров на величину Δr_n при реализации элементами планового задания x_n.

Множество координирующих воздействий $\Delta R_c(x)$, учитывающих интересы элементов должно удовлетворять следующему соотношению:

$$\Delta R_c(x) = \{\Delta r \in R \left| \underline{\Delta} r_n \leq \Delta r_n \leq \overline{\Delta} r_n, \left(\frac{df_n(r_n, x_n)}{dr_n}, \Delta r_n \right) \geq \Delta g_n(x_n), (n = \overline{1,N}) \right.\}$$

.

где $\underline{\Delta} r_n, \overline{\Delta} r_n$ - нижнее и верхнее значение изменения координирующего параметра для n-го элемента. А множество координирующих воздействий, учитывающих интересы центра обозначено через $\Delta R_\Phi(x)$:

$$\Delta R_\Phi(x) = \{\Delta r \in R \left| \underline{\Delta} r_n \leq \Delta r_n \leq \overline{\Delta} r_n \ (n = \overline{1,N}), \Delta\Psi(x) \geq \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{d\Phi(r,x)}{dr_n}, \Delta r_n \right) \right.\}.$$

Для реализации согласованного взаимодействия необходимо, чтобы пересекались множества стимулирующих воздействий, учитывающих одновременно интересы центра и всех элементов: $\Delta R_\Phi(x) \mathbf{I} \Delta R_c(x) \neq \varnothing$ или $F_u(x) \mathbf{I} F_\Phi(x) \neq \varnothing$.

При реализации согласованного взаимодействия путем выбора функций стимулирования и изменений параметров координации одновременно в качестве стимулирующих воздействий выбирается пара $\eta = (u, \Delta r)$:

$$\eta_n(x_n, y_n) = \begin{cases} (u_n(x_n), \Delta r_n(x_n)), & если \quad y_n = x_n \\ 0, & если \quad y_n \neq x_n \end{cases}.$$

Тогда изменение целевой функции n-го элемента, вызванное стимулирующими воздействиями при реализации элементами планового задания x_n:

$$\Delta f_n(x_n, \eta_n, y_n) = \begin{cases} \Delta f_n(x_n, \Delta r_n) + u_n(x_n), & если \ y_n = x_n \\ 0, & если \ y_n \neq x_n \end{cases}.$$

Множество систем стимулирования, учитывающих интересы элементов, будет следующим:

$$\Omega_f(x) = \{\eta = (u, \Delta r) \left| \left(\frac{df_n(r_n, x_n)}{dr_n}, \Delta r_n \right) + u_n(x_n) \geq \Delta g_n(x_n), (n = \overline{1,N}) \right.\},$$

а множество систем стимулирования, учитывающих интересы центра:

$$\Omega_{\Phi}(x) = \{h = (u, \Delta r) \mid \Delta\Psi(x) \geq \left(\frac{d\Phi(r,x)}{dr}, \Delta r \right) + \sum_{n=1}^{N} u_n(x_n)\}.$$

Реализация согласованного механизма взаимодействия в системе возможна в случае, если $\Omega_f(x) \mathbf{I} \Omega_{\Phi}(x) \neq \varnothing$.

Далее приводятся пример одной из разработанных автором моделей механизмов согласованного взаимодействия между заказчиком и поставщиком по качеству и объему поставляемой продукции.

Данный пример был выбран потому, что важным фактором, влияющим на производственную деятельность промышленного комплекса, являются взаимоотношения с поставщиками сырья, комплектующих изделий и материалов. На многих производствах доля сырья, полуфабрикатов, услуг и работ сторонних организаций может составлять до 60% в сумме стоимости готовой продукции. Поэтому повышение качества и снижение цен на комплектующие изделия, узлы, блоки, а также своевременность и комплектность поставки оказывают большое влияние на снижение себестоимости продукции. Эффективным управленческим решением для данного взаимодействия может стать формирование службы закупок, целью которой является построение взаимовыгодных и долгосрочных отношений с поставщиками. В работе вводятся следующие необходимые обозначения:

$k = 1,...,K$ – количество видов продукции, выпускаемых заказчиком;

x_k – объем выпуска продукции k–ого вида;

$x = (x_1,...,x_k,...,x_K)$ – вектор выпуска продукции;

p_k – цена за единицу продукции k–ого вида;

$p = (p_1,...,p_k,...,p_K)$ – вектор цен на продукцию;

$i = 1,...,I$ – количество поставщиков;

$j = 1,...,J$ – количество видов поставляемых комплектующих изделий, сырья и материалов;

y_{ij} – количество комплектующих изделий j-го вида, поставляемых i-ым поставщиком;

$Y = \left\| y_{ij} \right\|_{\substack{i=1,...,I \\ j=1,...J}}$ – матрица - заказ на комплектующие изделия, сырье, материалы;

z_{ij} – цена за единицу поставляемого изделия или сырья j-го вида, согласно условий контракта с i-ым поставщиком;

$Z = \left\| z_{ij} \right\|_{\substack{i=1,...,I \\ j=1,...J}}$ – матрица цен на комплектующие изделия, сырье, заказываемые у поставщиков;

$l = 1,...,L$ – количество показателей уровня качества (например, качество поставляемых изделий и материалов измеряется тремя параметрами $L = 3$, тогда $l = 1$ - номер показателя доли забракованных изделий и материалов на входном контроле, $l = 2$ - номер показателя доли возврата при переработке, $l = 3$ - номер показателя дефектности по ГОСТу);

b_{ij}^{l} – l-ый показатель уровня качества комплектующих j-го вида, поставляемых i-ым поставщиком;

$\underline{b}_{ij}^{l}$ - нижняя граница уровня качества;

$\overline{b}_{ij}^{l}$ - высшая граница качества;

$B = \left\| b_{ij}^{l} \right\|_{\substack{l=1,...,L \\ i=1,...,I \\ j=1,...,J}}$ - данные показателей качества по всем поставщикам.

Заказчик, максимизируя собственные экономические результаты, определяет план выпуска x, заказ на комплектующие изделия, сырье, материалы Y и их качество B. Эта задача в формализованном виде представлена следующей системой:

$$\begin{cases} \Phi(x,Y,B)=\rho(p,x)-C_0(x,B)- \\ -\zeta(Z,Y)\xrightarrow[x,Y,B]{} max \\ x_k \le \varphi_k(Y),(k=\overline{1,K}) \\ x_k \le min(X_k,\tilde{X}_k),(k=\overline{1,K}) \\ X_k=\omega_k(B),(k=\overline{1,K}) \\ \underline{b_{ij}^l} \le b_{ij}^l \le \overline{b_{ij}^l},(i=\overline{1,I};j=\overline{1,J}) \end{cases},$$

где $\Phi(x,Y,B)$ – экономический результат заказчика за рассматриваемый период;

$\rho(p,x)=\sum_{k=1}^{K} p_k x_k$ – валовая выручка заказчика при ценах p;

$C_0(x,B)$ – функция издержек, которая зависит от количества выпущенной продукции x и качества B, включает переменные и постоянные издержки, но не включает стоимость покупных изделий, сырья и работ;

$\zeta(Z,Y)=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} z_{ij} y_{ij}$ – затраты заказчика на покупные комплектующие, сырье и работы поставщиков;

$x_k \le \varphi_k(Y),(k=\overline{1,K})$ – технологическое ограничение, $\varphi_k(Y),(k=\overline{1,K})$ - производственные функции, определяющие выпуск конечной продукции заказчиком в зависимости от объема поставок Y;

$X_k=\omega_k(B),(k=\overline{1,K})$ – спрос на продукцию заказчика в зависимости от качества комплектующих изделий, сырья, материалов B, $\tilde{X}_k$ – максимально технологически возможный выпуск продукции заказчиком, причем предполагается, что объем спроса ниже максимально технологически возможного $\forall k\ X_k \le \tilde{X}_k$ и линейно растет с ростом качества комплектующих изделий $X_k=\omega_k(B)=\underline{x_k}+\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{l=1}^{L}\beta_{ij}^{kl}(b_{ij}^l-\underline{b_{ij}^l})$, β_{ij}^{kl} - коэффициент,

характеризующий величину прироста спроса на продукцию k–ого вида в связи с приростом уровня качества по l–ому показателю для j–го вида комплектующих изделия или сырья, поставляемых i–ым поставщиком; $\underline{x_k}$ - объем спроса при минимальном уровне качества.

Обратная производственная функция, представлена в следующем виде $y_{ij}=\psi_{ij}(x)=\sum_{k=1}^{K} x_k \lambda_{ij}^k$, где $\lambda_{ij}^k=\lambda_j^k \cdot \lambda_{ij}$; λ_j^k - коэффициент, характеризующий применяемость j-го изделия, сырья, материала в k-ом виде продукции; λ_{ij} - доля i-го поставщика в поставке j-го изделия, сырья, материала. Сумма долей всех поставщиков в поставке j-го изделия равна единице $\sum_{i=1}^{I}\lambda_{ij}=1$.

Функция издержек заказчика зависит от количества выпущенной продукции x, включает переменные и постоянные издержки, но не включает стоимость покупных изделий, сырья и работ, причем издержки на готовую продукцию линейно снижаются при повышении каждого из параметров качества:

$$C_0(x,B)=\sum_{k=1}^{K} x_k\left[\ \underline{c}_{0k}^V-\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{l=1}^{L}\alpha_{ij}^{kl}(b_{ij}^l-\underline{b}_{ij}^l)\ \right]+c_0^F,$$

$\underline{c}_{0k}^V$ - переменные издержки заказчика на единицу продукции k-ого вида без учета стоимости комплектующих, сырья и материалов поставщиков при нижней границе всех показателей качества; α_{ij}^{kl} - коэффициент, характеризующий величину уменьшения переменных затрат на единицу продукции k–ого вида в связи с приростом уровня качества по l–ому показателю для j–го вида комплектующих, поставляемых i–ым поставщиком; c_0^F – постоянные издержки заказчика.

Заказчик, стремясь получить максимальную величину прибыли, устанавливает, максимально возможное значение уровня качества поставок:

$$b_{ij}^l=\overline{b_{ij}^l},(i=\overline{1,I};j=\overline{1,J},l=\overline{1,L}).$$

Дополнительный экономический эффект заказчика при верхней границе качества поставок определяется из уравнения:

$$\Delta\Phi = \sum_{k=1}^{K}((p_k - \underline{c}_{0k}^{V} - \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\lambda_{ij}^{k} z_{ij})\Theta_k + \\ + \underline{x}_k \Omega_k + \Theta_k \Omega_k),$$

где $\Theta_k = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{l=1}^{L}\beta_{ij}^{kl}(\overline{b_{ij}^{l}} - \underline{b_{ij}^{l}})$, $\Omega_k = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{l=1}^{L}\alpha_{ij}^{kl}(\overline{b_{ij}^{l}} - \underline{b_{ij}^{l}})$.

Каждый из поставщиков, получив от заказчика предложение – заказ, максимизирует свои локальные экономические результаты и определяет выгодные для себя количество y_i и качество поставок B_i. На практике часто возникают ситуации, когда поставщики не заинтересованы в повышении качества поставляемых изделий. Для того, чтобы оценить потери поставщиков при повышении качества до требуемого заказчиком уровня, в работе разработана модель механизма выбора качества и объема поставок поставщиком:

$$\begin{cases} f_i(y_i, B_i) = \rho_i(z_i, y_i) - \\ - C_i(y_i, B_i) \xrightarrow[y_i, B_i]{} max \\ y_{ij} \le min(\underline{Y}_{ij}, \tilde{Y}_{ij}), (j = \overline{1,J}) \\ \underline{b_{ij}^{l}} \le b_{ij}^{l} \le \overline{b_{ij}^{l}}, (j = \overline{1,J}, l = \overline{1,L}) \end{cases},$$

где $y_i = (y_{i1}, ..., y_{ij}, ..., y_{iJ})$ – вектор поставок комплектующих изделий, сырья, материалов для i-го поставщика;

$z_i = (z_{i1}, ..., z_{ij}, ..., z_{iJ})$ – вектор цен за единицу поставляемых изделия или сырья, согласно условий контракта с i-ым поставщиком;

$B_i = \left\| b_{ij}^{l} \right\|_{\substack{l=1,...,L \\ j=1,...,J}}$ - матрица показателей качества по i-ому поставщику;

$\overline{B}_i = \left\| \overline{b}_{ij}^{l} \right\|_{\substack{l=1,...,L \\ j=1,...,J}}$ - матрица верхних границ показателей качества по i-ому поставщику;

$f_i(y_i, B_i)$ – экономический результат i-го поставщика от поставки комплектующих в количестве y_i с качеством B_i;

$\rho_i(z_i, y_i) = \sum_{j=1}^{J} z_{ij} y_{ij}$ – валовая выручка i-го поставщика от поставки комплектующих в количестве y_i и ценах на них z_i согласно условиям контракта;

$\tilde{Y}_{ij}$ – максимально технологически возможный объем выпуска j-го вида комплектующих изделий i-ым поставщиком;

$Y_{ij} = \psi_{ij}(X) = \sum_{k=1}^{K} X_k \lambda_{ij}^{k}$ - объем заказа на комплектующие изделия и сырье j-го вида у i-го поставщика в зависимости от конечного спроса на продукцию заказчика;

$\underline{b_{ij}^{l}} \le b_{ij}^{l} \le \overline{b_{ij}^{l}}, (j = \overline{1,J}, l = \overline{1,L})$ - верхняя и нижняя границы качества для i-го поставщика.

Затраты i-го поставщика складываются из переменных издержек на единицу поставляемых изделий и постоянных издержек, кроме того, издержки увеличиваются с ростом качества комплектующих:

$$C_i(y_i, B_i) = \sum_{j=1}^{J} y_{ij} \underline{c}_{ij}^{V} + \sum_{j=1}^{J}\sum_{l=1}^{L} \gamma_{ij}^{l}\left(b_{ij}^{l} - \underline{b}_{ij}^{l}\right) + c_i^{F},$$

где $\underline{c}_{ij}^{V}$ - переменные издержки i-го поставщика на производство единицы комплектующих изделий и сырья j–го вида при нижней границе всех показателей качества; γ_{ij}^{l} - коэффициент, характеризующий величину прироста переменных издержек i-го поставщика на j–ый вид поставляемых изделий в связи с прирос-

том уровня качества по l–ому показателю; c_i^F – постоянные издержки i-го поставщика.

Если стратегии поставщиков совпадают с планом заказчика и обеспечивают получение максимального эффекта для заказчика и для всех поставщиков, то такое взаимодействие является согласованным.

Однако в случае, если для i-го поставщика прирост прибыли связанный с ростом спроса на конечную продукцию при повышении уровня качества меньше затрат на повышение качества поставляемых комплектующих изделий, сырья и материалов, то поставщик выберет нижнюю границу уровня качества. Тогда взаимодействие между заказчиком и поставщиками не будет являться согласованным, так как поставщики экономически не заинтересованы в повышении уровня качества. При выполнении плана заказчика и поставке комплектующих изделий и сырья высшего качества поставщики несут потери в размере:

$$\Delta f_i = \sum_{j=1}^{J}\sum_{l=1}^{L}\gamma_{ij}^{l}(\overline{b_{ij}^{l}} - \underline{b_{ij}^{l}}) - \sum_{j=1}^{J}(z_{ij} - \underline{c}_{ij}^{V})\sum_{k=1}^{K}\lambda_{ij}^{k}\Theta_k .$$

Для реализации согласованного по качеству поставок механизма взаимодействия, который обеспечивает максимальные значения целевых функций поставщиков и заказчика, необходимо часть эффекта, получаемого заказчиком от повышения качества, направить на стимулирование поставщиков. Условием реализации согласованного по качеству поставок механизма взаимодействия являются:

- превышение дополнительного эффекта заказчика $\Delta\Phi$ относительно затрат на стимулирование поставщиков $\Delta\Phi(\eta)$;

- превышение экономического эффекта от стимулирования $\Delta f(\eta_i)$, получаемого поставщиком при повышении качества, над потерями Δf_i:

$$\Delta\Phi \geq \Delta\Phi(\eta),$$

$$\Delta f(\eta_i) \geq \Delta f_i, (i = \overline{1,I}).$$

Если в качестве стимулирующих воздействий поставщиков $\eta = (\eta_1,...,\eta_i,...,\eta_I)$ заказчик устанавливает премии в явном виде

$\eta_i = u_i(B_i)$, то функции стимулирования должны выбираться исходя из следующих условий:

$$\begin{cases} \Delta\Phi \geq \sum_{i=1}^{I} u_i(\overline{B}_i) \\ \forall i \quad u_i(\overline{B}_i) \geq \Delta f_i \end{cases}.$$

Если же предположить, что заказчик готов компенсировать потери поставщиков, вызванные повышением качества комплектующих изделий, путем изменения цен на них на величины $\eta_i = (\Delta z_{i1},...,\Delta z_{ij},...,\Delta z_{iJ})$, то они должны выбирать исходя из ограничений:

$$\begin{cases} \Delta\Phi \geq \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\frac{df_i(\overline{B}_i)}{dz_{ij}}\Delta z_{ij} \\ \forall i \quad \sum_{j=1}^{J}\frac{df_i(\overline{B}_i)}{dz_{ij}}\Delta z_{ij} \geq \Delta f_i \end{cases}.$$

В том случае, если заказчик стимулирует поставщиков путем перераспределения объемов заказа между ними, то величины изменения доли поставщиков в общем объеме заказа $\eta_i = (\Delta\lambda_{i1},...,\Delta\lambda_{ij},...,\Delta\lambda_{iJ})$ должны выбирать из следующей области:

$$\begin{cases} \Delta\Phi \geq \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\frac{d\Phi(\overline{B}_i)}{d\lambda_{ij}}\Delta\lambda_{ij} \\ \forall i \quad \sum_{j=1}^{J}\frac{df_i(\overline{B}_i)}{d\lambda_{ij}}\Delta\lambda_{ij} \geq \Delta f_i \end{cases},$$

причем, так как объем заказа на комплектующие изделия и материалы ограничен, то

$$\sum_{i=1}^{I}\Delta\lambda_{ij} = 0, (j = \overline{1,J}).$$

При перераспределении объема заказа одни поставщики теряют заказ и получают не стимулирующие воздействия, а штрафы, другие поставщики получают дополнительный объем поставки, следовательно, потери одних становятся дополнительным доходом

других. Очевидно, что при одинаковых ценах на один вид комплектующих изделий для всех поставщиков, потери заказчика на стимулирование равны нулю.

С использованием данной модели, условий и подхода были разработаны рекомендации для управления закупками металла для Прессового производства ОАО «АВТОВАЗ» и для вновь созданного Управления закупок ОАО «Ленинградский металлический завод» (далее ОАО «ЛМЗ»).

Таблица 1

Поставки металла на ОАО «АВТОВАЗ»

Наименование поставщика	Всего в 2002 году, тн	Всего в 2001 году, тн	Прирост, %	Брак в 2001 году, %
ОАО «НЛМК» (Липецк)	159 944	207 199	-22,81%	2,56%
ОАО «Северсталь» (Череповец)	190 387	193 678	-1,70%	1,65%
ОАО «ММК» (Магнитогорск, «Магтолмет»)	46 692	45 732	2,10%	1,39%
ОАО «АК ЛМЗ» (Лысьва, «Инсаюр-Автотрейд»)	66 609	68 672	-3,00%	4,40%

Для Прессового производства ОАО «АВТОВАЗ» актуальным является закупка металла, стоимость которого в цене готовой продукции достигает 8-10%. Объем брака в 2000-2001 годах в отдельные месяцы по ряду поставщиков металла доходил до 18% (см. рис. 2). Для повышения качества поставляемого металла на предприятии совместно с крупнейшими поставщиками стали проводиться координационные советы, на которых выстраивается взаимовыгодное сотрудничество.

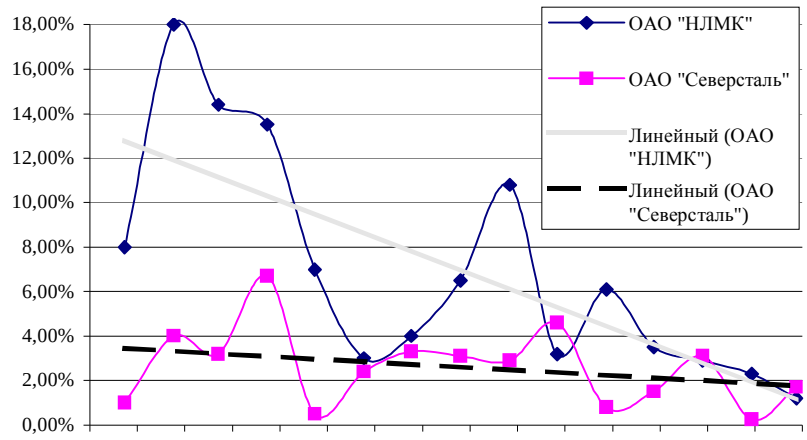


Рис. 2. Отклонения в поставках х/к листа 1-ой группы отделки поверхности.

С целью стимулирования поставщиков в 2002 году ОАО «АВТОВАЗ» перераспределил объемы среди крупнейших поставщиков металла. Учитывая то, что в 2002 году в производство поступило 484 091,09 тн металла против 527 231,14 тн в 2001 году (снижение на 8,18%), доля ОАО «Северсталь» повысилась с 37,6% до 41% в общем объеме, а доля ОАО «НЛМК» снизилась с 40,2% до 34,5% (см. табл. 1). Перераспределение объемов заказа между поставщиками привело к конкуренции между ними и, в конечном итоге, к росту качества поставляемого металла (см. рис. 2).

В результате роста качества металла, поставляемого на Прессовое производство ОАО «АВТОВАЗ», снизились потери от замен, технологически потери от брака, перерасход металла (см. табл. 2). Экономический эффект от проведенных мероприятий составил 94 299,5 тысяч рублей.

Таблица 2

Потери от поставок металла с браком на ОАО «АВТОВАЗ»

Наименование потерь	В 2002 году, тн	В 2001 году, тн	Прирост, %
ВСЕГО перерасход металла из-за брака, в том числе:	17 606	28 026	-37,18%
- потери металла от замен	894	1 823	-50,95%
- технологические потери от брака	4 205	5 686	-26,05%

В феврале 2000 года на ОАО «ЛМЗ» согласно перечню мероприятий плана внешнего управления было принято положение об управлении закупок, руководство по качеству, стандарт СТП СК 6, была сформирована соответствующая служба. Для повышения качества поставляемых материалов и комплектующих изделий на ОАО «ЛМЗ», в данной работе автор предлагает стимулировать поставщиков не в явном виде, а путем изменения различных условий контрактов на поставку так, чтобы это было экономически выгодно ОАО «ЛМЗ» и поставщикам. В качестве таких стимулирующих условий контракта на поставку могут выступать: увеличение цены за единицу поставляемого материального ресурса, увеличение объемов заказа, сокращение сроков оплаты за поставку, увеличение размера аванса.

На основе выполненного исследования автором разработан общий методологический подход к формированию условий согласованного взаимодействия при выборе в качестве стимулирующих воздействий функций стимулирования и изменений параметров целевых функций. Предложено в качестве системы стимулирования использовать одновременно функцию стимулирования и изменения существенных параметров системы, что приводит к расширению области компромисса и более эффективному функционированию производственно - экономической системы. Разработан ряд моделей механизмов согласованного взаимодействия при управлении промышленными комплексами. Даны рекомендации по использованию предлагаемых подходов и моделей на практике.

Д. З. Вагапова

Моделирование финансовых потоков в процедуре амортизации ипотечного кредита с постоянными по величине выплатами

Каждый вид ипотечного кредита задает свой механизм погашения основного долга и уплаты процентов, определяя тем самым форму организации финансовых потоков. Рассмотрим формирование процедуры погашения ипотечного кредита с постоянными по величине выплатами и организацию в ней финансовых потоков.

