

Управление в социально-экономических, медико-биологических системах

© 2016 г. И.Н. БАРАБАНОВ, канд. физ.-мат. наук (ivbar@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),
Д.А. НОВИКОВ, д-р техн. наук (novikov@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва,
Московский физико-технический институт)

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ВОЗБУЖДЕНИЕМ ТОЛПЫ В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ¹

Формулируется и решается задача динамического управления возбуждением толпы в дискретном времени за счет выбора числа внедряемых в каждом периоде времени «провокаторов».

1. Введение

Существуют два принципиально различных подхода к описанию больших коллективов или/и групп взаимосвязанных агентов (примеры – толпа, социальные группы, онлайн-социальные сети и др.).

Первый подход, который условно можно назвать *микроописанием*, заключается в детальном описании поведения каждого из агентов. В качестве примера можно привести так называемые *марковские модели*, в которых динамика мнений агентов описывается линейным разностным уравнением со стохастической матрицей, отражающей взаимовлияние агентов (коммуникации между ними) – см. обзоры в [1–3]. Умея описывать динамику поведения агентов, можно ставить и решать задачи управления. Например, в [4, 5] задача информационного управления, «надстраиваемая» над марковской моделью, сводится к анализу дискретной линейной системы управления. Преимущество микроописаний – возможность использовать в явном виде информацию о структуре коммуникаций агентов, недостаток – высокая размерность решаемых задач, например, реальные онлайн-социальные сети насчитывают миллионы участников (см. [1, 3, 6]).

Альтернативным подходом является использование *макроописаний* [7, 8], в которых характеристики группы являются агрегированными, например среднее мнение агентов, доля «возбужденных» агентов и т.п. Макроописание, как правило, позволяет в аналитическом виде описывать динамику поведения исследуемой системы, но при этом, естественно, теряется часть информации. Кроме того, возникает вопрос об адекватности перехода от микро- к соответствующему макроописанию [6, 7]. Примеры удачного макроописания толпы – пороговые стохастические модели управления толпой, предложенные

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-19-10609.

в [9] (см. также «надстроенные» над этими моделями задачи анализа информационного противоборства, описанные в [10]).

В [9] ставилась и решалась статическая задача управления возбуждением толпы за счет внедрения в нее «провокаторов», причем число провокаторов выбиралось однократно и оставалось постоянным в течение всего рассматриваемого временного горизонта.

В настоящей работе используется базовая модель возбуждения толпы в дискретном времени [9], но предполагается, что число «провокаторов» может варьироваться в каждый из моментов времени. Структура изложения такова: во втором разделе описывается модель толпы, в третьем анализируются модели с ограничением на количество внедряемых провокаторов, число которых изменяется дискретно. В четвертом разделе рассматриваются непрерывные (по доле провокаторов) модели, в пятом – вероятностные модели выявления провокаторов.

2. Модель толпы

Опишем основные результаты исследования введенных в [9, 11] моделей толпы. Обозначим через $N = \{1, \dots, n\}$ конечное множество агентов. Агент $i \in N$, находящийся в толпе, характеризуется своим порогом $\theta_i \in [0; 1]$, определяющим, будет ли агент действовать при той или иной обстановке (векторе y_{-i} решений всех остальных агентов). В соответствии с этим порогом агент принимает решение $y_i \in \{0; 1\}$ («бездействие» или «действие») как наилучший ответ (Best Response – BR) на обстановку:

$$(1) \quad y_i = BR_i(y_{-i}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} y_j \geq \theta_i, \\ 0, & \text{если } \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} y_j < \theta_i. \end{cases}$$

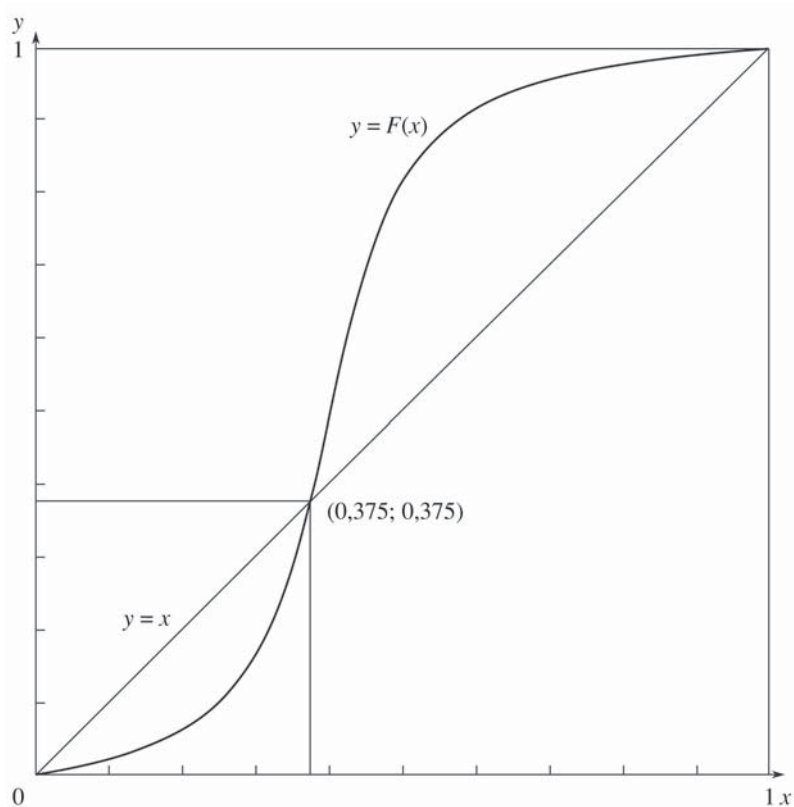
Поведение, описываемое выражением (1), называется *пороговым* (см. пионерскую работу [12] и обзоры в [2, 13]; в [13, 14] в том числе приведены примеры целевых функций агентов, приводящих к наилучшему ответу (1)).

