МОДЕЛИ ВЛИЯНИЯ В СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЯХ

Губанов Д.А.[1]**, Новиков Д.А.**[2]**, Чхартишвили А.Г.**[3]
(*Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления РАН, Москва*)

Настоящая работа посвящена обзору моделей влияния в социальных сетях. В обзоре рассмотрены основные классы современных моделей социальных сетей и установлено соответствие между классами моделей и отражаемыми ими свойствами моделируемого объекта.

Ключевые слова: социальная сеть, влияние, модели влияния.

Введение

В настоящей работе рассматриваются модели влияния в социальных сетях, получивших в последнее время значительное распространение не только как неформальные сообщества, но и как инструмент общения, обмена мнениями и получения информации. Под *социальной сетью* на качественном уровне понимается социальная структура, состоящая из множества *агентов* (субъектов – индивидуальных или коллективных, например: индивидов, семей, групп, организаций) и определенного на нем множества *отношений* (совокупности *связей* между агентами, например: знакомства, дружбы, сотрудничества, коммуникации). Формально социальная сеть представляет собой

---

1 Губанов Дмитрий Алексеевич, аспирант (DimaGubanov@mail.ru).
[2] *Дмитрий Александрович Новиков, доктор технических наук, профессор, член-корреспонедент РАН, заместитель директора (novikov@ipu.ru).*
[3] *Чхартишвили Александр Гедеванович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник (sandro_ch@mail.ru).*

граф $G(V, E)$, в котором V – множество вершин (агентов) и E – множество ребер (отношений).

Социальные сети способствуют, во-первых, организации *социальных коммуникаций* между людьми и, во-вторых – реализации их базовых *социальных потребностей*. Можно выделить две пересекающихся трактовки социальной сети – как социальной структуры и ее специфической программной Интернет-реализации.

Термин «социальная сеть» был введён в 1954 году социологом Джеймсом Барнсом в [32]. Массовое распространение (не только среди ученых-социологов[4]) получил с начала 2000-х годов с развитием соответствующих Интернет-технологий. В настоящее время, как справедливо отмечается в [7, 14], ощущается острый дефицит систематического изложения методов и алгоритмов сетевого анализа, пригодных для современных прикладных исследований.

В обобщенном виде, привлекательными для пользователей являются следующие предоставляемые социальными сетями **возможности**:

– получение информации (в том числе – обнаружение ресурсов) от других членов социальной сети;

– верификация идей через участие во взаимодействиях в социальной сети;

– социальная выгода от контактов (сопричастность, самоидентификация, социальное отождествление, социальное принятие и др.);

– рекреация (отдых, времяпрепровождение).

---

[4] *Исследования структуры социальных объектов активно ведутся в социологии начиная с 50-х годов XX века (момента начала активного применения в социометрике теории графов). В 1978 была образована Международная ассоциация специалистов по анализу социальных сетей, учрежден журнал «Social Networks». В Интернете доступны другие издания по этой тематике – электронные журналы «Connections», «Journal of Social Structure» и др. В настоящей работе мы нисколько не претендуем как на обзор полученных в социологии результатов анализа социальных сетей, так и на описание топологии и метрик последних.*

При моделировании социальных сетей, взаимного влияния их членов (*агентов*), динамики их *мнений* и т.д. возникает необходимость учета факторов (эффектов), имеющих место в реальных социальных сетях. В целом, в реальных социальных сетях могут иметь место следующие **эффекты и свойства**, обусловленные как характеристиками и потребностями агентов (оказывающих влияние и подвергающихся влиянию), характером их взаимодействия, так и свойствами самой социальной сети[5]:

1) Наличие собственных мнений агентов;
2) Изменение мнений под влиянием других членов социальной сети;
3) Различная значимость мнений (влиятельности, доверия) одних агентов для других агентов;
4) Различная степень подверженности агентов влиянию (конформизм, устойчивость мнений);
5) Существование косвенного влияния в цепочке социальных контактов. Уменьшение косвенного влияния с увеличением «расстояния».
6) Существование «лидеров мнений» (агентов с максимальным «влиянием»), формализация индексов влияния;
7) Существование порога чувствительности к изменению мнения окружающих;
8) Локализация групп («по интересам», с близкими мнениями);
9) Наличие специфических социальных норм;
10) Учет факторов «социальной корреляции» (общих для групп агентов);
11) Существование (обычно менее значимых) внешних факторов влияния (реклама, маркетинговые акции) и, соответственно, внешних агентов (средства массовой информации, производители товаров и т.п.);
12) Наличие стадий – характерных этапов динамики мнений членов социальной сети (например, процесса диффузии инноваций);

[5] *Ключевые слова в приводимом ниже перечислении выделены подчеркиванием.*

13) Лавинообразные эффекты (каскады), формализация условий их возникновения и свойств распространения;
14) Воздействие структурных свойств социальных сетей на динамику мнений:
    - степенной эффект (чем больше у агента связей, тем, с одной стороны, больше у него возможностей через свое окружение повлиять на всю сеть, а с другой – больше уязвимость к чужому влиянию);
    - эффект кластеризации (чем выше плотность связей активных агентов-соседей, тем больше вероятность активизации связанного с ними агента; см. ниже связанное понятие «сильная связь» («strong tie»));
    - локальная промежуточность (чем больше промежуточное значение агента, тем, с одной стороны, больше его значение в распространении мнения/информации из одной части сети в другую (роль информационного брокера), а, с другой стороны, меньше его влияние на агента-соседа – см. ниже связанное понятие «слабая связь» («weak tie»[6]));
    - малый диаметр социальной сети обуславливает короткую цепочку распространения мнения в сети, степенное распределение вершин графа сети – распространение мнений без начальных затрат и т.п.;
15) Активность (целенаправленное поведение) агентов;
16) Возможность образования группировок, коалиций;
17) Неполная и/или асимметричная информированность агентов;
18) Нетривиальная взаимная информированность (рефлексия) агентов;
19) Игровое взаимодействие агентов;
20) Оптимизация информационных воздействий;
21) Информационное управление в социальных сетях.

[6] *См. статью Грановеттера* [54] *и книгу Берта* [36]. *Согласно Грановеттеру социальная сеть представлена совокупностью тесно связанных кластеров* (*групп*), *которые объединены в слабосвязанные кластеры.*

Перечисленные эффекты и свойства находят (и/или должны находить) отражение в моделях, претендующих на адекватное описание реальных социальных сетей. Настоящая работа посвящена аналитическому обзору основных классов современных моделей социальных сетей и установлению соответствия между классами моделей и отражаемыми ими свойствами моделируемого объекта. Изложение материала имеет следующую структуру.

Первая часть «Модели влияния и индексы влиятельности в социальных сетях» включает пять разделов. В первом разделе рассматриваются определения и модели влияния в социальных сетях, а также подходы к определению влиятельности агентов. Во втором – модели определения самых влиятельных агентов в сети, а также задачи максимизации ценности потребителя в моделях маркетинговых акций на социальных сетях. В третьем разделе рассматривается задача описания каскадов распространения влияния. В четвертом разделе – ряд моделей влияния, базирующихся на аналогиях с медициной, физикой и другими разделами науки, а также модели на основе клеточных автоматов и цепей Маркова. Пятый раздел посвящен краткому описанию индексов влияния.

Вторая часть «Общее знание в социальных сетях. Общественное благо и коллективные действия. Игры на сетях» включает следующие пять разделов: шестой раздел посвящен анализу роли информированности, седьмой – общественным благам и индивидуальной специализации, восьмой – коммуникации и координации в социальных сетях, девятый – социальному контролю и коллективным действиям, а также стабильности сети, десятый – играм на социальных сетях и информационному управлению в социальных сетях.

ЧАСТЬ I. МОДЕЛИ ВЛИЯНИЯ И ИНДЕКСЫ ВЛИЯТЕЛЬНОСТИ В СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЯХ

1. Влияние

Влияние – процесс и результат изменения индивидом (субъектом влияния) поведения другого субъекта (индивидуального или коллективного объекта влияния), его установок, намерений, представлений и оценок (а также основывающихся на них действий) в ходе взаимодействия с ним [60]. *Влияние* – способность воздействовать на чьи-либо представления или действия [78]. Различают направленное и ненаправленное влияние [60]. Направленное (целенаправленное) влияние – влияние, использующее в качестве механизмов воздействия на другого субъекта убеждение и внушение. При этом субъект влияния ставит перед собой задачу добиться определенных результатов (например, выбора определенных действий) от объекта влияния. Ненаправленное (нецеленаправленное) влияние – влияние, при котором индивид не ставит перед собой задачу добиться определенных результатов от объекта влияния.

Как показывают наблюдения психологов [40], в социальной сети агенты часто не имеют достаточной для принятия решений информации или не могут самостоятельно обработать ее, поэтому их решения могут основываться на наблюдаемых ими решениях или представлениях других агентов (*социальное влияние*). Социальное влияние реализуется в двух процессах: *коммуникации* (в ходе общения, обмена опытом и информацией, обсуждения тех или иных вопросов с авторитетными для агента соседями он приходит к определенным представлениям, установкам, мнениям) и *сравнения* (в поисках социальной идентичности и социального одобрения агент принимает представления и действия, ожидаемые от него другими агентами в данной ситуации; агент задается вопросом «что бы сделал другой агент (эталон для сравнения), будь он в моей ситуации?» и, сравнивая себя с ним, определяет свою адекватность и играет соответствующую роль; можно объяснить сравнение и поиском стратегического преимущества: сравнивая себя с другими агентами, занимающими те же позиции в социальной системе, агент может ввести или принять нововведения, которые сделают его более привлекательным в качестве объекта отношений). Необходимо отметить, что при коммуникативном подходе к влиянию агенты могут прийти к сходным представлениям, но необязательно к сходному поведению. При сравнении же агент обычно косвенным образом копирует поведение. Очевидно, поведение агента определяется не только представлениями, но и ограничениями, с которыми он сталкивается. Поэтому агенты со схожими представлениями могут вести себя по-разному, и наоборот агенты с разными представлениями могут вести себя одинаково.

Социальная сеть играет большую роль в распространении информации, идей и влияния между ее членами. Влияние в литературе по социальным сетям тесно связано с термином «*диффузия инноваций*» (diffusion of innovations) [15], поэтому ниже будут рассматриваться, в том числе, и соответствующие модели такой диффузии, в основе которых лежит некоторая фиксированная сеть и локальные правила взаимодействия ее членов.

Классификация моделей влияния в социальных сетях (в том числе – моделей «диффузии инноваций»). Анализ литературы позволяет выделить следующие общие классы моделей.

Оптимизационные, имитационные и другие модели, включающие следующие их классы, рассматриваемые в первой части настоящей работы:

1.1. <u>Модели с порогами</u>, в том числе – с линейными (Linear Threshold Model). Агент – узел социальной сети (вершина графа) – может находиться в активном и неактивном состояниях, причем возможен переход только из неактивного состояния в активное (обратный переход не допускается). Если в модели [55] агент i испытывает влияние w_{ij} каждого своего j-го соседа в сети так, что выполняется условие $\sum_{j\ \text{активный узел-сосед}\ i} w_{ij} \leq 1$, и становится активным в зависимости от выбранного им порога $f_i \in [0; 1]$ (в некоторых моделях значение f_i фиксируется одинаковым для всех агентов (см., например, [64]), в других выбирается случайно, согласно некоторому вероятностному распределению [72], а, в общем, индивидуальные различия обуславливаются опытом агента, его убежденностью, личностными чертами, воздействием средств информации, воспринимаемыми затратами [90]), то есть *условие активации*:

$$\sum_{j \text{ активный узел–сосед } i} w_{ij} \geq f_i .$$

В статье [81] предлагается расширение модели на основе введения нелинейных пороговых функций; в работе [72] каскадные (лавинообразные) эффекты изучаются с точки зрения топологии сети (см. также ниже).

1.2. <u>Модели независимых каскадов</u> (Independent Cascade Model) принадлежит категории моделей так называемых «систем взаимодействующих частиц» (Interacting Particle Systems). Узел сети (агент) определяется аналогично вышеописанной модели. Когда агент i становится активным в некоторый момент времени [52], он получает шанс активировать на следующем (и только на следующем) шаге каждого из своих соседей j с вероятностью p_{ji} (причем j могут пытаться независимо активировать и другие агенты). В статье [64] предлагается обобщение модели с линейным порогом и модели независимых каскадов и показывается их эквивалентность.

1.3. <u>Модели просачивания и заражения</u>.

1.4. <u>Модели Изинга</u>.

1.5. <u>Модели на основе клеточных автоматов</u>.

1.6. <u>Модели на основе цепей Маркова</u>.

В моделях 1.3-1.6 (см. их описание ниже), в основном, рассматриваются правила взаимодействия агентов, а что же касается самой сети влияния и ее свойств, взаимосвязи ее структуры и процессов взаимодействия, то, к сожалению, эти модели отражают очень немногое.

«Теоретико-игровые» модели, в которых акцент делается на информированность и взаимосвязь между игроками (агентами). Выигрыш, получаемый агентом (игроком), зависит от действий оппонентов (других игроков). Агент действует так, чтобы максимизировать выгоду. Ряд теоретико-игровых моделей рассматривается ниже (во второй части настоящей работы), в том числе:

2.1. <u>Модели взаимной информированности</u>;

2.2. Модели согласованных коллективных действий (и общественных благ);

2.3. Модели коммуникаций и задачи поиска минимально достаточной сети;

2.4. Модели стабильности сети;

2.5. Модели информационного влияния и управления;

2.6. Модели информационного противоборства.

Модели диффузии инноваций. Свойствам крупномасштабных сетей посвящены работы [51, 91]. Динамика процесса распространения изменений традиционно моделируется S-образной (логистической) кривой (такая кривая – характеристика, в сущности, любого инфекционного процесса [1], процесса научения [21], диффузии инноваций [15] – см. Рис. 1), на которой различают стадии [50]: новаторы (innovators, начинающие первыми воспринимать и использовать нововведение), ранние последователи (early adopters, начинающие воспринимать и использовать нововведение вскоре после его появления), раннее большинство (early majority, воспринимающие после новаторов и ранних последователей, но раньше большинства других агентов), позднее большинство (late majority, воспринимающие нововведение после широкого его распространения) и поздние последователи (late adopters, воспринимают одними из последних). Условно перечисленные группы изображены на Рис. 2, на котором приведена так называемая «кривая стадий», являющаяся производной логистической кривой.

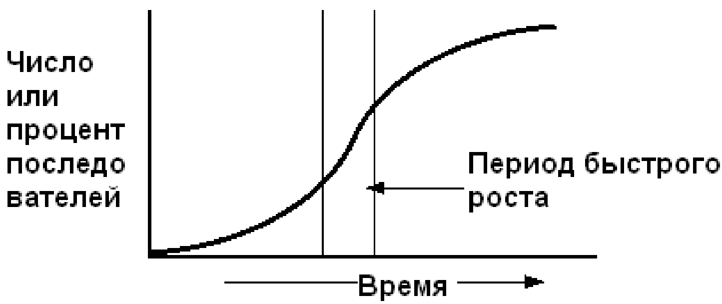


Рис. 1. S-образная кривая (логистическая функция)

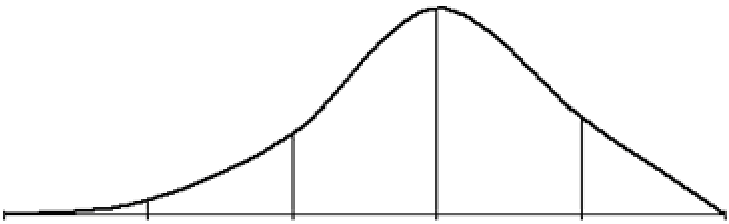


Рис. 2. Кривая стадий

Процесс распространения нововведений, как и многие другие процессы в природе и обществе, имеет пределы возможных изменений, в первую очередь из-за ограниченности ресурсов: ограничения возможностей и емкости социальной системы. S-образная функция содержит три фазы развития: первая – формирование базы развития (медленный рост), вторая – резкий рост, третья – насыщение (медленный рост). Одним из главных факторов, определяющих скорость процессов диффузии, является межличностное общение между сторонниками данной инновации и теми, кто еще колеблется или вообще ничего не слышал о предлагаемом нововведении.

Если новаторов можно охарактеризовать как нонконформистов и «оригиналов», а ранних последователей – как агентов, легко поддающихся социальному нормативному и информационному влиянию, то поздних последователей – как трудно поддающихся влиянию и устойчивых агентов в сети.

Зачастую небольшие изменения в состояниях вершин сетей могут привести к *каскадным* (лавинообразным) *изменениям* (*локальным*, затрагивающим окружение инициатора, и *глобальным*, ограниченным только размером всей сети). Эмпирическому изучению влияния «из уст в уста» (Word of Mouth) или по-русски – *сарафанного радио*, посвящены работы [63, 67], однако они не рассматривают детально структуру сети. В работах же

[43, 65], хотя и рассматривается взаимосвязь между структурой сети и процессами групповой координации, но в них сети искусственно генерируются экспериментаторами и поэтому не всегда ясно, насколько они адекватны реальным сетям.

