УДК 519.865.3

РЕФЛЕКСИВНАЯ ИГРА ПОЛКОВНИКА БЛОТТО

В.О. Корепанов, Д.А. Новиков
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

Для хрестоматийной модели – игры полковника Блотто – рассматривается «рефлексивное» расширение. Исследуются свойства равновесия соответствующей игры рангов.

Ключевые слова: математическое моделирование, игра полковника Блотто, стратегическая рефлексия, игра рангов.

UDC 519.865.3

REFLEXIVE COLONEL BLOTTO GAME

V.O. Korepanov, D.A. Novikov
V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, RAS

The reflexive extension of the canonical colonel Blotto game is considered. The ranks game equilibria properties are explored.

Keywords: mathematical modeling of warfare, colonel Blotto game, strategic reflexion, ranks game.

1. Игра полковника Блотто

Игрой полковника Блотто (ИПБ), впервые рассмотренной в [1], называется игра двух лиц, в которой игроки однократно, одновременно и независимо (не зная выбора оппонента) распределяют свои ограниченные *ресурсы* между конечным числом *объектов* (полей сражений или объектов защиты/нападения [2], одновременных конкурсов/аукционов [3], групп избирателей [4] и т.п.). Данная модель является каноническим (и одним из первых) примером приложения теории игр к военному делу [5, 6].

Обозначим через $N = [1, \ldots, n]$ множество объектов, через $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – действие первого игрока, через $y = (y_1, \ldots, y_n)$ – действие второго игрока, где $x_i \geq 0$ ($y_i \geq 0$) – количество ресурса, выделенного первым (вторым) игроком на i-ый объект, $i = \overline{1, n}$. Ограниченность ресурсов отражена условиями

$$\sum_{i \in N} x_i \leq R_x, \sum_{i \in N} y_i \leq R_y \quad (1)$$

2. Аукционная модель

В рамках *аукционной модели* победу на объекте одерживает игрок, выделивший на него большее количество ресурсов (в случае равенства ресурсов каждый из игроков одерживает победу с вероятностью 1/2). Ценность i-го объекта для первого (второго) игрока обозначим через X_i (Y_i). Тогда выигрыши игроков в аукционной модели будут определяться следующим образом:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \sum_{i\in N} X_i I(x_i > y_i) + \frac{1}{2}\sum_{i\in N} X_i I(x_i = y_i) \\ f_y(x,y) &= \sum_{i\in N} Y_i I(y_i > x_i) + \frac{1}{2}\sum_{i\in N} Y_i I(x_i = y_i) \end{aligned}, \quad (2)$$

где $I(\cdot)$ – функция-индикатор. Более общим является случай, когда ограничения типа (1) отсутствуют, но из выигрыша (2) вычитаются затраты, монотонные по суммарному количеству использованного игроком ресурса.

Случаи $n = 1$ и $n = 2$ являются тривиальными. Действительно, при $n = 1$ побеждает игрок, обладающий бо́льшим количеством ресурса (в случае равенства ресурсов победа каждого равновероятна). При $n = 2$ оптимальной стратегией каждого игрока является приоритетное выделение ресурса на наиболее ценный для него объект.

Простейшим является *симметричный* ($X_i = Y_i$, $i \in N$, $R_x = R_y$) вариант *дискретной* (ресурсы игроков дискретны) игры полковника Блотто, являющейся матричной игрой (с нулевой суммой). Впервые решение (равновесие Нэша в смешанных стратегиях) этой игры для случая $n = 3$ было описано в [7], в [2] были найдены решения для симметричного случая для произвольного конечного n и для случая $X_i = Y_i$, $i \in N$, $R_x \neq R_y$ при $n = 2$. Следующим шагом была частичная характеризация в [8] равновесия Нэша для случая $X_i = Y_i$, $i \in N$, $R_x \neq R_y$ при произвольном конечном n. В дальнейшем, как правило (см. обзор в [9]) исследователи ограничивались либо дискретным, либо симметричным непрерывным случаями. Существенное продвижение в характеризации аукционной модели было получено в [9], следующими шагами можно считать статью [10], где характеризуется равновесие Нэша в чистых стратегиях для несимметричного случая, и [11], где произведено обобщение ИПБ на стохастический случай.

Описание экспериментальных исследований ИПБ можно найти в [12, 13].

В [3] ИПБ интерпретируется в терминах одновременных *конкурсов* (применяется аукционное решение), причем учитываются затраты на используемые игроками ресурсы. Динамическое обобщение ИПБ – многоэтапный конкурс (Dynamic Contest) [14], в котором игроки на каждом шаге выбирают количество расходуемого ресурса, победитель определяется вероятностной моделью, а оставшийся ресурс уменьшается на долю израсходованного (в игре Блотто эта доля равна единице) [15].