Пусть число агентов велико и пусть агенты одинаковы в том смысле, что все они действуют по правилу (1). При этом пороги θ_i являются реализациями одной и той же случайной величины. Обозначим через $F(\cdot): [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ функцию распределения порогов агентов; $F(\cdot)$ – неубывающая функция, определенная на единичном отрезке (множестве возможных значений порогов агентов), в каждой точке непрерывная слева и имеющая предел справа.

Предположим, что известна доля x_k агентов, действующих на k -м шаге ($k = 0, 1, \dots$). Для последующих шагов справедливо следующее рекуррентное соотношение, описывающее динамику поведения множества агентов [12–15] (так называемое «уравнение Грановеттера»):

$$(2) \quad x_{l+1} = F(x_l), \quad l = k, k+1, \dots$$

Положения равновесия системы (2) определяются начальной точкой x_0 (ниже считается, что $F(0) = 0$ и $x_0 = 0$) и точками пересечения графика



Типичная функция распределения порогов $F(x)$.

функции $F(\cdot)$ с биссектрисой первого квадранта (в силу свойств функции распределения одним из равновесий всегда будет единица):

$$(3) \quad F(x) = x.$$

Устойчивыми (локально) могут быть точки равновесия, в которых график функции $F(\cdot)$ пересекает биссектрису, приближаясь к ней «слева сверху». Обозначим через x^* равновесие коллективного поведения (РКП) [9, 11], соответствующее функции распределения порогов $F(\cdot)$. Обозначим через $q = \inf \{x : x \in (0, 1], F(x) = x\}$ наименьший отличный от нуля корень уравнения (3). В соответствии с результатами [0, 0, 0] равновесием коллективного поведения (и равновесием Нэша игры агентов) будет точка

$$(4) \quad x^* = \begin{cases} q, & \text{если } \forall z \in [0, q] \quad F(z) \geq z, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

На рисунке представлена типичная функция распределения порогов $F(x)$ (см. пример 4) [6]. Для этой функции распределения динамическая система (2) имеет три положения равновесия: $x = 0$, $x = 0,375$ и $x = 1$, причем первое и третье устойчивы, а второе неустойчиво. РКП в этом случае будет находиться в точке, соответствующей положению равновесия $x^* = 0$.

Таким образом, при заданном начальном состоянии (доле действующих в нулевой момент времени агентов) поведение динамической системы (2) и ее равновесные состояния определяются свойствами функции распределения порогов агентов. Следовательно, целенаправленное изменение этой функции распределения может рассматриваться как *управление толпой*. Примеры постановки и решения задач такого управления можно найти в [9, 11].

В частности, в [9] предложен следующий способ управления поведением агентов и положением равновесия системы (2): ко множеству N (напомним, что $\# N = n$) в начальный момент времени добавляются m_0 внешних *провокаторов* (множество Q). Они имеют пороги $\theta_i = 0 \forall i \in Q$ ($\# Q = m_0 \leq M - \text{ограничение на число провокаторов}$) и всегда действуют (принимают решения $y_i = 1 \forall i \in Q$). Как показано в [9], вероятность того, что произвольно выбранный агент из нового множества агентов $N \cup Q$ имеет порог, не превышающий x , определяется вероятностями двух независимых событий: вероятностью того, что выбранный агент является провокатором, а именно $\frac{m_0}{m_0+n}$ и вероятностью того, что выбранный агент не является провокатором и его порог не превышает x : $(1 - \frac{m_0}{m_0+n})F(x)$. Таким образом, получается новое множество агентов, пороги которых – реализации случайной величины со следующей функцией распределения:

$$(5) \quad \hat{F}(x, m_0) = \frac{m_0}{m_0 + n} + \left(1 - \frac{m_0}{m_0 + n}\right) F(x).$$

Равновесие (4) при функции распределения (5) обозначим через $x^*(m_0)$.

Будем называть увеличение доли действующих агентов возбуждением толпы.

Пусть *выигрыш* субъекта, осуществляющего управление (так называемого *центра*), от возбуждения доли агентов x задается неубывающей функцией $H(x)$, а *затраты* центра на осуществление управленческого воздействия (внедрения провокаторов) – неубывающей функцией $c_0(m_0)$. Тогда *статическая задача управления возбуждением толпы* формулируется как [9]

$$(6) \quad H(x^*(m_0)) - c_0(m_0) \rightarrow \max_{m_0 \in \{0, 1, \dots, M\}},$$

т.е. требуется выбрать число провокаторов (внедряемых центром в толпу однократно в начальный момент времени, при этом провокаторы остаются в толпе на всем рассматриваемом временном горизонте), при котором выигрыш центра за вычетом его затрат максимален. Если функция распределения такова, что удастся найти аналитическую зависимость $x^*(m_0)$, то задача (6) сводится к вычислению M значений целевой функции и выбору минимального допустимого числа провокаторов, приводящего к максимальному из этих значений. Примеры решения этой задачи можно найти в [9].

Рассмотрим *фиксированный временной горизонт* – первые K моментов времени. Воспользовавшись выражениями (3) и (5) и предполагая, что в общем случае число провокаторов m_k в различные моменты времени $k = 0, 1, \dots, K - 1$ может быть различным, получим управляемую (в качестве управления на k -м шаге выступает количество внедряемых провокато-

ров m_{k-1}) динамическую систему, описывающую ожидаемую долю действующих агентов:

$$(7) \quad x_k = \frac{m_{k-1}}{m_{k-1} + n} + \left(1 - \frac{m_{k-1}}{m_{k-1} + n}\right) F(x_{k-1}), \quad k = 0, 1, \dots, \quad x_0 = 0.$$

Для динамической системы (7) можно ставить и решать различные задачи управления, т.е. рассматривать *динамические модели управления возбуждением толпы* – см. ниже.