Предположим, что кредитор задал величину основной суммы кредита D, установил его срок n, и процентную ставку i, являющейся постоянной в течении срока ссуды. На основании этих исходных данных рассчитываются периодические выплаты по ипотеки в соответствии с уравнением

$$V = D / \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{-k} = D / a_{n;i.} \quad (1)$$

При найденной в соответствии с (1) величине расхода по займу V можно сформировать план погашения ипотечного кредита. Для этого найдем сумму первого платежа, идущую на погашение основного долга, как разность между величиной срочной уплаты V и процентами, т.е.

$$R_1 = V - D \cdot i. \quad (2)$$

Второй платеж представляет собой наращенную сумму первого и равен

$$R_2 = V - (D - R_1)\, i = R_1 + R_1\, i = R_1\,(1 + i),$$

третий платеж – наращенную сумму второго

$$R_3 = R_2\,(1 + i) = R_1\,(1 + i)^2 \text{ и т.д.}$$

Общая формула для определения величины погашения долга на конец любого года k равна

$$R_k = R_{k-1}\,(1 + i) = R_1\,(1 + i)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \quad (3)$$

Для последнего года займа n величина погашения долга составит

$$R_n = R_{n-1}(1+i) = R_1(1+i)^{n-1}.$$

В соответствии с формулой (3) периодические платежи по погашению долга образуют ряд:

R_1 ; $R_1(1+i)$; $R_1(1+i)^2$; …; $R_1(1+i)^{k-1}$; …; $R_1(1+i)^{n-1}$. (4)

Как следует из этого ряда и формулы (3) величина погашения долга увеличивается от года к году и в конце срока займа становится равной

$R_n = R_1(1+i)^{n-1}$.

Сумма членов ряда (4) по какой-либо год образует величину погашенной задолженности на конец этого года. Например, на конец года k величина погашенной задолженности равна

$$w_k = R_1\sum_{l=0}^{k-1}(1+i)^l = R_1, s_{k;i}, \text{ k = 1, 2, …, n,} \qquad (5)$$

где $s_{k;i} = \sum_{l=0}^{k-1}(1+i)^l$ – коэффициент наращения (накопления) единичного финансового потока за n периодов.

Эта сумма есть сумма k членов геометрической прогрессии со знаменателем u = (i +1) и начальным членом, равным 1. Поэтому при $i \neq 0$

$$s_{k;i} = \frac{u^k - 1}{u - 1} = [(1+i)^k - 1]/i = (u^k - 1)/i.$$

Если i = 0, то $s_{k;i} = \sum_{l=1}^{k} 1 = n$.

Как следует из приведенной формулы коэффициента наращения, $s_{n;\,i}$ зависит только от срока кредита и процентной ставки. С увеличением каждого из этих параметров его величина увеличивается. Значения коэффициента легко табулировать и использовать в расчетах специальные таблицы.

В соответствии с (5) величины погашенной задолженности составляют следующий ряд:

$R_1 s_{1,i}$; $R_1 s_{2,i}$; …; $R_1 s_{k,i}$; … ; $R_1 s_{n,i}$ или

$$R_1; R_1\sum_{l=0}^{1}(1+i)^l;...; R_1\sum_{l=0}^{k-1}(1+i)^l;...; R_1\sum_{l=0}^{n-1}(1+i)^l.$$

(6)

Первый член этого ряда равен $w_1 = R_1$, так как $s_{1;\,i} = 1$, а последний член $w_n = R_1 s_{n;\,i} = D$, т.е. последний член ряда (6) равен сумме займа, а это означает, что долг за срок займа выплачен в полной мере. Размер погашенной задолженности, как следует из ряда и формулы (5), последовательно увеличивается от величины R_1 в конце первого года до суммы займа D в конце срока погашения.

Размер погашенной задолженности до начала года k определяется из уравнения:

$$w_k^н = R_1 s_{k-1;i}, \quad k = 2, 3, \ldots, n, \qquad w_1^н = 0.$$

(7)

Величины погашенной задолженности на начало года в соответствии с (7) образует ряд:

0; $R_1 s_{1,i}$; $R_1 s_{2,i}$; …; $R_1 s_{k-1,i}$; … ; $R_1 s_{n-1,i}$; r или

$$R_1; R_1\sum_{l=0}^{1}(1+i)^l;...; R_1\sum_{l=0}^{k-1}(1+i)^l;...; R_1\sum_{l=0}^{n-1}(1+i)^l;...;R_1\sum_{l=0}^{n}(1+i)^l.$$

Размер погашенной задолженности на начало года увеличивается от нуля на начало первого года и до величины $w_n^н = R_1\sum_{l=0}^{n=2}(1+i)^l = D - R_1(1+i)^n$ на начало последнего года займа.

Величина долга на начало какого-либо года k при известной задолженности на этот период $W_k^н$ образует последовательность значений следующего ряда:

D; $D - W_2^н$; $D - W_3^н$; …; $D - W_k^н$; …; $D - W_n^н$ или

D, $D - R_1 s_{1,;i}$; $D - R_1 s_{2,;i}$; …; $D - R_1 s_{k-1;i}$; …; $D - R_1 s_{n-1,;i}$.

Остаток долга на начало года k равен

$$D_k^н = D - R_1\sum_{l=0}^{k-2}(1+i)^l = D - R_1 s_{k-1;i}, \text{t = 2,3, …, n, } D_1^н = D. \qquad (8)$$

Если учесть, что размер долга на начало последнего года займа равен

$$w_n^н = D - R_1(1+i)^n,$$

то остаток долга на начало последнего года займа равен

$$D_n^н = D - w_n^н = D - D + R_1(1+i)^n = R_1(1+i)^n.$$

Остаток долга на конец каждого года при известной погашенной задолженности w_k, k = 1, 2, …, n образует аналогичную последовательность в виде следующего ряда:

$$D, \ - R_1 s_{1,;i}\ ;\ D - R_1 s_{2,;i}\ ;\ \ldots;\ D - R s_{t,;i}\ ;\ \ldots;\ D - R_1 s_{n\,;i}\ .$$

При этом долг на конец года k составит

$$D_k = D - w_k = D - R_1 \sum_{l=0}^{k-1} (1+i)^l = D - R_1 s_{k;i}, \text{k=1,2,…,n.}$$

(9)

Учитывая, что величина погашенной задолженности на конец последнего года займа n равна сумме займа $D(w_n = D)$, остаток долга на конец года n, равен нулю, т.е.

$$D_n = D - w_n = D - R_1 s_{n;\,i} = D - D = 0.$$

Определим величину процентов, выплачиваемую в конце каждого года, в случае, когда расходы по займу являются постоянными величинами. Так как проценты начисляются на размер долга в начальный период, величины процентов составят следующий ряд:

$$D{\cdot}i;\ (D - w_2^н)i;\ (D - w_3^н)i;\ \ldots;(\ D - w_k^н)i;\ \ldots;(\ D - w_n^н)i \qquad \text{или}$$

$$D{\cdot}i;\ (D - Rs_{1;\,i})\ i\ ;\ (D - Rs_{2;\,i}\ )\ i;\ \ldots;\ (D - R_1 s_{\,k-1\,;\,i})\ i\ ;\ \ldots;\ (D - R_1 s_{\,n-1\,;\,i})\ i\ .$$

Процентные платежи, выплачиваемые в конце года k, определяются из уравнения:

$$J_t = (D - R,\ s_{k-1;\ i})\ i, \quad k = 2,\ 3,\ \ldots,\ n\ , \quad J_1 = Di,$$

(10)

а величина процентов, выплачиваемая в конце года n, составит в соответствии с формулой (10)

$$J_n = (D - R,\ s_{n-1;\,i})\ i = (\ D - D + R_1\ (\ 1 + i)^n)\ i = R_1 i\ (1 + i)^n$$

.

Полученные уравнения (1–10) в совокупности позволяют сформировать план погашения займа должником при условии постоянства срочных выплат.

В общем виде взаимосвязанные модели финансовых потоков при формировании плана-графика погашения задолженности во времени представлены в таблице 1.

Таблица 1

Модели потоков при формировании общего плана погашения задолженности

Год	Расходы по займу	Расходы на погашение долга	Погашенный долг		Остаток долга		Проценты
	v	R_k	$w_k^н$	w_k	$D_k^н$	D_k	J_k
1	$V=D/a_{n;\,i}$	$R_1=v-Di$	0	$R_1 s_{1;\,i}$	D	$D-R_1 s_{1;\,i}$	Di
2	V	$R_1=(1+i)$	$R_1 s_{1;\,i}$	$R_1 s_{2;\,i}$	$D-R_1 s_{1;\,i}$	$D-R_1 s_{2;\,i}$	$(D-R_1 s_{1;\,i})i$
3	V	$R_1=(1+i)^2$	$R_1 s_{2;\,i}$	$R_1 s_{3;\,i}$	$D-R_1 s_{2;\,i}$	$D-R_1 s_{3;\,i}$	$(D-R_1 s_{2;\,i})i$
.							
.							
.							
t	V	$R_1=(1+i)^{k-1}$	$R_1 s_{k-1;\,i}$	$R_1 s_{k;\,i}$	$D-R_1 s_{k-1;\,i}$	$D-R_1 s_{k;\,i}$	$(D-R_1 s_{k-1;\,i})i$
.							
.							
.							
n	V	$R_1=(1+i)^{n-1}$	$R_1 s_{n-1;\,i}$	$R_1 s_{n;\,i}$	$D-R_1 s_{n-1;\,i}$	$D-R_1 s_{n;\,i}$	$(D-R_1 s_{n-1;\,i})i$

Общий план погашения задолженности может быть легко переведен в конкретный вид при заданных параметрах контракта D, n, i.

Рассмотрим числовой пример формирования графика погашения ипотечного кредита с постоянными по величине выплатами.

Кредитор задает максимальную величину суммы кредита, которая является определенным процентом от стоимости собственности (например, 85%), выкупаемой заемщиком, устанавливает максимальный срок кредита, который должен быть, например, короче срока выхода заемщика на пенсию, и предлагает процентную ставку, сложившуюся на рынке. Затем рассчитываются периодические выплаты по ипотеке. Пусть кредитор установил следующие значения исходных показателей:

сумма кредита $D = 500 \cdot 10^3$ руб.;

срок ипотечного кредита n = 10 лет;

годовая процентная ставка i = 12%.

Пусть периодические платежи осуществляются один раз в конце каждого года. Обычно периодические выплаты осуществляются ежемесячно, но в рассматриваемом примере сделано предложение о ежегодных выплатах.

Из исходных данных видно, что ежегодные платежи должны быть больше процентных платежей, равных $500 \cdot 10^3 \cdot 0{,}12 = 60 \cdot 10^3$ руб. Поэтому для того, чтобы погасить ипотечный кредит, ежегодный платеж должен превышать $60 \cdot 10^3$ руб. В соответствии с формулой (1) находим, что

$$V = D/\, a_{10;\,12} = 500 \cdot 10^3 / 5{,}65 = 88{,}5 \cdot 10^3 \text{ руб.}$$

График погашения (амортизации) кредита показывает в любой момент времени его состояние, характеризующееся такими параметрами, как остатком долга, величиной погашенного долга, размером платежа на выплату процентов, выплату основной суммы кредита. План амортизации может быть рассчитан несколькими путями. Рассмотрим способ основанный на использовании системы уравнений (2–7) и формировании на их основе таблицы 1. Проиллюстрируем на рассматриваемом числовом примере этот способ.

В числовом виде таблицу 1 будем формировать по столбцам. Второй столбец представляет собой ежегодные постоянные выплаты, равные $V = 88{,}5 \cdot 10^3$ руб. Часть ежегодных выплат расходуется на погашение основного долга, а другая часть – на погашение процентов. Расходы на погашение долга за первый год равны разности между постоянными выплатами V и процентами за первый год J_1 $R_1 = 88{,}5 \cdot 10^3 - 60 \cdot 10^3 = 28{,}5 \cdot 10^3$ руб. За второй год $R_2 = R_1\,(1 + i) = 28{,}5 \cdot 10^3 \cdot 1{,}12 = 31{,}92 \cdot 10^3$ руб., за третий год $R_3 = R_1\,(1 + i)^2 = 28{,}5 \cdot 10^3 \cdot 1{,}12^2 = 35{,}63 \cdot 10^3$ руб. и т.д. В четвертом и пятом столбцах рассчитаны значения погашенного долга для любого промежуточного периода: на начало $w_k^н$ и конец периода w_k, $k = 1, \ldots, n$. Так, на начало первого года $w_1^н = 0$, а на конец года $w_1 = R_1$, $s_{1;\,12} = R_1 = 28{,}5 \cdot 10^3$ руб, на начало второго года $w_2^н = R_1 = 28{,}5 \cdot 10^3$ руб., $w_2 = R_1, s_{2;\,12} = 60{,}42 \cdot \cdot 10^3$ руб. и т.д.

В шестом и седьмом столбцах рассчитаны значения остаточной задолженности для любого периода, включая его начало и конец. Эти величины определяются для какого-то периода как разности между суммой кредита D и величиной выплаченного долга до этого периода. На начало 1-го года остаток долга равен сумме кредита $D_н^1 = 500 \cdot 10^3$ руб., а на конец первого года $D_1 = D - w_1 = 500 \cdot$

$10^3 - 28{,}5 \cdot 10^3 = 471{,}5 \cdot 10^3$ руб., на начло второго года остаток долга равен $D_2^н = D - w_1 = 471{,} \cdot 10^3$ руб., а конец 2-го года $D_2 = D - w_2 = 439{,}58 \cdot 10^3$ руб. и т.д.

В восьмом столбце рассчитаны значения процентов, определяемые для каждого периода как процент от оставшегося долга. На первый год величина процентов составляет $J_1 = Di = 500 \cdot 10^3 \cdot 0{,}12 = 60 \cdot 10^3$ руб., на второй $J_2 =$
$= D_2 i = 56{,}58 \cdot 10^3$ руб. и т.д.

Данные, рассчитанные по всем потокам, сведены в таблицу 2. Как следует из таблицы, чем больше времени проходит с момента предоставления кредита, тем большая часть периодического платежа направляется на выплату основного долга и тем меньшая часть идет на погашение кредита.

Таблица 2

План погашения ипотечного кредита n = 88, 5 ⨯ 10^3 руб., i = 12%, n = 10

Год	Расходы по займу	Расходы на погашение долга	Погашенный долг		Остаток долга		Процен - Ты
	$V \cdot 10^3$	$R_k \cdot 10^3$	$w_k^н \cdot 10^3$	$w_k \cdot 10^3$	$D_k^н \cdot 10^3$	$D_k \cdot 10^3$	$J_k \cdot 10^3$
1	88,5	R_1=28,5	$w_1^н = 0$	w_1=28,5	$D_1^н = 500$	D_1=471,5	J_1=60
2	88,5	R_2=31,92	$w_2^н = 28{,}5$	w_2=60,4	$D_2^н = 471{,}5$	D_2=439,6	J_2=56,6
3	88,5	R_3=35,6	$w_3^н = 28{,}5$	w_2=96,1	$D_3^н = 439{,}6$	D_3=404	J_3=52,9
4	88,5	R_4=39,9	$w_4^н = 96{,}1$	w_4=136,2	$D_4^н = 404$	D_4=363,8	J_4=48,6
5	88,5	R_5=44,8	$w_5^н = 136{,}2$	w_5= 181	$D_5^н = 363{,}8$	D_5 = 319	J_5=43,8
6	88,5	R_6=50,2	$w_6^н = 181$	w_6=231,4	$D_6^н = 319$	D_6=268,6	J_6=38,3
7	88,5	R_7=56,2	$w_7^н = 231{,}4$	w_7=287,6	$D_7^н = 268{,}6$	D_7 =212,4	J_7 =32,4
8	88,5	R_8 =63	$w_8^н = 287{,}6$	w_8=350,6	$D_8^н = 212{,}4$	D_8=149,5	J_8=25,5
9	88,5	R_9 =70,4	$w_9^н = 350{,}6$	w_9=442,2	$D_9^н = 149{,}5$	D_9=78,8	J_9=18,1

10	88,5	R_{10} =79	$w_{10}^{н}$ =442,2	w_{10}=500,2	$D_{10}^{н}$ = – 0,2	D_{10}=149,5	J_{10}= 9,6
итого		**499,4 ·10³**					**385,7 ·10³**

За десять лет, как следует из последней строки 5-го и 7-го столбцов и итоговой суммы расходов (2-й столбец), задолженность по кредиту полностью погашена. Недопогашенная часть ссуды 6 600 руб. вызвана округлением расчетов.

Рассмотрим наиболее часто встречающийся на практике случай, когда выплаты процентов и погашение основного долга производится ежемесячно, т.е. 12 раз в году.

В этой ситуации периодические расходы по займу равны

$$V = D/a_{12n;\ i/12}. \quad (11)$$

Величина погашения долга на конец периода k равна

$$R_k = R_1(1 + i/12)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, 12n, \quad (12)$$

где $R_1 = V - Di/12$.

Сумма погашенной задолженности на конец периода k составит

$$w_k = R_1\sum_{l=0}^{k-1}(1+i/12)^l = R_1 \cdot s_{k;\ i/12}, \quad k = 1, 2, \ldots, 12n. \quad (13)$$

Задолженность на конец периода k можно определить по уравнению

$$D_k = D - w_k = D - R_1\sum_{l=0}^{k-1}(1+i/12)^l, k=1,2,\ldots,12n. \quad (14)$$

Процентные платежи на конец периода k равны

$$J_k = (D - w_k)i/12 = D_k i/12 = Di/12 - R_1 i/12\sum_{l=0}^{k-1}(1+i/m)^l,$$

$$k = 1,2,\ldots, 12n. \quad (15)$$

Уравнения (11–15) позволяют сформировать план погашения задолженности при постоянных периодических расходах по займу, когда выплаты процентов и погашение долга производятся 12 раз в году.

Используем исходные данные рассмотренного примера для формирования графика погашения кредита в типичной ситуации, когда амортизация долга осуществляется ежемесячно.

Определим в соответствии с (11) ежемесячные расходы по займу для следующих исходных данных:

сумма кредита $D = 500 \cdot 10^3$ руб.,

срок ипотечного кредита $12n = 12 \cdot 10 = 120$ месяцев;

ежемесячная процентная ставка $i/12 = 12/12 = 1\%$ или 0,01.

Коэффициент приведенных значений для исходных данных равен

$$a_{120;\ 0,01} = 69,7.$$

Тогда ежемесячные расходы по займу составят следующую величину

$$V = 500 \cdot 10^3 / 69,7 = 7,17 \cdot 10^3 \text{ руб.}$$

Таким образом, ежемесячная финансовая нагрузка у заемщика равна $7,17 \cdot 10^3$ руб.

Часть этой суммы идет на погашение основного долга, а другая часть на погашение процентов. В соответствии с (12) расходы на погашение долга составят:

в первый месяц $R_1 = V - Di/12 = 7,17 \cdot 10^3 - 500 \cdot 10^3 \cdot 0,01 = 2,17 \cdot 10^3$ руб.;

во второй месяц $R_2 = R_1(1 + 0,01) = 2,19 \cdot 10^3$ руб.;

в третий месяц $R_3 = R_2(1 + 0,01) = 2,21 \cdot 10^3$ руб.;

в четвертый месяц $R_4 = R_3(1 + 0,01) = 2,24 \cdot 10^3$ руб.;

в пятый месяц $R_5 = R_4(1 + 0,01) = 2,26 \cdot 10^3$ руб.;

в двенадцатый месяц $R_{12} = R_1(1 + 0,01)^{11} = 2,42 \cdot 10^3$ руб.;

в двадцать четвертый месяц $R_{24} = R_1(1 + 0,01)^{23} = 2,76 \cdot 10^3$ руб.;

в сто двадцатый месяц $R_{120} = R_1(1 + 0,01)^{119} = 7,16 \cdot 10^3$ руб.

При известных значениях ежемесячных расходов на погашение долга легко определить ежемесячные расходы, идущие на погашение процентов по уравнению

$$J_k = V - R_k, \quad k = 2, \ldots, 120, \quad J = Di/12.$$

Так, в первый месяц процентные платежи составят:

в первый месяц $J_1 = 500 \cdot 10^3 \cdot 0,01 = 5 \cdot 10^3$ руб.;

во второй месяц $J_2 = (7{,}17 - 2{,}19)10^3 = 4{,}98 \cdot 10^3$ руб.;

в третий месяц $J_3 = (7{,}17 - 2{,}21)10^3 = 4{,}96 \cdot 10^3$ руб.;

в четвертый месяц $J_4 = = (7{,}17 - 2{,}24)10^3 = 4{,}93 \cdot 10^3$ руб.;

в пятый месяц $J_5 = (7{,}17 - 2{,}26)10^3 = 4{,}91 \cdot 10^3$ руб.;

в двенадцатый месяц $J_{12} = (7{,}17 - 2{,}42)10^3 = 4{,}75 \cdot 10^3$ руб.;

.

в двадцать четвертый месяц $J_{24} = (7{,}17 - 2{,}76)10^3 = 4{,}41 \cdot 10^3$ руб.;

в сто двадцатый месяц $J_{120} = (7{,}17 - 7{,}16)10^3 = 0{,}01 \cdot 10^3$ руб.

По уравнениям (13–14) легко определить в каждый текущий месяц сумму погашенной задолженности и имеющуюся задолженность до конца срока кредита.

Результаты расчета приведены в таблице 3, характеризующей состояние займа в любой месяц кредитного срока. Из таблицы видно, что все периодические платежи одинаковы, но постепенно в каждом растет доля основной суммы, а доля на погашение процентов сокращается, остаток кредита постепенно уменьшается.

Таблица 3

План погашения ипотечного кредита ν *с ежемесячной амортизацией долга* $V = 7,17 \cdot 10^3$ руб., $i = 0{,}01$

Месяц	Расходы по займу	Расходы на погашение		Погашенный долг на конец месяца	Остаток долга на конец месяца
	$V \cdot 10^3$	долга $R_k \cdot 10^3$	процентов $J \cdot 10^3$	$w_k \cdot 10^3$	$D_k \cdot 10^3$
1	7,17	2,17	5	2,17	497,8
2	7,17	2,19	4,98	4,36	495,6
3	7,17	2,21	4,96	6,53	493,5
4	7,17	2,24	4,93	8,81	491,2
5	7,17	2,26	4,91	11,07	488,9
. . .					
12	7,17	2,42	4,75	27,52	472,5
. . .					
24	7,17	2,76	4,41	58,52	441,5
. . .					
120	7,17	7,16	0,01	499,2	0,8
ИТОГО	**860×10^3 руб.**	**500×10^3 руб.**	**360×10^3 руб.**		

Таким образом, в работе рассмотрен общий подход формирования процедуры амортизации долга, позволяющий использовать его для решения практических задач погашения постоянного ипотечного кредита с любыми исходными данными.

ГЕРАСЬКИН М.И.

МЕХАНИЗМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ В ПОЛИКОМПОНЕНТНЫХ СИСТЕМАХ

Рассматривается проблема математического моделирования межкорпоративных и межрегиональных взаимодействий в рамках образующихся в результате этих взаимодействий поликомпонентных (поликорпоративных и полирегиональных) систем. Сформирована модель взаимодействий, определены критерии эффективности субъектов взаимодействий и ограничения на параметры их состояния. Исследованы экономические механизмы взаимодействий и определен экономический эффект, возникающий в поликомпонентной системе

Введение

Развитие рыночных механизмов хозяйствования в экономике современной России стало предпосылкой отчетливо обозначившихся тенденций к реструктуризации крупных промышленных предприятий с образованием на их основе корпоративных структур в рамках процессов обособления отдельных подразделений предприятий в соответствии с присущими им целями и наделения их полномочиями выбора тактических приоритетов функционирования. Корпоративные производственно-финансовые системы базируются на принципах финансовой самостоятельности, децентрализации управления, диверсификации функций, экономической заинтересованности элементов в результатах деятельности.

В условиях реализации этих принципов остро стоит проблема согласования экономических интересов в процессе взаимодействий между элементами различных корпораций, решение которой оказывает определяющее влияние на результативность финансово-хозяйственной деятельности корпораций в целом. В частности, основными направлениями согласования взаимодействий являются
1) разработка механизмов формирования внутрикорпоративных и межкорпоративных цен и товарооборота;
2) формирование механизмов стимулирования элементов – субъектов взаимодействий;
3) разработка механизмов распределения дополнительного эффекта межкорпоративных взаимодействий.

Наряду с отмеченной тенденцией к формированию корпоративной схемы функционирования экономики России и появлению в связи с этим новых направлений экономико-математического моделирования, принцип корпоративного управления распространяется сегодня и на механизмы координации интересов при взаимодействиях региональных экономических систем.