Теория распространения нововведений (diffusion theory), как известно, рассматривает распространение (диффузию) нововведений (инноваций) в социальной системе. Исследователи в этой области предпринимают попытку объяснить, какие условия увеличивают/уменьшают вероятность принятия нововведения членами социальной системы, с какой скоростью нововведения распространяются в социальной системе. К основным понятиям в этой области относятся: *диффузия* – процесс, посредством которого нововведение распространяется по коммуникационным каналам во времени и в пространстве среди членов социальной системы; *нововведение* – идея, мнение, технология (метод), продукт или любой другой объект воспринимаемый агентом как новый; *коммуникация* – процесс, посредством которого участники создают и обмениваются информацией друг с другом для достижения взаимного понимания и трансляции нововведений.

Нововведения привносятся в социальную систему *агентами изменений* (gatekeepers), а затем постепенно принимается многими агентами, которые передают информацию о нововведении друг другу. Межличностные контакты агентов и средства массовой информации (коммуникационные источники) предоставляют информацию о нововведении (по *коммуникационным каналам*) и влияют на установки, диспозиции, представления и, в конечном итоге, на решения агентов о принятии нововведения. Так нововведение распространяется через социальную систему (важную роль играет природа социальной системы). В конечном итоге, от принятия инновации для агентов и социальной системы возникают позитивные или негативные последствия (желаемые/не желаемые, прямые или косвенные, предвиденные или непредвиденные).

На процесс распространения нововведений воздействует множество факторов: характеристики агентов, характеристики нововведения и природа социальной системы. И исследование диффузии в самой простой форме – это изучение взаимодействия этих и других факторов, воздействующих на принятие нововведения агентами социальной системы. Для исследования распространения нововведений применяются методы сетевого анализа, наблюдения и эксперименты, ECCO (Episodic Communication Channels in Organization) анализ и другие.

Рассмотрим основные характеристики нововведения и его контекст, связанный с его распространением, в частности – сам механизм диффузии/распространения.

Каждый член социальной системы оказывается перед необходимостью принять решение (если оно не коллективное, то есть, предпринимается всеми членами системы, или властное, то есть, предпринимается для всех немногими, обладающими властью) о принятии и использовании нововведения. Процесс принятия нововведения агентом проходит через следующие стадии [83]:

а) знание (агент ознакомлен с новшеством, но не имеет о нем полной информации);

б) убеждение (агент испытывает интерес, формирует благоприятное или не благоприятное отношение (установку) к нововведению, осуществляет поиск дополнительной информации);

в) решение (агент мысленно взвешивает преимущества и недостатки принятия нововведения в текущей или ожидаемой ситуации, решает, стоит ли использовать его (принять или отклонить));

г) апробация/выполнение (агент использует нововведение);

д) подтверждение (агент оценивает результаты и принимает решение о дальнейшем использовании).

Решение о принятии нововведения принимается на основе анализа затрат и выгод. Однако часто возникает неопределенность (эта неопределенность влияет на скорость распространения) при принятии решения, обусловленная воспринимаемыми агентом свойствами нововведения:

1) относительными преимуществами нововведения перед имеющимися аналогами, которые зачастую выражаются в экономических или социальных категориях (прибыльность, экономичность, затраты и т.п.);

2) совместимость нововведения – степень соответствия инновации существующей системе ценностей (определяется куль-

турными нормами социальной системы), прошлому общественному и/или индивидуальному опыту и потребностям потенциального последователя;

3) сложность нововведения – степень простоты и легкости для понимания, использования или приспособления к нововведению; предполагается, что сложность инновации негативно связана с ее принятием;

4) простота апробации/использования – возможность апробации нововведения в ограниченных масштабах;

5) коммуникационная наблюдаемость – степень, с которой нововведение и его результаты могут быть увидены и оценены другими агентами.

Модели сетевой автокорреляции, В работе [48] рассматривается детерминированный дискретно-временной линейный процесс, в котором установки (attitude) агента изменяются под влиянием других агентов: $y_{t+1}=Wy_t$, где y – вектор установок во времени t, и W – матрица влияний. Эта модель обобщается в работе [49], в нее включается матрица независимых переменных и вектор ее регрессионных коэффициентов. В работе [66] особое внимание уделяется описанию матрицы влияния W (w_{ij} – значение влияния j-го агента на i-го). Если обозначить через $A = \|a_{ij}\|$ матрицу смежности в социальной сети, тогда матрица влияния может определяться, например, следующим образом: а) $w_{ij} = a_{ij} / (a_{ij} + 1)$; б) $w_{ij} = r_j a_{ij} / (r_i + \sum r_k a_{ik})$, влиятельность j-го агента определяется числом имеющихся у него ресурсов r_j.

P*-модели социального влияния. Для анализа связей и отношений между агентами в социальной сети используют вероятностные модели [79], учитывающие информацию о распределении структурных характеристик (или конфигураций или подграфов) в генеральной совокупности сетей с заданными свойствами (например, заданными вершинами) и позволяющие проверять гипотезы распределениях, значимости параметров модели, пригодности модели для описания данных. Для моделирования доступна информация о наблюдаемой социальной сети, рассматривающейся как реализация из генеральной совокупности сетей. Предполагается, что в сетях присутствуют конфигурации *выбора* ($i \rightarrow j$) и *взаимности* ($i \leftrightarrow j$) (можно также предположить, что существуют более сложные конфигурации:

транзитивность, экспансия, посредничество и т.п.) и предложить вероятностную модель с параметрами, соответствующими данным конфигурациям. Значимость параметров оценивается методом максимального правдоподобия для наблюдаемой сети. Если допустить, что сеть достаточно однородна, то можно выделить два изоморфных класса конфигураций (порядок вершин в конфигурации не важен) и по значениям двух параметров оценить, насколько часто встречаются данные классы конфигураций.

Влияние и корреляция. Как отмечалось выше, социальные связи играют важную роль в формировании поведения агентов. Однако видимая взаимосвязь между действиями агентов-соседей может определяться не столько социальным влиянием (выполнение действия агентом или его мнение может побудить поступить аналогичным образом его соседей), сколько другими факторами «*социальной корреляции*»: внешней среды (общее место жительства, схожая профессия и т.п.) или схожестью самих агентов (например, люди с близкими вкусами с большей вероятностью имеют одни и те же любимые книги).

Тем не менее, выявить влияние в сети можно в силу его причинно-следственной природы. Поэтому в [70] авторы рассматривают в рамках своей модели тесты, выявляющие фактор социального влияния. В модели сеть представлена графом G. Задается период времени $[0; T]$. Агенты могут стать активными в любой момент времени: A – множество активных агентов в конце периода времени T. Модель локального влияния заключается в следующем: каждый агент становится активным в каждый момент времени с вероятностью $p(r)$, где r – число активных соседей. Наиболее естественным выбором функции $p(r)$ авторы [70] считают функцию логистической регрессии: $p(r)=\dfrac{e^{a\ln(r+1)+b}}{1+e^{a\ln(r+1)+b}}$, где: $\ln(r+1)$ – объясняющая переменная, α – *коэффициент социальной корреляции*; для оценки параметров α и β используется метод максимального правдоподобия.

Для описания установления влияния в [70] рассматривается обобщенная модель корреляции: G и A берутся из совокупного распределения; для каждого агента из A выбирается время активации из распределения на [0; T]. Возможны два теста выявления влияния. «Тасующий» тест (shuffle test) – перетасовать временные отметки для всех активаций, и заново оценить коэффициент α. Если коэффициент изменился, то социальное влияние нельзя исключить, т.к. только в случае социального влияния время активации агента зависит от времени активации других агентов. Второй тест – инверсии ребер (edge-reversal test) – инвертировать направления всех ребер и повторно оценить α (при сходстве агентов и внешних факторах инверсия не влияет на коэффициент).

Модели «диффузии инноваций», связанные с формированием общественного мнения (то есть, само общественное мнение является нововведением – инновацией). Данный класс содержит значительное число моделей. Например, существуют модели, рассматривающие агентов как разобщенные объекты влияния средств массовой информации [34], однако в литературе по «диффузии инноваций» наибольшее распространение получила двухступенчатая модель [45], в которой средствами массовой информации сначала формируются мнения так называемых «лидеров мнений» (имеющих статус хорошо информированных, уважаемых или просто характеризуемых большим количеством связей), а затем посредством лидеров формируются мнения «обычных» агентов. При этом не ясно, насколько оправдана такая «эвристически понятная» точка зрения. Отсутствуют объяснения того, насколько лидеры мнений через свое ближайшее окружение действительно влияют на все сообщество, насколько их влияние критично. Не учитывается также то, что не только лидеры влияют на обычных агентов, но и обычные агенты влияют на лидеров; влияние может передаваться более чем на два шага. Более того, многие математические модели (см., например, [31, 41, 42, 55, 87, 94]) не требуют введения в явном виде предположения о наличии лидеров мнений или каких-то «особенных» индивидов для формирования S-образной кривой диффузии инноваций.

Роль лидеров в «диффузии инноваций». В статье [92] выявляется роль лидеров в распространении нововведений в простой модели социального влияния (насколько изменения мнений таких лидеров приводит к крупным каскадным изменениям мнений в сети). Как оказалось, в большинстве случаев лидеры лишь умеренно «важнее» обычных агентов (за исключением некоторых исключительных случаев): фактически к возникновению больших каскадов приводит влияние одних легко поддающихся влиянию агентов на других, столь же легко поддающихся влиянию.

Поясним последнее утверждение. В модели линейного порога [92] агент i должен принять бинарное решение относительно некоторой проблемы. Вероятность того, что i-ый агент предпочтет альтернативу CB (вместо альтернативы CA), увеличивается с числом других агентов, выбравших CB (как известно из социальной психологии, хотя здесь и исключается, например, «реактивное сопротивление» [17]). Правило порога следующее: $P[\textit{принять } CB] = \begin{cases} 1, \text{ если } r_i \geq f_i \\ 0, \text{ если } r_{i\,i} < f_i \end{cases}$, где f_i – порог, r_i – доля агентов, выбравших альтернативу СВ. Отметим, что непосредственным обобщением данной модели является использование вероятности, более «чувствительной» к изменению доли агентов r_i.

Дополнительно к правилу влияния одних агентов на решения других, необходимо знать сеть влияния (кто из агентов на кого влияет). В [92] предполагается, что i-ый агент в популяции размером N влияет на n_i других выбираемых случайно агентов. Число n_i берется из распределения влияния $p(n)$ (среднее $n_{avg} << N$) и означает влияние i-го агента на n_i других относительно данной проблемы. В этой сети влияния все агенты могут (прямо или косвенно) влиять друг на друга. Авторы [92] определяют *лидеров мнений* как агентов, входящих в верхний дециль распределения влияния $p(n)$.

Далее в [92] рассматривается динамика влияния. В начальной стадии агенты не активны (имеют состояние 0) за исключением одного случайно выбранного так называемого *активного инициатора* i (лидера мнений), имеющего состояние 1. Этот инициатор может активировать соседей далее по цепочке, инициируя *каскад*. Если большое число *ранних последователей* – агентов, непосредственно связанных в рамках сети с инициатором – связано между собой, то может возникнуть глобальный каскад, хотя в целом такие последователи могут составлять небольшую часть всей популяции. Для сравнения среднего размера каскада, инициируемого лидером мнений, и среднего размера каскада, инициируемого обычным агентом, авторами [92] проводится серия экспериментов.

Необходимо отметить, что средний порог f одинаково влияет на способность инициировать каскад и лидера мнений, и обычного агента, поэтому относительное сравнение их значимости не зависит от f. Размер каскадов, генерируемых одиночными инициаторами, сильно зависит от «средней плотности» сети n_{avg}: если это значение мало, то многие агенты уязвимы, но сеть слабо связана для распространения, и, в конечном итоге, активируется только небольшая часть сети; если же значение n_{avg} велико, то сеть сильно связана, но для активации агентам требуется большое число уже активированных соседей, то есть, небольшое число инициаторов не приведет к образованию глобального каскада. Только средний интервал – так называемое «*окно каскадов*» – может привести к образованию глобальных каскадов. В этом промежутке и лидеры, и обычные агенты могут инициировать каскады. Таким образом, способность агента инициировать каскад зависит скорее от глобальной структуры сети, нежели от персональной степени влияния агента. Если в сети в принципе могут возникать каскады, то любой агент может их инициировать, если нет, то никто. Данное утверждение не зависит от значения порога f, т.к. последнее просто одинаково сдвинет «окно каскада» и для лидеров, и для обычных агентов.

Как показывают эксперименты [92], лидеры инициируют каскады, размеры которых ненамного больше размеров каскадов, инициируемых обычными агентами (соотношение практически равно единице), за исключением узких границ «окна каскадов», в пределах которых лидеры существенно значимее, чем обычные агенты. С другой стороны, лидеры могут оказать ключевую роль в инициировании глобальных каскадов в качестве образующих критическую массу ранних последователей. Если сеть слабо связана (n_{avg} примерно равно нижней границе «окна каскадов»), то ранние последователи в среднем более влиятельны (то есть, $n_i > n_{avg}$), но если сеть сильно связана (n_{avg} у верхней границы «окна каскадов»), то ранние последователи в среднем менее влиятельны (то есть, $n_i < n_{avg}$). Объясняется это тем, что агенты с высоким влиянием (у которых велико n_i) менее уязвимы, но при активации потенциально способны активировать больше других агентов. Однако эксперименты показывают, что, хотя ранние последователи являются более влиятельными, чем в среднем агенты всей сети, но они не являются лидерами мнений (не всегда достаточно влиятельны для генерации глобальных каскадов) [92].

Вариации модели, предложенной в [92], с разными предположениями о межперсональном влиянии и структуре сети влияния, дают различную динамику формирования мнения, но, тем не менее, общие выводы остаются почти теми же.

Сети с групповой структурой. В реальных сетях существует определенная *локальная структура* [55]. Авторы [92] вводят простую локальную структуру: «знакомые» больше влияют друг на друга, и агенты имеют множественные, иногда перекрывающиеся группы знакомств. Популяция из N агентов делится на M групп размером g. В среднем каждая группа случайно связана с m_{avg} группами. Каждый агент i-ой группы с вероятностью p связан с каждым агентом в своей группе и с вероятностью q связан с каждым агентом из m_i соседних групп. Рассматриваются две структуры сети: *интегрированная* ($p = q$) и *концентрированная* (агент в своей группе связан, по крайней мере, с таким же числом агентов, как и вне нее). Как оказалось, у таких сетей «окно каскадов» шире, чем у рассматриваемых ранее случайных сетей. Однако введение групповой структуры снижает значимость лидеров мнений, за исключением интегрированной сети в левой границе «окна каскадов», то есть, в сети со слабой связностью. То же происходит и с ролью ранних последователей: в разреженных сетях бóльшую роль играют более влиятельные ранние последователи, и наоборот. И все же эти влиятельные ранние последователи не являются лидерами мнений.

Изменение правила влияния. Предположение о том, что для активации лидера требуется большее число активных соседей, представляется разумным, тем не менее, интересно знать, что произойдет, если на лидеров можно повлиять так же легко, как и на остальных агентов. Рассматривается каноническая модель SIR («Susceptible – Infected – Removed» [56]), в которой в одном взаимодействии независимо от других взаимодействий агент активируется (в моделях эпидемий – «*инфицируется*») с вероятностью β и дезактивируется со скоростью γ («*выздоравливает*») в единицу времени, то есть, наиболее влиятельные агенты более легко поддаются влиянию. В этом случае нет верхней границы «окна каскадов»: чем больше связность сети (возрастает уязвимость всех (!) агентов), тем большего размера возникают каскады. Но и здесь выводы авторов [56] не изменились: как и ранее, размеры каскадов, инициируемые лидерами, относительно больше размеров каскадов, инициируемых обычными агентами, но не существенно. А ранние последователи, связанные с инициаторами, в среднем более влиятельны, чем обычные агенты, но не настолько, чтобы быть лидерами. И только в сети с небольшой связанностью вершин и большой дисперсией степеней вершин гипер-лидеры важны в качестве ранних последователей.

2. Определение самых влиятельных агентов в сети. Ценность агента

Если рассматривать социальную сеть как множество агентов – потенциальных потребителей некоторого товара или услуги, или множество потенциальных последователей новой технологии (инновации, нововведения), то, с точки зрения продавца последних, *ценность* (полезность) *агента* в социальной сети зависит не только от него самого (например, непосредственной ожидаемой прибылью от продажи товара или технологии именно ему), но и от его влияния на других агентов (то есть, важна конфигурация и состояние сети – совокупность мнений потенциальных потребителей относительно «товара»). Поэтому часто возникает потребность в выявлении небольшого числа агентов (*проблема максимизации влияния*), которым, например, предоставляются льготы, с последующей целью распространения нововведения по всей сети.