3. Модели с ограничением на общее число провокаторов

Начнем с простейшего случая, когда ограничение на число провокаторов в каждом периоде имеет вид

$$(8) \quad 0 \leq m_k \leq M, \quad k = 0, 1, \dots, K - 1,$$

а *критерием эффективности* является доля агентов, действующих в заданном периоде K . Соответствующая *задача терминального управления* имеет вид

$$(9) \quad \begin{cases} x_K(m) \rightarrow \max_m, \\ (7), (8). \end{cases}$$

Утверждение 1. Решение задачи (9) есть $m_k = M, k = 0, 1, \dots, K - 1$.

Доказательство утверждения 1 приведено в Приложении.

Следствие. Если $m = (m_0, \dots, m_{K-1})$ – неубывающая последовательность, то $x_k(m)$ также является неубывающей последовательностью.

Обозначим через $l(\hat{x}, m) = \min\{k = 1, \dots, K | x_k(m) \geq \hat{x}\}$ самый ранний момент времени, в который доля действующих агентов достигнет заданного значения \hat{x} (если множество $\{k = 1, \dots, K | x_k(m) \geq \hat{x}\}$ пусто, то положим $l(\hat{x}, m) = +\infty$). В рамках рассматриваемой модели можно сформулировать следующую *задачу о быстродействии*:

$$(10) \quad \begin{cases} l(\hat{x}, m) \rightarrow \min_m, \\ (7), (8). \end{cases}$$

Утверждение 2. Решение задачи (10) есть $m_k = M, k = 0, 1, \dots, K - 1$.

Доказательство утверждения 2 приведено в Приложении.

Содержательно, в рамках задач (9) или (10) центру наиболее выгодно внедрить в толпу в начальный момент времени максимальное допустимое число провокаторов и больше ничего не делать (не пытаться, например, потом уменьшать, а затем опять увеличивать число внедренных провокаторов). Такая структура оптимального решения обусловлена тем, что в моделях (9) и (10) центр не несет затрат на внедрение провокаторов.

Сформулируем одно очевидное утверждение, касающееся числа M – максимально возможного количества провокаторов: если M удовлетворяет условию $M \geq n\hat{x}/(1 - \hat{x})$, то задача быстрогодействия может быть решена за один шаг. Если это условие не выполняется, то существует такая (пассивная) толпа (т.е. такая функция распределения $F(\cdot)$), что значение \hat{x} не будет достигнуто ни за какое конечное число шагов.

Приведенная оценка на максимальное необходимое число провокаторов является достаточно грубой и в случае больших \hat{x} может достигать больших значений, в частности при $\hat{x} \geq 0,5$ имеем $M \geq n$, что означает, что число провокаторов должно превышать численность самой толпы. Формально построенная модель допускает произвольное (в том числе как угодно большое) число провокаторов, однако очевидно, что большое количество провокаторов необходимо вводить для толпы, близкой к вырожденной с точки зрения возбудимости, для которой функция распределения порогов близка к нулю почти на всем отрезке $[0, 1]$.

Ниже рассматриваются возможные постановки задач управления, учитывающие затраты центра.

Модели, учитывающие затраты центра. При известной неубывающей функции затрат $c(m)$, более общей, чем задача (9), является следующая *задача целочисленного динамического программирования* (общее число вариантов – M^K):

$$(11) \quad \begin{cases} H(x_K(m)) - c(m) \rightarrow \max_m, \\ (7), (8). \end{cases}$$

Например, при фиксированной «цене» $\lambda \geq 0$ содержания одного провокатора в единицу времени, затраты центра примут вид

$$(12) \quad c(m) = \lambda \sum_{k=0}^{K-1} m_k.$$

Возможным вариантом задач типа (11)–(12) будет *задача минимизации затрат* по обеспечению к моменту времени K заданной доли \hat{x} действующих агентов:

$$(13) \quad \begin{cases} c(m) \rightarrow \min_m, \\ x_K(m) \geq \hat{x}, \\ (7), (8), (12). \end{cases}$$

Эти задачи рассматриваются в следующем разделе.

4. Непрерывные управления

Пусть M и n велики. Обозначим: $\delta_k = \frac{m_k}{m_k + n}$, $\lambda_0 = \lambda n$. Условие (8) примет вид $\delta_k \in [0; \Delta]$, $k = 0, 1, \dots, K - 1$, где $\Delta = \frac{M}{M+n}$, тогда затраты (12) можно

записать как

$$(14) \quad c(\delta) = \lambda_0 \sum_{k=0}^{K-1} \frac{\delta_k}{1 - \delta_k},$$

где $\delta = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{K-1})$, δ_k – действительные числа, $k = 0, 1, \dots, K - 1$.

Динамическую систему (7) с учетом введенных обозначений можно записать в виде

$$(15) \quad x_k(\delta) = \delta_{k-1} + (1 - \delta_{k-1}) F(x_{k-1}), \quad k = 0, 1, \dots, x_0 = 0.$$

Исследуем свойства множества достижимости

$$D = \bigcup_{\delta: 0 \leq \delta_k \leq \Delta, k=0, \dots, K-1} x_K(\delta) \subseteq [0; 1].$$

По аналогии с доказательством утверждения 1 можно показать, что $x_K(\delta)$ монотонно по δ_k , $k = 0, 1, \dots, K - 1$. Если эта зависимость является непрерывной, то (15) задает непрерывное монотонное (в смысле конуса) отображение $[0; \Delta]^K$ в $[0; 1]$, т.е. справедливо следующее

Утверждение 3. Если функция распределения $F(\cdot)$ непрерывна, то $D = [0; x_K(\Delta, \dots, \Delta)]$.