3. Вероятностная модель

В *вероятностной модели* ИПБ вероятность $p_x(x_i, y_i)$ победы первого игрока на i-ом объекте не зависит от других объектов и «пропорциональна» количеству выделенного им на этот объект ресурса и «обратно пропорциональна» взвешенной сумме ресурсов, выделенных на этот объект обоими игроками, например [16]:

$$p_x(x_i, y_i) = \frac{\alpha_i (x_i)^{r_i}}{\alpha_i (x_i)^{r_i} + (y_i)^{r_i}},\ p_y(x_i, y_i) = 1 - p_x(x_i, y_i) \quad (3)$$

где $r_i \in (0; 1]$, $\alpha_i > 0$, $p_x(x_i = 0, y_i = 0) = \frac{\alpha_i}{\alpha_i + 1}$ (см. [12, 8, 26], общее обсуждение свойств подобных зависимостей в [17, 18], а также обзор [19]). Содержательно, коэффициенты $\{\alpha_i\}$ позволяют соизмерять эффективности использования игроками ресурсов на одном и том же объекте.

Выигрыши игроков в вероятностной модели определяются как математическое ожидание суммарного выигрыша, то есть следующим образом:

$$F_x(x, y) = \sum_{i \in N} X_i\, p_x(x_i, y_i),\ F_y(x, y) = \sum_{i \in N} Y_i\, p_y(x_i, y_i) \quad (4)$$

Равновесием Нэша в чистых стратегиях (x^*, y^*) является пара векторов, удовлетворяющих условиям (1), таких, что $\forall\, (x, y)$, удовлетворяющих условиям (1), выполнено

$$F_x(x^*, y^*) \ge F_x(x, y^*),\ F_y(x^*, y^*) \ge F_y(x^*, y) \quad (5)$$

Вероятностная модель в определенном смысле «проще», чем аукционная – как показано в [8], единственным равновесием Нэша для случая $X_i = Y_i = \text{Const}$, $r_i = 1$, $\alpha_i = 1$, $i \in N$, $R_x \ne R_y$ является использование игроками чистых стратегий, заключающихся в равном распределении имеющихся у них ресурсов между объектами.

В [16] найдено равновесие в чистых стратегиях для случая $X_i = Y_i$, при произвольных $r_i \in (0; 1]$, $\alpha_i > 0$, $i \in N$. Приведем аналогичный результат для случая различных ценностей для игроков победы на объекте (в общем случае $X_i \ne Y_i$, $i \in N$).

Условиями первого порядка для игроков являются (легко показать, что условия (1) в равновесии выполняются как равенства)

$$\frac{\alpha_i r_i (x_i^*)^{r_i - 1} (y_i^*)^{r_i}}{[\alpha_i (x_i^*)^{r_i} + (y_i^*)^{r_i}]^2} X_i = \lambda_x, i \in N \quad (6)$$

$$\frac{\alpha_i r_i (x_i^*)^{r_i} (y_i^*)^{r_i - 1}}{[\alpha_i (x_i^*)^{r_i} + (y_i^*)^{r_i}]^2} Y_i = \lambda_y, i \in N \quad (7)$$

где λ_x и λ_y – множители Лагранжа, соответствующие первому и второму условиям выражения (1).

Разделив (6) на (7), получим

$$\frac{y_i}{x_i}\frac{X_i}{Y_i} = \frac{\lambda_x}{\lambda_y}, i \in N \quad (8)$$

В частном случае, когда $X_i = Y_i = V_i$, из (8) и (3) (с учетом монотонности (1) по действию игрока) следует, что (см. также [16])

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_y} = \frac{R_y}{R_x} \quad (9)$$

Из (6) и (8) получаем:

$$x_i^* = \frac{\alpha_i r_i (\frac{X_i}{Y_i}\frac{\lambda_x}{\lambda_y})^{r_i} X_i}{\lambda_x \left[\alpha_i + (\frac{X_i}{Y_i}\frac{\lambda_x}{\lambda_y})^{r_i}\right]^2}, i \in N, \quad (10)$$

$$y_i^* = \frac{\alpha_i r_i (\frac{X_i}{Y_i}\frac{\lambda_x}{\lambda_y})^{r_i} Y_i}{\lambda_y \left[\alpha_i + (\frac{X_i}{Y_i}\frac{\lambda_x}{\lambda_y})^{r_i}\right]^2}, i \in N \quad (11)$$

Условия первого порядка (10) и (11) являются общей характеризацией равновесия Нэша для вероятностной модели ИПБ.

При $X_i = Y_i = V_i$, $\alpha_i = r_i = 1$, $i \in N$, из (10) и (11) с учетом (8) следуют выражения для равновесных действий и выигрышей, полученные в [8]:

$$x_i^* = \frac{V_i}{V} R_x, y_i^* = \frac{V_i}{V} R_y, i \in N, \quad (12)$$

$$F_x(x^*, y^*) = \frac{R_x}{R_x + R_y} V, F_y(x^*, y^*) = \frac{R_y}{R_x + R_y} V, \quad (13)$$

где $V = \sum_{i=1}^{n} V_i$, то есть игроки делят свой ресурс пропорционально ценности объектов и получают выигрыш, пропорциональный их суммарным ресурсам. Отметим, что при этом равновесные действия каждого из игроков зависят только от «их собственных» параметров – так, например, действия первого игрока x^* не зависят от суммарного количества ресурса R_y у второго игрока и т.п.