К проблеме определения k самых влиятельных агентов в социальной сети, в контексте вирусного маркетинга (viral marketing), обращались авторы работы [43]. Они моделируют рынок как социальную сеть агентов (сеть Маркова), ценность каждого из которых определяется не только непосредственной ожидаемой прибылью от продажи (intrinsic value of customer), но и ожидаемой прибылью от продаж другим агентам, на которых повлияет данный, от продаж агентам, на которых они могут повлиять и т.д. (*сетевая ценность агента*-потребителя – network value of customer).

В [43] ставится задача определения оптимальных маркетинговых действий $MA = \{MA_1, ..., MA_n\}$ (MA_i – может быть как булевой переменной: 1 – наличие скидки, 0 – ее отсутствие для i-го агента; так и непрерывной – размер скидки) для множества n агентов с предикатом $X_i = 1$, если агент i купил товар и $X_i = 0$ иначе. Предположим, что товар описывается следующим множеством атрибутов: $Y = \{Y_1, …, Y_m\}$. У каждого агента i существует множество соседей N_i, которые прямо влияют на X_i, определяя тем самым сеть агентов. В свою очередь i-ый агент влияет на своих соседей.

Пусть задана стоимость c маркетинга в расчете на одного агента; выручка $r\,v_1$ от продажи товара агенту, если для него была проведена маркетинговая акция; выручка $r\,v_0$ от продажи продукта агенту, если маркетинговая акция не была проведена. Если маркетинговая акция включает скидку, то $rv_1 < rv_0$, иначе $rv_1 = rv_0$. Для простоты пусть MA – булев вектор.

Пусть $f_i^1(\mathrm{MA})$ – множество-результат установки $\mathrm{MA_i}$ в 1 (все остальные значения неизменны), аналогично определяется для $f_i^0(\mathrm{MA})$. Тогда ожидаемое повышение прибыли от маркетинговой акции для агента без учета ее эффекта на других агентов, то есть ожидаемая прибыль от продажи (*intrinsic value of customer*):

$$ELP_i\left(\mathrm{X}^k, \mathrm{Y}, \mathrm{MA}\right) = rv_1 P\left(X_i = 1 \middle| \mathrm{X}^k, \mathrm{Y}, f_i^1(\mathrm{MA})\right) - rv_0 P\left(X_i = 1 \middle| \mathrm{X}^k, \mathrm{Y}, f_i^0(\mathrm{MA})\right) - c,$$

где X^k – множество агентов, значения которых известны (про которых известно, купили ли они товар), $P\left(X_i \middle| \mathrm{X}^k, \mathrm{Y}, \mathrm{MA}\right)$ – условная вероятность покупки товара *i*-ым агентом.

Тогда ожидаемое повышение прибыли от маркетинговых акций для выбранных агентов составит:

$$ELP\left(\mathrm{X}^k, \mathrm{Y}, \mathrm{MA}\right) = \sum_{i=1}^{n} rv_i P\left(X_i = 1 \middle| \mathrm{X}^k, \mathrm{Y}, \mathrm{MA}\right) - \sum_{i=1}^{n} rv_0 P\left(X_i = 1 \middle| \mathrm{X}^k, \mathrm{Y}, \mathrm{MA}_0\right) - |\mathrm{MA}|\, c$$

где MA_0 – нулевой вектор, $rv_i = rv_1$, если $\mathrm{MA}_i = 1$ (иначе $rv_i = rv_0$), |MA| – число выбранных агентов.

Общей ценностью агента в сети (total value of customer = network value of customer + intrinsic value of customer) будет $ELP\left(\mathrm{X}^k, \mathrm{Y}, f_i^1(\mathrm{MA})\right) - ELP\left(\mathrm{X}^k, \mathrm{Y}, f_i^0(\mathrm{MA})\right)$ (то есть, значение *MA* уже для других агентов изменится и может повлиять на их вероятность покупки). Тогда *сетевая ценность агента* (network value of customer) есть разница между его общей и личной ценностью (network value of customer = total value of customer – intrinsic value of customer). Как видно, значение ценности зависит от того, проведены ли акции для других агентов, и купили ли товар другие агенты.

Вернемся к проблеме определения *k* самых влиятельных узлов в социальной сети. Очевидно, для их нахождения в данном случае следует найти такое MA, которое максимизирует ELP. В общем случае нахождение оптимального MA требует перебора его всех возможных комбинаций. Возможны следующие аппроксимирующие процедуры, дающие приближенное решение:

1) Одиночный обход. Для *i*-го агента проводится акция $\mathrm{MA_i} = 1$, если $ELP\left(\mathrm{X}^k, \mathrm{Y}, f_i^1(\mathrm{MA}_0)\right) > 0$;

2) Жадный алгоритм. Установим $\mathrm{MA} = \mathrm{MA}_0$. Необходимо обойти в цикле $\mathrm{MA_i}$, устанавливая значение в единицу, если

$$ELP\left(\mathrm{X}^k, \mathrm{Y}, f_i^1(\mathrm{MA})\right) > ELP\left(\mathrm{X}^k, \mathrm{Y}, \mathrm{MA}\right);$$

3) Поиск с восхождением по выпуклой поверхности (hill-climbing search). Установим $\mathrm{MA} = \mathrm{MA}_0$. Установим $\mathrm{MA}_{\mathrm{i}_1} = 1$, где $\mathrm{i}_1 = argmax_i\left(ELP\left(\mathrm{X}^k, \mathrm{Y}, f_i^1(\mathrm{MA})\right)\right)$. Повторять, пока суще-

ствует i-ый агент, установка для которого $\mathrm{MA_i} = 1$ приводит к увеличению *ELP*.

Максимизация влияния в базовых моделях распространения нововведений. В [64] рассматривается проблема максимизации влияния на примере следующих двух базовых моделей распространения нововведений: линейная пороговая модель (см. выше) и *модель независимых каскадов*, в которой имеется начальное множество активных агентов A_0, и в некоторый момент времени новый активный агент получает шанс активировать своих соседей с вероятностью p_{vw}, которые в случае успеха активируются на следующем шаге, и так до тех пор, пока возможны новые активации.

Проблема максимизации влияния. Влияние $\sigma(A)$ множества агентов A авторы [64] определяют как ожидаемое число активных агентов при завершении процесса распространения нововведений, инициированных агентами из множества A. Для обеих моделей (линейного порога и независимых каскадов) возникает NP-трудная задача: при заданном параметре k найти k-элементное множество A, максимизирующее $\sigma(A)$. Авторы [64] находят аппроксимирующий алгоритм для решения проблемы максимизации влияния. Поскольку проблема максимизации влияния схожа с известной задачей максимизации субмодулярных функций[7], для которой достигнуты определенные результаты [74], то для соответствующего применения алгоритма необходимо лишь доказать, что $\sigma(A)$ является субмодулярной функцией, что и удалось сделать авторам [64].

Обобщенная пороговая модель. Решение агента об активации определяется монотонной пороговой функцией $f_v : S \subseteq N_v \to [0,1]$, где N_v – множество соседей v и

[7] *Субмодулярная* (submodular) *функция f отображает конечное множество U в неотрицательные действительные числа и удовлетворяет естественному свойству «сокращающихся доходов» (предельный доход от добавления элемента к множеству S, по крайней мере, столь же высок как предельный доход от добавления того же элемента в любое множество, включающее S). Субмодулярная функция монотонна.*

$f_v(\varnothing)=0$. Каждый агент изначально выбирает равномерно случайно порог q_v и становится активным, если $f_v(S)\geq q_v$.

Обобщенная модель каскадов. Вероятность $p_v(u,S)$ того, что агент u активирует агента v, зависит от множества S агентов, уже безуспешно пытавшихся активировать агента v. На модель накладывается ограничение: если соседи $u_1, ..., u_l$ пытаются активировать v, то вероятность того, что v станет активным после l попыток, не зависит от порядка попыток активации. В [64] для обобщенной модели каскадов получены условия ее эквивалентности обобщенной пороговой модели.

Обобщенные маркетинговые стратегии. Пусть имеются m различных маркетинговых действий $M_1, \dots, M_m$, каждое из которых может повлиять на некоторое подмножество агентов социальной сети, увеличивая их вероятность активации. То есть, начальное множество активных агентов A_0 не определено. Выбирается объем инвестиций x_i в каждое маркетинговое действие, ограниченный в общем бюджетом. Маркетинговая стратегия – вектор $\boldsymbol{x} = \{x_1, ..., x_m\}$. Вероятность $h_v(\mathbf{x})$ того, что агент v станет активным, определяется стратегией x. Функция $h_v(\cdot)$ – неубывающая и обладает свойством «*сокращающихся доходов*», то есть

$$\forall \mathbf{x} \geq \mathbf{y}\ \forall \mathbf{a} \geq \mathbf{0}\ \ h_v(\mathbf{x}+\mathbf{a})-h_v(\mathbf{x}) \leq h_v(\mathbf{y}+\mathbf{a})-h_v(\mathbf{y}).$$

Результирующее ожидаемое количество активных агентов в таком случае (учитывая прямой маркетинг и последующее влияние) равно

$$EG(\mathbf{x}) = \sum_{A\subseteq V} s\ (A)\prod_{u\in A} h_u(\mathbf{x})\prod_{v\notin A}[1-h_v(\mathbf{x})].$$

Для того чтобы приближенно максимизировать этот функционал, предполагается, что можно оценить $EG(x)$ в каждой точке $\boldsymbol{x}$ и можно найти направление i с приближенно максимальным градиентом. Пусть e_i – единичный вектор оси i, а δ – константа. Предполагается, что существует $\gamma \leq 1$ такое, что можно найти i, для которого $EG(\mathbf{x}+de_i)-EG(\mathbf{x}) \geq g\ (EG(\mathbf{x}+de_j)-EG(\mathbf{x}))$ для любого j. Тогда, поделив бюджет k на части размером δ, на каждом шаге (всего таких частей k / δ) можно инвестировать δ средств из бюджета в M_i, которое максимизирует градиент $EG(\cdot)$.

Конкурирующие инновации. В [38] рассматривается проблема максимизации влияния для случая двух конкурирующих нововведений A и B (существуют игрок A и игрок B) для модели независимых каскадов. Соответственно, агент в сети, представленной графом $G(V, E)$, может находиться в трех состояниях A (принятие нововведения A), B (принятие нововведения B) и C (решение еще не принято). Агент может перейти из состояния C в любое другое и только. Начальные непересекающиеся активные множества узлов соответственно I_A и I_B ($I_A \cup I_B = I$). Задача максимизации влияния рассматривается для игрока A. Формально нужно максимизировать $f(I_A| I_B)$ – ожидаемое число агентов, которые выберут нововведение A, при заданном I_B с помощью выбора I_A.

Предлагаются две расширенные по отношению к модели независимых каскадов модели:

1) *Модель, основанная на расстоянии* (distance-based), в которой агент принимает соответствующее нововведение от «ближайшего» активированного агента из I.

2) *Волновая модель*. Нововведение распространяется по шагам. Агент, не являющийся активным на предыдущем шаге, активируется на текущем шаге, выбирая равномерно случайно одного из соседей, находящихся на расстоянии, пропорциональном номеру шага.

В [38] утверждается, что функции субмодулярны, монотонны и неотрицательны, поэтому найдены аппроксимирующие алгоритмы для вычисления множества I_A. Отмечается, что перспективным является вычисление равновесия Нэша и рассмотрение игры Штакельберга.

Модель голосования. В [46] рассматривается проблема максимизации влияния на примере вероятностной модели голосования (voter model). В модели голосования (принадлежащей к классу моделей «систем взаимодействующих частиц» – Interacting Particle Systems) на каждом шаге каждый агент может изменить свое мнение, случайно выбрав одного из соседей и приняв его мнение. Эта модель похожа на пороговую модель в том смысле, что агент с большей вероятностью изменит свое мнение на мнение, поддерживаемое большинством его соседей. Однако в модели голосования, в отличие от модели порогов, агент может стать неактивным.

Социальная сеть представлена неориентированным графом с петлями $G(V, E)$. Каждый узел v имеет множество соседей $N(v)$, он произвольно инициализируются (ему приписывается значение 1 или 0). В каждый момент времени каждый узел выбирает равномерно случайно одного из соседей и принимает его мнение:

$$f_{t+1}(v) = \begin{cases} 1, \text{ с вероятностью } \dfrac{|\{u \in N(v): f_t(u) = 1\}|}{|N(v)|}, \\ 0, \text{ с вероятностью } \dfrac{|\{u \in N(v): f_t(u) = 0\}|}{|N(v)|}. \end{cases}$$

Бюджет ограничен сверху константой B, затраты на начальное «убеждение» $f_0(v) = 1$ агента v составляют c_v. Таким образом, проблема максимизации влияния формулируется следующим образом: найти f_0: $V \to \{0; 1\}$, максимизирующее математическое ожидание $E[\sum_{v\in V} f_t(v)]$ при заданном ограничении бюджета $\sum_{\{v \mid f0(v) = 1\}} c_v \le B$.

3. Обнаружение каскадов распространения влияния

Часто (например, в области информационной безопасности) необходимо как можно раньше обнаружить каскады распространения в социальной сети. Для этого отслеживаются состояния небольшой части узлов социальной сети. Проблема состоит в том, как определить это множество узлов (так называемых *сенсоров*) A. Выигрыш зависит от минимального времени обнаружения, числа обнаруженных каскадов, числа «зараженных» узлов, а затраты зависят от свойств выбранных узлов.

В статье [68] социальная сеть представлена графом $G(V, E)$, задан бюджет B для сенсоров и доступны данные о распространении каскада по сети (для каждого каскада, инициированного в узле i, известно время $T(i, u)$, за которое он дойдет до узла u). Выбирается подмножество A для максимизации ожидаемого выигрыша:

$$\max_{A \subseteq V} R(A) \equiv \sum_i P(i) R_i(T(i, A)),$$

где $T(i, A)$ – минимальное время обнаружения одним из сенсоров из A каскада i, P – вероятностное распределение каскадов (по «типам» – узлам возникновения), $R_i(T(i, A))$ – выигрыш от обнаружения каскада i в момент времен $T(i, A)$, затраты $c(A) = \sum_{a \in A} c(a) \le B$.

Как показано в [68], функции выигрыша субмодулярны (то есть, чем больше сенсоров, тем меньше маржинальная выгода). Следовательно, для нахождения множества A можно применять алгоритмы, предложенные в [74].

В заключение настоящего подраздела необходимо отметить, что большинство из рассмотренных выше моделей влияния являются имитационными и используемые в них подходы традиционны для имитационного моделирования и близки к моделям коллективного поведения (см. [3, 18, 24, 27]) и эволюционных игр (см., например, обзор в [6]).

4. Другие модели влияния

В настоящем разделе рассматривается ряд моделей влияния, базирующихся на аналогиях с медициной, физикой и другими разделами науки.

Модели просачивания и заражения. *Модели просачивания* (percolation) и *заражения* (contagion), используемые в различных приложениях – от моделей эпидемий до исследования нефтяных месторождений, представляют собой популярный способ изучения распространения информации (инноваций). Классическая модель распространения *эпидемии* основана на следующем цикле заболевания носителя: первоначально человек восприимчив к заболеванию (Susceptible); если он входит в контакт с инфицированным, то заражается (Infected & Infectious) с некоторой вероятностью β; впоследствии через некоторый период времени человек становится здоровым, приобретая иммунитет, или умирает (Recovered/Removed); иммунитет со временем снижается, и человек снова становится восприимчивым к болезни (Susceptible).

В модели SIR (по первым буквам трех этапов цикла заболевания) [31] выздоровевший становится невосприимчивым к болезни: S → I → R. Соответственно общество представляется тремя группами: $S(t)$ – группа людей, еще не инфицированных или восприимчивых к болезни в момент времени t; $I(t)$ – группа инфицированных людей; $R(t)$ – группа выздоровевших людей. Пусть $N = \mathrm{Const} = S(t) + I(t) + R(t)$. Динамика следующая: $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -b\mathrm{N}\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{N}}\mathrm{I} = -b\mathrm{S}I$, то есть, каждый из инфицированных в единицу времени, контактируя с восприимчивыми к болезни, заражает их с вероятностью β; $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = g\mathrm{I}$, инфицированные выздоравливают через средний период времени $1/\gamma$; соответственно: $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = b\mathrm{S}I - g\mathrm{I}$.

Существуют и другие аналогичные более сложные модели, в частности, в модели SIRS выздоровевший становится восприимчивым к болезни через некоторое время. Можно привести пример гриппа, или пример с распространением информации в социальной сети: блоггер (человек, который ведет *блог* – сетевой дневник) может прочитать блог друга (восприимчив), посвященный некоторой теме, а затем может и сам написать об этой теме (инфицирован), и позже вернуться к ней (восприимчив).