С точки зрения возможных приложений значительный интерес представляет случай так называемых *унифицированных решений* $\hat{\delta} = (\rho, \dots, \rho)$, при использовании которых доля $\rho \in [0; \Delta]$ провокаторов во всех периодах времени одинакова. Обозначим через $D_0 = \bigcup_{\rho \in [0; \Delta]} x_K(\rho, \dots, \rho) \subseteq [0; 1]$ множество достижимости в унифицированном случае. Так как $x_K(\rho, \dots, \rho)$ – монотонное непрерывное отображение $[0; \Delta]$ в $[0; 1]$, причем $x_K(0, \dots, 0) = 0$, то $D_0 = D$ и справедливо следующее

Утверждение 4. Если функция распределения $F(\cdot)$ непрерывна, то для любой допустимой последовательности δ существует эквивалентное унифицированное решение $\hat{\delta}$, т.е. допустимое $\hat{\delta}$, такое что $x_K(\delta) = x_K(\hat{\delta})$.

Содержательно утверждение 4 означает, что с точки зрения множества достижимости центр может ограничиться унифицированными решениями.

Утверждение 4 неконструктивно, так как оно констатирует существование эквивалентного унифицированного решения, но ничего не говорит о том, как его найти. В ряде частных случаев (в том числе см. пример 1) удается найти в явном виде выражение для доли действующих в k -м периоде агентов, а также эквивалентное унифицированное решение (см. также выражение (11) в [9]).

Пример 1. Пусть распределение порогов агентов равномерное: $F(x) = x$. Возьмем произвольный момент времени $l : 0 \leq l \leq K - 1$ и произвольное приращение времени $s : l + s \leq K$. По индукции можно доказать, что

$$(16) \quad x_{l+s} = 1 + (x_l - 1) \prod_{j=0}^{s-1} (1 - \delta_{l+j}).$$

Если выбрать число ρ из условия

$$(17) \quad (1 - \rho)^s = \prod_{j=0}^{s-1} (1 - \delta_{l+j}),$$

т.е. значение $(1 - \rho)$ есть среднее геометрическое значений $(1 - \delta_{l+j})$, то из начального состояния x_l получится одно и то же конечное состояние x_{l+s} при использовании последовательности управлений $\{\delta_l, \dots, \delta_{l+s-1}\}$ и $\underbrace{\{\rho, \dots, \rho\}}_s$.

Поскольку момент времени l и приращение времени можно брать произвольными, то таким образом можно заменить всю последовательность управлений δ на последовательность одинаковых управлений.

Если $F(x) = x$, то при $x_0 = 0$ из (16)–(17) сразу следует

$$(18) \quad x_k(\delta) = \sum_{i=0}^{k-1} \delta_i - \sum_{\substack{i,j=0 \\ i \neq j}}^{k-1} \delta_i \delta_j + \sum_{\substack{i,j,l=0 \\ i \neq j \neq l}}^{k-1} \delta_i \delta_j \delta_l - \sum_{\substack{i,j,l,s=0 \\ i \neq j \neq l \neq s}}^{k-1} \delta_i \delta_j \delta_l \delta_s + \dots$$

Пример 2. Пусть $K = 2$ и $F(x) = x$. Из (18) следует, что $x_1 = \delta_0$, $x_2 = \delta_0 + \delta_1 - \delta_0 \delta_1$. Пусть $H(x) = x$, и затраты определяются в виде (14). Тогда задача (11) примет вид

$$\delta_0 + \delta_1 - \delta_0 \delta_1 - \lambda_0 \left[\frac{\delta_0}{1 - \delta_0} + \frac{\delta_1}{1 - \delta_1} \right] \rightarrow \max_{\delta_0, \delta_1 \leq \Delta}.$$

Решение этой задачи:

$$\delta_0 = \delta_1 = \begin{cases} 0, & \text{если } 1 - \sqrt[3]{\lambda_0} \leq 0, \\ 1 - \sqrt[3]{\lambda_0}, & \text{если } 0 < 1 - \sqrt[3]{\lambda_0} < \Delta, \\ \Delta, & \text{если } 1 - \sqrt[3]{\lambda_0} \geq \Delta; \end{cases}$$

т.е. решение будет зависеть от цены содержания провокатора в единицу времени. При высокой цене провокаторов внедрять вообще не выгодно.

Пример 3. Пусть, как и в примере 2, $F(x) = x$. Рассмотрим задачу (13) минимизации затрат на провокаторов при условии достижения определенного значения \hat{x} за K шагов:

$$\begin{cases} \frac{\delta_0}{1 - \delta_0} + \dots + \frac{\delta_{K-1}}{1 - \delta_{K-1}} \rightarrow \min_{0 \leq \delta_0, \dots, \delta_{K-1} \leq \Delta}, \\ 1 - (1 - \delta_0) \dots (1 - \delta_{K-1}) \geq \hat{x}. \end{cases}$$

Условия существования решения этой задачи, заключающиеся в том, что множество переменных, по которому берется минимум целевой функции, не пусто, вводят ограничения на параметры задачи: $\Delta \geq 1 - \sqrt[K]{1 - \hat{x}}$, т.е. для

достижения цели нужно иметь в своем распоряжении достаточное число провокаторов.

В силу монотонности целевой функции по каждой переменной ограничение выполняется как равенство, а в силу симметрии задачи минимум будет достигаться при одинаковых значениях δ_i . Таким образом, решением данной задачи будет $\delta_0 = \dots = \delta_{K-1} = 1 - \sqrt[K]{1 - \hat{x}}$.