При $X_i = Y_i = V_i$, $i \in N$, из (10) и (11) с учетом (8) следуют выражения для равновесных выигрышей, полученные в [16] (там же приведены и аналитические выражения для равновесных действий игроков):

$$F_x(x^*, y^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i (R_x)^{r_i}}{\alpha_i (R_x)^{r_i} + (R_y)^{r_i}} V_i, F_y(x^*, y^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(R_y)^{r_i}}{\alpha_i (R_x)^{r_i} + (R_y)^{r_i}} V_i. \quad (14)$$

Отметим, что выражения (12)-(14) можно интерпретировать как пропорциональный механизм распределения ресурса (механизм прямых приоритетов) [20].

Система (1), (10), (11) состоит из 2 n + 2 уравнений и содержит столько же неизвестных, однако записать ее решение в аналитическом виде представляется затруднительным (в отличие от [16], где предполагалось, что каждый объект игроки оценивают одинаково). Поэтому представляет интерес исследование различий в оценках игроками одних и тех же объектов [21].

4. Исследование равновесий

Предположим, что $n = 2$ и $\alpha_i = r_i = 1$, и обозначим $x_1 = x$, $y_1 = y$. Тогда из (1) следует, что $x_2 = R_x - x$, $y_2 = R_y - y$, а выражения (10)-(11) примут вид:

$$x = \frac{\lambda_y (X_1)^2 Y_1}{\left[\lambda_y Y_1 + \lambda_x X_1\right]^2}, R_x - x = \frac{\lambda_y (X_2)^2 Y_2}{\left[\lambda_y Y_2 + \lambda_x X_2\right]^2}, \quad (15)$$

$$y = \frac{\lambda_x X_1 (Y_1)^2}{\left[\lambda_y Y_1 + \lambda_x X_1\right]^2}, R_y - y = \frac{\lambda_x X_2 (Y_2)^2}{\left[\lambda_y Y_2 + \lambda_x X_2\right]^2}. \quad (16)$$

Система уравнений (15)-(16) допускает простое численное решение. Приведем пример.

Пример 1. Пусть $R_x = R_y = 1$, $Y_1 = Y_2 = 1$. Исследуем зависимость оптимальных действий первого и второго игроков при изменении параметров X_1 и X_2 (будем считать, что $X_1 + X_2 = 2$, то есть суммарная оценка первым игроком ценности объектов постоянна). График зависимости оптимальных действий первого и второго игроков от оценки X_1 приведен на Рис. 1.

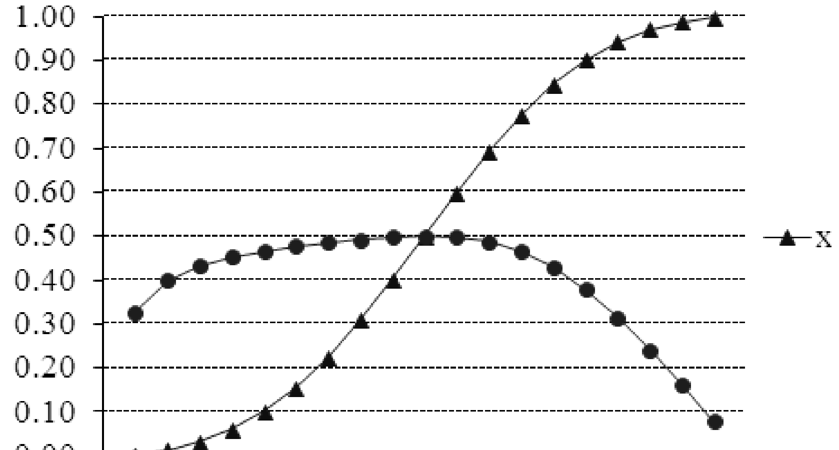

Рис. 1. Зависимость количеств ресурса, выделяемых игроками в равновесии на первый объект, в зависимости от X_1

Видно, что с ростом ценности первого объекта для первого игрока, он выделяет на него все большее количество ресурса x. Зависимость оптимального действия y второго игрока от X_1 не монотонна.

Параметрическая зависимость равновесия Нэша от параметра X_1, изменяющегося от 0.1 до 1.9 с шагом 0.1, представлена на Рис. 2.