Для социальных сетей ключевым показателем является «*эпидемический порог*» λc – критическая вероятность заражения соседа, при превышении которой «инфекция» распространяется по всей сети. Эпидемический порог зависит от свойств графа социальной сети, например: числа вершин, распределения связей, коэффициента кластеризации. Поэтому распространение инфекции сильно зависит от выбранной модели представления графа сети.

Если социальную сеть представить случайным графом, то инфекция с вероятностью заражения выше порога экспоненциально быстро размножается $\lambda = \beta / \gamma > \lambda c$; инфекция с вероятностью заражения ниже порога экспоненциально быстро «вымирает».

Более реалистичной моделью социальной сети является *безмасштабный граф*, в котором некоторые вершины связаны с тысячами и даже миллионами других вершин, в большинстве своем имеющих всего по нескольку связей (то есть, отсутствует характерный масштаб). В таком графе распределение количества связей узлов описывается степенным законом [2]. Анализ распространения компьютерных вирусов в безмасштабных сетях показал, что в них эпидемический порог отсутствует – эпидемия охватит всю сеть, если возникнет инфекция [82]. Однако в блогосфере многие обсуждаемые темы могут распространяться без возникновения эпидемий, поэтому порог все же отличен от нуля, следовательно, нужна или более адекватная модель сетей со степенным распределением (то есть, необходимо учесть более «тонкие» свойства таких сетей, например, коэффициент кластеризации [44]) или нужно модифицировать модель передачи инфекции (то есть, ослаблять вероятность заражения с увеличением «дистанции от инициатора» [93]).

Модель Изинга – математическая модель, описывающая возникновение намагничивания материала [16]. Учитывается взаимодействие только ближайших атомов-соседей в кристаллической решетке, энергия взаимодействия $E_{ij} = -J\,(s_i\, s_j)$, где s – спин атома, равный +/-1, J – константа обменного взаимодействия. Полная энергия E может быть найдена суммированием по всей решетке $E(S) = -J\sum_{i\sim j} S_i S_j$. В случае наличия внешнего поля h $E(S) = -J\sum_{i\sim j} S_i S_j + h\sum_{i} S_i$.

Для ферромагнетика константа обменного взаимодействия $J > 0$, и энергия минимальна для спинов, направленных в одну сторону. Энтропия минимальна в упорядоченном состоянии (при минимальной энергии) и быстро растет с ростом энергии. При температуре ниже критической большая часть спинов атомов будет ориентирована одинаково (с вероятностью близкой к единице), при более высокой температуре ориентация спинов будет случайной.

В [88] предполагается, что конформность или независимость в большой социальной группе может моделироваться с помощью модели Изинга; влияние ближайших соседей является определяющим, а аналогом температуры является готовность группы мыслить творчески, готовность принять новые идеи. Внешним полем для социальной группы является влияние «авторитета». Несколько боле сложные модели Изинга, описывающие социальные сети, рассматривались в [3].

Модели на основе клеточных автоматов. Для описания процессов распространения информации в социальной сети, последнюю можно рассматривать как сложную адаптивную систему, то есть, систему, состоящую из большого количества агентов, взаимодействие между которыми приводит к масштабному, коллективному поведению, которое трудно предсказать и анализировать. Для моделирования и анализа таких сложных систем иногда используются клеточные автоматы. Клеточный автомат (см., например, [86]) состоит из набора объектов (в данном случае агентов), обычно образующих регулярную решетку. Состояние отдельно взятого агента в каждый дискретный момент времени характеризуется некоторой переменной. Рассматриваемые состояния объекта синхронно изменяются через дискретные интервалы времени в соответствии с неизменными локальными вероятностными правилами, которые могут зависеть от состояния переменных, описывающих ближайших соседних агентов в *окрестности* данного *агента*, а также возможно, от состояния самого агента.

В работе [52] моделируется эффект «*из уст в уста*» в распространении информации в социальных сетях. Каждый агент в большой сети относится к одной персональной сети, агенты в которой связаны *сильными* (стабильными и постоянными) *связями*. Агент также имеет *слабые связи* с агентами из других персональных сетей (о слабых и сильных связях см. [54]). Вероятность того, что информированный агент повлияет по сильной связи на неинформированного агента (то есть, последний станет информированным) в данный период времени равна β_s, а по слабой – β_w ($\beta_s > \beta_w$). Также неинформированные агенты в данный момент времени с вероятностью α (которая меньше вероятности, достигаемой посредством эффекта «из уст в уста», согласно эмпирическим данным [37]) становятся информированными благодаря рекламе и другим маркетинговым приемам.

Итак, в момент времени t неинформированный агент, имеющий m сильных связей с информированными агентами из его персональной сети и j слабых связей с информированными агентами из других персональных сетей, станет информированным с вероятностью:

$$p(t) = (1-(1-a)(1-b_w)^j(1-b_s)^m).$$

В [52] предлагается использовать вероятностный клеточный автомат со следующим алгоритмом:

1. Первоначально все агенты не информированы (значение 0);

2. В начальный момент времени агенты становятся информированными благодаря рекламе, поскольку распространение информации способом «из уст в уста» требует наличия информированных агентов. Для каждого агента датчиком случайных чисел генерируется случайное число U ($0 < U < 1$), которое сравнивается с вероятностью $p(t)$ реализации информированности. Если $U < p(t)$, то агент станет информированным (значение 1).

3. В следующие моменты времени подключается эффект «из уст в уста» (сильные и слабые связи). Опять-таки, если $U < p(t)$, то агент станет информированным (значение 1).

4. Процесс повторяется, пока 95 % агентов не станут информированными.

Для имитационного эксперимента в [52] задавались следующие параметры: размер каждой персональной сети, число слабых связей для каждого агента, вероятность β_s, вероятность β_w и α. Как оказалось, хотя вероятность распространения по слабым связям ниже, но влияние слабых связей на скорость распространения информации, по крайней мере, такое же, как и сильных связей. В начальной фазе («early informed») большее влияние в информировании агентов имеет реклама (см. выше, в дальнейшем ее роль незначительна), в следующей фазе («middle informed») информация распространяется в персональных сетях благодаря сильным связям; по мере того как информированных агентов в таких сетях становится больше, эффект сильных связей ослабляется, и возрастает роль слабых связей в активации новых сетей. При увеличении размера персональной сети роль сильных связей увеличивается, а слабых – уменьшается. При увеличении количества слабых связей, эффект от сильных связей снижается, а от слабых – увеличивается. При увеличении рекламы, эффект от сильных связей немного увеличивается, а от слабых – уменьшается.

Цепи Маркова. В статье [0] представлена модель *цепей Маркова*, в которой изучается влияние в команде (группе агентов). Предлагаемая модель является динамической байесовой сетью (Dynamic Bayesian Network – DBN) с двухуровневой структурой: уровнем индивидов (моделируются действия каждого агента) и уровнем группы (моделируются действия группы в целом). Всего имеются N агентов; i-ый агент в момент времени t находится в состоянии S_t^i, которое зависит от предыдущего состояния агента и состояния команды $P(S_t^i \mid S_{t-1}^i S_{t-1}^G)$, и предпринимает действие O_t^i с условной вероятностью $P(O_t^i \mid S_t^i)$. Команда в каждый момент времени t находится в некотором состоянии S_t^G, которое зависит от состояний всех агентов $P(S_t^G \mid S_t^1..S_t^N)$. Таким образом, для N агентов вероятность того, что в некоторый момент времени T они будут находиться в совокупном состоянии S и предпримут совокупное действие O:

(1)
$$P(S,O) = \prod_{i=1}^{N} P(S_1^i) \prod_{i=1}^{N} \prod_{t=1}^{T} P(O_t^i \mid S_t^i) \prod_{t=1}^{T} P(S_t^G \mid S_t^1..S_t^N) \prod_{t=2}^{T} \prod_{i=1}^{N} P(S_t^i \mid S_{t-1}^i S_{t-1}^G)$$

Если ввести переменную Q, определяющую состояние группы, и предположить, что:

а) она не зависит от состояний других агентов,

б) при значении $Q = i$ состояние группы S_t^G зависит только от состояния i-го агента S_t^i, то $P(S_t^G \mid S_t^1..S_t^N)$ можно записать как $\sum_{i=1}^{N} P(Q=i)P(S_t^G \mid S_t^i) = \sum_{i=1}^{N} a_i P(S_t^G \mid S_t^i)$, где α_i – влияние i-го агента на состояние группы.

Введем переменную $z_{j,t}$, которая имеет значение 1, если $S_t = j$, и 0 – иначе. Если прологарифмировать получившееся выражение (1):

$$logP(S,O) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j}^{N_S} z_{j,1}^{i} logP(S_1^i = j) + \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_S} z_{j,1}^{i} \log\left(P\left(O_t^i \mid S_t^i = j\right)\right)$$

$$+\sum_{t=2}^{T}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_S}\sum_{k=1}^{N_S}\sum_{g=1}^{N_G} z_{j,t}^{i} z_{j,t-1}^{i} z_{g,t-1}^{G} log\mathrm{P}(S_t^i = j \mid S_{t-1}^i = k, S_{t-1}^G = g)$$

$$+\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{N_S}\sum_{g=1}^{N_G} z_{g,t}^{G} z_{k,t}^{i} log(\sum_{i=1}^{N} a_i P(S_t^G = j \mid S_t^i = k)),$$

то получим, что первое слагаемое – начальная вероятность, второе слагаемое – вероятность действия в данном состоянии, третье слагаемое – влияние группы на переходы агентов из одного состояние в другое, четвертое слагаемое – влияние агента на группу.

Описанная двухуровневая модель влияния тесно связана с рядом других моделей: Mixed-memory Markov Model (MMM) [85], Coupled Hidden Markov Models (CHMM) [76], модели влияния и деревья динамических систем (DST – Dynamical Systems Trees) [58]. MMM декомпозирует сложную модель, например, марковскую модель Маркова k-го порядка следующим образом: $P\left(S_t \middle| S_{t-1}S_{t-2}..S_{t-K}\right) = \sum_{i=1}^{K} a_i P(S_t \mid S_{t-i})$. В модели CHMM моделируется взаимодействие нескольких цепей Маркова прямой связью текущего состояния одного потока с предыдущими состояниями всех других потоков: $P\left(S_t^i \middle| S_{t-1}^1 S_{t-1}^2 .. S_{t-1}^N\right)$, однако такая модель вычислительно сложна, поэтому ее упрощают следующим образом: $P\left(S_t^i \middle| S_{t-1}^1 S_{t-1}^2 .. S_{t-1}^N\right) = \sum_{j=1}^N a_{ji} P(S_t^i \mid S_{t-1}^j)$, где a_{ji} – влияние *j*-го агента на *i*-го. Предлагаемая модель расширяет эти модели, используя переменную S^G уровня группы, которая позволяет моделировать влияние между всеми агентами и командой $P(S_t^G \mid S_t^1 .. S_t^N) = \sum_{i=1}^N a_i P(S_t^G \mid S_t^i)$ и дополнительно устанавливает динамику каждого агента от состояния команды $P(S_t^i \mid S_{t-1}^i S_{t-1}^G)$. Деревья динамических систем имеют структуру дерева, которая моделирует интерактивные процессы через скрытые цепи Маркова. Есть два различия между DST и рассмотренной выше моделью [0]: в DST родитель имеет собственную цепочку Маркова, в то время как в данной модели текущее состояние команды прямо не зависит от ее предыдущего состояния (то есть, действие группы – это агрегированное действие агентов); кроме того, в модели [0] как команда влияет на агентов, так и агенты влияют на команду.

Авторы [0] выдвигают гипотезу, что предложенный ими подход к многоуровневому влиянию послужит средством анализа социальной динамики для выявления шаблонов возникающего группового поведения.

5. Индексы влияния

В социальной сети иногда важно определить влиятельность агента, количественной характеристикой которой является индекс «силы» или индекс влиятельности агента.

Индексы «силы» (decisional power indexes) **и индексы влияния.** В работе [53] изучается следующая модель влияния в социальной сети. Перед агентами группы стоит необходимость принять или отвергнуть некоторое предложение (например, проголосовать за некоторого кандидата на выборах). Предполагается, что агент изначально имеет предрасположенность к некоторому решению (да – «+1» или нет – «-1»), однако из-за влияния других агентов может принять иное итоговое решение. Иногда для оценки воздействия (decisional power) *k*-го агента на решение всей группы используется *индекс Хёде-Баккера* (***Hoede-Bakker***) [57]:

$$HB_k\left(B,Gd\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{\{i|i_k=+1\}} gd(Bi),$$

где N – множество из n агентов; $i\in I$ – вектор предрасположенностей/намерений этих агентов; а $B:I\to I$ – функция влияния, которая отображает вектор намерений в итоговый вектор решений; $gd:B(I)\to\{+1,-1\}$ – функция группового решения. Содержательно индекс Хёде-Баккера означает меру соответствия решений группы намерениям агента. Функция влияния может быть основана на принципе большинства (когда агент принимает решение на основе намерения, поддерживаемого большинством агентов), либо может быть основана на ключевой роли экспертов (агенты поступают согласно известному намерению признанного «гуру»/эксперта) и т.п.

В работе [84] предложено следующее обобщение индекса Хёде-Баккера:

$$GHB_k\left(B,Gd\right)=\frac{1}{2^n}\Big(\sum_{\{i|i_k=+1\}} gd\left(Bi\right)-\sum_{\{i|i_k=-1\}} gd\left(Bi\right)\Big).$$

Определим «Успех» (success), «Неудачу» (failure) и «Авторитетность» (решающую роль, decisiveness) агента. Если решение группы совпадает с намерением агента, то он успешен. Если предположить, что векторы намерений равновероятны, то обобщенный индекс Хёде-Баккера представляет собой «чистый» успех, то есть, он равен «Авторитетность = Успех – Неудача», где Авторитетность, Успех и Неудача представляют собой вероятности того, что агент соответственно будет играть решающую роль, успешен, неудачен. Если успешный агент определяется как агент, намерению которого соответствует решение группы, и векторы намерений равновероятны, то обобщенный индекс Hoede-Bakker совпадает с абсолютным *индексом Банцафа* [84]:

$$PB_k\left(W\right)=\sum_{R:k\in R\in W.\ R\setminus\{k\}\notin W}\frac{1}{2^n}+\sum_{R:k\notin R\notin W.\ R\cup\{k\}\in W}\frac{1}{2^n},$$

где R – такой вектор, в котором агенты из множества R принимают решение принять предложение (значение соответствующей компоненты вектора равно «+1»), а остальные отклоняют предложение (значение равно «-1»). W – множество векторов, которые ведут к принятию предложения (+1) группой согласно некоторому заданному правилу.

Недостаток индекса Hoede-Bakker заключается в том, что он не измеряет влияние между агентами (неясно каков эффект функции влияния $B(\cdot)$), а показывает только отношение между исходным вектором намерений и итоговым решением группы [57]. Поэтому авторы [57] вводят семейство индексов влияния для агентов и их коалиций, имеющее обобщенную форму:

$$d_a(B, S \to j) = \frac{\sum_{i \in I^*_{S \to j}(B)} a_i^{S \to j}}{\sum_{i \in I_{S \to j}} a_i^{S \to j}} \in [0,1].$$

Величина d_a показывает взвешенный индекс влияния множества агентов S на j-го агента, не входящего в это множество; $I_{S \to j}$ – множество всех векторов намерений, для каждого из которых существует потенциальная возможность влияния коалиции S на изменение итогового решения агента j (то есть, это такой вектор I, для которого намерения коалиции и агента противоположны); $I^*_{S \to j}(B)$ – множество всех векторов намерений; для каждого вектора i итоговое решение j-го агента $(Bi)_k$ соответствует намерению коалиции S. Поскольку на изменение решения агента j могут повлиять и другие агенты из $N \setminus \{S \cup j\}$ (как и их различные коалиции), с тем же намерением, что и агенты из S, то вводятся весовые коэффициенты $a_i^{S \to j}$ для S. Для индекса равномерно распределенного влияния (equidistributed influence index) коэффициент для каждого вектора намерений i:

$$a_i^{S\to j} = \frac{1}{\textit{число всех возможных коалиций агентов, намерения которых совпадают с } S}$$

$$= \frac{1}{2^{\textit{количество агентов (за исключением } j\textit{), намерение которых совпадает с намерением коалиции } S} - 1}$$

$$= \frac{1}{2^{\left|\{m \in N \setminus j | i_m = i_S\}\right|} - 1}$$

.