Задача (11)–(12) для рассматриваемого случая непрерывных переменных примет следующий простой вид:

$$(19) \quad \begin{cases} H(x_K(\delta)) - c(\delta) \rightarrow \max_{\delta}, \\ (14), (15), \delta_k \in [0; \Delta]. \end{cases}$$

Задача (19) может быть решена численно при известных функциях выигрыша, затрат и распределения порогов. В частности, в силу утверждения 3 может быть использован двухшаговый метод, на первом этапе которого ищется

$$C(z) = \min_{\delta: \delta_k \in [0; \Delta], x_K(\delta) = z} \sum_{k=0}^{K-1} \frac{\delta_k}{1 - \delta_k}, \quad z \in [0; x_K(\Delta, \dots, \Delta)],$$

а на втором шаге решается скалярная задача

$$z^* = \arg \max_{z \in [0; x_K(\Delta, \dots, \Delta)]} [H(z) - \lambda_0 C(z)].$$

Другим возможным вариантом постановки задачи управления возбуждением толпы при $H(x) = x$, является следующий:

$$(20) \quad \begin{cases} x_K(\delta) + \sum_{k=0}^{K-1} \left[x_k(\delta) - \lambda_0 \frac{\delta_k}{1 - \delta_k} \right] \rightarrow \max_{\delta}, \\ (15), \delta_k \in [0; \Delta]. \end{cases}$$

Структура целевой функции в задаче (20) отличается от терминальной задачи (19) тем, что в первой выигрыш включает сумму долей действующих агентов во всех периодах времени.

Запишем «уравнение Беллмана» для задачи (20) в рамках выражения (14) при $H(x) = x$ (что по умолчанию будем предполагать в дальнейшем):

$$(21) \quad B(x, w) = w + (1 - w)F(x) - \lambda_0 \frac{w}{1 - w} \rightarrow \max_{w \in [0; \Delta]}.$$

Внутренний максимум в задаче (21), найденный из условий первого порядка, обозначим как

$$(22) \quad w(x) = \max \left\{ \min \left\{ \Delta; 1 - \sqrt{\frac{\lambda_0}{1 - F(x)}} \right\}; 0 \right\}.$$

В силу монотонности функции распределения $w(x)$ – невозрастающая функция.

Вычисляя $B(x, w(x)) = 1 + \lambda_0 - 2\sqrt{\lambda_0(1 - F(x))}$, получаем, что решение задачи (21) имеет три возможных «режима» (две границы отрезка $[0; \Delta]$ или внутренняя точка (22)):

$$(23) \quad w^*(x) = \arg \max_{w \in \{0; w(x); \Delta\}} B(x, w).$$

Качественный анализ зависимости решения (23) от параметра λ (напомним, что этот параметр отражает стоимость внедрения одного провокатора на один период времени) свидетельствует, что при очень высоких значениях λ оптимальным является нулевое число провокаторов ($w = 0$), при очень низких значениях λ – максимально возможное число провокаторов ($w = \Delta$). При «промежуточных» значениях λ оптимальными могут оказаться отличные от нуля или Δ доли внедряемых провокаторов.

Обозначим через δ^* решение задачи (20). Для динамической системы (15) справедливо следующее

Утверждение 5. Если для всех $x \in [0; x^(\Delta)]$ выполнено*

$$(24) \quad F(x) \geq 1 - (1 - x)^2 / \lambda_0,$$

то $x_k(\delta^)$ – неубывающая по k последовательность.*

Доказательство утверждения 5 приведено в Приложении.

Утверждение 6. Если функция распределения такова, что для всех $\alpha, \beta, \gamma \in [0; 1] : \alpha \geq \beta, \gamma \leq x^(\Delta)$ выполнено*

$$(25) \quad \beta + (1 - \beta)F(\alpha + (1 - \alpha)F(\gamma)) \leq \alpha + (1 - \alpha)F(\beta + (1 - \beta)F(\gamma)),$$

то существует оптимальная неубывающая последовательность δ^ .*

Доказательство утверждения 6 приведено в Приложении.

Класс функций распределения, удовлетворяющих условию (25), не пуст. Так, ему удовлетворяет $F(x) = x^2$ при $\gamma \leq \sqrt{\sqrt{2} - 1}$, т.е. при $\Delta \leq 0,388$; для равномерного распределения ($F(x) = x$) (25) обращается в тождество.

Аналогичный утверждению 6 результат, по-видимому, справедлив и для «вогнутых» функций распределения (с обратным неравенством типа (25)). Однако для них отличное от нуля РКП достижимо при сколь угодно малых управлениях (см. модели в [9, 10]), поэтому с точки зрения приложений этот случай представляется менее интересным.

В заключение настоящего раздела рассмотрим «асимптотику» решаемых задач при $K = +\infty$. Предположим, что: функция распределения порогов $F(\cdot)$ непрерывна, имеет единственную точку перегиба, $F(0) = 0$, уравнение $F(x) = x$ имеет на отрезке $[0; 1]$ единственное решение – точку $q > 0$, причем $\forall x \in (0; q)F(x) < x, \forall x \in (q; 1)F(x) > x$. Примерами функций распределений порогов, удовлетворяющих введенным предположениям, являются

функции, построенные на основании идентификации по результатам анализа ряда реальных онлайн-социальных сетей [7]. Также будем считать, что целью управления является «возбуждение» всех агентов с наименьшими затратами.

Из введенных предположений о свойствах функции распределения порогов следует, что если для некоторого периода времени l выполнено $x_l > q$, то для всех $k > l$ при $\delta_k \equiv 0$ последовательность $x_k(\delta)$ является неубывающей, причем $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = 1$. Содержательно это свойство означает, что рассматриваемая толпа такова, что область притяжения нулевого положения равновесия в отсутствие управления составляет полуинтервал $[0; q)$, т.е. в ней достаточно обеспечить «искусственное» возбуждение более чем q (доли) агентов, а затем даже в отсутствие управления эта толпа будет «сама» стремиться к единичному равновесному состоянию.

Обозначим через δ^l решение следующей задачи:

$$(26) \quad \sum_{k=0}^{l-1} \frac{\delta_k}{1 - \delta_k} \rightarrow \min_{\delta: \delta_k \in [0; \Delta], x_l(\delta) > q}.$$

Вычислим $Q_l = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{\delta_k^l}{1 - \delta_k^l}$ и найдем $l^* = \arg \min_{l=1,2,\dots} Q_l$.