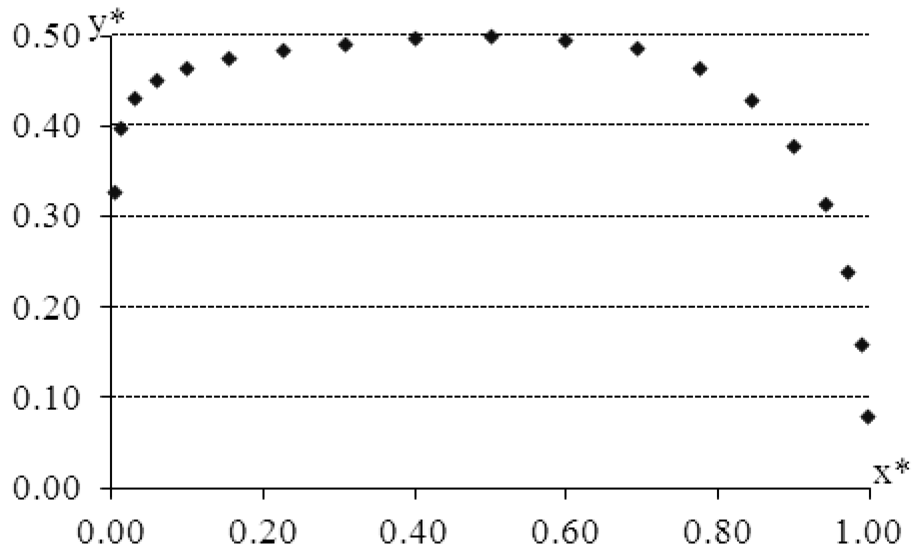

Рис. 2. Параметрическая зависимость равновесия Нэша от X_1

Для случая двух игроков возможен анализ их равновесных действий в терминах наилучших ответов [22]. Действительно, для игроков с целевыми функциями

$$F_x(x,y) = \frac{x}{x+y} X_1 + \frac{R_x - x}{R_x + R_y - x - y} X_2, \quad (17)$$

$$F_y(x,y) = \frac{y}{x+y} Y_1 + \frac{R_y - y}{R_x + R_y - x - y} Y_2 \quad (18)$$

наилучшими ответами будут (запишем их в параметрической форме как условия первого порядка):

$$\frac{y}{(x+y)^2} X_1 - \frac{R_y - y}{(R_x + R_y - x - y)^2} X_2 = 0, \quad (19)$$

$$\frac{x}{(x+y)^2} Y_1 - \frac{R_x - x}{(R_x + R_y - x - y)^2} Y_2 = 0. \quad (20)$$

Графики параметрических кривых (19) и (20) на плоскости (x, y) для случая $R_x = R_y = 1$ приведены на Рис. 3 (непрерывные кривые соответствуют симметричному случаю $X_1 = X_2 = Y_1 = Y_2$; пунктирные кривые – «сильно несимметричному» случаю: $X_1 = 7\,X_2$, $Y_2 = 7\,Y_1$).

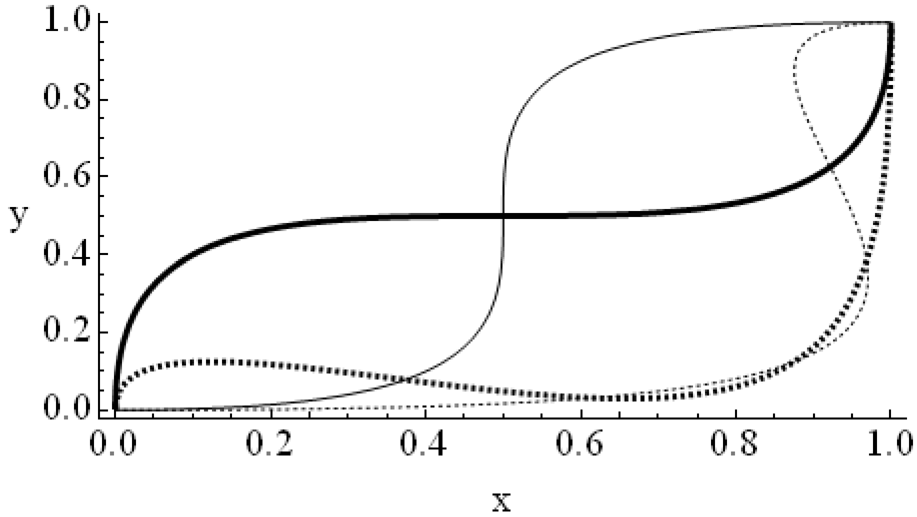

Рис. 3. Кривые наилучших ответов

Равновесие Нэша по определению является точкой пересечения кривых наилучших ответов. В симметричном случае существует одно симметричное равновесие Нэша (точка A на рис. 3). В несимметричном случае ситуация сложнее – существуют три равновесия Нэша – см. точки B, C и D на рис. 3. Наличие нескольких равновесий существенно усложняет их вычисление и анализ. •

5. Стратегическая рефлексия в ИПБ

С точки зрения теории игр и рефлексивных моделей принятия решений выделяют стратегическую и информационную рефлексию [23].

Информационная рефлексия – процесс и результат размышлений игрока о том, каковы значения неопределенных параметров, что об этих значениях знают и думают его оппоненты (другие игроки). При этом собственно «игровая» компонента отсутствует, так как никаких решений игрок не принимает.

Иными словами, информационная рефлексия относится к информированности игрока о природной реальности (какова игра) и о рефлексивной реальности (какой видят игру другие). Информационная рефлексия логически предшествует рефлексии несколько иного рода – стратегической рефлексии.

Стратегическая рефлексия – процесс и результат размышлений игрока о том, какие принципы принятия решений используют его оппоненты (другие игроки) в рамках той информированности, которую он им приписывает в результате информационной рефлексии.

Таким образом, информационная рефлексия имеет место только в условиях неполной информированности, и ее результат используется при принятии решений (в том числе при стратегической рефлексии). Стратегическая рефлексия имеет место даже в случае полной информированности, предваряя принятие игроком решения о выборе действия. Другими словами, информационная и стратегическая рефлексии могут изучаться независимо, однако в условиях неполной информированности обе они имеют место.