Авторы [53] дополнительно вводят следующие понятия: *последователи* (followers) – агенты, решения которых всегда совпадают с намерениями агентов из множества S в тех случаях, когда намерения агентов S совпадают (они образуют коалицию); *функция чистого влияния* $B(\cdot)$ множества агентов S на T – такая функция, в которой агенты из T принимают решения исходя из намерений агентов множества S в тех случаях, когда намерения агентов S совпадают, а остальные агенты принимают решения согласно своим первоначальным намерениям; *ядро функции влияния* $B(\cdot)$ – множество таких множеств агентов S, подмножества которых не имеют последователей.

В заключение настоящего раздела отметим, что в теории принятия решений на сегодняшний день исследованы множество моделей определения индексов влияния (см., например, обзоры в [47, 1]). Их применение к социальным сетям представляется перспективным направлением дальнейших исследований.

ЧАСТЬ 2. ОБЩЕЕ ЗНАНИЕ В СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЯХ. ОБЩЕСТВЕННОЕ БЛАГО И КОЛЛЕКТИВНЫЕ ДЕЙСТВИЯ. ИГРЫ НА СЕТЯХ

6. Роль информированности

Рассмотрим агента, входящего в некоторую социальную сеть. Агент информирован о текущей *ситуационной обстановке* (состоянии мира: например, действиях и представлениях других агентов, о параметрах среды – так называемом *состоянии природы* (state of nature) и т.п.). Ситуационная обстановка влияет на имеющийся у агента набор ценностей, установок и представлений, связанных следующим образом: ценности влияют на установки, а те, в свою очередь, приводят к предрасположенности к представлениям того или иного уровня, с предрасположенностями согласована находящаяся «в памяти» агента иерархическая система представлений о мире[8]. Предрасположенность к тем или иным представлениям и ситуационная обстановка (например, действия других агентов) приводят к формированию новых или модификации старых представлений. В соответствии с этими представлениями и установленной целью агент принимает решение и выполняет действие. Результаты действий приводят к изменению как самой ситуационной обстановки, так и внутренних ценностей, установок и представлений.

Представления n-порядка. Взаимные представления. Если рассмотреть представления агента, то важными оказываются также его представления о представлениях других агентов и т.д. (пример представлений второго порядка: агенту А известно то, что агенту В известно то, что С известно p»), поскольку агент перед действием должен предсказать поведение других агентов. Другие агенты соответственно могут иметь свои представления разных порядков (см. обзор и модели взаимных представлений в [26]).

Во многих социальных отношениях, событиях и действиях, участники которых не используют какие-либо явные соглашения и контракты, важны взаимные представления, предполагающие представление агентов об идентичности их представлений (рукопожатие двух агентов предполагает, что и агент А, и агент В предполагают, что оно осуществится, и каждый из них предполагает, что другой предполагает аналогично и т.д. – см. описание *конвенций* в [26, 69]). В [89] выделены следующие два подхода к определению понятия взаимного представления.

---

[8] *Отметим, что термины «ценности», «представления», «установки» и т.п. в современной психологии и в теории мультиагентных систем не синхронизированы и употребляются в собственных пониманиях, зачастую опирающихся на здравый смысл и далеко не всегда формализованных и связанных друг с другом в рамках тех или иных моделей.*

1) *Итеративный подход*. Согласно этому подходу в группе G существует взаимное представление о p, тогда и только тогда, когда: всем агентам из G известно p; всем известно, что всем известно p, и так далее до бесконечности (то есть факт p является *общим знанием* [26] для агентов из G). Данный подход предполагает наличие у агентов представлений таких порядков, которые они могут не иметь на практике или не смогут ими оперировать из-за ограниченности когнитивных возможностей, отсутствия информации и недостатка рациональности (проблема определения *максимальных целесообразных рангов рефлексии* в зарубежной литературе получила название «*level problem*»). Выделяют несколько способов решения данной проблемы (см. также [26]):

а) агент группы может действовать с позиции отсутствия недоверия в суждении p (lack of disbelief, определяется как отсутствие представления агента о $\sim p$);

б) для агентов группы предполагается наличие только предрасположенности к приобретению представлений более высокого порядка; при этом агенты этой группы должны быть должным образом информированы и обладать общими для всех шаблонами рассуждений для вывода одних и тех же заключений.

В обоих случаях агенты должны быть достаточно рациональны, интеллектуальны и при необходимости без каких-либо помех способны приобрести представления более высокого уровня (предпосылкой для такого приобретения может послужить вопрос о представлениях более высокого уровня). Однако часто для успешных действий достаточно представлений второго порядка (но далеко не всегда – см. достаточные условия в [26, 30]).

<u>Пример 1</u> (выполнение совместного действия двумя агентами). Высказывания базового порядка:

1) Агент A выполнит свою часть X, $p(A)$;

2) Агент B выполнит свою часть X, $p(B)$.

Предположим:

i) A верит, что 1) и 2);

ii) B верит, что 1) и 2).

Утверждается [89], что уровень $n = 2$ в данном примере необходим и достаточен для выполнения совместного действия: агент А, очевидно, должен предполагать то, что агент В выполнит свою часть действия, поскольку только в этом случае у него возникнут основания для выполнения собственной части. Агент А должен также предполагать, что агент В предполагает то, что агент А выполнит свою часть работы. В противном случае, у агента А нет достаточных оснований для того, чтобы предполагать то, что В выполнит свою часть работы (т.к. если по предположению агента А агент В не предполагает выполнение агентом А своей части, то он не выполнит свою тоже), а значит, нет оснований для выполнения собственной части. Аналогично для В. Необходимо наличие у агентов представлений следующего порядка:

iii) А предполагает, что i) и ii);

iv) В предполагает, что i) и ii). •[9]

Пример 2. Предположим, что каждому участнику «Общества Плоской Земли» не только известно о том, что Земля является плоской, но и то, что всем участникам известно это (поскольку они состоят в этом обществе). Агенты осознают, что другие агенты в группе предполагают то же самое, и это устанавливает социальную связь между ними, основанную на «вере», но на первом уровне рефлексии такое осознание отсутствует. И вновь второй уровень рефлексии необходим и обычно достаточен для согласованных действий участников общества в вопросах, связанных с формой Земли. Однако кто-то мог бы обнаружить, что все они верят в данное представление второго порядка, и мог бы задаться вопросом о представлениях третьего порядка и т.п. •

Отметим, что не все социальные понятия зависят от взаимного представления: скрытое социальное влияние и власть не требуют этого.

2) «*Рефлексивный подход*». В группе G существует взаимное представление о p тогда и только тогда, когда все в группе предполагают p, и все предполагают, что в группе G существует

[9] *Символ «•» здесь и далее обозначает окончание примера.*

взаимное представление о *p*. Данное представление соответствует второму уровню рефлексии [26].

Взаимное представление как общее (*shared*) *«мы-представление»*. «Мы-представление» агента – это такое представление агента о *p*, что:

(a) каждый агент имеет данное представление (требуется, поскольку не может быть общей позиции без всех участников) и предполагает, что

(b) все в группе имеют такое представление (предоставляет социальную причину для того, чтобы принять и иметь такую позицию), а также каждый агент предполагает, что

(c) все предполагают, что есть взаимное представление в смысле (b) (усиливает причину, делая ее межсубъективной).

Общее «мы-представление» предполагает наличие у каждого агента группы «мы-представлений», то есть соответствует третьему уровню рефлексии [26].

С помощью взаимных представлений можно пытаться объяснить коллективное мышление и коллективное действие [24, 30]. Некоторые модели, учитывающие стратегическую и информационную рефлексию членов социальной сети, рассматривались в [10].

7. Общественные блага и индивидуальная специализация

Коллективные действия, общественные блага и координационные игры. В *коллективном действии* важны следующие факторы: информированность, коммуникация и координация. Теория коллективного действия (collective action theory) объясняет широкий круг явлений (общественные движения, электоральное поведение, членство в группах по интересам), связанных с достижением общественных благ посредством согласованного совместного участия двух или более людей. Теория также рассматривает влияние внешних факторов на поведение людей в данной группе.

Как известно, *общественное благо* (public goods) – это благо, характеризующееся:

1) неисключаемостью из потребления, то есть, невозможно исключить из числа потребителей общественного блага тех, кто не платил за него;

2) отсутствием конкуренции при потреблении блага: потребление блага одним субъектом не ведет к сокращению потребления этого блага другими людьми.

Чистое общественное благо – национальная оборона, мосты, общественное мнение, выборы, открытая информационная база данных, система коммуникации и т.д.

Ради достижения одного и того же общественного блага (цель) *коллективное действие* (collective action) совершается двумя или более людьми. Каждый человек решает участвовать (participate) или не участвовать (free riding) в коллективном действии. Поскольку перед каждым участником встает вопрос, готов ли он нести затраты ради достижения общественного блага (то есть, участвовать в коллективном действии), и поскольку для него существует возможность получения выгоды без участия в издержках (если число людей велико, то увеличиваются общественные затраты на выявление «безбилетников» и наложение санкций; если достаточно велико число людей, которые заплатят начальную цену), то возникает затрудненность осуществления взаимовыгодных коллективных действий. То есть возникает так называемая «проблема безбилетника» (free rider problem), широко известная в современной микроэкономической теории (см., например, [20, 71]).

Для того чтобы побудить агентов к предприятию усилий по созданию общественного блага, можно стимулировать их материальными поощрениями, мотивировать альтруизмом, солидарностью, оказывать влияние в рамках тех или иных схем социального влияния. По мнению [19, 77] только *организация* может справиться с затратами на решение этих задач (ей принадлежит ключевая роль в обеспечении взаимодействия, мотивации, коммуникации и координации участников коллективного действия [24, 25]). Или, по крайней мере, потенциально должны существовать латентные группы, то есть, сообщества с общими групповыми интересами в коллективном благе, которые еще не построили организационную структуру для решения коммуникативных и организационных задач, но со структурами лидерства, центрами, где аккумулируются ресурсы и принимаются решения [19].

Однако следует отметить, что развитие информационно-телекоммуникационных технологий (электронной почты, чатов, Интернета, персональных компьютеров, мобильных телефонов) в коллективных действиях во много раз снижает затраты на коммуникацию и координацию [33], а также иногда освобождает от необходимости построения формальной структуры. Если, например, рассматривать общественно полезную информацию как общественное благо, то: при целенаправленном создании информационной базы и построении сообщества на начальном этапе все же требуется координация участников, и возникает «проблема безбилетника»; при нецеленаправленном создании такой базы, когда участники могут и не знать других участников, самостоятельно размещая информацию на общественно доступных ресурсах (форумах, Интернет-страничках), возникает по большей части не *проблема участия*, а *проблема доверия* (см. обзор [8]).

Ситуации с коллективным действием, в которых все стороны могут получить взаимную выгоду, если примут взаимно согласованные решения (проблема координации), часто моделируются координационными играми. *Координационные игры* – класс игр с множественными чистыми равновесиями Нэша, в которых игроки выбирают одинаковые или согласованные стратегии [12, 26, 29, 59, 73]. В рамках настоящей работы нас интересуют коллективные действия агентов в социальных сетях.

Коллективные действия в социальных сетях. Ключевое значение здесь имеют социальные связи. С одной стороны, социальные связи могут обеспечить эффективный локальный социальный контроль для стимулирования участия в коллективном действии (в силу давления со стороны своих соседей, доверия к ним, социального одобрения, необходимости сохранения положительных отношений и соответствия ожиданиям, эмоциональной привязанности, сохранения своей репутации, отождествления себя с соседями и т.п.). Так, например, поведение соседей агента повлияет на его собственное поведение. С другой стороны социальные связи обеспечивают агента информацией о намерениях и действиях других агентов в сети и формируют его (неполные) представления, на основе которых агент принимает свои решения. И, наконец, в пределах социальных связей агенты могут прикладывать совместные усилия по созданию локального общественного блага и пользоваться им. Поэтому структура социальной сети оказывает сильное воздействие на решения агентов о принятии участия в коллективном действии.

Общественные блага в социальных сетях. В статье [35] рассматривается предоставление общественных благ (public goods) в социальной сети, в которой агенты, соединенные связями, могут прикладывать совместные усилия по созданию благ и пользованию ими. По мнению авторов, это может привести к *специализации* в сети в обеспечении общественных благ (см. также обзоры теории *сетевых игр* [11, 61]). В [35] доказано, что существует равновесие, в котором агенты вносят определенный вклад (усилия), а другие пользуются этим. Такая специализация может принести пользу обществу в целом, если вкладчики («специалисты») связаны со многими агентами в сети. Новые связи в сети увеличивают доступность общественного блага, но уменьшают индивидуальные стимулы для приложения усилий (увеличения вклада). Следовательно, общее благосостояние всей сети выше в неполных сетях. В этом смысле для будущих исследований перспективно изучение динамики, процессов формирования социальной сети.

В [35] вводится сетевая модель общественного блага, где фиксирована структура сети (множество агентов $N = \{1, 2, ..., n\}$, связь между агентами i и j задается бинарным значением $r_{ij} = r_{ji}$). i-ый агент выбирает размер e_i своих усилий, вкладываемых в общественное благо, которым смогут воспользоваться все его соседи из множества $N_i = \{ j \in N \setminus i : r_{ij} = 1\}$. Получаемый им выигрыш задается дважды дифференцируемой строго вогнутой функцией выигрыша $bf(\cdot)$, которая зависит от *усилий* (действий) как самого агента e_i, так и усилий его соседей $\bar{e}_i$: $e_i + \sum_{j \in N_i} e_j$. Тогда его функция выигрыша задается вектором усилий агентов $\boldsymbol{e}$ и графом $\boldsymbol{g}$: $U_i(\mathbf{e};\mathbf{g}) = bf\left(e_i + \sum_{j \in N_i} e_j\right) - ce_i$, где c – стоимость единицы усилий.

В [35] рассматривается игра, в которой при заданной структуре сети g агенты одновременно выбирают значения своих усилий так, чтобы максимизировать свои функции выигрыша. Очевидно (исходя из вида игры), что для всех агентов уровень усилий, максимизирующих их целевые функции, одинаков и составляет такое значение e^*, при котором $bf'(e^*) = c$. Вектор e является *равновесным по Нэшу*, если и только если для любого агента i выполняется либо $\bar{e}_i \geq e^*$ и $e_i = 0$ (не прикладывает усилий), либо $\bar{e}_i < e^*$ и $e_i = e^* - \bar{e}_i$ (прикладывает усилия).

Вектор **e** называется *специализированным*, если каждый участник, либо прикладывает максимальные усилия $e_i = e^*$ («специалист»), либо не прикладывает вовсе никаких усилий $e_i = 0$ («неспециалист»). Вектор **e** называется *рассредоточенным*, если каждый агент прикладывает некоторое усилие: $0 < e_i < e^*$.

Оказывается, что специализированный вектор является равновесным по Нэшу, если и только если его множество «специалистов» является максимальным (по вложению) независимым множеством (вершины такого множества не связаны непосредственно) графа g [35]. Так как в каждом графе g существует максимально независимое множество, то всегда существует специализированное равновесие Нэша.

Позитивные и негативные эффекты введения новых связей. С одной стороны, новая связь обеспечивает лучший доступ к общественному благу, а с другой – уменьшает стимулы для приложения агентом собственных усилий. Обозначим $W(\mathbf{e}, \mathbf{g})$ – суммарный выигрыш членов социальной сети **g** при векторе действий **e**. Вектор **e** называется *second-best* (*утилитарный* [20], эффективный по Парето вектор действий агентов), если не существует другого вектора $\mathbf{e}'$ такого что $W(\mathbf{e}'; \mathbf{g}) > W(\mathbf{e}; \mathbf{g})$. Предположим, что **e** существует в графе g, в котором агенты i и j не связаны. Введем новую связь (i, j), тогда: если агент i ранее не прикладывал усилий, то равновесие остается тем же, и, следовательно, $W(\mathbf{e}; \mathbf{g} + \mathbf{i}j) > W(\mathbf{e}; \mathbf{g})$; если же оба агента прикладывали усилия, то равновесие **e** исчезнет, возникнет новое равновесие, и общее благосостояние может уменьшиться.

Для развития полученных результатов авторы [35] вводят в модель следующие изменения:

1) *Несовершенная замена усилий* (усилия самого агента приводят к большему собственному выигрышу, нежели усилия других агентов): $e_i + \delta \sum_{j \in N_i} e_j$, $0 < \delta \le 1$. Если величина δ достаточно мала, то агенты прилагают строго положительные усилия и существует единственное *рассредоточенное* равновесие Нэша (специализации нет). Доказано, что *специализированный вектор* является равновесием, если и только если «неспециалисты» связаны, по крайней мере, с $s = 1/\delta$ «специалистами» из максимального независимого множества.

2) *Выпуклые затраты*. Пусть затраты на усилия $c(e_i)$ – такая возрастающая и выпуклая функция, что $c'(0) > bf'(+\infty)$. В этом случае агентам выгодны совместные усилия. В полном графе существует единственное равновесие с рассредоточенным вектором (все агенты прилагают некоторые усилия). Специализация все же возможна в неполных графах. Усилие e*, максимизирующее целевую функцию, достигается при $bf'(e^*) = c'(e^*)$. Пусть целое s такое, что $bf'(se^*) \le c'(0)$. Доказано, что специализированный вектор является равновесием, если и только если «неспециалисты» связаны, по крайней мере, с s «специалистами» из максимального независимого множества.