Решение задачи (26) существует при условии

$$\forall x \in [0, q] \rightarrow \Delta + (1 - \Delta)F(x) > x,$$

которое также можно записать в виде

$$(27) \quad \Delta > \max_{x \in [0; q]} [x - (1 - \Delta)F(x)].$$

Обозначим через Δ^* инфимум тех Δ , которые удовлетворяют (27). Содержательно величина Δ^* представляет собой минимальное значение доли провокаторов, необходимое для того, чтобы толпа «проскочила» неустойчивое положение равновесия q , после чего двигалась бы к устойчивому равновесию, в котором возбуждены все агенты. Эта величина, зависящая от формы кривой $F(x)$ на отрезке $[0, q]$, представляет собой количественную характеристику свойства толпы не возбуждаться сильно при небольших количествах провокаторов. В этом смысле Δ^* отражает «инертность» толпы.

Утверждение 7. $\Delta^* = \max_{x \in [0, q]} \frac{x - F(x)}{1 - F(x)}$.

Доказательство утверждения 7 приведено в Приложении.

В силу введенных предположений о свойствах функции распределения структура оптимального решения рассматриваемой задачи характеризуется следующим образом.

Утверждение 8. Если выполнено условие (27), то

$$\delta^{l^*} = (\delta_0^{l^*} > 0; \delta_1^{l^*} > 0; \dots; \delta_{l^*-1}^{l^*} > 0; 0; 0; \dots).$$

Содержательно утверждение 8 означает, что с точки зрения минимизации затрат на возбуждение толпы, удовлетворяющей введенным предположениям, управление, вычисляемое в соответствии с (27), должно быть отличным от нуля только в первые (включая нулевой) l^* моментов времени.

Пример 4. В [6] была построена двухпараметрическая (с параметрами a и b) функция распределения порогов, наилучшим образом описывающая структуру распространения активности в русскоязычных сегментах онлайн-новых социальных сетей (СС) LiveJournal, FaceBook и Twitter. Эта функция имеет вид

$$(28) \quad F_{a,b}(x) = \frac{\arctg(a(x-b)) + \arctg(ab)}{\arctg(a(1-b)) + \arctg(ab)}, \quad a \approx [7; 15], \quad b \in [0; 1].$$

Выберем $a = 13$ (параметр, соответствующий СС Facebook), $b = 0,4$ (см. рисунок). Тогда $q \approx 0,375$ и $\Delta^* \approx 0,169$.

Отметим, что выше рассматривался случай управляемого вывода толпы из области притяжения нуля $[0; q]$. Возможны случаи, когда «самовозбуждение» толпы происходит из-за того, что соответствующими оказываются реализации случайной величины для порогов агентов с теоретической функцией распределения $F(\cdot)$. Модели, использующие для описания подобных эффектов аппарат больших уклонений, рассматривались в [16].

5. Вероятностные модели выявления провокаторов

Модифицируем рассматриваемую модель следующим образом. Пусть в периоде времени k , после того как центр выбрал соответствующую долю провокаторов δ_k , другой субъект (назовем его условно *метацентр*) наблюдает ситуацию и с вероятностью $p(\delta_k)$ обнаруживает наличие провокаторов (где $p(\cdot): [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ – неубывающая функция, $p(0) = 0$). В случае обнаружения провокаторов «игра останавливается», и доля действующих агентов во все последующие периоды времени равна нулю. Если метацентр провокаторов не обнаружил, то доля действующих агентов определяется (15), центр выбирает δ_{k+1} и т.д.

Вероятность того, что провокаторы не будут обнаружены до K -го периода, равна

$$(29) \quad P_K(\delta) = \prod_{k=0}^{K-1} (1 - p(\delta_k)).$$

Задачу управления, решаемую центром, при этом можно формулировать, например, следующим образом:

$$(30) \quad \begin{cases} x_K(\delta) \rightarrow \max_{\delta}, \\ P_K(\delta) \geq \hat{P}, \\ (15), \delta_k \in [0; \Delta], \end{cases}$$

где \hat{P} – заданная вероятность того, что в K -й момент времени в толпе будут иметься действующие агенты. Задача (29)–(30) с формальной точки зрения аналогична задаче (19) и в каждом конкретном случае может быть решена численно. Тем не менее в некоторых случаях можно априори сказать что-то о структуре оптимального решения. Например, следующее утверждение гласит, что если пороги агентов распределены равномерно, то оптимальным является унифицированное решение (в котором доля внедряемых в каждом периоде времени провокаторов постоянна – см. также утверждение 4).

Утверждение 9. Если $F(x) = x$ и $p(\rho) = \rho$, то существует оптимальное унифицированное решение ρ^ задачи (29)–(30):*

$$(31) \quad \rho^* = \min \left\{ \Delta; 1 - (\hat{P})^{1/K} \right\}.$$

Доказательство утверждения 9 приведено в Приложении.

В заключение настоящего раздела отметим, что еще одной возможной вероятностной моделью обнаружения провокаторов является основывающаяся на предположении, что в случае обнаружения метацентром провокаторов в периоде k их число в следующем периоде времени обнуляется, а дальше «игра» продолжается, но при условии, что в распоряжении центра остается доля $\Delta - \delta_k$ провокаторов.

6. Заключение

В статье рассмотрены различные задачи возбуждения толпы на основе модели Грановеттера с дискретным временем. Рассмотрен конечный и бесконечный временной горизонт. Для ряда задач с заданными характеристиками толпы приведены оптимальные в том или ином смысле решения либо показано, каким образом задачи сводятся к известным задачам численной оптимизации. Перспективными представляются формулировка и анализ аналогов рассмотренных выше моделей в непрерывном времени, что позволит использовать аппарат теории оптимального управления.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Рассмотрим правую часть выражения (7). В силу свойств функции распределения $F(\cdot)$, монотонности $\frac{u}{u+n}$ по $u \in \mathbb{N}$ и того, что $\frac{u}{u+n} \leq 1$ при любых $u, n \in \mathbb{N}$, выражение $\frac{u}{u+n} + \left(1 - \frac{u}{u+n}\right) F(v)$ монотонно возрастает по $u \in \mathbb{N}$ и $v \in [0; 1]$.