Рассмотрим аспекты стратегической рефлексии для ИПБ. Пусть $X_i = Y_i = V_i$, $\alpha_i = r_i = 1$, $i \in N$, тогда равновесные действия игроков и их выигрыши в рамках вероятностной модели определяются выражениями (12) и (13) соответственно. Использование концепции равновесия Нэша, как прогнозируемого устойчивого исхода некооперативной игры, подразумевает, что параметры игры являются *общим знанием* [23]. ИПБ в рамках вероятностной модели описывается, во-первых, кортежем $(N, R_x, R_y, \{V_i\})$, включающим множество объектов, ограничения на ресурсы игроков и ценности объектов для игроков. Во-вторых, необходимо задать «правила игры» – вероятности выигрыша (3) и целевые функции (4), стремление к максимизации которых отражает рациональность поведения игроков. Условно можно считать, что информационная рефлексия соответствует отсутствию общего знания относительно количеств ресурсов игроков и ценностей для них объектов, а стратегическая рефлексия – относительно принципов принятия игроками решений (экспериментальное исследование «стратегической рефлексии» в игре полковника Блотто в [24]).

Из выражения (12) следует, что, в частности, если $R_y > R_x$, то $\forall\, i \in N$ выполнено $x_i^* < y_i^*$ [16, 25], то есть по критерию (2) первый игрок проигрывает второму игроку на всех объектах. Рациональный игрок при этом может задуматься, правильно ли он действует, и, быть может, пересмотреть свои принципы принятия решений.

Обозначим через $BR_x(y) = (u_1\, y_1 + \varepsilon, \ldots, u_n\, y_n + \varepsilon)$ – вектор наилучшего в смысле критерия (2) ответа первого игрока на выбор вторым игроком вектора действий y, где n-мерный вектор $u = (u_1, \ldots, u_n)$ является решением следующей задачи о ранце:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} u_i V_i \to \max\limits_{u_i \in \{0;1\}}, \\ \sum_{i=1}^{n} u_i y_i \le R_x, \end{cases} \qquad (21)$$

а $\varepsilon = \frac{1}{n}(R_x - \sum_{i=1}^{n} u_i y_i)$, то есть будем считать, что игрок стремится победить на наиболее ценном для него (в рамках ресурсных ограничений) наборе объектов, а остаток ресурса распределяет поровну между всеми объектами.

Аналогично введем $BR_y(x) = (v_1\, x_1 + \delta, \ldots, v_n\, x_n + \delta)$ – вектор наилучшего в смысле критерия (2) ответа второго игрока на выбор первым игроком вектора действий x, где n-мерный вектор $v = (v_1, \ldots, v_n)$ является решением следующей задачи о ранце:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} v_i V_i \to \max\limits_{v_i \in \{0;1\}}, \\ \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \le R_y, \end{cases} \quad (22)$$

а $\delta = \frac{1}{n}(R_y - \sum_{i=1}^{n} u_i x_i)$.

Равновесие Нэша в аукционной модели ИПБ может строиться и исследоваться с помощью анализа свойств отображений наилучших ответов $BR_x(\cdot)$ и $BR_y(\cdot)$. Однако нас будут интересовать эффекты стратегической рефлексии. Для их отражения предположим, что нерефлексирующие игроки выбирают равновесие Нэша, соответствующее вероятностной модели (12) ИПБ. Игрок первого ранга рефлексии выбирает свои действия как наилучший в смысле (21) или (22) ответ на действия нерефлексирующего оппонента, считая, что последний действует в рамках вероятностной модели.

В соответствии с принятой в теории рефлексивных игр традицией будем считать, что игрок, имеющий некоторый ранг стратегической рефлексии, считает оппонента имеющим ранг на единицу меньше его собственного [26, 21, 27, 23]. То есть, имеет место следующая «цепочка»:

$$x^1 = BR_x(y^*), y^1 = BR_y(x^*),$$

$$x^2 = BR_x(y^1) = BR_x(BR_y(x^*)), y^2 = BR_y(x^1) = BR_y(x^1), \ldots, \quad (23)$$

$$x^k = \underbrace{BR_x(BR_y(\ldots(\cdot)\ldots))}_{k}, y^m = \underbrace{BR_y(BR_x(\ldots(\cdot)\ldots))}_{m},$$

где x^k (y^m) – действие первого (второго) игрока, обладающего k-ым (m-ым) рангом стратегической рефлексии, $k, m = 1, 2, \ldots$.

Исследуем *игру рангов* [23], в которой первый и второй игроки выбирают не количества ресурса, как в исходной ИПБ, а свои ранги, которые в соответствии с (23) детерминируют распределение ресурсов и, следовательно, выигрыши игроков (2). В игре рангов первый игрок выбирает свой ранг $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, второй игрок – свой ранг $m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Каждой паре рангов ставится в соответствие пара чисел $(f_x(k, m), f_y(k, m))$ – выигрышей соответственно первого и второго игрока. То есть рассматриваемая игра рангов является (в общем случае бесконечной) биматричной игрой (в рассматриваемой модели – игрой с постоянной суммой). Отметим, что исследованные на сегодняшний день игры рангов (см. [28, 29, 23]) были конечными, так как «надстраивались» над конечными матричными или биматричными играми.