Рост экономической самостоятельности региональных хозяйственных комплексов на фоне протекающих в различных странах мира процессов децентрализации механизмов управления финансовыми ресурсами предопределяет сегодня необходимость разработки адекватных моделей и действенных алгоритмов формирования программ управления развитием региональных экономических систем. С учетом обозначившихся сейчас глобальных тенденций интеграции отдельных региональных хозяйств в международный товарооборот и межнациональной кооперации производства, региональные программы развития должны базироваться на комплексном подходе, во-первых, к ресурсному потенциалу регионов, охватывающему как собственные, так и импортируемые ресурсы; во-вторых, к целевым ориентирам – наращиванию валового регионального продукта, включая экспорт, а также созданию инвестиционных предпосылок развития. Целенаправленный синтез собственных факторов экономического роста и направлений развития, раскрывающихся в рамках международного товарооборота, возможен только на основе оптимального решения проблемы межрегиональных (межнациональных) взаимодействий.

В теории управления организационными системами [1] обособленные экономические субъекты – организации, корпорации, региональные экономики, имеющие собственные цели и располагающие ресурсами для их реализации, получили название активных элементов (АЭ). Экономические системы, образующиеся в результате взаимодействий таких хозяйствующих субъектов, могут быть отнесены в рамках терминологии системного анализа [2] к сложным системам. Сложные системы состоят из большого количества взаимосвязанных и взаимодействующих элементов, каждый из которых может быть представлен в виде системы (подсистемы). Сложные системы характеризуются многомерностью, многообразием природы элементов, связей, разнородностью структуры [3]. К сложной можно отнести систему, которую, во-первых, можно разбить на подсистемы и анализировать функционирование каждой из них в отдельности, во-вторых, обладающую свойствами, которых не имеет ни один из составляющих ее элементов. Вариацией термина «сложные системы» является понятие «большие системы» – это сложные пространственно-распределенные системы, в которых подсистемы относятся к категориям сложных. Большие системы [4] отличает сложная иерархическая структура, большое количество элементов, циркуляция в системе значительных информационных, финансовых и материальных потоков.

Специфика объекта исследования данной работы заключается в том, что поликорпоративне и полирегиональные системы рассматриваются с позиций методологии анализа больших систем, то есть изучаются механизмы взаимодействий элементов и центра отдельной подсистемы (так называемых вертикальных взаимодействий) и механизмы взаимодействий элементов различных подсистем (горизонтальных взаимодействий), а также взаимодействия подсистем, интегрированных в систему (комбинированных взаимодействий). В связи с тем, что все элементы и соответствующие типы взаимодействий равноправны по отношению к системе в целом, для обозначения такой системы ниже используется термин «поликомпонентная система».

Недостаточность теоретически обоснованных и практически реализуемых моделей и методов анализа и синтеза механизмов функционирования поликомпонентных (поликорпоративных и полирегио-

нальных) систем делает актуальной проблему разработки соответствующих моделей и методов.

1. Проблема оптимизации взаимодействий в поликомпонентных системах

1.1 Оптимизация развития внешнеторговых отношений регионов

Традиционный подход [5-8] к проблеме межрегиональных экономических отношений основывался на таком представлении о регионе, при котором регион рассматривался как сосредоточение природных ресурсов и населения, производства и потребления товаров, сферы обслуживания. При этом не акцентировался аспект интеграции региона в систему экономических отношений, не ставилась проблема целостного учёта комплекса экономических интересов, органично встроенных в систему регионального хозяйствования.

В современных теориях [9-11] регион рассматривается как многофункциональная и многоаспектная система. Так, в концепции региона как квазигосударства субъект национальной экономики интерпретируется как обособленная подсистема, аккумулирующая большую часть функций, принадлежащих центру, в том числе важнейшую с точки зрения согласования экономических интересов функцию целенаправленного распределения финансовых ресурсов. В рамках такого подхода проблема согласованной оптимизации экономических интересов региона преломляются в проектирование механизмов координации интересов региона и центра (вертикально согласованные механизмы [12]) на фоне процессов децентрализации (делегирования полномочий управления финансовыми потоками) и федерализации (развития системы регионального стимулирования).

Вместе с тем, актуальной остаётся проблема разработки горизонтально согласованных механизмов [13] управления региональными экономиками, обеспечивающих достижение интегральной цели национальной экономики, определение которой остаётся в компетенции центра.

В свете другой концепции регион рассматривается как квазикорпорация – субъект конкурентных отношений на рынке товаров (услуг). Управляющая функция центра в этом случае проявляется исключительно в обеспечении правового пространства, в котором

взаимодействуют рационально хозяйствующие элементы рынка – регионы. Критерием оптимизации экономических интересов рынка является экономическая эффективность регионального хозяйственного механизма, максимизация которых априори обеспечивает согласование интересов центра и регионов. Следовательно, в рамках данной модели отпадает необходимость проектирования вертикально согласованных механизмов координации интересов центра и региона. На передний план выступает задача согласования интересов регионов друг с другом. Отличительной чертой проблемы межрегиональных взаимодействий при этом становится необходимость обеспечения баланса между потреблением (использованием) ресурсов (в том числе импортируемых) и продуктов, произведённых региональной экономикой. Поэтому проектирование горизонтально согласованных механизмов управления, преимущественно присущих такому типу межрегиональных отношений, основывается на принципе хозяйственной самостоятельности каждого субъекта взаимодействия, рассмотренном выше. При этом оптимизация межрегиональных экономических взаимодействий осуществляется по критерию экономической эффективности хозяйствования отдельных регионов, следовательно, формируемая программа управления региональной экономикой отвечает целям, формулируемым центром, что обеспечивает тождественность вертикально и горизонтально согласованных механизмов управления.

Рассмотренный подход к региону как самостоятельно хозяйствующему субъекту наиболее аутентичен при разработке механизмов согласования интересов регионов, вступающих в экономические отношения и принадлежащих различным национальным экономикам, то есть соотносящим свои стратегии с интересами разных центров.

Решением проблемы межрегиональных взаимодействий является множество Парето-оптимальных управлений [14], то есть вариантов сочетаний индикаторов региональных экономик, при которых критерии оптимальности каждого региона нельзя улучшить, не ухудшив значений критериев оптимальности других субъектов взаимодействия.

Механизмы согласования экономических индикаторов регионов – элементов полирегиональной системы могут использоваться при

формировании планов развития регионов в соответствии со следующей последовательностью.

§ Оптимизация региональных стратегий развития.
- Определение оптимумов экономических индикаторов регионов по критерию эффективности региональной экономики.
- Определение максимальных значений критериев эффективности с учетом оптимумов экономических индикаторов регионов.

§ Оптимизация национальных стратегий развития.
- Определение оптимумов экономических индикаторов национальных экономик (центров).
- Определение максимумов критериев центров.

§ Оптимизация межрегиональной стратегии развития.
- Определение оптимумов экономических индикаторов межрегиональных взаимодействий по интегральному критерию.
- Выбор параметров внутрирегионального функционирования.
- Определение отклонений целевых функций регионов при реализации плана межрегионального взаимодействия и целевых функций центров от соответствующих оптимальных значений.
- Расчет критерия эффективности полирегиональной системы и приростов (потерь) частных критериев по сравнению с реализацией индивидуальных оптимумов. Распределение дополнительного эффекта.

1.2 Оптимизация развития взаимодействий корпораций

При межкорпоративных взаимодействиях главной является задача согласования интересов АЭ друг с другом. Отличительной чертой проблемы взаимодействий между АЭ при этом становится необходимость обеспечения баланса между потреблением (использованием) ресурсов (в том числе закупаемых) и продуктов, произведённых АЭ. Поэтому проектирование горизонтально согласованных механизмов управления, преимущественно присущих такому типу отношений, основывается на принципе хозяйственной самостоятельности каждого субъекта взаимодействия. При этом оптимизация экономических взаимодействий между АЭ осуществляется по критерию экономической эффективности хозяйствования отдельных АЭ, следовательно, формируемая программа управления экономикой АЭ отвечает целям, формулируемым центром, что обеспечивает тождественность вертикально и горизонтально согласованных механизмов управления.

Рассмотренный подход к АЭ как самостоятельно хозяйствующему субъекту наиболее аутентичен при разработке механизмов согласования интересов АЭ, вступающих в экономические отношения и принадлежащих различным корпорациям, то есть соотносящим свои стратегии с интересами разных центров.

Синтез межкорпоративных отношений осуществляется в следующей последовательности:

§ Оптимизация стратегий развития элементов корпорации.
- Определение оптимумов экономических индикаторов элементов корпораций по индивидуальному критерию эффективности элемента.
- Определение максимальных значений критериев эффективности с учетом оптимумов экономических индикаторов элементов.

§ Оптимизация корпоративных стратегий развития.
- Определение оптимумов экономических индикаторов корпораций (центров).
- Определение максимальных значений критериев корпораций (центров).

§ Оптимизация межкорпоративной стратегии развития.
- Определение оптимумов экономических индикаторов межкорпоративных взаимодействий по интегральному критерию.
- Выбор параметров внутрикорпоративного функционирования.
- Определение отклонений целевых функций элементов корпораций при реализации плана межкорпоративного взаимодействия и целевых функций центров от соответствующих оптимальных значений.

Расчет критерия эффективности поликорпоративной системы и приростов (потерь) частных критериев по сравнению с реализацией индивидуальных оптимумов. Распределение эффекта, обусловленного межкорпоративным взаимодействием.

2. Модели согласования экономических индикаторов

поликомпонентной системы

2.1 Модель квазииерархической системы

В рамках модели вертикально согласованных механизмов координации экономических индикаторов рассматривается поликорпоративная (полирегиональная) активная система, представляющая собой комплекс 2-х уровневых иерархических активных систем (подсистем). В соответствующей подсистеме активными элементами (АЭ) являются предприятия и региональные хозяйства, относящиеся к соответствующей корпорации (национальной экономике), центральный орган планирования развития которой (совет директоров, правительство, министерство экономики и т.п.) фигурирует в качестве центра этой подсистемы. В этом случае центры координируют деятельность относящихся к ним АЭ с помощью своих воздействий, а именно – плановых заданий x_j^k (суммы дивидендов, суммы налоговых поступлений в бюджеты национальных экономик), а управляемые АЭ, осуществляя их реализацию, одновременно решают задачи оптимизации собственных целевых функций.

В формализованном виде модель функционирования АЭ состоит из модели ограничений и целевой функции. Модель ограничений описывает экономико-финансовые возможности АЭ, определяемые материально-сырьевыми, демографическими и финансовыми ресурсами. Целевая функция j-го АЭ $f_j^k(r_j^k, y_j^k)$ характеризует степень соответствия достигнутых результатов хозяйствования поставленным целям и отражает внутренние интересы элемента. В качестве целевой функции могут фигурировать такие показатели, как валовой региональный продукт (совокупный или на душу населения), объём инвестиций в основной капитал, прибыль предприятий и т.п. Активность хозяйственного механизма элемента проявляется в выборе таких значений параметров y_j, которые обеспечивают максимум целевой функции.

Центр k-й корпорации (национальной экономики), исходя из критерия эффективности функционирования всей корпорации (всего национального хозяйства в целом), координирует действия АЭ k-й подсистемы. При этом он на основании критерия f_o^k вырабатывает плановые показатели каждого АЭ x_j^k, при реализации которых

значения целевых функций АЭ составляют $f_j^k(r_j^k, x_j^k)$. Сравнивая максимумы значения целевых функций АЭ со значениями $f_j^k(r_j^k, x_j^k)$, можно сделать вывод о наличии противоречий (необходимости согласования интересов) в k-й подсистеме поликорпоративной (полирегиональной) системы.

В рамках модели горизонтального согласованния экономических индикаторов рассматривается поликорпоративная (полирегиональная) неиерархическая активная система, представляющая собой комплекс иерархических 2-х уровневых подсистем, в которой межкорпоративные (межрегиональные) взаимодействия обосновываются взаимной заинтересованностью субъектов. Характеристикой эффективности межкорпоративных (межрегиональных) взаимодействий является критерий f_o, количественно выражающий совокупный дополнительный эффект всех АЭ от участия во взаимодействиях. Следовательно, неиерархическую систему можно представить как иерархическую, в которой существует «мнимый» центр, цель которого выражается в максимизации критерия f_o. Центр является «мнимым», поскольку его интересы не противоречат интересам АЭ, входящих в систему, а его существование проявляется только через наличие критерия его эффективности.

Введём в рассмотрение понятие дополнительного эффекта, приобретаемого АЭ в связи с участием в межкорпоративном (межрегиональном) взаимодействии. В связи с тем, что «мнимый» центр квазииерархической системы фактически отсутствует, весь экономический эффект, обусловленный межкорпоративными (межрегиональными) взаимодействиями и численно равный значению критерия f_o, перераспределяется между субъектами взаимодействия.

При синтезе вертикально и горизонтально согласованных механизмов координации предлагается механизм обратного согласования интересов АЭ, выступающих в рамках взаимодействий в противоречие с интересами собственных центров. Теоретическим основанием предлагаемого механизма является модель экономической обособленности АЭ в которой он в полной мере наделён свойством активности (свободой выбора параметров y_j^k) и единственным требовани-

ем, предъявляемым центром к АЭ, является обеспечение заданной величины целевой функции центра f_o^k.

Таким образом, условие согласования устанавливает механизм горизонтально и вертикально согласованной координации в поликорпоративной (полирегиональной) неиерархической системе.

Разработка механизмов согласования экономических интересов в квазииерархических системах осуществляется по следующим направлениям:

- Механизмы вертикально согласованного управления в иерархических системах.
- Механизмы горизонтально согласованного управления в не иерархических системах.
- Механизмы вертикально и горизонтально согласованного управления в квазииерархических системах.

ПРОБЛЕМА СОГЛАСОВАНИЯ ИНТЕРЕСОВ В КВАЗИИЕРАРХИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Рассматривается проблема согласования индикаторов экономического развития в поликомпонентной (полирегиональной или поликорпоративной) активной системе, представляющей собой комплекс 2-х уровневых иерархических активных систем (подсистем). В соответствующей подсистеме активными элементами являются региональные хозяйства (организации), относящиеся к данной национальной экономике (корпорации), центральный орган планирования развития которой фигурирует в качестве центра этой подсистемы. Модель поликомпонентной системы качественно изображена на рис. 1. Рассматривается детерминированный случай активной системы, то есть предполагается полная информированность центров о возможностях соответствующих АЭ, а также информированность АЭ, принадлежащим различным подсистемам, о возможностях друг друга.

Центры координируют деятельность относящихся к ним АЭ с помощью своих воздействий, а именно – плановых заданий x_j^k. Каждый *j*-й АЭ *k*-й подсистемы выбирает такие значения экономических индикаторов y_j^k из множества их допустимых значений $Y_j^k(r_j^k)$, где *y, x, r, Y* – векторы размерности *n*. В дальнейшем считаем $k \in (1, K)$, $j \in (1, J_k)$, где *K* – количество подсистем поликомпонентной системы, J_k - количество АЭ *k*-й подсистемы, участвующих во взаимодействиях. Параметры r_j^k принадлежат заданному множеству R_j^k и характеризуют специфику АЭ: нормы потребления (использования) материальных, демографических и финансовых ресурсов, другие особенности.

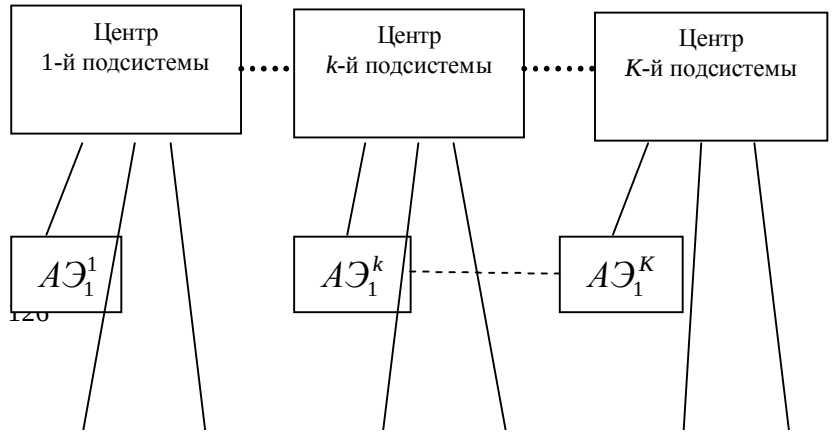
Целевая функция *j*-го АЭ $f_j^k(r_j^k, y_j^k)$ характеризует степень соответствия достигнутых результатов хозяйствования поставленным целям и отражает внутренние интересы элемента. В качестве целевой функции могут фигурировать такие показатели, как валовой региональный продукт (совокупный или на душу населения), объём инвестиций в основной капитал, прибыль организаций и т.п.

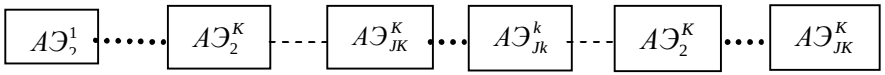
В случае заданной целевой функции и при определённом множестве допустимых состояний модель функционирования АЭ имеет вид:

$$\max_{y_j^k \in Y_j^k(r_j^k)} f_j^k(r_j^k, y_j^k) \qquad (1)$$

Активность хозяйственного механизма проявляется в выборе таких значений параметров y_j, которые обеспечивают максимум целевой функции.

Множество экономических индикаторов *j*-го АЭ, на котором достигается максимум его целевой функции, обозначено $P_j^r(r_j^k, f_j^k)$: $P_j^r(r_j^k, f_j^k) = \arg\max_{y_j^k \in Y_j^k(r_j^k)} f_j^k(r_j^k, y_j^k)$.





——— внутринациональные, внутрикорпоративные (вертикальные) взаимодействия

- - - - - - межрегиональные, межкорпоративные (горизонтальные) взаимодействия

Рис. 1 Модель поликомпонентной активной системы

В частности, при $y_j^k \in P_j^r(r_j^k, f_j^k)$ целевые функции АЭ принимают значения

$$g_j^k(r_j^k, f_j^k) = \max_{y_j^k \in Y_j^k(r_j^k)} f_j^k(r_j^k, y_j^k). \qquad (2)$$

Величины $g_j^k(r_j^k, f_j^k)$ представляют собой максимальные значения оценки эффективности функционирования АЭ, которые могут быть достигнуты при заданных ресурсных ограничениях. Состояния, выбранные АЭ исходя из локальных критериев $f_j^k(r_j^k, y_j^k)$ могут отличаться, во-первых, от состояний, определённых на основе критерия f_o^k, характеризующего эффективность иерархической *k*-й подсистемы; во-вторых, от состояний, предполагаемых оптимизацией по критерию f_o, констатирующего эффективность поликомпонентной неиерархической системы. В связи с этим в рассматриваемой активной системе возникают противоречия, снижается эффективность хозяйствования отдельных АЭ относительно условий проектирования вертикально согласованных и горизонтально согласованных механизмов управления и намечается предпосылка проектирования вертикально согласованных механизмов управления.

3. Механизмы согласования экономических индикаторов в системе

3.1 Вертикально согласованные механизмы управления

Центр *k*-й подсистемы, исходя из критерия эффективности функционирования системы в целом, координирует действия АЭ *k*-й подсистемы. При этом он на основании критерия f_o^k вырабатывает плановые показатели каждого АЭ x_j^k, при реализации которых значения целевых функций АЭ составляют $f_j^k(r_j^k, x_j^k)$. Сравнивая значения целевых функций АЭ $g_j^k(r_j^k, f_j^k)$, определённых в соответствии с (2) со значениями $f_j^k(r_j^k, x_j^k)$, можно сделать вывод о наличии противоречий в *k*-й подсистеме полирегиональной активной системы. Так, при выполнении условия

$$\Delta g_j^k(x_j^k) = g_j^k(r_j^k, f_j^k) - f_j^k(r_j^k, x_j^k) > 0 \qquad (3)$$

целевая функция *j*-го элемента *k*-й подсистемы при реализации плана центра уменьшается на величину $\Delta g_j^k(x_j^k)$. В подсистеме имеет место сбалансированность целевых функций АЭ и центра, если для каждого АЭ значения $\Delta g_j^k(x_j^k)$ удовлетворяют условию:

$$\forall j, \quad \Delta g_j^k(x_j^k) \le 0 \ . \qquad (4)$$

таким образом, разность $\Delta g_j^k(x_j^k)$, определяемая в соответствии с (3), является количественной мерой противоречивости интересов центра *k*-й подсистемы и входящих в неё АЭ. На рис. 2. изображено множество допустимых значений экономических индикаторов для двумерного случая, множество $Y_j^k(r_j^k)$ и изолинии целевой функции *j*-го АЭ *k*-й подсистемы. Локально оптимальное сочетание индикаторов определено из условия:

$$y_j^{k*} = (y_{j1}^{k*}, y_{j2}^{k*}) = \arg\max f_j^k(r_j^k, y_j^k).$$

Плановые задания центра x_j^k принято называть [15] согласованными для каждого элемента, если имеет место выполнение условия (4). Таким образом, под согласованным управлением понимается такое состояние иерархической активной подсистемы, при котором реализация плановых заданий обеспечивает максимумы целевых

функций АЭ. Следовательно, для согласованного управления должно выполняться условие:

$$x_j^k = y_j^k \in P_j^k(r_j^k, f_j^k). \qquad (5)$$

Решение задач согласования управления осуществлялось методами штрафных функций [16], а также использовался подход [17], основанный на формировании дополнительного эффекта.

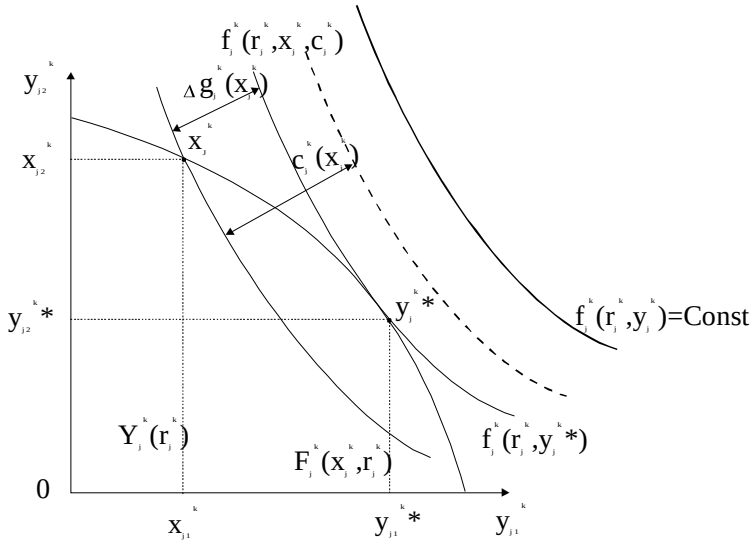


Рис. 2 - Графическая интерпретация задачи вертикального согласования экономических индикаторов

Величина дополнительного эффекта $c_j^k(x_j^k, y_j^k)$, предоставляемого центром *j*-му АЭ, является переменной составляющей его целевой функции и представляет собой распределяемую часть совокупного эффекта *k*-й подсистемы (рис. 2):

$$f_j^k(r_j^k, y_j^k, c_j^k) = f_j^k(r_j^k, x_j^k) + c_j^k(x_j^k, y_j^k), \qquad (6)$$

где

$$y_j^k = x_j^k, \begin{cases} c_j^k(x_j^k) \text{ при } y_j^k \neq x_j^k \\ c_j^k(x_j^k, y_j^k) = 0 \end{cases}$$

(7)

В этих терминах условие вертикально согласованного управления приобретает вид:

$$c_j^k(x_j^k) \geq \Delta g_j^k(x_j^k). \qquad (8)$$

Ниже будет показано, что в модели комплексной неиерархической активной системы условия (8) выполняются при любом значении x_j^k.

3.2 ГОРИЗОНТАЛЬНО СОГЛАСОВАННЫЕ МЕХАНИЗМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается поликомпонентная неиерархическая активная система, представляющая собой комплекс иерархических 2-х уровневых подсистем, в которой межрегиональные (межкорпоративные) взаимодействия обосновываются взаимной заинтересованностью субъектов. Характеристикой эффективности взаимодействий является критерий f_o, количественно выражающий совокупный дополнительный эффект всех АЭ от участия во взаимодействиях. Следовательно, неиерархическую систему можно представить как иерархическую, в которой существует «мнимый» центр, цель которого выражается в максимизации критерия f_o. Центр является «мнимым», поскольку его интересы не противоречат интересам АЭ, входящих в систему, а его существование проявляется только через наличие критерия его эффективности.