3) *Неоднородность агентов*. Предположим, что для каждого агента затраты c_i и выигрыш bf_i свои, также как и свой характерный уровень максимизирующих усилий e_i^*. Вектор **e** является равновесным по Нэшу, если и только если для любого i-го агента выполняется либо $\bar{e}_i \ge e_i^*$ и $e_i = 0$ (агент i не прикладывает усилий) либо $\bar{e}_i < e_i^*$ и $e_i = e_i^* - \bar{e}_i$ (агент i прикладывает усилия). В полном графе (для неполного графа тем более) существует единственное равновесие Нэша, в котором агенты с

высоким уровнем порога прикладывают усилия (то есть, неоднородность приводит к специализации).

8. Коммуникация и координация в социальных сетях

В [39] социальная сеть рассматривается как коммуникационная, посредством которой агенты сообщают друг другу о своей готовности принять участие в коллективном действии. Каждый агент информирован о готовности только своих ближайших соседей и на основе этого локального знания принимает решение об участии, используя правило принятия решений «я приму участие, если примешь участие ты» (*механизм координации*). То есть, рассматривается координационная игра с неполной информированностью. *Коммуникационная сеть* способствует координации, и основной интерес представляет то, каковы свойства таких сетей, которые допускают коллективное действие. В [39] рассматриваются минимально достаточные сети, которые выстраивают агентов в *иерархию социальных ролей*/ступеней: «ведущие» (initial adopters), «последователи» (followers), и так далее до «поздних последователей» (late adopters). Такие сети способствуют координации следующим образом:

1) информируя каждую ступень о более ранних ступенях;

2) формируя общее знание в пределах каждой ступени.

То есть, обеспечивается понимание роли (локально) общего знания в коллективном действии и соотношение между структурой социальной сети и общим знанием.

В модели [39] группа агентов представлена конечным множеством $N = \{1, 2, ..., n\}$. Каждый агент $i \in N$ расположен (w) к участию в коллективном действии или не расположен (x). Множество состояний природы: $\Theta = \{w, x\}^n$. Агент принимает решение об участии $a_i \in \{r, s\}$, r – принять участие или s – не участвовать. Выигрыш агента зависит от действий всех агентов группы и его склонности к участию; функция его полезности $u_i : \{w, x\} \times \{r, s\}^n \to \Re$ обладает следующими свойствами:

1) $u_{\mathrm{i}}(x,a)=\begin{cases}0, \text{если } a_i = r\\ 1, \text{если } a_i = s\end{cases}$, то есть, если агент не расположен к участию, то он всегда предпочтет остаться в стороне;

2) $\forall \mathrm{a}, \mathrm{a}' \in \{r,s\}^n : \mathrm{a}'_{\mathrm{j}} = \mathrm{r} \Rightarrow \mathrm{a}_{\mathrm{j}} = \mathrm{r}$ следует, что

$$u_i(w,r,\mathrm{a}_{N\setminus\{i\}}) - u_i(w,s,\mathrm{a}_{N\setminus\{i\}}) \geq u_{\mathrm{i}}(w,r,\mathrm{a}'_{N\setminus\{i\}}) - u_i(w,s,\mathrm{a}'_{N\setminus\{i\}}),$$

то есть, расположенность агента к участию возрастает с увеличением количества других агентов, которые, как он ожидает, примут участие (функция полезности супермодулярна – см. определение выше).

Однако нужно учесть еще и существование социальной (коммуникационной, в которой социальная связь указывает направление передачи информации) сети. Каждому агенту известно о существовании всех остальных агентов в сети (этот факт – общее знание). Сеть является бинарным отношением $\to$ на N: $j \to i$ означает то, что i-ый агент информирован о намерениях j-го. Агент i информирован только о своих намерениях и намерениях своих соседей $B(\mathrm{i}) = \{ j \in N \mid j \to i \}$. Поэтому, если $q \in \Theta$ – действительное состояние природы, то i-ый агент знает только то, что оно находится во множестве неразличимых для него состояний природы $P_i(q) = \{(q_{B(i)}, f_{N\setminus B(i)}) \mid f_{N\setminus B(i)} \in \{w,x\}^{n-\#B(i)}\}$. Такие множества формируют $\mathrm{F}_{\mathbf{i}} = \{P_i(q)\}_{q\in\Theta}$ *информационное разбиение* возможных состояний природы Θ для i-го агента.

Стратегией для i-го агента является функция $\mathbf{f_i} : \Theta \to \{\mathrm{r}, s\}$ такая, что для любых q, $q' \in \Theta$, если q, $q' \in P \in \mathrm{F}_i$, то $f_i(q) = f_i(q')$. То есть, если два состояния находятся в одном и том же элементе разбиения F_i, то агент i не может различить их и принимает одно и то же решение. Пусть F_i – множество всех стратегий для i-го агента, $F = \Pi_{i\in N} F_i$.

Ожидаемый выигрыш i-го агента для $\mathrm{f} \in \mathrm{F}$: $\mathbf{E}U_{\mathbf{i}}(\mathbf{f}) = \sum_{q\in\Theta} p(q) u_i(q_i, f(q))$, где $p \in \Delta\Theta$ – априорные представления агентов о намерениях друг друга (prior beliefs –

вероятностное распределение на $\{w, x\}^n$), являющиеся в рамках традиции байесовых игр [26, 73] общим знанием среди агентов. Итак, решение агента зависит от его представлений о намерениях всех других агентов и информации от своих соседей.

Вектор f является *равновесием Байеса-Нэша* [73] в игре Г(**à** ,p), если $\forall i \in N, \forall x_i \in F_i (EU_i(f) \geq EU_i(x_i, f_{N \setminus \{i\}}))$. Поскольку функции выигрыша супермодулярны, то можно показать, что равновесие существует всегда.

Минимально достаточные сети. Если все агенты имеют достаточно «оптимистичные» представления, то все агенты примут участие в коллективном действии независимо от структуры коммуникационной сети. Однако, как отмечается в [39], представляет интерес то, какими свойствами должны обладать коммуникационные сети, чтобы вся[10] группа агентов приняла участие в коллективном действии независимо от их априорных представлений. Такие сети были названы достаточными. То есть, *достаточная сеть* – сеть, для которой существует такое равновесие, в котором все агенты выбирают участие в коллективном действии (напомним, что такое возможно, только если все они готовы/желают участвовать) независимо от их априорных представлений.

Существуют достаточные сети, называемые *минимальными*, в которых отсутствуют избыточные коммуникационные связи. Формальное определение таково: сеть **à** минимально достаточная, если она достаточна и для любой достаточной сети **à**’, такой что из $\rightarrow' \subset \rightarrow$ $\rightarrow' \subset \rightarrow$ следует $\rightarrow' = \rightarrow$. То есть, она не содержит в себе меньших достаточных сетей.

Такая минимально достаточная сеть принимает форму иерархии клик. *Клика* – подмножество агентов, в которой каждый непосредственно информирует каждого другого агента, то есть клика сети **à** – множество $M_k \subseteq P$ такое что $\forall i, j \in M_k,\ i \rightarrow j$.

[10] *Хотя, надо сказать, существуют и другие равновесные ситуации, в которых лишь часть игроков принимает участие, и это выгодно для них.*

Любая минимальная достаточная сеть разбивает агентов на клики, и между кликами существует коммуникационная связь только в одном направлении (односторонняя информированность). Поэтому полученная цепочка клик состоит из ведущих клик радикальных агентов, которые информируют клики менее «радикальных» агентов, которые в свою очередь информируют клики еще менее радикальных и так далее.

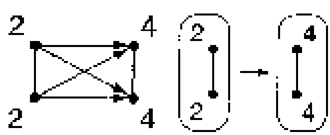
Минимально достаточная сеть распределяет агентов в социально-сетевой иерархии ролей, определенной кликами и их отношением à *: «ведущие» (leading adopters) и «последователи» (followers).

«Игра порогов», локальное общее знание. В [39] рассматривается на примерах частный случай $\Gamma_{e_1..e_n}$ теоретико-игровой модели, в которой i-ый агент принимает решение об участии, если примут участие, по крайней мере, e_i агентов (порог). То есть, его функция выигрыша

$$u_i(w,a)=\begin{cases}1, & \text{если } a_i = r \text{ и } \#\{j\in N : a_j = r\} \geq e_i\\ -1, & \text{если } a_i = r \text{ и } \#\{j\in N : a_j = r\} < e_i\\ 0, & \text{если } a_i = s\end{cases}.$$

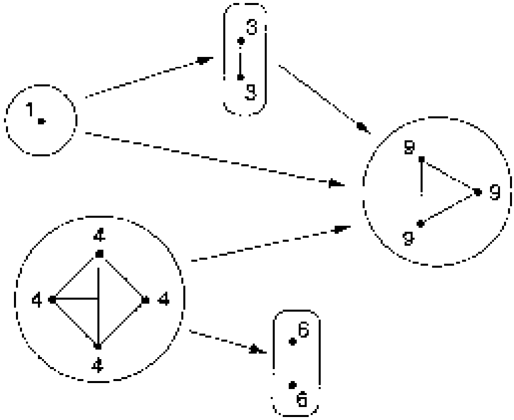
У каждого агента свое значение порога в диапазоне от 1 до $n + 1$. Если порог равен единице, то агент всегда примет участие; если порог равен двум, то агент будет участвовать при условии участия своего соседа и т.д. Агент i знает свой порог и знает пороги только своих ближайших соседей. И, наконец, хотя это явно не отмечено, в [39] подразумевается, что агент знает то, как информированы его соседи друг о друге.

<u>Пример 3.</u> Игра $\Gamma_{2,2,4,4}$.



Агенты со значением порога 2 – клика «ведущих», 4 – клика «последователей». •

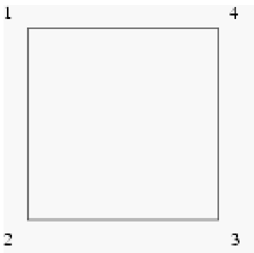
<u>Пример 4.</u> Игра $\Gamma_{1,3,3,4,4,4,4,6,6,9,9,9}$.



Имеются две ведущие клики. Необходимо отметить, что агентам клики со значением 9 необходимо знать о значении порога агента клики со значением 1, поскольку для своего участия они должны быть уверены в участии агентов клики 3.

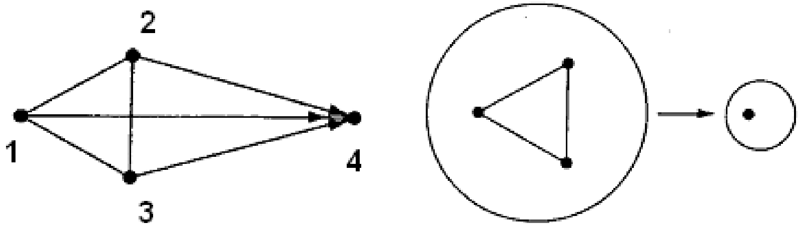
Интересно то, что клики однородны: агенты в них имеют одни и те же значения порогов. Агенты с высоким значением порога находятся на низшем уровне иерархии. •

Пример 5. Игра $\Gamma_{3,3,3,3}$ и представления высокого порядка. Рассмотрим игру $\Gamma_{3,3,3,3}$ («квадрат»), в которой все агенты готовы к участию (числами обозначаются не значения порогов, а номера агентов):



Здесь первый агент знает о том, что второй и четвертый имеют значение порога равное 3. Но он не знает о пороге третьего агента и знает то, что второй не осведомлен о значении порога четвертого агента. Эта неопределенность приводит к тому, что первый агент не будет участвовать в коллективном действии, несмотря на то, что оно потенциально возможно (его порог равен трем и число склонных к участию агентов, как он знает, тоже равно трем). И так для каждого агента, никто не примет участия. Хотя агентов желающих участвовать достаточно и они все по отдельности знают это, но, ни один из агентов не знает, что другие знают это. Этот пример показывает, что знания первого порядка еще недостаточно для принятия решения, для этого необходимо знание более высокого порядка.

Рассмотрим игру $\Gamma_{3,3,3,3}$ с другой структурой (минимально достаточная сеть).



Первый агент знает, что второй и третий агенты имеют значение порога равное 3, и знает, что они знают о значениях порогов друг друга, и знает, что они знают, что он знает о том, что они знают о порогах друг друга, и т.д. (локально общее знание «у всех агентов 1,2,3 порог равен 3»). Аналогично для второго и третьего агента. Этого оказывается достаточно для того, чтобы они приняли участие в коллективном действии, поскольку они знают о готовности друг друга. Четвертому агенту это тоже известно и он примет участие.

Рассматриваемый пример подчеркивает важность того, что структура сети должна быть не просто известна агентам, но быть общим знанием для агентов. То есть, важную роль играют такие структуры как клики, в которых «локально» общее знание (ограниченная частью агентов структура) возникает естественно. Информация о готовности «течет» от «ведущих» клик по цепочке. Агенты знают готовность других агентов, но не их действия. Минимальные достаточные сети – неотъемлемые для игры структуры, интерпретируемые как иерархические социальные роли. Коммуникационные сети способствуют координации следующим образом:

1) информируя каждую ступень о более ранних/предшествующих ступенях;

2) формируя общее знание в пределах каждой ступени (роли). •

О сильных и слабых связях. Интуитивно понятно, что в сети с большим количеством сильных связей сразу формируются небольшие клики из-за симметрии: друзья моих друзей часто оказываются и моими друзьями. Поэтому в них формирование общего знания на локальном уровне происходит быстрее. И, если значения порогов достаточно низки, то есть шансы, что группа, связанная сильной связью, станет ведущей кликой. Однако, если пороги высоки, то локальное общее знание в маленьких кликах останется бесполезным, а большее значение приобретут слабые связи в силу того, что они пересекают общество быстро, ускоряют коммуникацию и усиливают распространение знания, создавая предпосылки для коллективного действия.

9. Социальный контроль и коллективное действие в социальной сети. Стабильность сети.

В статье [62] рассматривается взаимосвязь между механизмами социального контроля, свойствами социальных сетей и коллективным действием (collective action), предпринимаемым для обеспечения общественного блага всего сообщества агентов. Показано, что ключевыми факторами, влияющими на решения агентов сети в рамках конфликта частных и общественных интересов, являются осуществляемые посредством межличностных связей в социальной сети различные виды социального контроля: *бихевиоральное подтверждение* (behavioral confirmation) – следование агента социальным ожиданиям, и *социальные стимулы* (social selective incentives) – дополнительные персональные блага, предоставляемые данному агенту другими агентами.

Принятие коллективного решения моделируется в некооперативной игре (авторы [62] вводят понятие «*структурно обусловленной игры общественного блага*» (structurally embedded public goods game) с однократным взаимодействием, $n > 2$ агентами ($N = \{1, ..., n\}$), где каждый агент принимает решение об участии ($s_i = 1$) или неучастии ($s_i = 0$) в коллективном действии. Участие требует затрат c и приносит дополнительное благо α для всех агентов сети (если $c > \alpha$, то все же участие достаточно большого количества агентов n^* может оказаться «прибыльным»: $\alpha\, n^* > c$). Наличие неориентированной связи между i-ым и j-ым агентами обозначается как $r_{ij} = 1$ (отсутствие – как $r_{ij} = 0$), петли в графе связей отсутствуют, а общее количество связей i-го агента равно $r_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}$. На агента по связям оказывают влияние следующие факторы: бихевиориальные стимулы от соседей, принявших то же решение (аддитивный стимул b_1 и пропорциональный стимул b_2) и социальные избирательные стимулы (s от каждого соседа). Для простоты положим c, $\alpha > 0$ и b_1, b_2, $s \geq 0$. Пусть C – множество агентов, принимающих решение об участии, D – множество «безбилетников». Тогда для i-го агента-участника $r_i = r_{id} + r_{ic}$. И выигрыши от участия/неучастия для i-го агента соответственно следующие (j не равняется i):

(2) $$p_i(s_i = 0) = c + r_{id} b_1 + \frac{r_{id}}{r_i} b_2 + a \sum_{j=1}^{n} s_j,$$

(3) $$p_i(s_i = 1) = r_i s + r_{ic} b_1 + \frac{r_{ic}}{r_i} b_2 + a\,(\sum_{j=1}^{n} s_j + 1).$$

Таким образом, для рационального агента выгоднее участвовать, если

(4) $$r_i s + (r_{ic} - r_{id})(b_1 + \frac{b_2}{r_i}) + a \geq c.$$

Для простоты примем $r_i > 0$, $i \in N$,. Тогда участие в коллективном действии всех агентов будет равновесным по Нэшу, если сеть обладает следующим свойством:

(5) $$\min_i \{r_i\} \geq \frac{c - a - b_2}{s + b_1}.$$

Видно, что нет ни одного агента, для которого неучастие при участии всех соседей было бы выгодно согласно (4). Содержательно это означает, что усиление стимулов, так же как и высокая минимальная степень вершин сети, приводит к повышению вероятности успешности коллективного действия.