Для определенности будем считать, что выполнено $R_y > R_x$. С учетом выражения (12) при $x = x^*$, $y = y^*$ задачи (21) и (22) примут соответственно вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} u_i V_i \to \max_{u_i \in \{0;1\}}, \\ \sum_{i=1}^{n} u_i V_i \le V \frac{R_x}{R_y}, \end{cases} \quad (24)$$

и

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} v_i V_i \to \max_{v_i \in \{0;1\}}, \\ \sum_{i=1}^{n} v_i V_i \le V \frac{R_y}{R_x}. \end{cases} \quad (25)$$

Как отмечалось выше, второй игрок в равновесии Нэша (12) имеет преимущество на всех объектах. Из (25) следует, что наилучшим ответом второго игрока на фиксированную стратегию первого игрока будет выделять на каждый объект столько же ресурса, сколько выделил первый, а остаток ресурса распределять, например, поровну между всеми объектами (ограничению в задаче (25) удовлетворяет любой, даже состоящий из всех единиц, вектор). При этом второй игрок будет иметь преимущество на всех объектах. Другими словами,

$$\forall l \in \{0,1,2,\ldots\}: \; f_x(l, l+1) = 0, \; f_y(l, l+1) = V \quad (26)$$

Исследуем теперь поведение первого игрока. Начнем с примера.

Пример 2. Пусть $n = 3$, $V_1 = 1$, $V_2 = 2$, $V_3 = 3$, $R_x = 3$, $R_y = 4$. Равновесием Нэша (отметим, что равновесием в игре с критериями (4)) является $x^* = (1/2, 1, 3/2)$, $y^* = (2/3, 4/3, 2)$. Выигрыши (2) игроков в равновесии $f_x(x^*, y^*) = 0$, $f_x(x^*, y^*) = V = 6$.

Вычисляя наилучшие ответы игроков в соответствии с выражениями (21)-(22), получим следующую биматрицу выигрышей для игры рангов (ограничимся в настоящем примере третьим рангом).

		Ранг рефлексии второго игрока			
		0	**1**	**2**	**3**
Ранг рефлексии первого игрока	**0**	(0; 6)	(0; 6)	(2; 4)	(2; 4)
	1	(4; 2)	(3; 3)	(0; 6)	(0; 6)
	2	(1; 5)	(4; 2)	(0; 6)	(0; 6)
	3	(3; 3)	(3; 3)	(5; 1)	(5; 1)

В данной игре с постоянной суммой гарантирующая стратегия первого игрока – выбирать третий ранг рефлексии, второго игрока – нулевой или первый ранг.

Интересно, что в рассматриваемом примере первый игрок, обладающий меньшим количеством ресурса, в игре рангов обеспечивает себе половину суммарного выигрыша (3 из 6) по сравнению с нулевым значением выигрыша в равновесии Нэша. Более того, комбинации рангов (3, 2) или (3, 3) дают первому игроку еще больший выигрыш – 5 из 6. Этот эффект достигается за счет того, что мы «искусственно» ограничили ранги рефлексии игроков. Действительно, если ограничиться не третьим, а четвертым рангом, то максимальный гарантированный выигрыш первого игрока будет достигаться на четвертом ранге, а третий станет «доминируем» четвертым рангом второго игрока, и т.д. В общем случае, в соответствии с (26), для любого ранга рефлексии первого игрока выбор вторым игроком на единицу большего ранга приводит к тому, что выигрыш первого становится равным нулю.

Условный качественный вывод из рассмотренного примера – в условиях нехватки ресурсов (по сравнению с оппонентом), можно увеличить свой выигрыш за счет увеличения ранга своей рефлексии при условии ограниченности рангов рефлексии оппонента. Другими словами, первому игроку следует всегда выбирать максимальный ранг (если последний больше ранга оппонента). •

Исследуем вопрос о максимальном целесообразном ранге рефлексии игроков – таком ранге, выше которого использовать игрокам не имеет смысла, даже при условии гипотетической неограниченности рангов рефлексии.

Был проведён вычислительный эксперимент с целью поиска повторяемости элементов в матрицах выигрышей игроков, это означало бы ограниченность максимального целесообразного ранга рефлексии, т.к. повышение ранга не добавляло бы новых возможных комбинаций выигрышей в игре рангов.

В эксперименте случайно генерировались ИПБ, в количестве 100 штук, со следующими параметрами: $n = 10$, $\{V_i\}$ – случайные вещественные числа от 2 до 100, $R_x = \Sigma V_i / 3$, $R_y = 2\,R_x$.