С учётом введённого предположения опишем формально проблему согласования интересов АЭ поликомпонентной системы как квазииерархической системы. Центр, исходя из максимизации критерия f_o, вырабатывает плановые индикаторы каждого АЭ z_j^k, при реализации которых значения целевых функций составят $f_j^k(r_j^k, z_j^k)$. Отклонение значения целевой функции *j*-го АЭ

$g_j^k(r_j^k, f_j^k)$, определённого в соответствии с (2) от значения, достигнутого при реализации плана z_j^k,

$$\Delta g_j^k(z_j^k) = g_j^k(r_j^k, f_j^k) - f_j^k(r_j^k, z_j^k) \qquad (9)$$

позволяет сделать вывод о наличии (отсутствии) противоречия в системе:

- согласованным является управления, при котором

$$\forall j \quad \Delta g_j^k(x_j^k) \le 0; \qquad (10)$$

- функционирование системы не сбалансировано в случае

$$\Delta g_j^k(z_j^k) > 0 \qquad (11)$$

хотя бы для одного АЭ.

На рис. 3 для двумерного случая приведена геометрическая интерпретация механизма функционирования АЭ квазииерархической полирегиональной системы.

Введём в рассмотрение понятие дополнительного эффекта d_j^k, приобретаемого АЭ в связи с участием во взаимодействии:

$$f_j^k(r_j^k, y_j^k, d_j^k) = f_j^k(r_j^k, z_j^k) + d_j^k(z_j^k, y_j^k), \qquad (12)$$

где

$$d_j^k(z_j^k, y_j^k) = \begin{cases} d_j^k(z_j^k) \text{ при } y_j^k \ne z_j^k \\ 0 \text{ при } y_j^k \ne z_j^k \end{cases}$$

В этом случае условие горизонтально согласованного управление записывается следующим образом:

$$d_j^k(z_j^k) \ge \Delta g_j^k(z_j^k). \qquad (13)$$

В связи с тем, что «мнимый» центр квазииерархической поликомпонентной системы фактически отсутствует, весь экономический эффект, обусловленный взаимодействиями и численно равный значению критерия f_o, перераспределяется между субъектами взаимодействия; следовательно, можно записать:

$$f_o = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{J_k} d_j^k(z_j^k) \qquad (14)$$

Поскольку потери АЭ в значениях их целевых функций $g_j^k(z_j^k)$ обусловлены исключительно требованием максимизации критерия f_o и только им, а также учитывая (14), необходимым и достаточным условием существования горизонтально согласованного управления[1] (13) является справедливое распределение совокупного эффекта полирегиональной системы f_o между участниками взаимодействия. Справедливая компенсация имеет место в случае распределения совокупного эффекта f_o пропорционально вкладу (потерям) каждого АЭ в создании этого эффекта (совокупным потерям системы); иначе говоря, должно выполняться условие:

$$\frac{\Delta g_j^k(z_j^k)}{\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J_k} \Delta g_j^k(z_j^k)} = \frac{d_j^k(z_j^k)}{f_o},$$

откуда следует выражение для определения величины дополнительного эффекта:

$$d_j^k(z_j^k) = \frac{\Delta g_j^k(z_j^k)}{\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J_k} \Delta g_j^k(z_j^k)} \cdot f_o \qquad (15)$$

3.3 Синтез вертикально и горизонтально согласованных механизмов управления.

При вступлении во взаимодействия АЭ в соответствии с критерием f_o выбирают значения z_j^k экономических индикаторов, отличающиеся не только от локально оптимальных значений этих параметров y_j^k, но и от плановых заданий x_j^k, формируемых центрами соответствующих подсистем (рис. 3). Поэтому достижение состояния согласованности индикаторов поликомпонентной системы в целом возможно только в рамках компромисса между процессами внутрисистемных взаимодействий и схемой перераспределения экономических эффектов внутри соответствующих подсистем.

---

[1] *Предполагается рациональное поведение АЭ, несущих в рамках взаимодействий только целесообразные потери.*

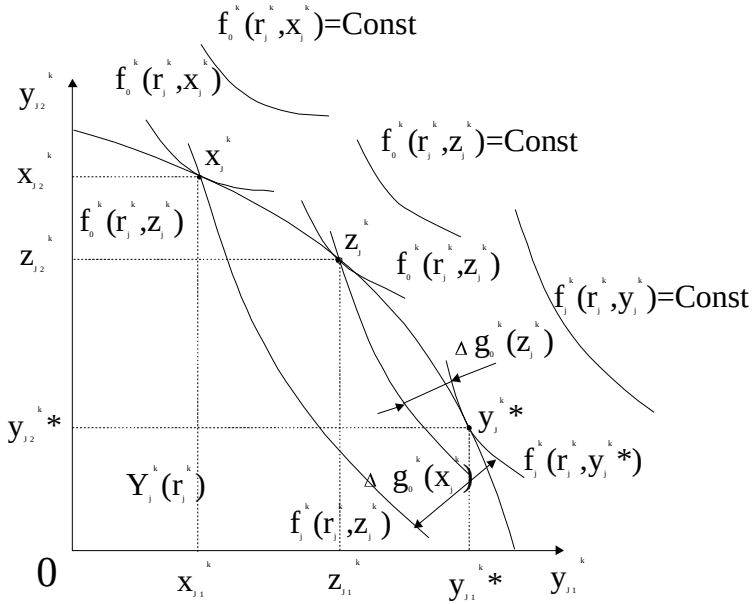


Рис. 3 - Графическая интерпретация горизонтального согласования экономических индикаторов

Предлагается механизм обратного согласования интересов АЭ, выступающих в рамках межсистемных взаимодействий в противоречие с интересами собственных центров. Теоретическим основанием предлагаемого механизма является модель региона – квазикорпорации, в которой регион в полной мере наделён свойством активности (свободой выбора параметров y_j^k) и единственным требованием, предъявляемым центром к АЭ, является обеспечение заданной величины целевой функции центра f_o^k; аналогичные свойства характерны для корпорации как экономически самостоятельно хозяйствующего субъекта.

Предположим, что при реализации планового задания x_j^k целевая функция центра принимает значение:

$$h_0^k(r_j^k, f_o^k) = \max_{y_j^k \in Y_j^k} f_j^k(y_j^k, r_j^k). \qquad (16)$$

В случае выбора АЭ значения экономических индикаторов z_j^k по критерию f_o центр k-й подсистемы недополучает обусловленную вкладом j-го АЭ определённую часть максимального значения своей целевой функции, равную:

$$\Delta h_o^k(z_j^k) = h_o^k(r_j^k, f_o^k) - f_o^k(z_j^k, r_j^k). \qquad (17)$$

АЭ, получая в рамках межрегионального взаимодействия дополнительный эффект $d_j^k(z_j^k)$, вправе передать часть этого эффекта центру *k*-й подсистемы с тем, чтобы довести целевую функцию этого центра до её максимального значения. Таким образом, условие горизонтального и вертикального согласования экономических индикаторов полирегиональной системы имеет вид:

$$d_j^k(z_j^k) \ge \Delta g_j^k(z_j^k) + \Delta h_o^k(z_j^k). \qquad (18)$$

Покажем, что выполнение условия (18) гарантирует выполнение условия (8).

Утверждение. Выполнение условия горизонтального и вертикального согласования экономических индикаторов полирегиональной системы (18) является необходимым для выполнения условия вертикального согласования (8).

Доказательство. Поскольку из (12) следует

$$d_j^k(z_j^k, y_j^k) = f_j^k(r_j^k, y_j^k, d_j^k) - f_j^k(r_j^k, z_j^k),$$

то, подставив это выражение, а также выражение (9) в (18) получим:

$$f_j^k(r_j^k, y_j^k, d_j^k) - f_j^k(r_j^k, z_j^k) \ge g_j^k(r_j^k, f_j^k) - f_j^k(r_j^k, z_j^k) + \Delta h_o^k(z_j^k). \qquad (19)$$

Выразим значение $g_j^k(r_j^k, f_j^k)$ из (3):

$$g_j^k(r_j^k, f_j^k) = \Delta g_j^k(x_j^k) + f_j^k(r_j^k, x_j^k). \qquad (20)$$

Учитывая, что при локально оптимальном сочетании индикаторов *j*-го региона должно выполняться условие

$$f_j^k(r_j^k, y_j^k, d_j^k) = f_j^k(r_j^k, y_j^k, c_j^k), \qquad (21)$$

обеспечивающее согласованность вертикальной и горизонтальной координации, подставим в неравенство (19) выражения (6) и (20):

$$f_j^k(r_j^k, x_j^k) + c_j^k(x_j^k, y_j^k) - f_j^k(r_j^k, z_j^k) \ge \Delta g_j^k(x_j^k) + f_j^k(r_j^k, z_j^k) - f_j^k(r_j^k, z_j^k) + \Delta h_o^k(z_j^k)$$

Преобразовав это выражение, получим:

$$c_j^k(x_j^k, y_j^k) \geq \Delta g_j^k(x_j^k) + \Delta h_o^k(z_j^k). \qquad (22)$$

Поскольку механизм обратного перераспределения предполагает неотрицательность перераспределяемого излишка $\Delta h_o^k(z_j^k) \geq 0$, то условие (22), тождественное условию (18), гарантирует выполнение условия (8). Графически условия согласованной координации (8), (13) и (18) интерпретированы на рис. 4.

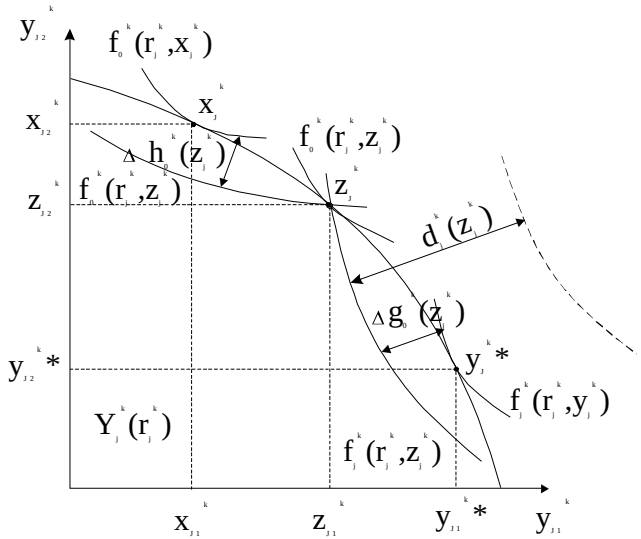


Рис. 4 Графическая интерпретация горизонтально и вертикально согласованной координации

Заключение

Предложен подход, основанный на рассмотрении поликомпонентной (полирегиональной, поликорпоративной) активной системы как квазииерархической, что позволило формально исследовать процедуру её функционирования с позиций теории активных систем. Решение проблемы согласования экономических интересов при взаимодействиях элементов системы предложено базировать на

обратном перераспределении дополнительного эффекта взаимодействия.

Условие (18) устанавливает механизм горизонтально и вертикально согласованной координации в поликомпонентной неиерархической активной системе. Горизонтальное согласование в рамках межсистемного взаимодействия (абстрагируясь от наличия *k*-го центра, формирующего плановые показатели *j*-го АЭ) обеспечивается уже выполнением условия (13) пропорционального распределения дополнительного эффекта от межсистемных взаимодействий. Вертикальное согласование обосновано выполнением более жёсткого ограничения (18), обусловливающего достижение в процессе межсистемных взаимодействий эффекта, достаточного для удовлетворения интересов *k*-го центра. Условие (18) является базовым при синтезе горизонтально и вертикально согласованных механизмов управления и экономически означает, что сумма потерь АЭ и центров, обусловленная вступлением АЭ во взаимодействие, не должна превышать эффекта, обусловленного этим взаимодействием.

Список использованной литературы

1. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. – М.: СИНТЕГ, 1999.
2. Теория управления. Терминология. Сборник рекомендуемых терминов. Вып. 107. – М.: Наука, 1988.
3. Растригин Л.А. Современные принципы управления сложными системами. – М.: Наука, 1980.
4. Бурков В.Н., Данев Б., Еналеев А.К. Большие системы: моделирование организационных механизмов – М.: Наука, 1989.
5. Изард У. Методы регионального анализа: введение в науку о регионах. – М.: Прогресс, 1996.
6. Колосовский Н.Н. Теория экономического районирования. – М.: Мысль, 1969.
7. Лёш А. Географическое размещение хозяйства. – М. Изд-во ин. лит-ры, 1959.
8. Некрасов Н.Н. Региональная экономика. – М.: Экономика, 1978.

9. Айзард У. Некоторые направления регионального развития и сотрудничества и некоторые вопросы в региональной науке, не имеющие ответов// Региональное развитие и сотрудничество. 1998, №1-2.
10. Гладкий Ю.Н., Чистобаев А.И. Основы региональной политики. – СПб.: Изд-во В.А. Михайлова, 1998, ч.I.
11. Михеева Н.Н. Региональная экономика и управление. – Хабаровск, 2000.
12. Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. – М.: Наука, 1981. – 383 с.
13. Бурков В.Н., Кондратьев В.В., Молчанова В.А., Щепкин А.В. Модели и механизмы функционирования иерархических систем (обзор)// Автоматика и телемеханика. 1977, №11.
14. Гермейер ЮБ. Игры с непротивоположными интересами. – М.: Наука, 1976.
15. Засканов В.Г., Прохоренко А.А. Вопросы совершенствования механизмов функционирования нефтеперерабатывающих предприятий в условиях хозрасчёта. – Саратов: Изд-во СГУ, 1992.
16. Научно-методические принципы построения автоматизированных комплексных систем управления эффективностью и качеством работы с НИИ и КБ /Под ред. В.Н. Буркова. – М.: Наука,1977.
17. Засканов В.Г., Эльдаров М.М., Кондратьев И.И. Внутрипроизводственный учёт и контроль в условиях хозяйственного расчёта. – Саратов: Изд-во СГУ, 1991.

ЗАЛОЖНЕВ А.Ю.

МЕТОДИКА ОПИСАНИЯ БУХГАЛТЕРСКОГО УЧЕТА. ФОРМАЛИЗОВАННЫЙ ПОДХОД.

(Институт проблем управления РАН, Москва)

В данной статье формально излагается ряд основных понятий бухгалтерского учета. Представляется, что данная статья может быть полезна, во-первых, специалистам в области математической экономики, поскольку она может рассматриваться как мостик, связуюший бухгалтерский учет и другие разделы экономической теории, для которых уже существует адекватное математическое описание. Во-вторых, она может быть полезна специалистам, работающим в области автоматизации бухгалтерского учета, финансового анализа и аудита, поскольку может служить некоторым теоретическим основанием для построения систем автоматизации этих видов управленческой деятельности.

В статье используется следующее соглашение: когда в ходе рассуждений вводится (или делается акцент на) ТЕРМИН, используемый в бухгалтерском учете, то этот термин ПЕЧАТАЕТСЯ ЗАГЛАВНЫМИ БУКВАМИ.

Общие понятия

Пространство состояний хозяйствующего субъекта задается так называемым планом счетов бухгалтерского учета.

ПЛАН СЧЕТОВ – нумерованный список координат пространства состояний, содержащий наименование каждой координаты.

Наименование каждой координаты (СЧЕТА) определяется на семантическом уровне и зависит от текущего состояния и механизмов функционирования макроэкономической системы в целом.

СЧЕТ – УЧЕТНЫЙ РЕГИСТР или, что то же самое, координата состояния хозяйствующего субъекта.

С каждой координатой (счетом) i ($i = 1,N$, где число N также определяется соответствующими инструкциями) связана пара положительных чисел ($\boldsymbol{SD_i}$, $\boldsymbol{SK_i}$). Первая позиция пары

($\boldsymbol{SD_i}$, $\boldsymbol{SK_i}$) называется ДЕБЕТОМ (Д) счета i, а вторая – КРЕДИТОМ (К) счета i. Про величины $\boldsymbol{SD_i}$ и $\boldsymbol{SK_i}$ говорят, что ПО ДЕБЕТУ СЧЕТА i имеется $\boldsymbol{SD_i}$, а по КРЕДИТУ СЧЕТА i, соответственно, - $\boldsymbol{SK_i}$.

Весьма часто, в зависимости от существа (семантической нагрузки) данного счета, производится нормализация пары ($\boldsymbol{SD_i}$, $\boldsymbol{SK_i}$) в пару ($\boldsymbol{SD_i^*}$, $\boldsymbol{SK_i^*}$) по следующему алгоритму:

$$(1)\quad \begin{array}{ll} (\boldsymbol{SD_i^*}, \boldsymbol{SK_i^*}) = (\boldsymbol{SD_i} - \boldsymbol{SK_i}, \boldsymbol{0}), & \boldsymbol{SD_i} > \boldsymbol{SK_i} \\ (\boldsymbol{SD_i^*}, \boldsymbol{SK_i^*}) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{SK_i} - \boldsymbol{SD_i}), & \boldsymbol{SK_i} > \boldsymbol{SD_i} \end{array}.$$

В том случае, когда нормализация (1) не производится, говорят, что сальдо по счету i РАЗВЕРНУТОЕ, в противном случае сальдо по счету i СВЕРНУТОЕ.

Таким образом, состояние хозяйствующего субъекта может быть представлено последовательностью двумерных векторов $\boldsymbol{S}$ (данная последовательность также называется САЛЬДО), каждый из которых представляет сальдо по соответствующему счету:

$$(2)\quad \begin{array}{l} (\boldsymbol{SD_1}, \boldsymbol{SK_1}) \vee (\boldsymbol{SD_1^*}, \boldsymbol{SK_1^*}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\boldsymbol{SD_i}, \boldsymbol{SK_i}) \vee (\boldsymbol{SD_i^*}, \boldsymbol{SK_i^*}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\boldsymbol{SD_N}, \boldsymbol{SK_N}) \vee (\boldsymbol{SD_N^*}, \boldsymbol{SK_N^*}) \end{array}$$

или

$$S = ((SD_i, SK_i) \vee (SD_i^*, SK_i^*),\ i = 1, N),$$

где операция $\vee$ означает выбор одного из двух векторов $(\boldsymbol{SD_i}, \boldsymbol{SK_i})$ или $(\boldsymbol{SD_i^*}, \boldsymbol{SK_i^*})$ в зависимости от того, каким является сальдо по данному счету: развернутым или свернутым.

Для большей детализации состояния хозяйствующего субъекта или для отображения конкретных особенностей его функционирования к каждому счету могут вводиться дополнительные СУБСЧЕТА (учетные регистры), а к ним, в свою очередь, – свои субсчета.

С каждым субсчетом нижнего ($\boldsymbol{n}$-го) уровня будет связана своя пара чисел $(\boldsymbol{SD_{i\,l_1\,l_2 \ldots l_n}}, \boldsymbol{SK_{i\,l_1\,l_2 \ldots l_n}})$, но так что для всех субсчетов данного счета справедливы соотношения:

$$(3)\quad \begin{array}{l} \sum_{l_1=1}^{N_{1i}} \sum_{l_2=1}^{N_{2i}(l_1)} \ldots \sum_{l_n=1}^{N_{ni}(l_{n-1})} \boldsymbol{SD_{i\,l_1 \ldots l_n}} = \boldsymbol{SD_i}, \\ \sum_{l_1=1}^{N_{1i}} \sum_{l_2=1}^{N_{2i}(l_1)} \ldots \sum_{l_n=1}^{N_{ni}(l_{n-1})} \boldsymbol{SK_{i\,l_1 \ldots l_n}} = \boldsymbol{SK_i}, \end{array}$$

где N_{ji} (l_{j-1}) – количество субсчетов j-го уровня, открытых к l-му субсчету $j-1$ уровня счета i.

В соотношениях (3) указана зависимость числа слагаемых $\boldsymbol{N_{ji}}$ от l_{j-1}, поскольку к каждому субсчету ВЕРХНЕГО $(j-1)$ уровня может быть введено (ОТКРЫТО) различное число субсчетов НИЖНЕГО (j) уровня.

Методология бухгалтерского учета

Важнейшими задачами бухгалтерского учета являются: УЧЕТ И АНАЛИЗ состояния хозяйствующего субъекта, а также УЧЕТ И АНАЛИЗ изменений его состояния. Методология бухгалтерского учета построена на допущении о том, что изменение состояния хозяйствующего субъекта происходит покоординатно. При этом каждая ОПЕРАЦИЯ (изменение состояния) затрагивает только два СЧЕТА (координаты) i и j. Причем по одному счету (i) меняется значение в 1-й позиции пары $(\boldsymbol{SD_i}, \boldsymbol{SK_i})$ – изменения ПО ДЕБЕТУ СЧЕТА i, а по другому (j) – значение во 2-й позиции пары $(\boldsymbol{SD_j}, \boldsymbol{SK_j})$ – изменения ПО КРЕДИТУ СЧЕТА j.

Остановимся еще на некоторых базовых понятиях.

В том случае, если какая-либо компонента последовательности (2) задается только в денежном выражении (не имеет дополнительных признаков), говорят, что но данному счету ведется только СИНТЕТИЧЕСКИЙ УЧЕТ. Если же некоторая компонента последовательности (2) задается как в стоимостном, так и в натуральном выражении (обладает дополнительными признаками),

говорят, что по данному счету ведется как СИНТЕТИЧЕСКИЙ, так и АНАЛИТИЧЕСКИЙ учет.

Все дальнейшие рассуждения относятся к случаю ведения по всем счетам только синтетического учета.

Понятие бухгалтерской проводки

БУХГАЛТЕРСКАЯ ПРОВОДКА – оператор, отражающий изменение состояния хозяйствующего субъекта в виде изменений по дебету и кредиту соответствующих счетов.

Проводка может быть представлена в следующем виде:

(4) $F_k = F_{p_k}(s)$,

где $\boldsymbol{k}$ – номер проводки,

$\boldsymbol{S}$ – сальдо, характеризующее состояние хозяйствующего субъекта на момент перед выполнением оператора (4),

$\boldsymbol{p_k}$ – нумерованный вектор параметров оператора $\boldsymbol{F_k}$, имеющий следующий вид:

$$\boldsymbol{p_k} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \mathrm{D}, \boldsymbol{t}, [\mathbf{K}]),$$

где $\boldsymbol{i}$ – счет дебета,

$\boldsymbol{j}$ – счет кредита,

D – величина, характеризующая объем операции и заданная в стоимостном (денежном) выражении,

$\boldsymbol{t}$ – дата совершения операции,

$[\mathbf{K}]$ – дополнительные необязательные параметры, как то: дата регистрации операции, признаки аналитического учета (количество, структурные подразделения, контрагенты и т.д.).

Пара счетов $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$, фигурирующая в каждой проводке, называется КОРРЕСПОНДЕНЦИЕЙ СЧЕТОВ. Существуют ДОПУСТИМЫЕ и НЕДОПУСТИМЫЕ корреспонденции счетов и, соответственно, допустимые и недопустимые проводки.

Об основной идее составления корреспонденции счетов будет сказано ниже в разделе “Балансовый отчет”.

Допустимость или недопустимость корреспонденции счетов определяется инструкциями Министерства Финансов по применению плана счетов бухгалтерского учета, инструктивными письмами налоговых органов, других уполномоченных органов исполнительной власти (подзаконными актами) или прецедентом.

В соответствии с методологией бухгалтерского учета считается, что в результате выполнения операции (оператора), представляемой проводкой, хозяйствующий субъект переходит в но-вое состояние так, что происшедшие изменения могут быть описаны изменениями только в двух векторах последовательности (2): i-м и j-м.

Пусть $\boldsymbol{S}' = \boldsymbol{F_k}(\boldsymbol{S})$ – состояние хозяйствующего субъекта после выполнения хозяйственной операции, представляемой проводкой $\boldsymbol{F_k}$.

Последовательность $\boldsymbol{S}$ по отношению к операции, задаваемой проводкой $\boldsymbol{F_k}$, называется ВХОДЯЩИМ САЛЬДО, а последовательность $\boldsymbol{S}'$ – ИСХОДЯЩИМ САЛЬДО.