Однако в некоторых случаях возможно участие только части агентов сети n^* в коллективном действии, которое будет все же выгодно для участников (если α $n^* > c$) и равновесно по Нэшу в случае, если для непустых множеств C и D:

$$(6)\ \forall i \in C\ \ r_i s + (r_{ic} - r_{id})(b_1 + \frac{b_2}{r_i}) + a \geq c\ ,$$

$$(7)\ \forall j \in D\ \ r_j s + (r_{jc} - r_{jd})(b_1 + \frac{b_2}{r_j}) + a \leq c\ .$$

В том случае, когда возможно несколько равновесий Нэша, то выбирается равновесие, обеспечивающее больший выигрыш для каждого агента нежели какое-либо другое. Если возможны как равновесие Нэша полного участия агентов, так и равновесие Нэша полного неучастия, и число агентов превосходит n^*, то равновесие Нэша с полным участием агентов доминирует. Если есть равновесие Нэша для полного участия и равновесие Нэша для частичного участия, то первое из них доминирует в случае, если из (2) и (3) следует:

$$(8)\ \forall j \in D\ \ n_d a + r_j s + r_{jc}(b_1 + \frac{b_2}{r_j}) > c\ \ .$$

Другими словами, чем меньше «безбилетников» в равновесии Нэша с частичным участием, тем меньше вероятность того, что равновесие полного участия будет доминировать, т.к. шансы «безбилетников» получить больший выигрыш увеличиваются.

Кроме того, в статье [62] обсуждается *возможность формирования и разрыва связей в сети*. Социальная сеть с данным вектором стратегий *стабильна*, если нет ни одного агента, для которого разрыв и/или образования связей привели бы к лучшему для него результату. Пусть заданы стоимость разрыва связи a и стоимость образования новой связи f.

Для «безбилетника» $i \in D$ выгодны структурные изменения связей с образованием y новых с «безбилетниками» и разрывом x старых связей с агентами-участниками, если

(9) $y\, b_1 + b_2 \dfrac{y\, r_{ic} + x\, r_{id}}{r_i (r_i - x + y)} > x\, a + y\, f$.

Для агента-участника $j \in C$ выгодны структурные изменения связей с образованием y новых с агентами участниками и разрывом x старых связей с «безбилетниками», если:

(10) $(y - x)\, s + y\, b_1 + b_2 \dfrac{y\, r_{jd} + x\, r_{jc}}{r_j (r_j - x + y)} > x\, a + y\, f$.

Если образование и разрыв связей ничего не стоят, то стабильной будет только такая сеть, в которой множества C и D полносвязны и не имеют связей между собой.

Равновесие стабильной сети (stable network equilibrium) определяется в [62] как ситуация, в которой не существует агента, для которого любая комбинация изменения его действия и изменения его связей приведет к лучшему результату. Доказывается, что только равновесия с полным участием или полным неучастием являются равновесиями стабильной сети ((s > 0 или b_1 > 0 или b_2 > 0) и ($f = a = 0$)).

Ограничением рассматриваемой модели является то, что связи между агентами не ориентированы, а это приводит к тому, что для агента стимулы, предоставляемые всеми его соседями, равнозначны. Кроме того, рассматриваются только внешние стимулы, «внутренние» (собственные) стимулы агентов отсутствуют. Предполагается также, что агенты рациональны и полностью информированы, что маловероятно в больших сетях. Перспективным представляется ограничить информированность, например, структурно, и/или предположить, что агенты ограниченно рациональны [22, 28].

10. Игры на сетях. Информационное управление в социальных сетях

При рассмотрении моделей, учитывающих информированность агентов, традиционно выделяют три вложенных класса задач: моделирование информационного влияния, информационного управления и информационного противоборства – см. Рис. 3.

Рис. 3. Информационное влияние, управление и противоборство

Модель информационного влияния дает возможность исследовать зависимость поведения субъекта от его информированности и, следовательно, от информационных воздействий. Имея модель информационного влияния, можно ставить и решать задачу информационного управления – какими должны быть информационные воздействия (с точки зрения управляющего субъекта), чтобы добиться требуемого поведения от управляемого субъекта. И, наконец, умея решать задачу информационного управления, можно моделировать *информационное противоборство* – взаимодействие нескольких субъектов, обладающих несовпадающими интересами и осуществляющих информационные воздействия на один и тот же управляемый субъект.

В работе [9] рассматривается информационное влияние агентов на формирование мнений друг друга в социальных сетях. Структура сети описывается с помощью введенных понятий: *сообщество* (множество агентов, которые не подвергаются влиянию агентов вне него), *группа* (сообщество агентов, в котором каждый агент влияет или подвергается влиянию каждого другого агента группы прямо или косвенно) и *спутник* (агент, не оказывающий влияния ни на одну из групп). Как оказывается, в конечном итоге мнения спутников определяются мнением групп, а внутри групп мнения агентов сходятся и равны. В такой социальной сети представляется вполне естественным рассмотрение *задачи информационного управления* (изменение мнений небольшого множества ключевых агентов в сети таким образом, что в результате распространения изменения мнений формируются требуемые мнения участников сети). Также ставится и анализируется вытекающая из нее теоретико-игровая задача *информационного противоборства* нескольких игроков в сети.

Модель информационного влияния в социальной сети. Агенты, входящие в социальную сеть, описываются множеством $N = \{1, 2, ..., n\}$. Агенты в сети влияют друг на друга, и степень влияния задается *матрицей прямого влияния* t размерности $n \times n$, где $t_{ij} \geq 0$ обозначает степень доверия i-го агента j-му агенту (влияния j-го на i-го) – см. также обзор моделей влияния в [8]. Считается, что выполняется условие нормировки: $\forall\ i \in N\ \sum_{j=1}^{n} t_{ij} = 1$. Если i-й агент доверяет j-му, а j-й доверяет k-му, то это означает следующее: k-й агент *косвенно влияет* на i-го. Это соображение побуждает авторов [9] к поиску ответа на вопрос о том, кто в итоге формирует мнение в социальной сети.

Формирование и динамика мнений агентов. У каждого агента в начальный момент времени имеется мнение по определенному вопросу. Мнение всех агентов сети отражает вектор-столбец мнений b размерности n. Агенты в социальной сети взаимодействуют, обмениваясь мнениями. Этот обмен приводит к тому, что мнение каждого агента меняется в соответствии с мнениями агентов, которым данный агент доверяет: $b_i^{(k)} = \sum_j t_{ij} b_i^{(k-1)}$, где индекс k означает момент времени. В векторной записи первое измененное мнение агентов равно произведению матрицы непосредственного доверия на вектор начальных мнений: $\boldsymbol{b}^{(1)} = \boldsymbol{t}\,\boldsymbol{b}$. Если обмен мнениями продолжается и далее, то вектор мнений агентов становится равным $\boldsymbol{b}^{(2)} = \boldsymbol{t}^2\,\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}^{(3)} = \boldsymbol{t}^3\,\boldsymbol{b}$ и т.д. В конечном итоге их мнения сходятся к результирующему (итоговому) мнению $B = \lim_{n \to \infty} b^{(n)}$, то есть, итоговое мнение $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{b}$, где $T = \lim_{n \to \infty} t^n$. И тогда: во-первых, в каждой из групп сети итоговые мнения агентов совпадают (этот результат соответствует выводам социальных психологов [17]); во-вторых, итоговые мнения спутников полностью определяются мнением одной или нескольких групп [9]. Такие результаты следуют из известных фактов теории конечных цепей Маркова и из допущения того, что в каждой группе хотя бы один агент хоть сколько-нибудь доверяет своему мнению.

Итак, мы кратко рассмотрели модель информационного влияния. Следующим этапом является анализ информационного управления, а затем – информационного противоборства (нескольких управляющих органов, осуществляющих информационные воздействия на один и тот же объект – например, социальную сеть).

Задача информационного управления. Имея «*основное уравнение*» $\boldsymbol{B} = T\,\boldsymbol{b}$, связывающее начальные и итоговые мнения агентов, можно ставить и решать задачу управления – воздействия на агентов социальной сети с целью формирования требуемых их мнений. Управляющему органу – *центру* – известна матрица влияния, а управляющее (информационное) воздействие заключается в изменении центром начальных мнений агентов путем «добавления» вектора управлений $\boldsymbol{u}$. Содержательно, управление заключается в изменении начального мнения i-го агента с b_i на $b_i + u_i$, $u_i \in U_i$, $i \in N$. Тогда итоговые мнения $\boldsymbol{B}_u$ будут определяться следующим уравнением: $\boldsymbol{B}_u = T\,(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{u})$, где $\boldsymbol{u} \in U = \prod_{i \in N} U_i$, то есть результирующее мнение агента является суммой его «невозмущенного» результирующего мнения и изменений, вызванных управляющими воздействиями.

Пусть целевая функция центра (критерий эффективности управления) $\Phi(\boldsymbol{B}_u, \boldsymbol{u}) = H(\boldsymbol{B}_u) - c(\boldsymbol{u})$, где $H(\cdot)$ – «доход» центра, зависящий от итоговых мнений агентов (от предпочтений центра, зависящих от действий агентов, можно перейти к его предпочтениям, зависящим от информированности или мнений агентов, так как в рамках теории рефлексивных игр [26] считается, что действия субъектов определяются их информированностью), $c(\cdot)$ – затраты на осуществление управляющих воздействий.

Тогда задача управления будет заключаться в выборе допустимого вектора управлений, максимизирующего критерий эффективности: $\Phi(\boldsymbol{B_u}, \boldsymbol{u}) \to \max\limits_{u \in U}$. Ряд примеров решения сформулированной задачи приведен в [9].

Поскольку воздействовать на мнения спутников не имеет смысла, можно априори (имея только матрицу доверия) сказать, на каких агентов должно быть нацелено информационное воздействие. В частности, для этого перспективным представляется анализ «индексов влияния». Также представляется перспективным в рамках информационного управления решение задач выработки оптимальной последовательности информационных воздействий, решение задач управляемости, решение обратной задачи определения множества управляющих воздействий и, наконец, решение задач информационного противоборства. Ряд из перечисленных задач рассматривался в [10], в том числе – с учетом репутации агентов.

Теоретико-игровая модель информационного противоборства. Пусть существует множество *игроков* («игроки» могут и совпадать с агентами или их группами), имеющих возможность влиять на начальные мнения агентов и заинтересованных в формировании определенных их итоговых мнений. Опишем возникающую между игроками игру.

Будем считать, что воздействия игроков на мнение каждого из агентов аддитивны. Обозначим: $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ – множество игроков, $u_{ij} \in U_{ij} = [- r_{ij}; R_{ij}]$ – действие j-го игрока по изменению мнения i-го агента, $r_{ij}, R_{ij} \geq 0$, $\boldsymbol{u} = ||u_{ij}||$, $\boldsymbol{u}_j = (u_{1j}, u_{2j}, \ldots, u_{nj}) \in U_j = \prod\limits_{i \in N} U_{ij}$, $u_i = \sum\limits_{j \in M} u_{ij}$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ – вектор «воздействий», $g_j(B)$: $\Re^n \to \Re^1$ – целевая функция j-го игрока, $i \in N$, $j \in M$. Тогда итоговые мнения будут представлены вектором: $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}) = T\,(\boldsymbol{b} + u)$.

Обозначая $G_j(\boldsymbol{u}) = g_j(B_1(\boldsymbol{u}), B_2(\boldsymbol{u}), \ldots, B_n(\boldsymbol{u}))$, $j \in M$, и считая, что игроки выбирают свои действия однократно, одновременно и независимо, получим игру $\Gamma = (M, \{U_j\}_{j \in M}, \{G_j(\cdot)\}_{j \in M})$ в нормальной форме, определяемую заданием соответственно множества игроков, их множеств допустимых действий и целевых функций [12]. Имея игру в нормальной форме, можно исследовать ее равновесия, определять «на ней» кооперативные, повторяющиеся и другие виды игр. Ряд примеров анализа таких игр приведен в [9, 10].

Возможности влияния одних членов социальной сети на других ее членов существенно зависят от репутации первых [10] (*репутация* – создавшееся общее мнение о достоинствах или недостатках кого-либо, чего-либо, общественная оценка»). Репутацию можно рассматривать, во-первых, как ожидаемую (другими агентами) норму деятельности агента – какого поведения от него ожидают остальные [24]. Во-вторых, как «весомость» мнения агента, определяемую предшествуемой оправдываемостью его суждений и/или эффективностью его деятельности. Репутация оправдывается и, как правило, возрастает, если выбор агента (его суждения, действия и т.п.) совпадает с тем, чего от него ожидают остальные и/или с тем, что остальные впоследствии считают нормой (например, эффективной деятельностью). Репутация может и снижаться, например, при нарушении субъектом принятых в сообществе норм поведения, при принятии неэффективных решений и т.д.

Работа [10] посвящена моделированию динамики репутации членов социальной сети и исследованию роли репутации в осуществлении информационных воздействий. В том числе, обсуждаются теоретико-игровые модели информационного противоборства; анализируются подходы к построению моделей стратегической и информационной рефлексии агентов.

В настоящем подразделе при описании динамики мнений, задач управления и информационного противоборства вводился ряд существенно ограничивающих модель предположений – о линейном влиянии мнений агентов друг на друга, об аддитивности управляющих воздействий и др. Возможности отказа от этих предположений, а также общая классификация соответствующих *игр на сетях*, обсуждаются в [9, 13, 23].

Заключение

Настоящая работа посвящена краткому обзору такой интенсивно развивающейся области, как модели влияния в социальных сетях. В целом, можно сделать вывод, что модели влияния в социальных сетях на сегодняшний день пока еще только становятся самостоятельной дисциплиной, представляя собой синтетический «сплав» теории графов, теории игр (некооперативных и рефлексивных), социальной психологии, социологической теории малых групп, теории марковских цепей, теории синтеза механизмов (mechanism design), теории мультиагентных систем и других научных направлений. Тем не менее, можно с уверенностью предположить, что в обозримое время модели социальных сетей станут самостоятельной ветвью исследований, привлекающей внимание все большее число ученых – специалистов в области прикладной математики психологии, экономики и социологии.

Приведенный выше обзор свидетельствует, что известные на сегодняшний день и кратко описанные выше модели социальных сетей (см. их классификацию в разделе 1) адекватно отражают многие свойства и эффекты, имеющие место в реальных социальных сетях (см. перечисление этих свойств и эффектов во введении) – см. Табл. 1 и Табл. 2, в которых столбцы соответствуют моделям, а строки – эффектам, присущим социальным сетям. Символ «+» на пересечении строки и столбца свидетельствует, что соответствующая модель отражает соответствующий эффект, «•» – учитывает.