Для этих ИПБ рассматривались биматричные игры рангов размерности 2000×2000 и вычислялись соответствующие максимальные целесообразные ранги рефлексии (МЦР). Пусть A – матрица выигрышей игрока 1, A_i – строка матрицы A, $i = 1, \dots, r$, $r = 2000$. Пусть m и d – минимальные неотрицательные числа, такие, что матрица A представима как последовательность строк $(A_1, \dots, A_m, \{A_{m+1}, \dots, A_{m+d}\}, A_{m+pd+1}, \dots, A_{m+pd+q})$, где скобки $\{\dots\}$ обозначают минимум двукратное повторение, $p = \lfloor (r - m) / d \rfloor$, $q = r - m - p\,d$. Тогда МЦР игрока будет равен $(m + d)$.

По результатам данного эксперимента, максимальный целесообразный ранг рефлексии поднимался до 2000 только в 4 ИПБ из ста. В среднем максимальный целесообразный ранг рефлексии первого игрока равен 231.57, второго игрока – 230.16.

График полученных МЦР для первого игрока представлен на рис. 4. Следует отметить условность результатов проведенного вычислительного эксперимента – действительно, сложно представить себе игрока, обладающего сотым рангом рефлексии.

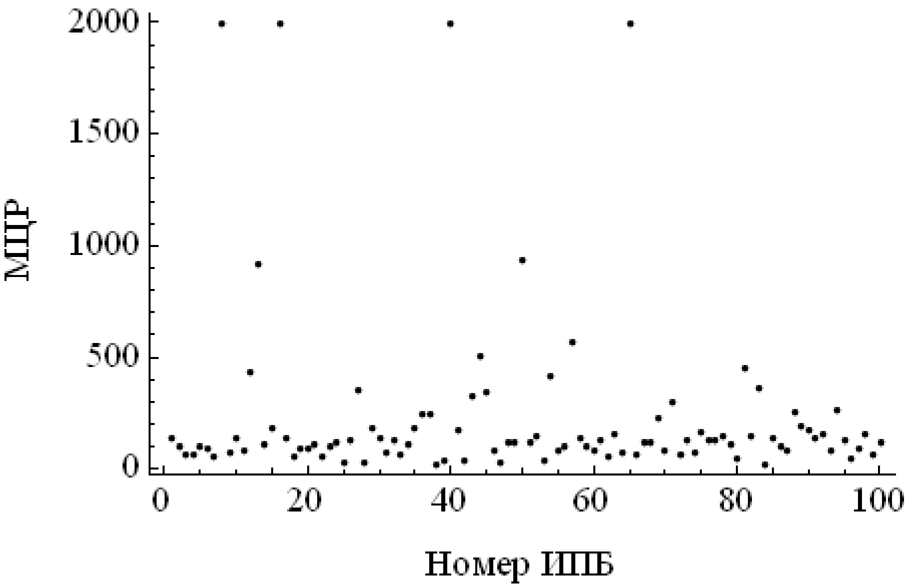

Рис. 4. Максимальный целесообразный ранг рефлексии для серии случайных ИПБ

Во всех 100 ИПБ, максимальный гарантированный результат игрока 1 равен 0, максимальный гарантированный результат игрока 2 не поднимается выше 0.564 от суммарного выигрыша.

6. Информационная рефлексия в ИПБ

Рассмотрим теперь информационную рефлексию, в рамках которой взаимная информированность игроков описывается структурой информированности, а равновесием их игры является информационное равновесие [23].

В силу выражения (12) равновесное действие каждого игрока зависит только от его оценок ценности объектов и имеющегося у него количества ресурса, и не зависит от параметров оппонента.

Предположим, что могут различаться как оценки игроками ценностей объектов, так и их представления об имеющихся у оппонента ресурсах. Следуя системе обозначений, принятых в теории рефлексивных игр при описании информационной рефлексии [23], обозначим V_{ij} (R_{il}) – оценку i-ым игроком ценности j-го объекта (количества ресурса), $i, l = 1, 2$, $j \in N$. Естественно считать, что сам игрок достоверно знает количество имеющегося у него ресурса, т.е. $R_{11} = R_x$, $R_{22} = R_y$.

Условием стабильности информационного равновесия будет совпадение выбираемых игроками действий с действиями, ожидаемыми от них оппонентами, то есть

$$\frac{V_{ij}}{\sum_{l \in N} V_{il}} R_{ii} = \frac{V_{3-i,j}}{\sum_{l \in N} V_{3-i,l}} R_{3-i,i}, i = 1,2, j \in N \quad (27)$$

Если говорить об информационном управлении (воздействии на представления игроков о ценностях объектов, представлениях оппонентов и имеющихся у них ресурсах, представлениях о представлениях и т.д.), то, изменяя V_{ij}, управляющий орган может реализовать как информационное равновесие любую комбинацию векторов действий, удовлетворяющих ограничениям (1).

7. Заключение

Проведённый обзор моделей ИПБ говорит об актуальности исследования этого класса игровых моделей, ввиду их приложений для военных игр, для размещения ресурсов в играх голосования, для оптимальных стратегий в одновременных конкурсах/аукционах, а также в силу отсутствия полного аналитического решения в сложных случаях.