Для заданных $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{F_k}$ РЕЗУЛЬТАТ ХОЗЯЙСТВЕННОЙ ОПЕРАЦИИ (операции, описываемой оператором $\boldsymbol{F_k}$) может быть определен на основании нижеследующего алгоритма:

Шаг 1.

$$(*)\quad \begin{aligned} SD'_i &= SD_i \vee SD^*_i + \Delta \\ SK'_j &= SK_j \vee SK^*_j + \Delta \end{aligned},$$

где величины SD^*_i и SK^*_j определяются по формулам (1).

Шаг 2.

Если i или j компонента последовательности $\boldsymbol{S}$ представлена в виде (1), т.е. сальдо по счетам i и/или j является свернутым, то к полученным на шаге 1 данного алгоритма значениям SD'_i и/или SK'_j применяется операция нормализации (1), т.е. сальдо по счетам i и/или j СВОРАЧИВАЕТСЯ.

Таким образом, изменение состояния хозяйствующего субъекта описывается в бухгалтерском учете перемещением денежных сумм по координатам пространства состояний по вышеуказанному алгоритму, т.е. в виде ДВИЖЕНИЯ (средств) ПО СЧЕТАМ.

Существует взаимнооднозначное соответствие между любой учитываемой на уровне синтетического учета суммой D и одной из проводок $\boldsymbol{F_k}$.

Это соотношение (в отличие от самой операции) не зависит от текущего состояния хозяйствующего субъекта, задаваемого сальдо $\boldsymbol{S}$, и полностью определяется вектором параметров проводки $\boldsymbol{p_k}$.

С учетом этих замечаний можно записать:

(5) $\mathrm{D}_{\boldsymbol{k}} = \mathrm{D}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{t}, [\mathbf{K}])$,

где $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{t}, [\mathbf{K}]$ определяются также как и для $\boldsymbol{F_k}$.

Соотношение (5) задает не функциональную зависимость, а определяет список предикатов – признаков, по которым всегда может быть установлена принадлежность данной суммы $\mathrm{D}_{\boldsymbol{k}}$ к той или иной хозяйственной операции, описываемой проводкой $\boldsymbol{F_k}$.

Оборотный баланс

Дадим следующее определение.

Под ОБОРОТОМ ПО ДЕБЕТУ СЧЕТА $\boldsymbol{i}$ за период $(\boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{t_2}]$ понимается величина

(6) $$O(i,,t_1,t_2) = \sum_{\substack{k=1 \\ t_1 < t \le t_2,\, l=i}}^{M} \Delta_k \ (l,,t,[\mathbf{K}]),$$

где $\boldsymbol{M}$ – общее количество проводок (изменений состояний хозяйствующего субъекта), зафиксированное за период $(\mathbf{0}, \boldsymbol{T}]$ такой, что имеет место включение

$$(\boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{t_2}] \subset (\mathbf{0}, \boldsymbol{T}],$$

а запись “,,” означает “для любого $\boldsymbol{j}$”.

Период $(\mathbf{0}, \boldsymbol{T}]$ называется ОТЧЕТНЫМ ПЕРИОДОМ.

Следует отметить, что между величинами $\boldsymbol{O}$ и $\boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{t_2}$, стоящими в левой части уравнения (6), уже существует, в отличие от (5), вполне определенная функциональная зависимость.

Аналогичным образом определяется и ОБОРОТ ПО КРЕДИТУ СЧЕТА $\boldsymbol{j}$ за период $(\boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{t_2}]$:

(7) $$O(,j,t_1,t_2) = \sum_{\substack{k=1 \\ t_1 < t \le t_2,\, h=j}}^{M} \Delta_k \ (,h,t,[\mathbf{K}]).$$

Последовательность двумерных векторов

$$\boldsymbol{O}(\boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{t_2}) = ((O(i,,t_1,t_2),\ O(,i,t_1,t_2)),\ \boldsymbol{i} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{N})$$

называется ОБОРОТАМИ за период $(\boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{t_2}]$.

Поскольку одной из важнейших задач бухгалтерского учета является учет изменений состояний хозяйствующего субъекта, то должна существовать и процедура учета этих изменений.

Данная процедура реализуется в виде построения ОБОРОТНОГО БАЛАНСА.

Рассмотрим эту процедуру.

Аналогично тому, что каждая проводка (4) и каждая учитываемая денежная сумма (5) связаны с конкретным моментом (ДАТОЙ) $\boldsymbol{t}$, то и сальдо $\boldsymbol{S}$ должно быть связано с конкретной датой $\boldsymbol{t}$:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{t}).$$

Построение оборотного баланса состоит в определении состояния хозяйствующего субъекта, т.е. сальдо на момент $\boldsymbol{t_2} - \boldsymbol{S}(\boldsymbol{t_2})$ (ИСХОДЯЩЕЕ САЛЬДО) на основании сальдо на момент $\boldsymbol{t_1} - \boldsymbol{S}(\boldsymbol{t_1})$ (ВХОДЯЩЕЕ САЛЬДО) и оборотов по дебету и кредиту всех счетов за период $(\boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{t_2}]$:

(8) $$\begin{aligned} &O(i,,t_1,t_2), \quad i = 1, \overline{N}, \\ &O(,j,t_1,t_2), \quad j = 1, \overline{N}. \end{aligned}$$

Вычисление исходящего сальдо для каждого счета $\boldsymbol{i}$ может быть выполнено в соответствии с алгоритмом (*) с той лишь разницей, что на **шаге 1** происходит добавление не единственной суммы D_k, а всего оборота за период $(\boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{t_2}]$, исчисляемого по формулам (6) и (7).

Пренебрегая вопросом о том, каким является входящее сальдо по счету $\boldsymbol{i}$: развернутым или свернутым, процедурную часть **шага 1** для счета $\boldsymbol{i}$ (соответственно для дебета и для кредита счета) можно записать в виде:

(9) $$\begin{aligned} &SD_i(t_2) = SD_i(t_1) + O(i,,t_1,t_2), \\ &SK_i(t_2) = SK_i(t_1) + O(,i,t_1,t_2). \end{aligned}$$

В бухгалтерской практике входящее сальдо $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t_1})$, исходящее сальдо $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t_2})$ и обороты (8) представляются в виде единой

таблицы, которая называется ОБОРОТНЫМ БАЛАНСОМ хозяйствующего субъекта за период $(t_1, t_2]$. С учетом обозначений из (8) и (9) оборотный баланс записывается в виде:

САЛЬДО на дату t_1		**ОБОРОТЫ за период с t_1 по t_2**		**САЛЬДО на дату t_2**	
ДЕБЕТ	**КРЕДИТ**	**ДЕБЕТ**	**КРЕДИТ**	**ДЕБЕТ**	**КРЕДИТ**
$SD_1(t_1)$	$SK_1(t_1)$	$O(1,,t_1,t_2)$	$O(,1,t_1,t_2)$	$SD_1(t_2)$	$SK_1(t_2)$
$SD_i(t_1)$	$SK_i(t_1)$	$O(i,,t_1,t_2)$	$O(,i,t_1,t_2)$	$SD_i(t_2)$	$SK_i(t_2)$
$SD_N(t_1)$	$SK_N(t_1)$	$O(N,,t_1,t_2)$	$O(,N,t_1,t_2)$	$SD_N(t_2)$	$SK_N(t_2)$
$\sum_{i=1}^{N}$	$\sum_{i=1}^{N}$	$\sum_{i=1}^{N}$	$\sum_{i=1}^{N}$	$\sum_{i=1}^{N}$	$\sum_{i=1}^{N}$

В нижней части таблицы – ОБОРОТНОГО БАЛАНСА приводятся суммы по каждому столбцу.

Нетрудно видеть, что в силу конструкции проводки (4) выполнение равенства

(10) $$\sum_{i=1}^{N} SD_i(t_1) = \sum_{i=1}^{N} SK_i(t_1)$$

влечет за собой выполнение равенств

(11) $$\sum_{i=1}^{N} O(i,,t_1,t_2) = \sum_{i=1}^{N} O(,i,t_1,t_2),$$

(12) $$\sum_{i=1}^{N} SD_i(t_2) = \sum_{i=1}^{N} SK_i(t_2).$$

В случае, если соотношения (11) и (12) выполняются, то бухгалтеры говорят, что “БАЛАНС СОШЕЛСЯ”, а суммы, стоящие в левых и правых частях равенств (10) и (12) называются БАЛАНСОМ.

Сведение баланса является одной из наиболее трудоемких работ при бумажном способе ведения бухгалтерского учета в силу того, что при таком способе ведения учета возможны ошибки, связанные с тем, что бухгалтер “НЕ ЗАКРЫВАЕТ” проводку, т.е. производит изменение только по СЧЕТУ ДЕБЕТА или только по СЧЕТУ КРЕДИТА пары счетов (i, j), фигурирующих в проводке (4).

Автоматизированное ведение бухгалтерского учета позволяет избегать этой ошибки, поскольку программы “ловят” ее, но эти программы, безусловно, не избавляют от ошибок, связанных с полным отсутствием регистрации тех или иных проводок или же целых групп проводок (ХОЗЯЙСТВЕННЫХ ОПЕРАЦИЙ, состоящих из нескольких проводок).

Источники информации. Метод начислений

Источником информации в бухгалтерском учете, на основании которого производится регистрация проводок (ЗАВОДЯТСЯ ПРОВОДКИ), являются ПЕРВИЧНЫЕ ДОКУМЕНТЫ.

ПЕРВИЧНЫЙ ДОКУМЕНТ – специально утвержденная форма, в которой регистрируются изменения состояния хозяйствующего субъекта, связанные с движением материальных ценностей (денежных средств, оборудования и т.д.).

В первичных документах могут регистрироваться как фактические изменения состояния хозяйствующего субъекта, так и предполагаемые в будущем (начисляемая в текущем месяце зарплата, которая выплачивается в следующем месяце).

Регистрация предполагаемых в будущем изменений состояния хозяйствующего субъекта называется МЕТОДОМ НАЧИСЛЕНИЙ, а сами регистрируемые изменения подобного типа называются НАЧИСЛЕНИЯМИ (например, начисление зарплаты).

Необходимость использования МЕТОДА НАЧИСЛЕНИЙ, т.е. прогноза будущих состояний хозяйствующего субъекта, хотя бы в разрезе нескольких координат – счетов, достаточно очевидна.

В первую очередь она связана с тем, что деятельность хозяйствующего субъекта происходит в экономической среде, которая активно воздействует на процесс его функционирования

(устанавливает правила игры). Активной внешней средой устанавливается определенный уровень взаимодействия хозяйствующего субъекта с собой (обязательные расходы и платежи), зависящий, однако, от его состояния в определенный момент времени или изменения его состояния за определенный период (см. ниже).

В частности, хозяйствующий субъект должен уплачивать разного рода налоги и сборы, начисляемые в одном периоде $(\boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{t_2}]$, а уплачиваемые в другом $(\boldsymbol{t_2}, \boldsymbol{t_3}]$. Для их уплаты он уже в периоде $(\boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{t_2}]$ должен сформировать РЕЗЕРВЫ ПРЕДСТОЯЩИХ РАСХОДОВ И ПЛАТЕЖЕЙ, определив их размеры, используя метод начислений.

Практически все законодательные акты, связанные с взаимодействием между хозяйствующим субъектом и государством (важнейшей составляющей внешней среды), построены таким образом, что величина платежей, которые хозяйствующий субъект должен перечислить государству в периоде $(\boldsymbol{t_2}, \boldsymbol{t_3}]$ зависят от его состояния в момент $\boldsymbol{t_2}$ либо от изменений его состояния за периоды $(\boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{t_2}]$ или $(\mathbf{0}, \boldsymbol{t_2}]$.

Как уже было указано выше, состояние хозяйствующего субъекта на момент $\boldsymbol{t_2}$ определяется сальдо $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t_2})$, а изменение состояния за периоды $(\boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{t_2}]$ или $(\mathbf{0}, \boldsymbol{t_2}]$, соответственно, – оборотами $\boldsymbol{O}(\boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{t_2})$ или $\boldsymbol{O}(\mathbf{0}, \boldsymbol{t_2})$.

Таким образом, метод начислений предполагает наличие функциональной зависимости между суммой $\mathrm{D}_{\boldsymbol{k}} = \mathrm{D}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}, [\mathbf{K}])$, регистрируемой в проводке (4), и сальдо $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t_2})$ или оборотами $\boldsymbol{O}(\boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{t_2})$, или $\boldsymbol{O}(\mathbf{0}, \boldsymbol{t_2})$ так, что можно, опуская аргументы $\mathbf{0}, \boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{t_2}$, записать:

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{G}^{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{S}) \text{ или} \quad \mathrm{D}_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{G}^{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{O}), \tag{13}$$

где $\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{r}}$, $\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{q}} \in \mathrm{G}$,

где G – есть множество функций (алгоритмов) метода начислений.

Вид функции (структура алгоритма) из G определяет и вид аргументов, включая и временные параметры.

Функции из G порождаются соответствующими законодательными актами, входящими в Налоговый кодекс и относящимися к тем или иным налогам, а также иными законодательными и подзаконными актами. В соответствии с внесением изменений и дополнений в тот или иной раздел Налогового кодекса или соответствующего закона происходит трансформация функции из G.

Следует отметить, что представление достаточно “полного”, по отношению к текущему законодательству, множества G является весьма трудоемкой и важной с практической точки зрения задачей.

Учетная политика

Данный раздел лекции является продолжением раздела “Методология бухгалтерского учета”.

Методология бухгалтерского учета предполагает, что ХОЗЯЙСТВЕННАЯ ОПЕРАЦИЯ, регистрируемая в виде проводки, совершается за время $\mathrm{t} = \mathbf{0}$ и, таким образом, может быть целиком отнесена к какому-либо моменту $\boldsymbol{t}$.

На самом деле это может быть далеко не так $(\mathrm{t} >> \mathbf{0})$, как, например, при рассмотрении какого-либо непрерывного производственного процесса. Одна хозяйственная операция может также состоять из нескольких этапов различной временной протяженности (например, отгрузка товара, зачисление денежных средств за отгруженный товар на расчетный счет).

В таких случаях методология бухгалтерского учета позволяет относить проводку, описывающую данную операцию (например, отгрузку товара), к некоторому (одному из нескольких альтернативных) моментов времени

$$\boldsymbol{t}^{\bullet} \in [\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t} + \mathrm{t}],$$

где $\boldsymbol{t}$ – дата начала, а t – продолжительность операции.

Выбор правила y определения момента $\boldsymbol{t}^{\bullet} \in [\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t} + \mathrm{t}]$ и представляет собой определение УЧЕТНОЙ ПОЛИТИКИ.

Существуют и другие случаи, когда правила учета хозяйственных операций или даже сами операции является недоопределенными.

К таким случаям следует отнести способ начисления амортизации. В этом случае предполагается недоопределенность вида функции (13). А выбор учетной политики состоит в принятии решения относительно ее конкретного вида (из некоторого набора альтернатив).

Выбор учетной политики возлагается на главного бухгалтера.

Главный бухгалтер, выбрав учетную политику y по отношению к какой-либо конкретной хозяйственной операции, должен придерживаться этой учетной политики и по отношению к другим аналогичным операциям в течение достаточно длительного периода времени (в зависимости от существа операции, но, по крайней мере, 1 год).

Балансовый отчет

БАЛАНСОВЫЙ ОТЧЕТ представляет собой отчетную форму, в которой представлены входящее и исходящее сальдо за отчетный период $(\mathbf{0}, \boldsymbol{T}]$, т.е. $\boldsymbol{S}(\mathbf{0})$ и $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{T})$.

При этом ДЕБЕТОВЫЕ ОСТАТКИ $(\boldsymbol{SD_i} \neq \mathbf{0} \vee \boldsymbol{SD_i^*} \neq \mathbf{0})$ записываются в левой части формы (для $\boldsymbol{t} = \mathbf{0}$ и для $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}$, соответственно), а КРЕДИТОВЫЕ ОСТАТКИ $(\boldsymbol{SK_i} \neq \mathbf{0} \vee$ $\vee\, \boldsymbol{SK_i^*} \neq \mathbf{0})$ – в правой (для $\boldsymbol{t} = \mathbf{0}$ и для $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}$, соответственно).

Левая часть балансового отчета называется АКТИВОМ БАЛАНСА или просто АКТИВОМ, а правая – ПАССИВОМ БАЛАНСА или просто ПАССИВОМ.

В процессе формирования балансового отчета дебетовые и кредитовые остатки по отдельным группам счетов объединяются (складываются). В отдельных случаях производится вычитание кредитового (дебетового) остатка по одному счету $(\boldsymbol{i})$ из дебетового (кредитового) остатка по другому счету $(\boldsymbol{j})$, например, при определении остаточной стоимости основных средств или нераспределенной прибыли отчетного года, которые фигурируют в балансовом отчете. При этом результат вычитания может быть и отрицательным.

Очевидно, что из выполнения равенств (10) и (12) вытекает РАВЕНСТВО между АКТИВОМ и ПАССИВОМ баланса (для $\boldsymbol{t} = \mathbf{0}$ и для $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}$, соответственно).

КОРРЕСПОНДЕНЦИЯ СЧЕТОВ вводится таким образом, что в ПАССИВЕ баланса фигурируют источники финансирования деятельности хозяйствующего субъекта (ПАССИВЫ), т.е. соответствующие счета плана счетов, а в АКТИВЕ – факторы хозяйственной деятельности, которыми обладает данный субъект (АКТИВЫ) – здания, оборудование, материалы, денежные средства, ценные бумаги и т.д. и т.п.

Теперь необходимо сделать выводы, касающиеся значения построения балансового отчета как документа, характеризующего состояние хозяйствующего субъекта.

1. Балансовый отчет служит основной формой внешней отчетности предприятия.

2. Построение баланса с такой структурой позволяет анализировать текущее финансовое состояние предприятия, а сам баланс может служить основой для принятия определенных управленческих решений.

Механико-геометрическая интерпретация бухгалтерского баланса

Рассмотрим достаточно протяженный однородный цилиндр, малого диаметра подвешенный на опоре, на тросе так, что точка крепления (т. $\mathbf{0}$) делит цилиндр пополам.

На цилиндр способом, указанным ниже, надеваются грузы одинаковой (единичной) массы и одинаковой формы.

Сила тяжести $(\boldsymbol{Fg})$ действует вдоль троса.

Правило размещения грузов на цилиндре состоит в следующем.

Если для заданного счета $\boldsymbol{i}$ величина $\boldsymbol{SD_i} \neq \mathbf{0}$ $(\boldsymbol{SD_i^*} \neq \mathbf{0})$, то груз помещается на цилиндре слева от т. $\mathbf{0}$, на расстоянии равном $|\boldsymbol{SD_i}|$ $\left(\left|\boldsymbol{SD_i^*}\right|\right)$ от нее.

Если для заданного счета $\boldsymbol{i}$ величина $\boldsymbol{SK_i \neq 0}$ $(\boldsymbol{SK_i^* \neq 0})$, то груз помещается на цилиндре справа от т. $\mathbf{0}$, на расстоянии равном $|\boldsymbol{SK_i}|$ $\left(\left|\boldsymbol{SK_i^*}\right|\right)$ от нее.

Очевидно, что при таком способе размещения грузов для счетов, сальдо по которым является развернутым, на цилиндр может быть одето по два груза – слева и справа от т. $\mathbf{0}$.

Если для каких-либо счетов значения $|\boldsymbol{SD_{i1}}|, \mathbf{K}, |\boldsymbol{SD_{in}}|$ $\left(|\boldsymbol{SK_{i1}}|, \mathbf{K}, |\boldsymbol{SK_{in}}|\right)$ совпадают, то соответствующие грузы должны располагаться на цилиндре компактной группой симметричной по отношению к точкам $|\boldsymbol{SD_i}|$ $\left(|\boldsymbol{SK_i}|\right)$, т.е. симметрично на перпендикулярах, проходящих через ось цилиндра.

Левая часть цилиндра соответствует АКТИВУ БАЛАНСА, а правая часть – ПАССИВУ БАЛАНСА.

Очевидно, что в силу своей формы, при выполнении соотношений вида (10) или (12), т.е. в случае, когда сальдо по дебету и сальдо по кредиту на соответствующую дату совпадают (БАЛАНС СХОДИТСЯ), конструкция находится в равновесии.

Рассуждения данного раздела могут быть проиллюстрированы рис. 1.

Нетрудно видеть, что бухгалтерский баланс является проекцией - представлением в денежном выражении пространственной конструкции, которая описывает состояние хозяйствующего субъекта в неортогональной системе координат. Пример такой конструкции, размещенной в трехмерном пространстве, приведен на рис. 2.

В заключение следует еще раз отметить, что в данной статье формально излагается ряд основных понятий бухгалтерского учета. Данная статья может быть полезна как специалистам в области математической экономики, интересующимся вопросами формализации описания бухгалтерского учета, так и специалистам в области разработки систем автоматизации бухгалтерского учета и финансового анализа – как возможная методологическая основа построения соответствующих прикладных автоматизированных систем.

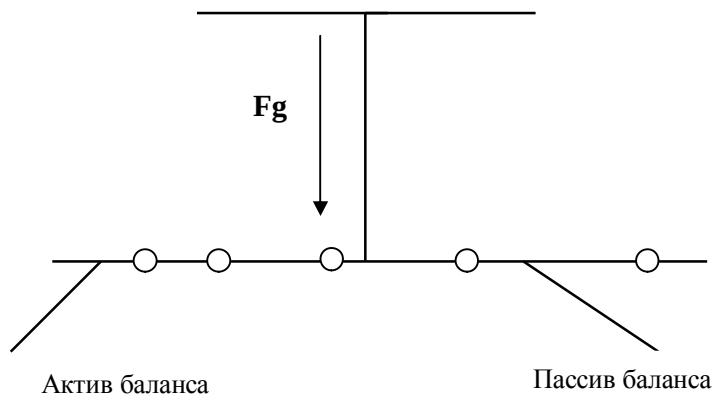


Рис. 1

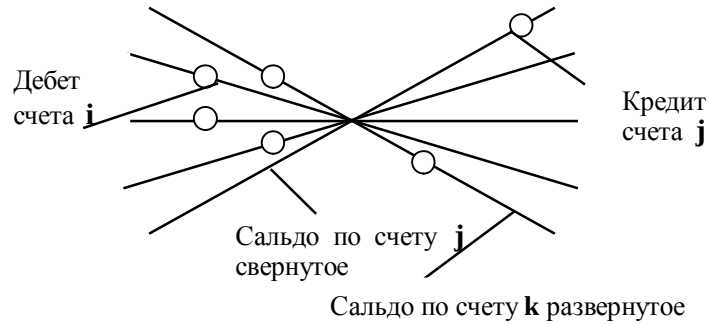


Рис. 2

ЗАСКАНОВ В.Г.

ОЦЕНКА ЭКОНОМИЧЕСКОЙ БЕЗОПАСНОСТИ КРУПНЫХ ПРОМЫШЛЕННЫХ РЕГИОНОВ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ИХ АВТОНОМНОСТИ И НЕЗАВИСИМОСТИ.

Крупные промышленные регионы, например, такие как самарская область, представляют собой относительно автономные мегаполисы, включающие в свой состав промышленное производство, сферу услуг и секторы социального развития. В то же время подобные образования функционируют в составе некоторой метасистемы более высокого порядка, например государства, с его органами управления. Кроме того крупные промышленные регионы взаимодействуют с элементами внешней среды (смежные регионы, иностранные государства и др.). Исследование механизмов взаимодействия региона с элементами внешней среды целесообразно начать с рассмотрения следующей схемы (рис. 1).