Табл. 1. Модели («оптимизационные» и «имитационные») социальных сетей и их свойства

КЛАССЫ МОДЕЛЕЙ / **СВОЙСТВА**	Модели с порогами	Модели независимых каскадов	Модели просачивания и заражения	Модели Изинга	Модели на основе клеточных автоматов	Модели на основе цепей Маркова
Наличие собственных «мнений» (состояний) агентов	+	+	+	+	+	+
Изменение мнений под влиянием других членов социальной сети	+	+	+	+	+	+

КЛАССЫ МОДЕЛЕЙ **СВОЙСТВА**	Модели с порогами	Модели независимых каскадов	Модели просачивания и заражения	Модели Изинга	Модели на основе клеточных автоматов	Модели на основе цепей Маркова
Различная значимость мнений (влиятельности, доверия) одних агентов для других	+	+	+	·	+	·
Различная степень подверженности агентов влиянию	+	-	-	-	+	-
Существование косвенного влияния	-	-	-	-	-	-
Существование «лидеров мнений»	+	·	-	-	-	-
Существование порога чувствительности к изменению мнения окружающих	+	-	-	-	+	-
Локализация групп	-	·	-	-	-	-
Наличие специфических социальных норм	-	-	-	-	-	-
Учет факторов «социальной корреляции»	·	-	-	-	-	-
Существование внешних факторов влияния	+	-	-	+	+	-
Наличие стадий	+	-	-	-	●	-
Лавинообразные эффекты (каскады)	+	+	●	-	-	-
Влияние структурных свойств социальных сетей на динамику мнений, включая степенной эффект, эффект кластеризации, локальную промежуточность	+	●	-	-	+	-
Активность агентов	-	-	-	-	-	-
Возможность образования группировок, коалиций	-	-	-	-	-	-
Неполная и/или асимметричная информированность агентов	-	-	-	-	-	-
Нетривиальная взаимная информированность (рефлексия) агентов	-	-	-	-	-	-
Игровое взаимодействие агентов	-	-	-	-	-	-
Оптимизация информационных воздействий	+	+	-	-	·	-
Информационное управление в социальных сетях	-	-	-	-	-	-

Табл. 2. Модели («теоретико-игровые»)
социальных сетей и их свойства

КЛАССЫ МОДЕЛЕЙ СВОЙСТВА	Модели взаимной информированности	Модели согласованных коллективных действий	Модели коммуникаций	Модели стабильности сети	Модели информационного влияния и управления	Модели информационного противоборства
Наличие собственных мнений агентов	+	+	+	+	+	+
Изменение мнений под влиянием других членов социальной сети	+	+	+	+	+	+
Различная значимость мнений (влиятельности, доверия) одних агентов для других	-	·	·	-	+	+
Различная степень подверженности агентов влиянию	-	●	·	+	+	+
Существование косвенного влияния	·	-	-	-	+	+
Существование «лидеров мнений»	-	-	-	-	+	-
Существование порога чувствительности к изменению мнения окружающих	-	-	·	-	-	-
Локализация групп	-	-	+	-	+	·
Наличие специфических социальных норм	-	-	-	-	+	·
Учет факторов «социальной корреляции»	·	·	·	-	-	-
Существование внешних факторов влияния	-	·	-	·	+	+
Наличие стадий	-	-	+	-	·	-
Лавинообразные эффекты (каскады)	-	-	-	-	·	-
Влияние структурных свойств социальных сетей на динамику мнений, включая степенной эффект, эффект кластеризации, локальную промежуточность	·	+	+	+	·	·
Активность агентов	·	+	·	·	·	+
Возможность образования группировок, коалиций	-	-	-	-	·	·
Неполная и/или асимметричная информированность агентов	+	+	+	-	·	+
Нетривиальная взаимная информированность (рефлексия) агентов	+	-	·	-	+	·
Игровое взаимодействие агентов	·	+	·	+	·	+

КЛАССЫ МОДЕЛЕЙ **СВОЙСТВА**	Модели взаимной информированности	Модели согласованных коллективных действий	Модели коммуникаций	Модели стабильности сети	Модели информационного влияния и управления	Модели информационного противоборства
Оптимизация информационных воздействий	-	-	-	-	+	+
Информационное управление в социальных сетях	-	-	-	-	+	+

Проведенный анализ (а также его краткая сводка, приведенная в Табл. 1 и Табл. 2) свидетельствует, что ряд эффектов еще ждут своего исследования – разработки адекватного аппарата моделирования.

Литература

1. АЛЕСКЕРОВ Ф.Т., БЛАГОВЕЩЕНСКИЙ Н.Ю., САТАРОВ Г.А. и др. *Влияние и структурная устойчивость в Российском парламенте (1905-1917 и 1993-2005 гг.)*. – М.: Физматлит, 2007.
2. БАРАБАШИ А.Л. *Сети без масштабов* // В мире науки. Scientific American. 2003. № 8. С. 55-63.
3. БРЕЕР В.В. *Модели Изинга* ….
4. ВАСИН А.А., КРАСНОЩЕКОВ П.С., МОРОЗОВ В.В. *Исследование операций*. – М.: Изд-во Академия, 2008.
5. ВАСИН А.А. *Модели динамики коллективного поведения*. – М.: МГУ, 1989.
6. ВАСИН А.А. *Некооперативные игры в природе и обществе*. – М.: МАКС пресс, 2005.
7. ГРАДОСЕЛЬСКАЯ Г.В. *Анализ социальных сетей*. Автореф. дис. … канд. соц. наук. – Москва, 2001.
8. ГУБАНОВ Д.А. *Обзор онлайновых систем репутации/доверия*. – М.: ИПУ РАН, 2009 / Интернет-конференция по проблемам управления (www.mtas.ru/forum). – 25 с.
9. ГУБАНОВ Д.А., НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Модели информационного влияния и*

информационного управления в социальных сетях // Проблемы управления. 2009.

10. ГУБАНОВ Д.А., НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Модели репутации и информационного управления в социальных сетях* // Управление большими системами. 2009.

11. ГУБКО М.В. *Задачи управления организационными системами с сетевым взаимодействием участников* // Автоматика и Телемеханика. 2004. № 8. С. 102 – 129.

12. ГУБКО М.В., НОВИКОВ Д.А. *Теория игр в управлении организационными системами*. – М.: Синтег, 2002.

13. ГУБКО М.В., НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Сетевые игры и игры на сетях* / Труды международной конференции «Сетевые игры и менеджмент». – Петрозаводск: ИПМИ РАН, 2009. С. 13 – 17.

14. ДАВЫДЕНКО В.А., РОМАШКИНА Г.Ф. *Моделирование социальных сетей* // Вестник Тюменского государственного университета. № 1, 2005. С. 68-79.

15. ИВАЩЕНКО А.А., НОВИКОВ Д.А. *Модели и методы организационного управления инновационным развитием фирмы*. – М.: Ленанд, 2006.

16. ЛАНДАУ Л.Д., ЛИФШИЦ Е.М. *Курс теоретической физики*. – М.: Физматлит, 1968.

17. МАЙЕРС Д. *Социальная психология*. – С.-Пб.: Питер, 2002.

18. МАЛИШЕВСКИЙ А.В. *Качественные модели в теории сложных систем*. – М.: Наука, 1998.

19. МЕНАР К. *Экономика организаций*. – М.: ИНФРА-М, 1996.

20. МУЛЕН Э. *Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели*. – М.: Мир, 1991.

21. НОВИКОВ Д.А. *Закономерности итеративного научения*. – М.: ИПУ РАН, 1998.

22. НОВИКОВ Д.А. *Институциональное управление организационными системами*. – М.: ИПУ РАН, 2003.

23. НОВИКОВ Д.А. *«Когнитивные игры»: линейная импульсная модель* // Проблемы управления. 2008. № 3. С. 14-22.

24. НОВИКОВ Д.А. *Математические модели формирования и функционирования команд*. – М.: Физматлит, 2008.

25. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами*. 2-е издание. – М.: Физматлит, 2007.

26. НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Рефлексивные игры*. – М.: Синтег, 2003.

27. ОПОЙЦЕВ В.И. *Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения*. – М.: Наука, 1977.

28. САЙМОН Г. *Науки об искусственном*. – М.: Мир, 1972.

29. ХАРШАНЬИ Д., ЗЕЛЬТЕН Р. *Общая теория выбора равновесия в играх*. – СПб.: Экономическая школа, 2001.

30. ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Теоретико-игровые модели информационного управления*. – М.: ПМСОФТ, 2005.

31. BAILEY N. *The Mathematical Theory of Infectious Diseases and Its Applications.* – New York: Hafner Press, 1975.

32. BARNES J.A. *Class and Committees in a Norwegian Island Parish* // Human Relations. 1954. №7. P. 39-58.

33. BIMBER B., FLANAGIN A., STOHL C. *Reconceptualizing Collective Action in the Contemporary Media Environment* // Communication Theory. 2005. № 4 (15). P. 365-388.

34. BINEHAM J. *A Historical Account of the Hypodermic Model in Mass Communication* // Communication Monographs. 1988. № 55. P. 230-246.

35. BRAMOULLE Y., KRANTON R. *Public Goods in Networks* // Journal of Economic Theory. 2007. Vol. 135(1). P. 478-494.

36. BURT R.S. *Brokerage and Closure.* – Oxford: Oxford University Press, 2005.

37. BUTTLE F.A. *Word-of-Mouth: Understanding and Managing Referral Marketing* // Journal of Strategic Marketing. Vol. 6. P. 241-254.

38. CARNES T., NAGARAJAN C., WILD S.M., ZUYLEN A. *Maximizing Influence in a Competitive Social Network: A Follower's Perspective* / Proceedings of the Ninth International Conference on Electronic Commerce. 2007. P. 351-360.

39. CHWE M.S. *Communication and Coordination in Social Networks* // Review of Economic Studies. 2000. № 67. P. 1-16.

40. DEUTSCH M., GERARD H.B. *A Study of Normative and Informational Social Influences upon Individual Judgment* // Journal of Abnormal and Social Psychology. 1955. №51. P. 629-636.

41. DODDS P., WATTS D.A. *Generalized Model of Social and Biological Contagion* // Journal of Theoretical Biology. 2005. № 232. P. 587-604.

42. DODSON J., MULLER E. *Models of New Product Diffusion through Advertising and Word-of-Mouth* // Management Science. 1978. № 24. P. 1568-1578.

43. DOMINGOS P., RICHARDSON M. *Mining the Network Value of Customers* / Proceedings of the Seventh International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. 2002. P. 57-66.

44. EGUFFLUZ V., KLEMM K. *Epidemic Threshold in Structured Scale-free Networks* // Physical Review Letters. 2002. № 89. P. 108701+.

45. ELIHU K., LAZARSFELD P. *Personal Influence: the Part Played by People in the Flow of Mass Communications.* – Glencoe, Ill.: Free Press, 1955.

46. EVEN-DAR E., SHAPIRA A. A *Note on Maximizing the Spread of Influence in Social Networks* / Internet and Network Economics. 2007. P. 281-286.

47. FELSENTHAL D., MACHOVER M. *The Measurement of Voting Power: Theory and Practice, Problems and Paradoxes*. – London: Edward Elgar, 1998.

48. FRIEDKIN N.E. *Structural Cohesion and Equivalence Explanations of Social Homogeneity* // Sociological Methods and Research. 1984. No 12. P. 235-261.

49. FRIEDKIN N.E., JOHNSON E.C. Social *Influence and Opinions* // Journal of Mathematical Sociology. 1990. № 15. P.193-205.

50. GLADWELL M. *The Tipping Point: How Little Things Can Make a Big Difference*. Little Brown & Company, 2000.

51. GODES D., MAYZLIN D. *Using Online Conversations to Study Word of Mouth Communication* // Marketing Science. 2004. № 23. P. 545-560.

52. GOLDENBERG J., LIBAI B., MULLER E. *Talk of the Network: A Complex Systems Look at the Underlying Process of Word-of-Mouth* // Marketing Letters. 2001. № 2. P. 11-34.

53. GRABISCH M., RUSINOWSKA A. *A Model of Influence in a Social Network.* http://halshs.archives-ouvertes.fr/docs/00/34/44/57/PDF/B08066.pdf.

54. GRANOVETTER M. *The Strength of Weak Ties* // American Journal of Psychology. 1973. № 78 (6). P. 1360-1380.

55. GRANOVETTER M. *Threshold Models of Collective Behavior* // American Journal of Sociology. 1978. Vol. 83. No. 6. P. 1420-1443.

56. HETHCOTE H. W. *The Mathematics of Infectious Diseases* // SIAM Review. 2000. Vol. 42. No. 4. P. 599-653.

57. HOEDE C., BAKKER R. *A Theory of Decisional Power* // Journal of Mathematical Sociology. 1982. № 8. P. 309-322.

58. HOWARD A., JEBARA T. *Dynamical Systems Trees* // Uncertainty in Artificial Intelligence. 2003. P. 260-267.

59. HOWARD N. *Theory of Meta-games* // General systems. 1966. № 11. P. 187-200.

60. *Glossary on Control Theory and its Applications* – http://glossary.ru.

61. JACKSON M. *The Stability and Efficiency of Economic and Social Networks* / Advances in Economic Design. 2003.

62. JANKY B., TAKÁCS K. *Social Control, Participation in Collective Action and Network Stability.* HUNNET Working Paper. 2002. http://www.socialnetwork.hu/.

63. KEARNS M., SIDDHARTH S., MONTFORT N. *An Experimental Study of the Coloring Problem on Human Subject Networks* // Science. 2006. № 313. P. 824-827.

64. KEMPE D., KLEINBERG J., TARDOS E. *Maximizing the Spread of Influence through a Social Network* / Proceedings of the 9-th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. 2003. P. 137-146.

65. LATANÉ B., L'HERROU T. *Spatial Clustering in the Conformity Game: Dynamic Social Impact in Electronic Groups* // Journal of Personality and Social Psychology. 1996. № 70. P. 1218-1230.

66. LEENDERS R. *The Specification of Weight Structures in Network Autocorrelation Models of Social Influence*. 2002. http://ideas.repec.org/p/dgr/rugsom/02b09.html

67. LESKOVEC J., ADAMIC L., HUBERMAN B. *The Dynamics of Viral Marketing.* 2005. http://arxiv.org/abs/physics/0509039.

68. LESKOVEC J., KRAUSE A., GUESTRIN C., FALOUTSOS C., VANBRIESEN J., GLANCE N. *Cost-effective Outbreak Detection in Networks* / Proceedings of the 13-th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. 2007. P. 420-429.

69. LEWIS D. *Convention: a Philosophical Study.* – Cambridge: Harvard University Press, 1969.

70. MAHDIAN M., ANAGNOSTOPOULOS A., KUMAR R. *Influence and Correlation in Social Network* // Proceeding of the 14-th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. 2008. P. 7-15.

71. MAS-COLLEL A., WHINSTON M.D., GREEN J.R. *Microeconomic Theory*. – N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995.

72. MORRIS S. *Contagion* // The Review of Economic Studies. 2000. V. 67. № 1. P. 57-78.

73. MYERSON R.B. *Game Theory: Analysis of Conflict*. – London: Harvard Univ. Press, 1991.

74. NEMHAUSER G., WOLSEY L., FISHER M. *An Analysis of the Approximations for Maximizing Submodular Set Functions* // Mathematical Programming. 1978. №14. P. 265–294.

75. NEWMAN M., PARK J. *Why Social Networks Are Different from Other Types of Networks* // Physical Review. 2003. Vol. 68.

76. OLIVER N., ROSARIO B., PENTLAND A. *Graphical Models for Recognizing Human Interactions* / Proceedings of International Conference on Neural Information and Processing Systems (NIPS). 1998. P. 924-930.

77. OLSON M. *The Logic of Collective Action: Public Goods and the Theory of Groups*. Harvard: Harvard University Press, 1971.

78. *Oxford English Dictionary*. http://www.askoxford.com

79. ROBINS G., PATTISON P., KALISH Y., LUSHER D. *An Introduction to Exponential Random Graph (p*) Models for Social Networks* // Social Networks. 2007. № 29. P. 173–191.

80. ROBINS G., PATTISON P., ELLIOT P. *Network Models for Social Influence Processes* // Psychometrica. 2001. Vol. 66. No. 2. P. 161-190.

81. ROLFE M. *Social Networks and Threshold Models of Collective Behavior*. Preprint. – Chicago: University of Chicago, 2004.

82. ROMUALDO P., ALESSANDRO V. *Epidemic Spreading in Scale-Free Networks* // Physical Review Letters. 2001. № 14 (86). P. 3200-3203.

83. ROGERS E.M. *Diffusion of Innovations.* – New York London: Free Press, 1983.

84. RUSINOWSKA A., SWART H. *Generalizing and Modifying the Hoede-Bakker Index.* Theory and Applications of Relational Structures as Knowledge Instruments. № 2. Springer's Lecture Notes in Artificial Intelligence LNAI 4342. Springer, 2007. P. 60-88.

85. SAUL L.K., JORDAN M.I. *Mixed Memory Markov Models: Decomposing Complex Stochastic Processes as Mixtures of Simpler Ones* / Machine Learning. 1999. Vol. 37. № 1. P. 75-87.

86. SCHIFF J.L. *Cellular Automata: A Discrete View of the World.* – NY: Wiley, 2007.

87. SHRAGER J., HOGG T., HUBERMAN B. *Observation of Phase-Transitions in Spreading Activation Networks* // Science. 1987. № 236. P. 1092-1094.

88. TARNOW E. *Like Water and Vapor – Conformity and Independence in the Large Group*. http://cogprints.org/4274/1/LargeGroupOrderTarnow.pdf

89. TUOMELA R. *Shared Belief*. http://www.valt.helsinki.fi/staff/tuomela/papers/Shared.pdf

90. VALENTE T. *Network Models of the Diffusion of Innovations.* – Cresskill, NJ: Hampton Press, 1995.

91. WATTS D. *The «New» Science of Networks* // Annual Review of Sociology. 2004. № 30. P. 243-270.

92. WATTS D., DODDS P. *Influentials, Networks, and Public Opinion Formation* // Journal of Consumer Research. 2007. № 34. P. 441-458.

93. WU F., HUBERMAN B., ADAMIC L., TYLER J. *Information Flow in Social Groups* // Statistical and Theoretical Physics. 2004. № 337. P. 327-335.

94. YOUNG P. *The Spread of Innovations by Social Learning*. 2006.http://www.santafe.edu/events/workshops/images/0/0a/Spread21march.pdf.

ZHANG D., GATICA-PEREZ D., BENGIO S., ROY D. *Learning Influence among Interacting Markov Chains* // Neural Information Processing Systems (NIPS), 2005. P. 132-141.