В настоящей работе проведена оценка целесообразности применения концепции рефлексивных игр к аукционной модели ИПБ. Описаны эксперименты для исследования стратегической рефлексии игроков – способа размышления игроков, знающих параметры друг друга и опирающихся на решение вероятностной модели ИПБ. Эксперименты показали, что максимальный целесообразный ранг стратегической рефлексии игроков, с одной стороны, почти всегда ограничен, с другой стороны, его значение велико, что вносит ограничения на минимальную сложность механизма принятия решений игроков. В случае искусственного ограничения рангов рефлексии игроков в одном примере было показано, что игрок с меньшим ресурсом способен обеспечить себе половину суммарного выигрыша в игре.

В работе также была поставлена задача информационного управления в модели информационной рефлексии игроков. В этой модели у игроков могут иметь место неверные представления о параметрах их оппонента. Эта модель имеет практический интерес даже в случае аналитического решения аукционной модели ИПБ. Показано, что множество стабильных информационных равновесий для вероятностной модели ИПБ достаточно широко и допускает сильно несимметричные модели ИПБ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Borel E. La théorie du jeu les équations intégrales á noyau symétrique // Comptes Rendus de l'Académie. 1921. Vol. 173. P. 1304 – 1308.

2. Gross O.,Wagner R. A Continuous Colonel Blotto Game / RAND Corporation RM-408, 1950. – 13 p.

3. Kvasov D. Contests with Limited Resources // Journal of Economic Theory. 2007. Vol. 136. P. 738 – 748.

4. Laslier J., Picard N. Distributive Politics and Electoral Competition // Journal of Economic Theory. 2002. Vol. 103. P. 106 – 130.

5. Вентцель Е.С. Элементы теории игр. – М.: Физматгиз, 1961. – 68 с.

6. Дрешер М. Стратегические игры. Теория и приложения. – М.: Советское радио, 1964. – 353 с. (Dresher M. Games of Strategy: Theory and Applications. – Santa Monica: RAND, Prentice Hall, 1961.)

7. Borel E., Ville J. Application de la théorie des probabilitiés aux jeux de hasard. – Paris: Gauthier-Villars, 1938. P. 105 – 113.

8. Friedman L. Game-theory Models in the Allocation of Advertising Expenditure // Operations Research. 1958. Vol. 6. P. 699 – 709.

9. Roberson B. The Colonel Blotto Game // Economic Theory. 2006. Vol. 29. P. 1 – 24.

10. Hortala-Vallve R., Llorente-Saguer A. Pure strategy Nash equilibria in non-zero sum colonel Blotto games // International Journal of Game Theory. 2011 (forthcoming).

11. Hart S. Discrete Colonel Blotto and General Lotto Games // International Journal of Game Theory. 2008. Vol. 36. P. 441 – 460.

12. Chowdhury S., Kovenock D., Sheremeta R. An Experimental Investigation of Colonel Blotto Game / CESifo Working Paper Series № 2688, 2009. – 31 p.

13. Modzelewski K, Stein J., Yu J. An Experimental Study of Classic Colonel Blotto Games / MITReport № 6.207/14.15, 2009. – 19 p.

14. Fu Q., Lu J. The Optimal Multi-Stage Contest / MPRA Paper № 946, 2007. – 22 p.

15. Sela A., Erez E. Dynamic Contests with Resource Constraints / Proc. of International Conference “Tournaments, Contests and Relative Performance Evaluation”, North Carolina State University, 2011. – 19 p.

16. Robson R.W. Multi-Item Contest / Australian National University. Working Paper № 446, 2005. – 27 p.

17. Garfinkel M., Skaperdas S. Economics of conflict: An Overview / In T. Sandler and K. Hartley (Eds.), Handbook of Defense Economics, 2006. Chapter 3. – 65 p.

18. Tullock G. Efficient rent seeking / Toward a theory of rent-seeking society. – College Station: Texas A&M University Press, 1980. P. 97 – 112.

19. Corchón L. The theory of contests: a survey // Review of Economic Design. 2007. Vol. 11. P. 69 – 100.

20. Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. 2-е изд. – М.: Физматлит, 2007. – 584 с.

21. Корепанов В.О., Новиков Д.А. Метод рефлексивных разбиений в моделях группового поведения и управления // Проблемы управления. 2011. № 1. С. 21–32.

22. Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. 2-е изд. – М.: Синтег, 2005. – 136 с.

23. Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексивные игры. – М.: Синтег, 2003. – 149 с.

24. Arad A., Rubinstein A. Colonel Blotto’s Top Secret Files: Multi-Dimensional Iterative Reasoning in Action. Working Paper, 2010. – 28 p.

25. Snyder J. Election Goals and the Allocation of Campaign Resources // Econometrica. 1989. Vol. 57. № 3. P. 637 – 660.

26. Корепанов В.О., Новиков Д.А. Задача о диффузной бомбе // Проблемы управления. 2011. № 5. С. 66–73.

27. Новиков Д.А. Модели стратегической рефлексии // Автоматика и телемеханика. 2012. № 1. С. 3 – 22.

28. Губанов Д.А., Чхартишвили А.Г. О стратегической рефлексии в биматричных играх // Управление большими системами. 2008. № 21. С. 49 – 57.

29. Новиков Д.А. Стратегическая рефлексия в биматричных играх / Региональная экономика в информационном измерении: модели, оценки, прогнозы. – М.: Бизнес-Юнитек, 2003. С. 296 – 307.