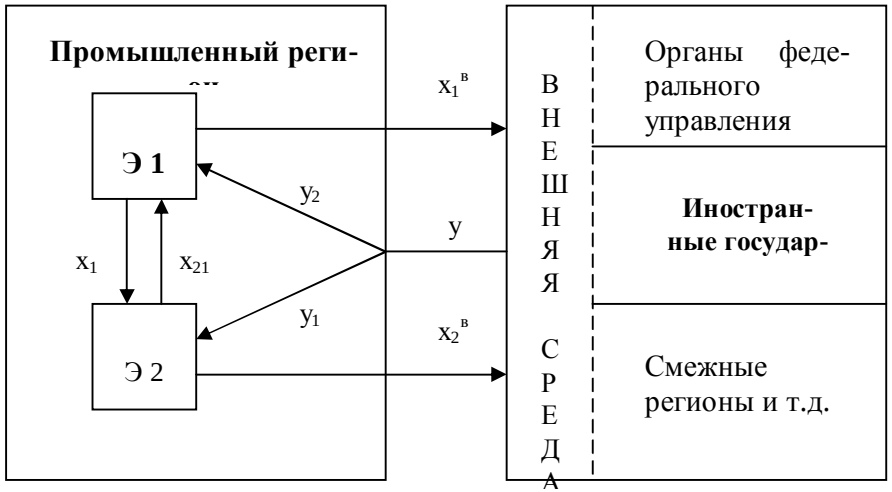


Рис 1. Укрупненная схема взаимодействия крупного промышленного региона с элементами внешней среды

Промышленный регион представляет собой совокупность множества $I = \{i = \overline{1,n}\}$ взаимодействующих хозяйственно – экономических субъектов. В целях упрощения изложения предложим, что $n = 2$, как это показано на рисунке 1. Работу элементов 1 и 2 можно характеризовать двумя видами деятельности. Первый вид предполагает внутрирегиональное взаимодействие. Так потоки продукции x_{12} и x_{21} (в натуральном или стоимостном выражении) представляют внутрирегиональное взаимодействие элементов. Учитывая современное состояние развития российской экономики именно характеристики этих потоков в основном определяют уровень благосостояния промышленного региона и его элементов. В то же время нельзя игнорировать факт все возрастающего влияния взаимодействия промышленного региона с элементами внешней среды. При этом имеют место два вида взаимодействий. Первый – обмен ресурсными потоками (материальная продукция, финансы) в виде $x_1^в$, $x_2^в$, y_1, y_2 . данный вид взаимодействия можно классифицировать как непосредственный. Кроме этого имеется вектор $A = \{a_1, a_2, ...a_s ...a_m\}$, компоненты которого есть совокупность юридических, экономических и прочих нормативов, регламентирующих правила отношений как между элементами рассматриваемой системы, так и их отношения с элементами внешней среды. С учетом сказанного, рассматривая задачу оптимизации деятельности региона, можно предложить следующую ее формализованную постановку.

$$\begin{cases} \Phi(x_{12}, x_{21}, x_1^в, x_2^в, y_1, y_2, a_1, a_2 ... a_m) \to \max \\ x_{12} + x_1^в \le X_1 \\ x_{21} + x_2^в \le X_2 \\ x_1^в \le x_1^{СПР} \\ x_2^в \le x_2^{СПР} \\ y_1 + y_2 \le y^{предл} \end{cases} \qquad (1)$$

где Φ – критерий оптимальности

X_1, X_2 – производственные возможности 1го и 2 ^{го} элементов

$x_1^{спр}$. $x_2^{спр}$ – спрос внешней среды на продукцию 1го и 2 ^{го} элементов

$y^{предл}$ – предложение товаров внешней средой

Оптимальное решение x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0 во многом определяются ограничениями и значениями параметров a_3, о которых шла речь выше.

Рассмотрим теперь проблему экономической безопасности функционирования исследуемой региональной системы. При этом необходимо определиться с семантическим содержанием понятия «экономическая безопасность». В настоящее время отсутствует четкая, общепризнанная трактовка данной категории. Поэтому, не претендуя на категоричность, примем в данной работе, что под безопасностью, степенью безопасности будет пониматься способность системы обеспечивать определенное (заданное, допустимое) качество функционирования при наличии внешних и внутренних возмущениях. Возвращаясь к рассмотренной выше модели (1) можно в качестве инструмента формализованной оценки качества функционирования региона взять значение критерия оптимальности.

Тогда, в исходном состоянии, при некоторых фиксированных условиях (ограничения, нормативы) имеет определенное решение (1) в виде xj^0, y_i^0. Данному решению соответствует оптимальное значение критерия $\Phi^0(x^0, y^0)$. Рассматривая попытку введения качественной меры оценки экономической безопасности региона предлагается следующий подход.

Внешние воздействия, которые можно отнести к разряду угроз в конечном счете находят свое формализованное воплощение в виде колебаний, изменения параметров модели $\Delta a_3, \Delta X_1, \Delta X_2, \Delta x_1^{спр}, \Delta x_2^{спр}, \Delta y^{предл}$. Данные возмущения (угрозы) естественно приведут к изменению оптимальных решений Δx_i и Δy_i. Действительно, в новых «возмущенных» условиях придется искать новое решение, выбирать стратегии, соответственно этим новым условиям. Все это приведет к изменению значения критерия оптимальности в виде $\Delta\Phi(\Delta x, \Delta y)$.

Рассматривая проблему безопасности очевидно следует выделить минимально допустимое значение критерия $\underline{\Phi}$. Уменьшение значения критерия ниже уровня $\underline{\Phi}$ отнесем к состоянию угрозы экономической безопасности. С учетом сказанного условие экономической безопасности может описываться следующим неравенством

$$\phi^0(x^0, y^0) - \Delta\Phi(\Delta a) \geq \underline{\Phi} \qquad (2)$$

Отметим, что при введении условия (2) предполагалась положительная семантика критерия Φ, т.е. это – доход, прибыль, валовый продукт и т.д.

Используя (1) и (2) сформулируем задачу оценки экономической безопасности. При этом целью лаконичности изложения введем новый вектор z, интегрирующий в себе нормативы и параметры ограничений так, что $Z = \{a, x, x\}$. Вводим показатели чувствительности переменных плана x, y и критерия Φ к вариациям Δz

$$a_x = \frac{\partial x}{\partial z}$$
$$a_y = \frac{\partial y}{\partial z} \qquad (3)$$
$$a_\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

Техника нахождения конкретных значений коэффициентов чувствительности зависит от специфики и вида критерия и ограничений.

Рассмотрим в качестве примера класс линейных моделей, достаточно широко используемых при описании систем региональной экономики. Техника нахождения коэффициентов чувствительности для данного класса описана в [1]. Используя информацию об a изменение планов и критерия при наличии возмущений Δz осуществляется следующим образом

$$\Delta x = a_x \cdot \Delta z$$
$$\Delta y = a_y \cdot \Delta z \qquad (4)$$
$$\Delta\Phi = a_\Phi \cdot \Delta z$$

Располагая полученными соотношениями получаем условия допустимых пределов возмущений по Δz, при которых выполняются условия экономической безопасности регионов в том смысле как это было оговорено в данной работе.

$$\Delta Z \leq \frac{\Phi^0(x^0.y^0) - \underline{\Phi}}{a_\Phi} \qquad (5)$$

Таким образом предложенный в данной статье методический подход и математический аппарат могут и быть использованы при управлении экономической безопасностью крупных промышленных регионов и других различных задач управления региональной экономикой.

Литература

1. Гришанов Г.М., Засканов В.Г., Оглезнев Н.А. Вопросы анализа плановых решений в линейных организационно-экономических системах // Моделирование процессов перспективного планирования отраслевых комплексов. – Новосибирск: Наука, 1985. – С. 32-35.

ПАВЛОВ О.В.

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УЧАСТНИКОВ КОРПОРАТИВНЫХ СИСТЕМ

Введение

В работе рассматривается взаимодействие участников корпоративных систем на длительном интервале времени. Доходы от корпоративной деятельности делят между собой несколько групп участников: акционеры (собственники компании), менеджеры, наделенные акционерами правами принятия управленческих решений, кредиторы (банки, владельцы облигаций), трудовой коллектив, федеральное правительство, собирающие налоги, а иногда владеющее пакетом акций. Между участниками корпоративной системы существуют контракты, соглашения и устные договоренности. Согласно [1,2] корпоративное управление – это система взаимоотношений между менеджерами компании и её акционерами по вопросам обеспечения эффективности деятельности компании и защите интересов владельцев, а также других заинтересованных сторон: работников, кредиторов, поставщиков и покупателей. Для успешной деятельности финансовые менеджеры компании должны учитывать интересы всех групп участников (агентов) корпоративной системы.

Статическим механизмам управления в организационных системах посвящено большое количество литературы, основные результаты изложены в [3-12]. В меньшем количестве работ рассматриваются динамические механизмы управления [12-17].

В докладе рассматриваются две задачи: совместное участие в инвестиционном проекте промышленного предприятия и инвестора в длительном периоде (игра Γ_{1t}), динамическая задача стимулирования агентов за снижение трудоёмкости (игра Γ_{2t}).

1. Общая постановка задачи взаимодействия участников корпоративной системы

Процесс взаимодействия участников корпоративной системы представляется в виде дифференциальной игры с непротивоположными интересами. Результаты деятельности корпоративной системы зависят от деятельности каждого участника. В игровой динамической модели присутствуют два вида динамики: изменение вектора состояния системы во времени и динамика процессов принятия решений. Игроки могут иметь различную информацию о текущих значениях фазовых координат, о принимаемых партнёрами решениях.

Методы теории игр с непротивоположными интересами были сформулированы Гермейером Ю.Б. [5,6]. Существуют два подхода к решению дифференциальной игры. Первый из них связан с исследованием ситуаций равновесия [15, 16]. В работе используется второй подход, связанный с построением организационной структуры игры, предложенный Кононенко А.Ф. [12,13]. Построение организационной структуры игры заключается в фиксации порядка ходов игроков и построении процедур обмена информацией. Как показано в [13] множество вариантов информированности игроков может быть сведено к четырём вариантам игры: в классе программных стратегий Γ_{1t}, $\Gamma_{2t,}$ и в классе позиционных стратегий Γ_{1x}, Γ_{2x}.

В общем виде дифференциальная игра участников корпоративной системы описывается следующим образом:

1.Уравнение динамики состояния системы:

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t),u(t),v(t),t), \quad t \in [0,T],$$

где $x(t)$ – n-мерный вектор состояния системы, $u(t)$,$v(t)$ – p и q – мерные управляющие функции агентов.

2.Начальное условие

$$x(0) = x_0.$$

3.На управляющие функции наложены ограничения:

$u(t) \in U, \ v(t) \in V.$

4.Целевые функции игроков:

$J_1(u,v) = g_1(x(T)),$

$J_2(u,v) = g_2(x(T)).$

С помощью управляющих функций $u(t)$ и $v(t)$ игроки стремятся максимизировать свои целевые функции.

Взаимная информированность должна так определять действия игроков, что при подстановки их в (1) и при начальном условии (2) определялась единственная траектория движения системы.

Максимальный гарантированный выигрыш и соответствующая оптимальная стратегия 1 игрока определяются из решения задачи

$$K_1 = \max_{u(t)\in U} \min_{v(t)\in R(u_t)} J_1(x(t),U(t),v(t)). \qquad (5)$$

При этом множество $R(u(t))$ состоит из точек множества V, в которых максимизируется целевая функция игрока 2:

$$\max_{v(t)\in V} J_2(x(t),u(t),v(t)).$$

В [13] показано, что в случае однозначного отображения $v(t) = T(u(t))$ решение дифференциальной игры сводится к решению задач оптимального управления. Для решения задач оптимального управления могут быть применены принцип максимума Понтрягина [19] или метод динамического программирования Р. Беллмана [20].

2.Совместное участие в инвестиционном проекте предприятия и инвестора

Рассматривается проблема совместного участия в инвестиционном проекте промышленного предприятия и инвестора. Предприятие планирует осуществлять финансирование инвестиционного проекта за счет собственных отчислений от прибыли и привлечение денежных средств потенциального инвестора. Инвестор участвует в

проекте путём приобретения акций предприятия с целью получения в перспективе дивидендов. В каждый момент времени инвестор принимает решение о покупке дополнительных акций предприятия. Рассматривается задача об оптимальном инвестировании финансовых средств, в длительном периоде, с точки зрения предприятия и инвестора.

В соответствии с методологией [13] дифференциальная игра с непротивоположными интересами сводится к задачам оптимального управления инвестициями с точки зрения инвестора (игрок 1) и предприятия (игрок 2). С использованием принципа максимума Понтрягина определяются оптимальные стратегии вложения финансовых средств в основные фонды для предприятия и инвестора. Согласование интересов предприятия и инвестора возможно на основе дивидендной политики предприятия (процентов от прибыли предприятия, выплачиваемых акционерам). Определяются условия согласования интересов предприятия и инвестора в длительном периоде.

2.1 Постановка задачи совместного финансирования проекта предприятия и инвестора

Динамика изменения основных фондов предприятия на временном интервале $[t_0,T]$ при финансировании предприятием и инвестором описывается дифференциальным уравнением [*12*]*:*

$$\frac{dK(t)}{dt} = -mK(t) + U(t) + V(t). \qquad (7)$$

где $K(t)$ - количество основных фондов в момент времени t, выраженный в денежных единицах; m - коэффициент выбытия основных фондов; $U(t)$, $V(t)$ – инвестиции предприятия и инвестора соответственно, в момент времени t.

Известно количество основных фондов фирмы в начальный момент времени:

$$K(0) = K_0. \qquad (8)$$

Уравнение (7) показывает, что инвестиции используются на восстановление и на увеличение основных производственных фондов.

Объём выпуска продукции $Q(t)$ предприятия в момент времени t описывается линейной производственной функцией

$$Q(t) = fK(t), \qquad (9)$$

где f – показатель фондоотдачи основных фондов.

Предполагается мгновенное освоение капиталовложений, отсутствие временного лага между осуществлением затрат и началом функционирования производственных фондов. Считается, что вся произведенная продукция фирмы реализуется на рынке.

Чистая прибыль фирмы в момент времени t определяется следующим выражением:

$$p(t) = p_1Q(t) - p_2L(t) - A(t) - N(t) - \sum_{i=1}^{m} p_{3i}R_i(t). \qquad (10)$$

где p_1 – цена продукции фирмы; $Q(t)$ - объём выпуска продукции; $p_1Q(t)$ – доход фирмы; p_2 – ставка заработной платы (цена труда); $p_2L(t)$ – затраты на заработную плату; $A(t)$ – амортизационные отчисления; $N(t)$ - налоговые выплаты; p_{3i} - цена i-го вида сырьевого ресурса; $R_i(t)$ – количество i-го вида комплектующих и материалов; $\sum_{i=1}^{m} p_{3i}R_i(t)$ - затраты на комплектующие и материалы; m – количество видов комплектующих и материалов.

Амортизационные отчисления определяются следующим выражением:

$$A(t) = mK(t). \qquad (11)$$

Налоговые выплаты:

$$N(t) = n_1p_1Q(t) + n_2p_2L(t) + n_3p(t) + n_4K(t). \qquad (12)$$

где n_1 – процентная ставка налога на добавленную стоимость, в большинстве случае 20%; n_2 –ставка единого социального налога 35,6% от фонда зарплаты, n_3–ставка налога на прибыль 24%; n_4–ставка налога на имущество ≤2,2%.

Объём закупаемого сырья:

$$R_i(t) = Q(t)r_i(t), \qquad (13)$$

где $r_i(t)$ – коэффициент расхода i-го вида комплектующего и материала при изготовлении продукции.

Учитывая (1), выражение для налоговых выплат запишется:

$$N(t) = a_1fK(t) - n_3[p_2L(t) + mK(t)] + n_2p_2L(t) + n_4K(t),$$

(14)

где $a_1 = p_1(n_1 + n_2) - n_3\sum_{i=1}^{m} p_{3i}r_i$.

Подставляя (11),(13),(14) в (10) и учитывая (7) получим следующее выражение для прибыли:

$$p(t) = ae^{at}f(K,L) - (1-n_3)[p_2L(t) + mK(t)] - n_2p_2L(t) - n_4K(t), \qquad (15)$$

где $a = p_1 - a_1 - \sum_{i=1}^{m} p_{3i}r_i(t)$.

Введём новую управляющую функцию $v(t)$, определяющую какую часть прибыли предприятие реинвестирует в основные фонды:

$$V(t) = v(t)p(t), \qquad (16)$$

$$0 \le v(t) \le 1. \qquad (17)$$

Введём функцию дивидендов $d(t)$, которая характеризует дивидендную политику предприятия в момент времени t и определяет процент от чистой прибыли, направляемый на выплату дивидендов инвестору $DIV(t)$:

$$DIV(t) = d(t)p(t), \qquad (18)$$

$$0 \le d(t) \le 1. \qquad (19)$$

С помощью координирующей функции $d(t)$ возможно согласование интересов предприятия и инвестора. Функцию дивидендов предприятие должно выбрать так, чтобы заинтересовать инвестора в финансировани проекта.

В качестве целевой функции (критерия) предприятия рассматривается максимизация чистой приведенной стоимости (NPV), как разницы между дисконтированными денежными поступлениями и суммой дисконтированных денежных затрат предприятия: реинвестиции предприятия $v(t)$ в основные фонды и выплаты дивидендов инвестору $d(t)$ на интервале времени $[t_0,T]$:

$$J_v = \int_{t_0}^{T} e^{-dt}p(t)[1 - v(t) - d(t)]dt \to \max \qquad (20)$$

где d - коэффициент дисконтирования.

С учетом (17) дифференциальное уравнение (7) запишется:

$$\frac{dK(t)}{dt} = -mK(t) + U(t) + v(t)p(t) \qquad (21)$$

На управляющую функцию инвестора наложено ограничение, связанное с тем, что инвестиции в момент времени t не могут быть больше свободного финансового ресурса $R(t)$

$$0 \le U(t) \le R(t) \qquad (22)$$

В качестве целевой функции инвестора рассматривается максимизация чистой приведенной стоимости (NPV), как разницы между дисконтированными дивидендами и денежными инвестициями $U(t)$ в основные фонды предприятия на интервале времени $[t_0,T]$:

$$J_u = \int_{t_0}^{T} e^{-dt}\{p(t)d(t)\frac{U(t)}{S(t)} - v(t)\}dt \to \max . \qquad (23)$$

где $S(t)$ – стоимость всех акций, по которым выплачиваются дивиденды. Экономический смысл отношения $\frac{U(t)}{S(t)}$ - доля акций инвестора от общего числа акций, по которым выплачиваются дивиденды.

Выражения (21, 8, 16-20, 22-23) описывают дифференциальную игру предприятия и инвестора.

Согласно правилам игры Γ_{1t} [13] инвестор (игрок 1) не рассчитывает иметь полной информации о предприятии (как правило многие инвесторы предпринимают значительные дополнительные усилия для уменьшения этой информационной неопределенности) и его стратегия состоит в выборе программы инвестиций $U(t)$ на весь рассматриваемый интервал времени $[t_0,T]$. При известной функции $U(t)$ предприятие (игрок 2) выбирает свою программу инвестиций $v(t)$ из решения задачи оптимального управления и координирующую функцию дивидендов $d(t)$ из условия согласования своих интересов с интересами инвестора. Таким образом дифференциальная игра инвестора и предприятия сводится к двум задачам оптимального управления.

Сформулируем задачу оптимального управления с точки зрения предприятия. Необходимо, выбирая объёмы инвестиций $v(t)$, удовлетворяющие ограничениям (17) и координирующую функцию $d(t)$ (функцию дивидендов) в каждый момент времени t перевести

динамическую систему (21) из начального состояния (8) в конечное состояние в момент времени T, таким образом, чтобы величина критерия оптимальности (20) была максимальной.

Сформулируем задачу оптимального управления с точки зрения инвестора. Необходимо, выбирая объёмы инвестиций $U(t)$ при ограничениях (22) в каждый момент времени t, при известном оптимальном инвестировании предприятия $v(t)$ и дивидендной политике $d(t)$ перевести динамическую систему (21) из начального состояния (8) в конечное состояние в момент времени T, таким образом, чтобы величина критерия оптимальности (23) была максимальной.

2.2 Решение задачи оптимального управления инвестициями с точки зрения предприятия

Для решения сформулированной задачи оптимального управления (21), (8), (20), (17) применяется принцип максимума Понтрягина [19].

Запишем функцию Гамильтона:

$$H(t) = \Psi(t)[-mK(t) + U(t) + v(t)p(t)] + e^{-dt}p(t)[1 - v(t) - d(t)],$$

где $Y(t)$ – вспомогательная переменная, удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = -\frac{\partial H(t)}{\partial K(t)} = \Psi(t)m - \Psi(t)v(t)a - e^{-dt}a[1 - v(t)] \qquad (24)$$

где $a = \frac{\partial p(t)}{\partial K(t)} = af - (1 - n_3)m - n_4$.

Экономический смысл a - увеличение прибыли предприятия при увеличении основных фондов на единицу.

Для сопряженной переменной выполняется условие трансверсальности:

$$\Psi(T) = 0 . \qquad (25)$$

Перепишем функцию Гамильтона в следующем виде:

$$H(t) = \{\Psi(t) - e^{-dt}\}v(t)p(t) + \Psi(t)U(t) + e^{-dt}p(t)[1 - d(t)]. \qquad (26)$$

В соответствии с принципом максимума Понтрягина в каждой точке оптимальной траектории функция Гамильтона достигает максимума относительно управляющих параметров. Анализируя

выражение (26) замечаем, что гамильтониан линейно зависит от управляющей функций $u(t)$.

Оптимальные стратегии вложения инвестиций:

$$v(t)=\begin{cases}1, & если\ \Psi(t)-e^{-dt}>0\\ 0, & если\ \Psi(t)-e^{-dt}<0\end{cases};\qquad (27)$$

Таким образом оптимальное управление инвестициями является релейным. С учётом (16) оптимальное управление запишется:

$$V(t)=\begin{cases}p(t), & если\ \ t_0\le t\le t_v^*\\ 0, & если\ \ t_v^*<t\le T\end{cases};\qquad (28);$$

t_v^*-время переключения инвестиций предприятия, определяется из условия:

$$\Psi(t_v^*)-e^{-dt_v^*}=0\,.$$

Вспомогательная переменная $Y(t)$ на интервале $[t_v^*,T]$, при управлении $v(t)=0$ определится из решения дифференциального уравнения:

$\dfrac{d\Psi(t)}{dt}=\Psi(t)m-ae^{-dt}$, с граничным условием $\Psi(T)=0$.

Вспомогательная переменная $Y(t)$ на интервале $[t_0,t_v^*]$, при управлении $v(t)=1$ определится из решения дифференциального уравнения:

$\dfrac{d\Psi(t)}{dt}=[m-a]\Psi(t)$, с граничным условием $\Psi(t_v^*)=e^{-dt_v^*}$.

$$\Psi(t)=e^{-dt}e^{[a-m](t-t_v^*)}.$$

Оптимальной стратегией для фирмы на интервале от начального момента времени до точки переключения является инвестирование получаемой прибыли с максимальной интенсивностью в основные фонды. На интервале от точки переключения до конечного момента времени - полный отказ от инвестирования, для предприятия оптимальным является накопление прибыли. Динамика изменения основных фондов предприятия с учётом (28) запишется:

$$\frac{dK(t)}{dt}=\begin{cases}-mK(t)+U(t)+p(t), & если\ \ t_0<t<t_v^*\\ -mK(t)+U(t), & если\ \ t_v^*<t<T\end{cases}\qquad (29)$$

2.3 Решение задачи оптимального управления инвестициями с точки зрения инвестора

Решим задачу оптимального управления для инвестора отдельно на интервале времени $[t_0,t_v^*]$, когда предприятие инвестирует прибыль в основные фонды и на интервале времени $[t_v^*,T]$, когда инвестиции отсутствуют.