Рассмотрим момент времени $k = K - 1$. Максимум x_K достигается при максимально возможном x_{K-1} и $m_{K-1} = M$. Рассматривая последовательно аналогично все предыдущие периоды $0 \leq k \leq K - 1$, получаем, что и для них оптимальным является выбор $m_l = M$.

Доказательство утверждения 2. Фиксируем произвольный момент времени $k: 0 < k \leq K$ и произвольный момент времени $k': 0 \leq k' < k$. Из (7) и доказательства утверждения 1 следует, что

$$\forall m_{k'} < M \quad x_k(M, \dots, m_{k'}, \dots, M) \leq x_k(M, \dots, M, \dots, M).$$

Доказательство утверждения 5. Подставив выражение (22) в (15), получим условие монотонности в следующем виде:

$$1 - \sqrt{\frac{\lambda_0}{1 - F(x)}} + \sqrt{\frac{\lambda_0}{1 - F(x)}} F(x) \geq x,$$

что после преобразований приводит к выражению (24).

Доказательство утверждения 6. Пусть $\exists l: 0 < l < K - 1$ и $\delta_l^* > \delta_{l+1}^*$.

Если удастся найти $\delta_l \in [0; \Delta]$ и $\delta_{l+1} \in [0; \Delta]$ такие, что

$$(П.1) \quad \delta_l \leq \delta_{l+1},$$

$$(П.2) \quad x_{l+2}(x_l, \delta_l, \delta_{l+1}) = x_{l+2}(x_l, \delta_l^*, \delta_{l+1}^*),$$

$$(П.3) \quad c(\delta^*) \geq c(\delta_0^*, \dots, \delta_{l-1}^*, \delta_l, \delta_{l+1}, \delta_{l+2}^*, \dots, \delta_{K-1}^*),$$

то это будет свидетельствовать, что $\delta_0^*, \dots, \delta_{l-1}^*, \delta_l, \delta_{l+1}, \delta_{l+2}^*, \dots, \delta_{K-1}^*$ также является решением задачи (19).

Выберем $\delta_l = \delta_{l+1}^*$, $\delta_{l+1} = \delta_{l+1}^* + \varepsilon$, где $\varepsilon \in [0; \delta_l^* - \delta_{l+1}^*]$, тогда (П.1) выполнено. Условие (П.3) будет выполнено в силу монотонности функции затрат, а из выражения (П.2) получим

$$\begin{aligned} \delta_{l+1} + (1 - \delta_{l+1})F(\delta_l + (1 - \delta_l)F(x_l)) &= \\ = \delta_{l+1}^* + (1 - \delta_{l+1}^*)F(\delta_l^* + (1 - \delta_l^*)F(x_l)), \end{aligned}$$

т.е.

$$(П.4) \quad \varepsilon = \frac{(1 - \delta_{l+1}^*)[F(\delta_l^* + (1 - \delta_l^*)F(x_l)) - F(\delta_{l+1}^* + (1 - \delta_{l+1}^*)F(x_l))]}{1 - F(\delta_{l+1}^* + (1 - \delta_{l+1}^*)F(x_l))}.$$

Отметим, что при $F(x) = x$ $\varepsilon \equiv \delta_l^* - \delta_{l+1}^*$.

Из выражения (П.4) следует, что всегда $\varepsilon \geq 0$, а условие $\varepsilon \leq \delta_l^* - \delta_{l+1}^*$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \delta_{l+1}^* + (1 - \delta_{l+1}^*)F(\delta_l^* + (1 - \delta_l^*)F(x_l)) &\leq \\ \leq \delta_l^* + (1 - \delta_l^*)F(\delta_{l+1}^* + (1 - \delta_{l+1}^*)F(x_l)). \end{aligned}$$

В силу того, что $x_l \leq x^*(\Delta)$, и условия (25), последнее неравенство выполнено.

Приведенные выше рассуждения показывают, что убывающий участок из пары рядом стоящих элементов последовательности управлений δ можно заменить на «эквивалентный» неубывающий с сохранением значений x и условия оптимальности. Осталось показать, что, применяя эту операцию конечное число раз, можно сделать всю последовательность δ неубывающей. Действительно, пусть δ_m^* – минимальное значение из всей последовательности. Применим описанную процедуру конечное число раз (не более K) для того, чтобы это значение стояло на нулевом месте в новой последовательности.

Далее найдем следующее минимальное значение и передвинем его на первое место за не более чем $(K - 1)$ перестановок и т.д. Таким образом, число примененных перестановок будет ограничено сверху числом $K + (K - 1) + \dots + 1 = K(K + 1)/2$.

Доказательство утверждения 7. Возьмем произвольное число Δ , удовлетворяющее (27), т.е. $\Delta + (1 - \Delta)F(x) - x > 0$. Перепишем это выражение в виде

$$(1 - F(x)) \left(\Delta - \frac{x - F(x)}{1 - F(x)} \right) > 0.$$

Так как первый сомножитель положителен, отсюда следует, что

$$\forall x \in [0, q] \rightarrow \Delta > \frac{x - F(x)}{1 - F(x)},$$

откуда

$$\Delta \geq \max_{x \in [0, q]} \frac{x - F(x)}{1 - F(x)},$$

т.е. число $\max_{x \in [0, q]} \frac{x - F(x)}{1 - F(x)}$ является нижней гранью чисел Δ , удовлетворяющих (27). С другой стороны, для всех $\varepsilon > 0$ число $\max_{x \in [0, q]} \frac{x - F(x)}{1 - F(x)} + \varepsilon$ нижней гранью не является, поскольку для меньшего числа $\Delta = \max_{x \in [0, q]} \frac{x - F(x)}{1 - F(x)} + \frac{\varepsilon}{2}$ условие (27) выполняется

$$\begin{aligned} & (1 - F(x)) \left(\Delta - \frac{x - F(x)}{1 - F(x)} \right) = \\ & = (1 - F(x)) \left(\max_{x \in [0, q]} \frac{x - F(x)}{1 - F(x)} + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{x - F(x)}{1 - F(x)} \right) \geq \\ & \geq (1 - F(x)) \frac{\varepsilon}{2} > 0 \quad \forall x \in [0, q]. \end{aligned}$$