2.3.1 Этап инвестирования предприятия

Рассмотрим интервал инвестирования предприятия $[t_0,t_v^*]$. Динамика изменения основных фондов на этом интервале описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{dK(t)}{dt}=-mK(t)+U(t)+p(t).\qquad (30)$$

Для задачи оптимального управления (30), (8), (22), (23) запишем функцию Гамильтона

$$H(t)=\Psi(t)[-mK(t)+U(t)+p(t)]+e^{-dt}[p(t)d(t)\frac{U(t)}{S(t)}-U(t)]$$

,

где $Y(t)$ – вспомогательная переменная, удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d\Psi(t)}{dt}=-\frac{\partial H(t)}{\partial K(t)}=\Psi(t)m-a-e^{-dt}ad(t)\frac{U(t)}{S(t)}\qquad (31)$$

и условиям трансверсальности:

$$\Psi(t_v)=0\,.$$

Перепишем функцию Гамильтона:

$$H(t)=\{\Psi(t)+e^{-dt}[\frac{p(t)d(t)}{S(t)}-1]\}U(t)-\Psi(t)mK(t)+\Psi(t)p(t)\qquad (32)$$

Анализируя выражение (32) приходим к выводу, что гамильтониан линейно зависит от управляющей функции $U(t)$. Следовательно, оптимальное управление для инвестора определится:

$$U(t)=\begin{cases} R(t), & если\ \Psi(t)+e^{-dt}[\frac{p(t)d(t)}{S(t)}-1]>0 \\ 0, & если\ \Psi(t)+e^{-dt}[\frac{p(t)d(t)}{S(t)}-1]<0 \end{cases} \quad (33)$$

Таким образом, оптимальное управление является релейным:

$$U(t)=\begin{cases} R(t), & если\ \ t_0<t<t_u^* \\ 0, & если\ \ t_u^*<t<T \end{cases} \quad (34)$$

t_u^*-время переключения для «внешних» инвестиций на этапе инвестирования, определяется из условия:

$$\Psi(t_u^*)+e^{-dt_u^*}[\frac{p(t_u^*)d(t_u^*)}{S(t_u^*)}-1]=0. \quad (35)$$

Вспомогательная переменная $Y(t)$ на интервале $[t_u^*,t_v^*]$, при управлении $U(t)=0$ определится из решения дифференциального уравнения:

$\frac{d\Psi(t)}{dt}=m\Psi(t)-a$, с граничным условием $\Psi(t_v^*)=0$.

$$\Psi(t)=\frac{a}{m}[1-e^{-m(t_v^*-t)}].$$

Вспомогательная переменная $Y(t)$ на интервале $[t_0,t_u^*]$, при управлении $U(t)=R(t)$ определится из решения дифференциального уравнения:

$\frac{d\Psi(t)}{dt}=m\Psi(t)-a-e^{-dt}ad(t)\frac{R(t)}{S(t)}$, с граничным условием

$$\Psi(t_u^*)=-e^{-dt_u^*}[\frac{p(t_u^*)d(t_u^*)}{S(t_u^*)}-1].$$

Таким образом при условии инвестиций со стороны предприятия, инвестору выгодно финансировать проект на интервале времени $[t_0,t_u^*]$. Время прекращения инвестиций t_u^* зависит от выбора координирующей функции $d(t)$.

Из условий (33) получим условие для выбора координирующей функции (функции дивидендов):

$$d(t)\geq[1-\Psi(t)e^{dt}]\frac{S(t)}{p(t)}. \quad (37)$$

Для инвестора оптимальной стратегий является инвестирование в предприятие, только при условии, что получаемые в каждый момент времени дивиденды больше величины (37). Выполнение найденного условия (37) для дивидендной политики предприятия позволяет сделать экономически выгодным участие инвестора в проекте, а следовательно согласовать интересы предприятия и инвестора.

2.3.2 Этап отсутствия инвестиций со стороны предприятия

Рассмотрим интервал отсутствия инвестиций со стороны предприятия $[t_v^*,T]$. Динамика изменения основных фондов на этом интервале описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{dK(t)}{dt}=-mK(t)+U(t) \quad (38)$$

Для задачи оптимального управления (37), (8), (22), (23) запишем функцию Гамильтона:

$$H(t)=\Psi(t)[-mK(t)+U(t)]+e^{-dt}[p(t)d(t)\frac{U(t)}{S(t)}-U(t)],$$

где $Y(t)$ – вспомогательная переменная, удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d\Psi(t)}{dt}=-\frac{\partial H(t)}{\partial K(t)}=\Psi(t)m-e^{-dt}ad(t)\frac{U(t)}{S(t)} \quad (39)$$

и условиям трансверсальности:

$$\Psi(T)=0 .$$

Перепишем функцию Гамильтона:

$$H(t)=\Psi(t)+e^{-dt}[\frac{p(t)d(t)}{S(t)}-1]\}U(t)-\Psi(t)mK(t) \quad (40)$$

Анализируя выражение (40) приходим к выводу, что гамильтониан линейно зависит от управляющей функции $U(t)$. Следовательно, оптимальное управление для инвестора определится:

$$U(t)=\begin{cases} R(t), & если\ \Psi(t)+e^{-dt}[\frac{p(t)d(t)}{S(t)}-1]>0 \\ 0, & если\ \Psi(t)+e^{-dt}[\frac{p(t)d(t)}{S(t)}-1]<0 \end{cases} \quad (41)$$

Таким образом, оптимальное управление является релейным:

$$U(t)=\begin{cases} R(t), & если\quad t_0<t<t_u^{'} \\ 0, & если\quad t_u^{'}<t<T \end{cases} \quad (42)$$

$t_u^{'}$-время прекращения «внешних» инвестиций, на интервале отсутствия финансирования со стороны предприятия, определяется из условия:

$$\Psi(t_u^{'})+e^{-dt}[\frac{p(t_u^{'})d(t_u^{'})}{S(t_u^{'})}-1]=0\,. \quad (43)$$

Вспомогательная переменная $Y(t)$ на интервале $[t_u^{'},T]$, при управлении $U(t)=0$ определится из решения дифференциального уравнения:

$$\frac{d\Psi(t)}{dt}=m\Psi(t)\text{, с граничным условием } \Psi(T)=0 \quad (44)$$

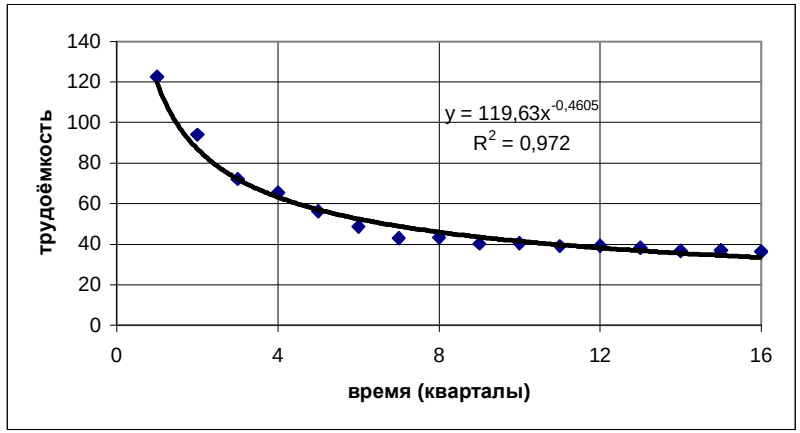
Решая дифференциальное уравнение (44) получаем $\Psi(t)=0$ на интервале $[t_u^{'},T]$. Анализируя выражение (43) приходим к выводу о том, что точки переключения не существует, а следовательно управление инвестора на всём интервале $[t_v^{*},T]$ равно нулю U(t)=0.

Таким образом, в случае отсутствия инвестиций со стороны предприятия инвестору невыгодно финансировать совместный проект.

3. Динамическая задача стимулирования

3.1 Постановка динамической задачи стимулирования

Рассматривается задача стимулирования рабочих за снижение затрат на производство продукции. Хорошо известным является такой факт, что при освоении новой продукции с течением времени затраты на производство продукции (трудоёмкость, себестоимость) уменьшаются [21]. Это связано с увеличением производительности труда рабочих в процессе обучения, устранением временных и обходных техпроцессов и т.д. На рис. 1 изображён график зависимости трудоёмкости изготовления автомобиля ВАЗ 2110 с января 1997 года по декабрь 2000года (четыре года).



На основании статистических данных [22], с использованием метода наименьших квадратов построено уравнение регрессии, имеющей вид степенной зависимости:

$$t=119{,}63t^{-0{,}972}.$$

где t - трудоёмкость изготовления автомашины, t – время изготовления, с дискретностью квартал. Коэффициент детерминации равен 0,972. Анализ изменения трудоёмкости при освоении выпуска автомашин ВАЗ 2111, ВАЗ 2115 позволил сформулировать зависимость трудоёмкости от времени в общем виде:

$$t=Bt^{-m},$$

где m - интенсивность снижения трудоемкости, B – размерный коэффициент.

Дифференцируя полученную зависимость по времени, получим дифференциальное уравнение, описывающее процесс изменения трудоемкости сборки автомобиля:

$$\frac{dt}{dt} = -\frac{m}{t}t$$

Трудоёмкость сборки автомобиля зависит от функции стимулирования центра $u(t)$ и функции прикладываемого усилия рабочего (агента) на снижение трудоёмкости $v(t)$. Функция прикладываемых усилий агента определяется как отношение плановой трудоёмкости к фактической:

$$v_i(t) = \frac{t_{inл}}{t_{iфак}}.$$

На основании [23] зависимость стимулирующего воздействия центра от степени снижения фактической трудоёмкости к плановой определяется выражением:

$$f_i(t) = T + T[\frac{t_{inn}}{t_{iффа}} - 0{,}8] * \frac{u(t)}{0{,}2} = T + T[5v_i(t) - 4] * u(t),$$

где T - тарифная ставка оплаты часа работы среднесписочного рабочего, с доплатой за условия труда и напряжённость норм.

Динамика изменения трудоёмкости с учётом управления центра и i-го агента запишется:

$$\frac{dt}{dt} = -\frac{d}{t}t - au(t) - \sum_{i=1}^{n} b_i v_i(t), \qquad (45)$$

где d - интенсивность снижения трудоёмкости сборки автомобиля «естественным» путём, a, b_i - размерные коэффициенты, $u(t)$ – управление центра, $v_i(t)$-управление агента, n- количество агентов,участвующих в сборке одного автомобиля.

В начальный момент времени t_0 известно начальное значение трудоёмкости:

$$t(t_0) = t_0 \qquad (46)$$

На управляющие функции $u(t)$ и $v_i(t)$ наложены следующие ограничения:

$$0 £ v_i(t), \qquad (47)$$

$$u(t) \le \frac{R(t)}{n}, \qquad (48)$$

где $R(t)$ – фонд премирования за снижение трудоёмкости.

Целевая функция агента запишется как разность дохода агента и затрат по снижению трудоёмкости на интервале $[t_0, T]$

$$J_{vi} = \int_{t_0}^{T} \{T + T(5v_i(t) - 4)u(t) - gv_i^2(t)\}dt \to \max \qquad (49)$$

где γ_i - коэффициент затрат агента.

Целевая функция центра запишется:

$$J_u = \int_{t_0}^{T} \{q(t)[p(t) - t[T + T(5v_i(t) - 4)u(t)]\}dt \to \max \qquad (50)$$

где $q(t)$ - количество производимых автомобилей за час, $p(t)$ – цена автомобиля.

Уравнения (45-50) определяют дифференциальную игру центра и агента.

Согласно правилам игры Γ_{2t} центр знает о выбранном агентом программном управлении $v_i(t)$. Стратегией центра является выбор оператора, ставящего в соответствие каждой функции $v_i(t)$ функцию $f_i(t)$, т.е. сообщение агенту зависимости $f_i(t)=T[v_i(t)]$. Дифференциальная игра сводится к задачам оптимального управления.

Сформулируем задачу оптимального управления для агента, которому известна зависимость $f_i(t)=T[v_i(t)]$. Агенту необходимо, выбирая функцию $v_i(t)$, удовлетворяющую ограничениям (47) в каждый момент времени t перевести динамическую систему (45) из начального состояния (46) в конечное состояние в момент времени T, таким образом, чтобы величина критерия оптимальности (49) была максимальной.

Сформулируем задачу оптимального управления для центра. Необходимо, выбирая функцию $u(t)$, удовлетворяющую ограничениям (48) в каждый момент времени t перевести динамическую систему (45) из начального состояния (46) в конечное состояние в момент времени T, таким образом, чтобы величина критерия оптимальности (50) была максимальной.

3.2 Решение задачи оптимального управления с точки зрения агента

Для решения сформулированной задачи оптимального управления (47), (45), (46), (49) применяется принцип максимума Понтрягина [19].

Запишем функцию Гамильтона:

$$H(t) = -\Psi(t)[\frac{d}{t}t + au(t) + \sum_{i=1}^{n} b_i v_i(t)] + T + T[5v_i(t) - 4]u(t) - g_i v_i^2(t) \quad (51)$$

где $Y(t)$ – сопряженная переменная, удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = -\frac{\partial H(t)}{\partial t(t)} = \Psi(t)\frac{d}{t}, \quad (52)$$

Для сопряженной переменной выполняется условие трансверсальности:

$$\Psi(T) = 0 . \quad (53)$$

Для нахождения максимума выражения (51) продифференцируем его по управляющей функции и приравняем к нулю.

$$\frac{\partial\Psi(t)}{\partial v_i(t)} = -\Psi(t)b_i(t) + 5Tu(t) - 2g_i v_i(t) = 0 .$$

$$v_i(t) = \frac{5Tu(t) - \Psi(t)b(t)}{2g_i} .$$

Решая дифференциальное уравнение (52) с граничным условием (53) определим сопряженную переменную:

$$\Psi(t) = 0 . \quad (54)$$

С учётом (54) оптимальная управляющая функция агента запишется:

$$v_i(t) = \frac{5Tu(t)}{2g_i} \quad (55)$$

Оптимальная функция усилий агента прямо пропорционально функции управления центра, часовому тарифу и обратно пропорционально коэффициенту затрат.

3.3 Решение задачи оптимального управления с точки зрения центра

Запишем Гамильтониан:

$$H(t) = -\Psi(t)[\frac{d}{t}t + au(t) + \sum_{i=1}^{n} b_i v_i(t)] + q(t)[p(t) - t[T + T[5v_i(t) - 4]u(t)] . \quad (56)$$

Подставим в (56) выражение (55) и найдем максимум гамильтониана по $u(t)$.

Оптимальное управление центра определится:

$$u(t) = g\left[\frac{l\,y}{5Tt} + \frac{4}{5}\right], \quad l = a + \frac{5bT}{2g} .$$

Задача оптимального управления сводится к краевой задаче:

$\frac{dt}{dt} = -\frac{d}{t}t - [a - \frac{5b_i T}{2g_i}]u(t)$, с начальным условием $t(t_0) = t_0$.

$\frac{\partial\Psi(t)}{\partial t(t)} = \frac{dt}{t} + T + \frac{5T^2u^2(t)}{2g_i} - 4u(t) = 0$ с граничным условием $\Psi(T) = 0$.

Из решения краевой задачи определится сопряженная переменная $\Psi(t)$.

Таким образом, рассматриваемая динамическая задача стимулирования сведена к двум задачам оптимального управления и решена с использованием принципа максимума Понтрягина.

Библиографический список

1.Распоряжение Федеральной комиссии по рынку ценных бумаг от 4 апреля 2002 г. № 421/р «О рекомендации к применению кодекса корпоративного поведения», www.fcsm.ru/catalog.asp?ob_no=1772

2.“Корпоративное управление: история и практика”, ФКЦБ России, 2003, www.fcsm.ru/catalog.asp?ob_no=3132

3.Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. - М.:Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.-488 с.

4.Моисеев Н.Н. -Элементы теории оптимальных систем М.:Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1974.-528 с.

5. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. – М.:Наука, 1971.

6.Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. – М.:Наука, 1976.

7. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. М. Наука, 1977г., 255 с.
8. Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем М.:Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.-384 с.
9. Бурков В.Н., Новиков В.А. Как управлять проектами:- М.:СИНТЕГ-ГЕО, 1997.-188 с.
10.Бурков В.Н., Новиков В.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. М.: СИНТЕГ, 1999.-128 с.
11.Бурков В.Н. Новиков Д.А. Как управлять организациями. М.: Синтег, 2004. – 400 с., ил.
12.Горелик В.А., Кононенко А.Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. – М.: Радио и связь, 1982. – 144 с., ил.
13.Кононенко А.Ф. О многошаговых конфликтах с обменом информации. - Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1977, № 4, с. 922-931.
14.Соколовский Л.Е. Модели оптимального функционирования предприятия. –М.:Наука, 1980.- 175 с.
15.Васборд Э.М., Жуковский В.. Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения.-М.: Советское радио, 1980.- 304 с., ил.
16.Тынянский Н.Т., Жуковский В.И. Дифференциальные игры с ненулевой суммой (бескоалиционный вариант). – Математический анализ, 1977, т. 15, с. 21-32.
17.Новиков Д.А., Смирнов И.М. Шохина Т.Е. Механизмы управления динамическими активными системами. М.: ИИПУ РАН, 2002. – 124 с.
18.Косачёв Ю.В. Экономико-математические модели эффективности финансово-промышленных структур. – М.: Логос, 2004. – 248 с.
19.Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: «Наука», 1983.-392 с.
20.Белман Р. Динамическое программирование. Москва, 1960. – 400 с.
21. Пиндайк Роберт С., Рубинфельд Дэниел Л. Микроэкономика: Пер. С англ. – 2-е изд. – М.: Дело, 2001.- 808 с.

22. Отчёт по труду и заработной плате за 2000 год АВТОВАЗ. Тольятти 2000. – 128 с.
23.Сборник положений по оплате труда работников Волжского автомобильного завода. Тольятти 2000 – 110 с.

СОРОКИНА М.Г.

СИСТЕМА МОДЕЛЕЙ И МЕТОДЫ ИХ АНАЛИЗА ДЛЯ ОБОСНОВАНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ БАНКОМ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

Банковская деятельность достаточно многогранна и представляет собой совокупность взаимосвязанных направлений, главными из которых является реализация депозитно-кредитных стратегий, обеспечивающих наилучший конечный результат.

Реализация банком депозитно-кредитных операций связана с процессом принятия решения обусловленного множеством влияющих на конечный результат параметров. К таким параметрам можно отнести объемы привлекаемых и размещаемых ресурсов, размеры процентных платежей, продолжительность сроков депозитов, кредитов, уровней их процентных ставок, объемов предложений ресурсов и спроса на кредиты и других. Все эти параметры функционально связаны между собой в рамках депозитно-кредитной операции, имеют противоположные тенденции изменения и вариация любого из них может привести к снижению эффективности. Таким образом, результативность принимаемых решений находится в прямой зависимости от складывающейся конъюнктуры на депозитно-кредитном рынке, формируемой на этой основе структуры ресурсной базы, а также направлений размещения ресурсов и согласованности денежных потоков.

Функционирование депозитно-кредитного рынка, его расширение или сокращение, изменение уровня процентных ставок, объем спроса и предложения определяется его конъюнктурой, отличительной особенностью которой является ее непостоянство, изменчивость, частые колебания. В связи с этим важным является оценивать качество результатов выбранной стратегии как по реализации отдельных, так и совокупности депозитно-кредитных операций. Важней-

шей характеристикой качества результатов выбранной стратегии является ее эффективность, измеряемая величиной операционного дохода, прибылью, рентабельностью и другими. Однако для оценки качества принятых к реализации решений показателей эффективности недостаточно. Это связано с тем, что фактические параметры рыночной конъюнктуры и следовательно конечные результаты могут существенно отличаться от тех, которые были приняты при формировании стратегии и обеспечивали соответствующий уровень ее эффективности. В этой связи возникает необходимость определения последствий изменения условий рыночной конъюнктуры и на этой основе решения проблемы устойчивости показателей эффективности депозитно-кредитных операций.

В настоящее время остается мало изученной проблема оценки влияния различных вариантов стратегии на характеристики устойчивости полученных результатов. В качестве основных характеристик результатов принятых к реализации решений, описывающих свойство устойчивости, предлагается чувствительность и эластичность их к изменению параметров рыночной конъюнктуры. Под чувствительностью показателей, характеризующих результаты принятой к реализации стратегии в работе понимается степень влияния на них изменения параметров рыночной конъюнктуры.

Зависимость между относительным изменением какого-то параметра конъюнктуры депозитно-кредитного рынка и относительным изменением какого-то результата характеризует эластичность результата по связи между этими параметрами.

В основе анализа чувствительности результатов по разнообразным связям между параметрами внешней среды и результатами принятых решений лежит, таким образом, использование коэффициентов (функций) чувствительности, представляющих собой градиенты показателей стратегии, принятой к реализации, по совокупности параметров, характеризующих внешнюю среду. Экономико-математические методы оптимизации и анализа позволяют обеспечить выработку оптимального решения с одновременным обоснованием его в условиях изменяющейся конъюнктуры рынка.

Общая теория чувствительности как самостоятельное научное направление было открыто в середине 60-ых годов югославским ученым профессором Р. Томовичем [1]. Методы анализа чувствительности нашли широкое применение в решении задач управления техническими системами. Полученные результаты теории чувствительности в технических системах привлекли внимание экономистов. Впервые систематическое изложение методов теории чувствительности и их применение к решению экономических задач были изложены в работе М. Интрилигатора [2].

В последние годы уделяется большое внимание анализу влияния рыночных факторов на результаты деятельности предприятия и финансовых организаций. В отечественной и зарубежной финансово-экономической литературе и практике различают общую конъюнктуру финансового рынка и конъюнктуру входящих в его структуру конкретных видов рынков, таких, например, как депозитного, кредитного, отдельных рынков валют, акций. Конъюнктура финансового рынка характеризует общее положение рыночных отношений, сложившихся в определенный момент времени между его участниками, а конъюнктура конкретных рынков, в отличие от общей финансовой конъюнктуры, характеризует его состояние, включающее в себе совокупность взаимосвязанных между собой условий, сложившихся в определенный момент времени. Так, например, состояние депозитно-кредитного рынка характеризуется совокупностью таких параметров как уровни процентных ставок различных видов депозитов, кредитов, их спросом и предложением, а также отношением между рыночными параметрами.

В научной литературе и практике для целей анализа рынков с большой эффективностью используются понятия чувствительности и эластичности объемов спроса или предложений к цене. Для каждой точки функции спроса или предложения определяется коэффициент чувствительности, характеризующий изменение спроса при малом изменении цены.

Вместе с тем, до настоящего времени не получила должного решения такая проблема, как разработка действенного методического инструмента анализа чувствительности результатов принимаемых банком решений по реализации депозитно-кредитных стратегий к изменению совокупности параметров рыночной конъюнктуры.

Целью исследования является разработка комплекса моделей и аналитических методов анализа влияния изменения конъюнктуры депозитно-кредитного рынка на результаты принимаемых банком

решений, позволяющие повысить обоснованность и эффективность выбранных стратегий по реализации финансовых операций.

Для обоснования принимаемых решений при реализации депозитно-кредитных операций в условиях изменяющийся конъюнктуры определим вначале потоки между кредитным учреждением, вкладчиками и заемщиками в простых ситуациях, когда сроки хранения депозитов и погашения кредитов совпадают по времени. Выбор менеджером банка оптимальной стратегии при вовлечении ресурсов в кредит определяется в результате решения следующей задачи [3]:

$$OD(y,x) = t\,(ay - bx) \xrightarrow[y,x\in X]{} \max \qquad (1)$$

где X = {(x,y)/x ≤ П, y ≤ A, x = y} – допустимое множество возможных значений объемов депозитов и кредитов, выбираемых менеджерами на денежном рынке; *y, x* – предложение кредитов и спрос на ресурсы со стороны банка; *A, П* – спрос на кредиты со стороны заемщиков и предложение ресурсов со стороны вкладчиков; *α, β* – процентные ставки кредита и депозита; *OD*(*y,x*) – операционный доход полученный банком в конце срока τ при реализации депозитно-кредитной операции.

Решение модели (1) менеджером банка сводится к выбору оптимального объема кредита $\overset{0}{y}$, депозита $\overset{0}{x}$, операционного дохода $\overset{0}{OD}(y,x)$ из уравнений:

$$\overset{0}{x} = \overset{0}{y} = \min\left[A, \Pi\right],\ \overset{0}{OD}\,(x,y) = t\left(a\ \overset{0}{y} - b\ \overset{0}{x}\right) \qquad (2)$$

Если часть привлекаемого ресурса по нормативу δ отвлекается на формирование резервного фонда, то уравнение, связывающее переменные *y* и *x* имеет вид

$$y = (1 - \delta)x \qquad (3)$$

Тогда решение модели (1) с учетом (3) может быть представлено следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \overset{0}{y} = \min\left[A, (1-d)\Pi\right],\ \overset{0}{x} = \dfrac{1}{1-d}\overset{0}{y} \\ \overset{0}{OD}(x,y) = t\left(a\ \overset{0}{y} - b\ \overset{0}{x}\right) = t\left(a - \dfrac{1}{1-d}b\right)\overset{0}{y} = t\left(a(1-d) - b\right)\overset{0}{x} \end{cases} \qquad (4)$$

Приведенные решения (2) и (4) наглядно демонстрируют зависимость их от сложившейся конъюнктуры на денежном рынке. При этом оптимальное решение принимается с учетом связи рынков между собой через кредитное учреждение и соответствующие денежные потоки.