Тем самым по определению инфимума $\Delta^* = \max_{x \in [0, q]} \frac{x - F(x)}{1 - F(x)}$.

Доказательство утверждения 9. В силу неубывания $x_K(\delta)$ и невозрастания $P_K(\delta)$ по всем элементам вектора δ ограничение $P_K(\delta) \geq \hat{P}$ в оптимальном решении выполняется как равенство.

В силу утверждения 4 для любой последовательности δ существует эквивалентное ей (с точки зрения терминального значения доли действующих агентов) унифицированное решение.

Пусть в последовательности δ существует $l: 0 < l < K - 1$ и $\delta_l \neq \delta_{l+1} \in [0; \Delta]$. Покажем, что при $p(\rho) = \rho$ выполнено

$$P_K(\delta) = P_K(\delta_0, \dots, \delta_{l-1}, \rho(\delta_l, \delta_{l+1}), \rho(\delta_l, \delta_{l+1}), \delta_{l+2}, \dots, \delta_{K-1}).$$

Действительно, воспользовавшись выражением (29), нетрудно убедиться, что

$$(1 - \delta_l)(1 - \delta_{l+1}) \equiv (1 - \rho(\delta_l, \delta_{l+1}))^2.$$

Выражение (31) следует из унифицированности оптимального решения и выражения (29).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 2010.
2. *Кузнецов О.П.* Сложные сети и распространение активности // *АиТ.* 2015. № 12. С. 3–22.
Kuznetsov O.P. Complex Networks and Activity Spreading // *Autom. Remote Control.* 2015. V. 76. No. 12. P. 2091–2109.
3. *Словохотов Ю.Л.* Физика и социофизика. I, II, III // *Проблемы управления.* 2012. № 1. С. 2–20; № 2. С. 2–31; № 3. С. 2–34.
4. *Барабанов И.Н., Коргин Н.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Динамическая модель информационного управления в социальных сетях // *АиТ.* 2010. № 11. С. 172–182.
Barabanov I.N., Korgin N.A., Novikov D.A., Chkhartishvili A.G. Dynamic Models of Informational Control in Social Networks // *Autom. Remote Control.* 2010. V. 71. No. 11. P. 2417–2126.
5. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н.* Синтез динамических моделей информационного управления в многоагентных сетях // *Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Приборостроение».* 2015. № 1. С. 58–66.
6. *Бреер В.В., Новиков Д.А., Рогаткин А.Д.* Микро- и макромоделли социальных сетей: теория // *Проблемы управления.* 2014. № 6. С. 28–33.
Breer V.V., Novikov D.A., Rogatkin A.D. Micro- and Macromodels of Social Networks. I. Theory Fundamentals // *Autom. Remote Control.* 2016. V. 77. No. 2. P. 313–320.
7. *Батов А.В., Бреер В.В., Новиков Д.А., Рогаткин А.Д.* Микро- и макромоделли социальных сетей: идентификация и имитационные эксперименты // *Проблемы управления.* 2014. № 6. С. 45–51.
Batov A.V., Breer V.V., Novikov D.A., Rogatkin A.D. Micro- and Macromodels of Social Networks. II. Identification and Stimulation Experiments // *Autom. Remote Control.* 2016. V. 77. No. 2. P. 321–331.
8. *Новиков Д.А.* Большие данные – от Браге к Ньютону // *Проблемы управления.* 2013. № 6. С. 15–23.
9. *Бреер В.В., Новиков Д.А., Рогаткин А.Д.* Стохастические модели управления толпой // *Управление большими системами.* 2014. № 52. С. 85–117.
10. *Новиков Д.А.* Модели информационного противоборства в управлении толпой // *Проблемы управления.* 2015. № 3. С. 29–39.
11. *Бреер В.В., Новиков Д.А.* Модели управления толпой // *Проблемы управления.* 2012. № 2. С. 38–44.
Breer V.V., Novikov D.A. Models of Mob Control // *Autom. Remote Control.* 2013. V. 74. No. 12. P. 2143–2154.
12. *Granovetter M.* Threshold Models of Collective Behavior // *AJS.* 1978. V. 83. No. 6. P. 1420–1443.

13. *Бреер В.В.* Модели конформного поведения (обзор) // Проблемы управления. 2014. № 1. С. 2–13; № 2. С. 2–17.
14. *Бреер В.В.* Теоретико-игровые и стохастические модели коллективного бинарного выбора // Управление большими системами. 2016. (в печати)
15. *Бреер В.В.* Теоретико-игровая модель неавтономного порогового конформного поведения // Управление большими системами. 2010. № 31. С. 162–176.
Breer V.V. A Game-theoretic Model of Non-anonymous Threshold Conformity Behavior // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 7. P. 1256–1264.
16. *Бреер В.В., Рогаткин А.Д.* Вероятностная модель порогового поведения в мультиагентных системах // АиТ. 2015. № 8. С. 56–77.
Breer V.V., Rogatkin A.D. Probabilistic Model of Threshold Behavior in Multiagent Systems // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 8. P. 1369–1386.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Губко.

Поступила в редакцию 24.07.2015, окончательная версия получена 01.06.2016.