Учитывая, что в практической работе банка не всегда удается совместить во времени потоки платежей, рассмотрим модели принятия решений в ситуациях, когда сроки хранения депозитов и погашения кредитов не равны между собой. При этом вначале исследуем ситуацию, которая характеризуется тем, что для кредита используется депозит, срок хранения которого меньше срока погашения кредита. Такая несогласованность во времени между платежными потоками порождает проблему кредиторской задолженности и, чтобы ликвидировать ее, банк вынужден покупать дополнительные объемы ресурсов. Сформулируем задачу и опишем методический подход формирования модели выбора оптимальной стратегии, реализация которой позволяет менеджеру избежать накопления кредиторской задолженности перед вкладчиком.

Модель принятия решений по определению объемов привлекаемых и вовлекаемых в кредиты ресурсов имеет следующий вид:

$$OD(x,y) = (1+ta)y - t_2 b_2 x_2 - (1+t_1 b_1)x_1 \xrightarrow[x\in X]{} \max \qquad (5)$$

$$y \le A,\ x_1 \le \Pi_1, x_2 \le \Pi_2, y = x_1,\ x_2 = (1+t_1 b_1)x_1,$$

где τ_1, β_1, x_1 – срок хранения, процентная ставка и объем привлекаемого банком ресурса; τ_2, β_2, x_2 – срок хранения, процентная ставка и объем привлекаемого банком в конце срока τ_1 ресурса; τ, α, y – срок погашения, процентная ставка и объем выданного банком кредита; A – спрос на кредиты со стороны заемщиков; Π_1, Π_2 – предложение ресурсов со стороны вкладчиков.

При формировании модели (5) сделано предположение, что привлекаемые ресурсы в полном объеме вовлекаются в кредит, т.е. без учета формирования резервного фонда.

В результате решения модели (5) определяются такие значения $\overset{0}{y}$, $\overset{0}{x}_1$, $\overset{0}{x}_2$, которые обеспечивают максимальную величину операционного дохода $\overset{0}{OD}(y,x)$.

Оптимальным решением модели (5) является следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} &\overset{0}{y} = \overset{0}{x}_1 = \min(A, \Pi_1, \Pi_2/(1+t_1 b_1)) \\ &\overset{0}{x}_2 = (1+t_1 b)\overset{0}{x}_1 \\ &\overset{0}{OD} = ta\overset{0}{y} - (t_1 b_1 + t_2 b_2 + t_1 t_2 b_1 b_2)\overset{0}{x}_1 \end{aligned} \qquad (6)$$

Полученная в работе модель принятия решений (5) положена в основу для исследования эффективности реализации операций с учетом отвлечения части привлекаемых ресурсов на формирование резервного фонда, а также задания вероятностей привлечения дополнительных ресурсов в будущие периоды.

Описанный подход по формированию модели принятия оптимальных решений при вовлечении краткосрочных депозитов в долгосрочные кредиты использован в работе для моделирования более сложной, но типичной для банковской практики ситуации, когда депозит вовлекается одновременно в два кредита.

Для рассматриваемой ситуации менеджер в результате решения задачи распределения привлекаемого денежного ресурса по двум направлениям его использования определяет такие объемы покупаемых ресурсов x_1, x_2 и такие объемы продаваемых кредитов y_1, y_2, которые обеспечивают максимальное значение операционного дохода.

Для решения поставленной задачи предложена следующая математическая модель:

$$\begin{aligned} &OD = t_1 a_1 y_1 + t_2 a_2 y_2 - t_1 b_1 x_1 - t_2 b_2 x_2 \to \max \\ &y_1 \le A_1,\ y_2 \le A_2,\ x_1 \le \Pi_1,\ x_2 \le \Pi_2,\ x_1 = y_1 + y_2, \\ &x_2 = (1+t_1 b_1)x_1 - (1+t_1 a_1)y_1, \end{aligned} \qquad (7)$$

где A_1, y_1, α_1, τ_1 – объем спроса, предложения кредитов первого вида, процентная ставка и срок его погашения соответственно;

A_2, y_2, α_2, τ_2 – объем спроса, предложения кредитов второго вида, процентная ставка и сроки его погашения соответственно;

Π_1, x_1, β_1, τ_1 – объем предложения, спроса денежных ресурсов, процентная ставка и срок хранения соответственно;

Π_2, x_2, β_2, τ_2 – объем прогнозируемого предложения, спроса на дополнительные ресурсы, привлекаемые в конце срока t_1, процентная ставка и срок хранения соответственно.

Для исследования результатов решения модель (7) преобразована в эквивалентную модель с двумя переменными y_1, y_2 следующего вида:

$$\begin{aligned} &OD = t_1(a_1 - b_1)(1+t_2 b_2)y_1 + (ta_2 - t_1 b_1 - t_2 b_2 - t_1 t_2 b_1 b_2)y_2 = D_1 y_1 + D_2 y_2 \to \max \\ &y_1 \le A_1,\ y_2 \le A_2,\ y_1 + y_2 \le \Pi_1,\ (1+t_1 b_1)y_2 - t_1(a_1 - b_1)y_1 \le \Pi_2, \\ &D_1 = t_1(a_1 - b_1)(1+t_2 b_2),\ D_2 = (ta_2 - t_1 b_1 - t_2 b_2 - t_1 t_2 b_1 b_2),\ (y_1, y_2 \ge 0) \end{aligned} \qquad (8)$$

На рис. 1 изображено одно из состояний параметров конъюнктуры, которое характеризуется тем, что менеджер выбирает оптимальное состояние находящееся на пересечение двух ограничений (точка М):

$$\begin{cases} \overset{0}{y}_1 + \overset{0}{y}_2 = \Pi_1 \\ (1+t_1 b_1)\overset{0}{y}_2 - t_1(a_1 - b_1)\overset{0}{y}_1 = \Pi_2 \end{cases} \qquad (9)$$

Прямая OD max, проходящая через точку М, соответствует максимальному значению операционного дохода. Решая систему (9), состоящую из двух уравнений и двух неизвестных y_1^o и y_2^o, можно определить функцию предложения кредитов со стороны банка y_1^o и y_2^o.

$$\overset{0}{y}_1 = \frac{(1+t_1 b_1)\Pi_1 - \Pi_2}{1+t_1 a_1} \qquad (10)$$

$$\overset{0}{y}_2 = \frac{\Pi_2 + t_1(a_1 - b_1)\Pi_1}{1+t_1 a_1} \qquad (11)$$

При известных значениях объемов предложения кредитов со стороны банка оптимальный спрос на ресурсы со стороны банка и операционный доход равен

$$\overset{0}{x}_1 = \overset{0}{y}_1 + \overset{0}{y}_2 = \Pi_1,\ \overset{0}{x}_2 = (1+t_1 b_1)\overset{0}{x}_1 - (1+t_1 a_1)\overset{0}{y}_1 = \Pi_2,\ \overset{0}{OD} = D_1 \overset{0}{y}_1 + D_2 \overset{0}{y}_2$$

Как следует из полученных формул (10), (11) объемы предложения кредитов $\overset{0}{y}_1$, $\overset{0}{y}_2$, зависят от объемов предложения ресурсов Π_1, Π_2 и процентных ставок α_1 и b_1, т.е. от параметров конъюнктуры денежного рынка.

Полученные модели принятия решений при согласованных и несогласованных во времени платежных потоках позволяют исследовать зависимости выбираемых менеджером стратегий от изменения конъюнктуры на денежном рынке и на этой основе предвидеть последствия этих изменений для обоснования устойчивости показателей эффективности финансовых операций.

Для исследования задач анализа влияния вариаций рыночных параметров на конечные результаты при реализации финансовых операций введем в рассмотрение коэффициенты чувствительности имеющие различную экономическую интерпретацию, удобные при анализе чувствительности моделей принятия решений. Под чувствительностью модели принятия решений на депозитно-кредитном рынке понимается степень влияния изменения рыночных параметров на показатели, характеризующие результаты денежных операций, определенные из решения модели. В качестве выходных показателей рассматриваются объемы привлекаемых и вовлекаемых в кредиты ресурсов, операционный доход, величины избыточности спроса на кредиты, предложения ресурсов и другие.

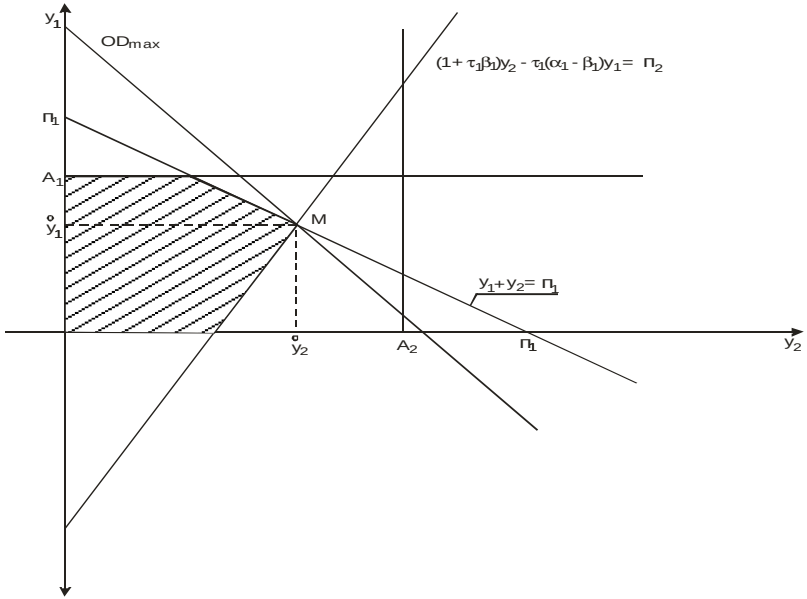


Рис. 1 Графическое решение модели принятия решений (*8*)

С помощью введенного понятия чувствительности модели принятия решений предложен методический подход определения коэффициентов чувствительности, характеризующие устойчивость результатов к изменению параметров конъюнктуры денежного рынка [4].

Дифференцируя например решение (4) по параметрам конъюнктуры денежного рынка А, П, α, β, получим следующие уравнения для коэффициентов чувствительности:

$$E_y^A = \begin{cases} 1, \text{ если } A \le (1-d)\Pi \\ 0, \text{ если } A > (1-d)\Pi \end{cases},\quad E_x^A = \begin{cases} 1/(1-d), \text{ если } A \le (1-d)\Pi \\ 0, \text{ если } A > (1-d)\Pi \end{cases},$$

$$E_y^\Pi = \begin{cases} 1-d, \text{ если } (1-d)\Pi \le A \\ 0, \text{ если } (1-d)\Pi > A \end{cases},\quad E_y^\Pi = \begin{cases} 1, \text{ если } (1-d)\Pi \le A \\ 0, \text{ если } (1-d)\Pi > A \end{cases}, \qquad (12)$$

$$E_{OD}^A = \begin{cases} t\left(a - \frac{1}{1-d} b\right), \text{ если } A \le (1-d)\Pi \\ 0, \text{ если } A > (1-d)\Pi \end{cases},\quad E_{OD}^\Pi = \begin{cases} t\left((1-d)a - b\right), \text{ если } \Pi(1-d) \le A \\ 0, \text{ если } \Pi(1-d) > A \end{cases},$$

$$E_y^a = E_x^a = E_y^b = E_x^b = 0,\ E_{OD}^a = t\overset{0}{y},\ E_{OD}^b = -t\overset{0}{x},$$

где $E_y^A, E_x^A, E_y^П, E_x^П, E_{OD}^A, E_{OD}^П, E_{OD}^a, E_{OD}^b$ - коэффициенты чувствительности, характеризующие прирост предложения кредитов y, спроса ресурсов x, и операционного дохода OD при увеличении параметров конъюнктуры A, П, α, β, на единицу.

Нижний индекс коэффициентов чувствительности указывает на переменные, которые выбирает менеджер, а верхний – на параметр конъюнктуры, влияние изменения которого исследуется.

Полученные значения коэффициентов чувствительности (12) характеризуют оптимальное решение (4) модели (1, 3).

Таким образом, системе уравнений (4), определяющей оптимальное решение модели (1,3), поставлена в соответствие система уравнений чувствительности (12), позволяющая количественно оценить отклонение оптимальных величин y, x, OD при изменении параметров конъюнктуры A, П, α, β.

Сравнивая полученные значения коэффициентов чувствительности между собой замечаем, что при δ > $0, E_x^A > E_y^A, E_x^П > E_y^П$, т.е. чувствительность предложения ресурсов больше чувствительности предложения кредитов к изменению объема спроса на кредиты A со стороны заемщиков и объема предложения ресурсов П со стороны вкладчиков.

Для сравнения между собой влияния изменения параметров конъюнктуры на результаты принимаемых решений введены в рассмотрение коэффициенты эластичности, определяемые из уравнений:

$$Э_y^A = E_y^A \, A/\overset{0}{y}, \; Э_x^A = E_x^A \, A/\overset{0}{x}, \; Э_{OD}^A = E_{OD}^A \, A/\overset{0}{OD}, \; Э_y^П = E_y^П \, П/\overset{0}{y}, \; Э_x^П = E_x^П \, П/\overset{0}{x}, \quad (13)$$

$$Э_{OD}^П = E_{OD}^П \, П/\overset{0}{OD}, \; Э_{OD}^a = E_{OD}^a \, a/\overset{0}{OD}, \; Э_{OD}^b = E_{OD}^b \, b/\overset{0}{OD}, \; Э_y^a = Э_x^b = Э_y^a = Э_x^b = 0$$

Каждое из этих коэффициентов эластичности характеризует процентное изменение какого-то результата при однопроцентном увеличении какого-то параметра конъюнктуры.

На основе информации о коэффициентах чувствительности и величинах возмущений определяются изменения выбранной менеджером стратегии. Так, при известных коэффициентах чувствительности и известных рыночных параметров изменение, например,

операционного дохода определяется из следующих простых соотношений:

$$\Delta OD_A = E_{OD}^A \Delta A, \; \Delta OD_П = E_{OD}^П \Delta П, \; \Delta OD_a = E_{OD}^a \Delta a, \; \Delta OD_b = E_{OD}^b \Delta b \quad (14)$$

При одновременном изменении нескольких параметров величина изменения операционного дохода определится как сумма изменений от каждого параметра, определяемого из уравнения:

$$\Delta OD = \Delta OD_A + \Delta OD_П + \Delta OD_a + \Delta OD_b \quad (15)$$

Полученные результаты проиллюстрируем конкретным числовым примером. Пусть на депозитно-кредитном рынке предложение ресурсов сроком хранения τ = 0,3 года, процентной ставкой 10% годовых (β = 0,1), равно П = 80 д.ед, а спрос на кредиты сроком погашения τ = 0,3 года, процентной ставкой 18% годовых (α = 0,18) годовых равен A = 60 д.ед. Норматив формирования резервного фонда равен δ = 10%. Используя исходные данные примера сформировать модель задачи принятия решений и определить: оптимальные значения параметров обеспечивающие максимальное значение операционного дохода; коэффициенты чувствительности объемов привлекаемых x и вовлекаемых в кредиты y ресурсов; чувствительность операционного дохода к изменению параметров конъюнктуры денежного рынка; изменение операционного дохода при одновременном уменьшении спроса на кредиты на 3д.ед., увеличении процентной ставки кредита α и β на 5%.

С учетом исходных данных модель принятия решений (1,3) имеет вид:

$$OD(y,x) = 0{,}3(0{,}18y - 0{,}1x) \to \max$$

$$y \le 60, \; x \le 80, \; y = (1-0{,}1)x = 0{,}9x$$

Решение этой модели в соответствии с (4) равно:

$$\overset{0}{y} = \min(60,\ 0{,}9*80) = 60\,д.ед., \; \overset{0}{x} = 60/0{,}9 = 66{,}67\ д.ед., \; \overset{0}{OD} = 0{,}3(0{,}18 - 0{,}1)60 = 1{,}44\,д.ед.$$

Чувствительность объемов привлекаемых ресурсов x и вовлекаемых в кредиты ресурсов y равна:

$$E_y^A = 1, \; E_x^A = \frac{1}{1-d} = \frac{1}{1-0{,}1} = 1{,}11, \; E_y^П = E_x^П = 0$$

Чувствительность операционного дохода к изменению спроса на кредиты, предложения ресурсов в ситуации А < П и процентных ставок α, β, в соответствии с полученными уравнениями равна:

$$E_{OD}^{A} = t\left(a - \frac{1}{1-d}b\right) = 0{,}3\left(0{,}18 - \frac{1}{0{,}9}0{,}1\right) = 0{,}021;\ E_{OD}^{\Pi} = 0;$$

$$E_{OD}^{a} = t\overset{0}{y} = 0{,}3*60 = 18;\ E_{OD}^{b} = -t\overset{0}{x} = -0{,}3*66{,}67 = -20$$

Используя полученные значения коэффициентов чувствительности, определим изменение операционного дохода при одновременном уменьшении спроса на кредиты на 3 д.ед. (ΔА = - 3 д.ед.) и увеличении процентных ставок на 5% (Δα = 0,05, Δβ = 0,05).

$$\Delta OD = E_{OD}^{A}\Delta A + E_{OD}^{a}\Delta a + E_{OD}^{b}\Delta b = 0{,}021*3 + 18*0{,}05 - 20*0{,}05 = -0{,}037\,д.ед.$$

Операционный доход уменьшится на 0,037 д.ед. и составит величину равную:

$$OD = \overset{0}{OD}(y) - \Delta OD = 1{,}44 - 0{,}037 = 1{,}403\,д.ед.$$

Для сравнения влияния параметров конъюнктуры депозитно-кредитного рынка на результаты полученного решения определим коэффициенты эластичности:

$$Э_{y}^{A} = E_{y}^{A}\,A/\overset{0}{y} = 1\frac{60}{60} = 1,\ Э_{x}^{A} = E_{x}^{A}\,A/\overset{0}{x} = \frac{1}{0{,}9}\frac{60}{66{,}67} = 1,\ Э_{OD}^{A} = E_{OD}^{A}\,A/OD = 0{,}021\frac{60}{1{,}44} = 0{,}875;$$

$$Э_{OD}^{a} = E_{OD}^{a}\,a/OD = 18\frac{0{,}18}{1{,}44} = 2{,}25;\ Э_{OD}^{b} = E_{OD}^{b}\,b/OD = -20\frac{0{,}1}{1{,}44} = -1{,}39$$

Из полученных значений коэффициентов эластичности следует, что наибольшее влияние на полученное решение оказывает изменение процентных ставок α и β. Так, при однопроцентном изменении ставки кредита операционный доход увеличится на 2,25%, а при однопроцентном увеличении спроса на кредит операционный доход увеличится на 0,875%.

На рис. 2 рассмотрен практический пример решения модели задачи распределения привлеченного ресурса в несколько направлений его использования, описываемой системой 8.

Исходные данные:
$П_1$=120 д.ед., β_1=10%, τ_1=1,5 года
$П_2$=90 д.ед., β_2=8%, τ_2=0,5 года
$А_1$=100 д.ед., α_1=18%, τ_1=1,5 года

Модели принятия решений:
$$OD = t_1(a_1 - b_1)(1 + t_2 b_2)y_1 + (t a_2 - t_1 b_1 - t_2 b_2 - t_2 b_2 t_1 b_1)y_2 = 0{,}1248y_1 - 0{,}184y_2 \to \max$$
$$y_1 \le 100,\ y_2 \le 110,\ y_1 + y_2 \le 120,\ 1{,}15y_2 - 0{,}12y_1 \le 90$$

Оптимальное решение:
$\overset{0}{y}_1 = 37{,}8\,д.ед.,\ \overset{0}{y}_2 = 82{,}2\,д.ед.,$
$\overset{0}{x}_1 = 120\,д.ед.,\ \overset{0}{x}_2 = 90\,д.ед.,$
$\overset{0}{OD} = 19{,}84\,д.ед.$

Коэффициенты чувствительности операционного дохода:
$E_{y_1}^{П_1} = 0{,}91;\ E_{y_2}^{П_1} = 0{,}094;\ E_{x_1}^{П_1} = 1;\ E_{x_2}^{П_1} = 0;$
$E_{OD}^{П_1} = 0{,}131$
$E_{y_1}^{П_2} = -0{,}878;\ E_{y_2}^{П_2} = 0{,}787;\ E_{x_1}^{П_2} = 0;\ E_{x_2}^{П_2} = 1;$
$E_{OD}^{П_2} = 0{,}047$
$E_{y_1}^{b_1} = 141{,}7;\ E_{y_2}^{b_2} = -141{,}7;\ E_{x_1}^{b_1} = E_{x_2}^{b_2} = 0;$
$E_{OD}^{b_1} = -195{,}6$
$E_{y_1}^{a_1} = -44{,}65;\ E_{y_2}^{a_1} = 44{,}65;\ E_{x_1}^{a_1} = E_{x_2}^{a_1} = 0;$
$E_{OD}^{a_1} = 61{,}61;\ E_{OD}^{a_2} = 164{,}4;\ E_{OD}^{b_2} = -44{,}43$

Вероятные изменения параметров конъюнктуры:
$\Delta П_1 = -8\,д.ед.,\ \Delta П_2 = -10\,д.ед.,$
$\Delta b_1 = 2\%,\ \Delta b_2 = 2\%,$
$\Delta a_1 = -3\%.\ \Delta a_2 = -4\%.$

Ожидаемое изменение операционного дохода:
$$\Delta OD = E_{OD}^{П_1}\Delta П_1 + E_{OD}^{П_2}\Delta П_2 + E_{OD}^{b_1}\Delta b_1 + E_{OD}^{b_2}\Delta b_2 + E_{OD}^{a_1}\Delta a_1 + E_{OD}^{a_2}\Delta a_2 =$$
$$= -1{,}048 - 0{,}47 - 3{,}912 - 0{,}444 - 1{,}848 - 6{,}576 = -14{,}298\,д.ед.$$
$$OD = OD + \Delta OD = 19{,}84 - 14{,}3 = 5{,}54\,д.ед.$$

Рис. 2. Анализ чувствительности оптимального решения к изменению параметров конъюнктуры.

Из приведенного примера следует, что вероятное изменения параметров конъюнктуры произошли в неблагоприятном направлении: объемы предложения ресурсов со стороны вкладчиков уменьшились, процентные ставки депозитов увеличились, процентные ставки кредитов уменьшились. Все это привело к снижению операционного дохода и, следовательно, снижению рентабельности при реализации связанной совокупности депозитно-кредитных операций.

Однако рентабельность не стала отрицательной величиной, что является важным для менеджера критерием при формировании стратегии банка.

Таким образом, анализ чувствительности модели принятия решений позволяет количественно оценить влияние изменения параметров депозитно-кредитного рынка, сравнить чувствительность рыночных факторов между собой, выделить основные факторы и найти ответы на вопросы, что будет с результатами принимаемых решений, если изменится значение какого-то фактора или их совокупность.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Р. Томович, М. Вукобратович. Общая теория чувствительности. под ред. Цыпкина Я.З., М. : Советское радио, 1972, 240 стр.
2. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975
3. Вагапова Д.З., Вагапов Э.Р. Оптимизация банковских депозитно-кредитных операций в условиях неопределенности на денежном рынке/ М.: Новые технологии, 2002. – стр. 228.
4. Вагапова Д.З., Вагапов Э.Р., Сорокина М.Г. Оценка чувствительности результатов принимаемых решений к изменению параметров конъюнктуры депозитно-кредитного рынка. // Вестник СГАУ, №2, 2003, стр. 19-21.

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 8

Общая редакция: Засканов Виктор Гаврилович
Новиков Дмитрий Александрович

Компьютерная верстка Д.Ю. Иванов

Подписано в печать 22.11.2004. Формат 60×84 1/16
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл.печ.л. 11,2. Усл.кр.-отт. 11,3. Уч.-изд.л. 12,0
Тираж 100 экз. Заказ

Самарский государственный аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.
Институт проблем управления РАН.
117997 Москва, Профсоюзная, 65

Отпечатано в РИО СГАУ 443086 Самара, Московское шоссе, 34