СТРУКТУРНО-ПАРМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ

Карташов В. Я., Новосельцева М. А.
(Кемеровский государственный университет, Кемерово)
kartash@ic.kemsu.ru, aanov@pochta.ru

Предлагается метод структурно-параметрической идентификации линейного динамического объекта по измерениям случайных вход-выходных сигналов, основанный на теории непрерывных дробей. Метод включает в себя проверку стационарности вход-выходных процессов объекта, в случае необходимости их стационаризацию и получение дискретной модели стохастического объекта.

Ключевые слова: стохастический объект, стационарный и нестационарный случайный процесс, структурная функция, непрерывная дробь, стационаризация, структурно-параметрическая идентификация.

Введение

Современный уровень развития производственных процессов и объектов предъявляет повышенные требования к точности и качеству цифровых систем управления. Для получения необходимых характеристик цифровых систем управления часто используют методы идентификации производственных объектов. Зачастую отсутствуют априорные сведения о таких объектах, а измеряемые входные и выходные переменные являются стохастическими нестационарными процессами. Поэтому в рамках современной теории управления продолжается разработка методов идентификации сложных динамических объектов. Такая задача практически всегда возникает при проведении прикладных исследований в науке и промышленности и ее отличительной особенностью является наличие случайных процессов на входе и выходе некоторой динамической системы.

В данной работе будет рассмотрен подход к структурно-параметрической идентификации линейных стохастических объектов в условиях отсутствия априорной информации об исследуемом объекте и его вход-выходных процессах.

1. Анализ вход-выходных случайных процессов

В процессе идентификации динамических объектов источниками информации о них являются входные и выходные сигналы объекта. Поэтому корректность методов идентификации, а также интерпретация результатов анализа в значительной степени зависят от основных свойств анализируемых процессов. Эта проблема существенно усложняется при наличии стохастических стационарных и нестационарных процессов на входе и выходе объекта. Поэтому на начальном этапе идентификации необходимо оценить основные свойства анализируемых процессов. К их числу относится стационарность случайного процесса, которая на практике обычно понимается в широком смысле, что означает постоянство математического ожидания и зависимость корреляционной функции только от интервала между любыми двумя сечениями, но не от положения этих сечений на оси времени [1, 4].

Ретроспективные методы анализа стационарности данных измерений разрабатывали многие ученые [1-3, 6, 12, 13]. Значительная часть из них основана на корреляционной теории случайных процессов и не применима в нестационарных условиях, так как одним из основных требований корреляционной теории является постоянство среднего уровня случайного процесса. Кроме того, визуальное изучение кривой корреляционной функции с целью анализа стационарности затрудняет процесс обработки данных измерений и не позволяет произвести его автоматизацию [2, 3].

Стоит отметить, что рассматриваемая задача должна решаться на этапе предварительной статистической обработки данных. В связи с этим трудно рассчитывать на наличие достаточно подробной априорной статистической информации на начальном этапе процесса идентификации. Представляется, что в таких условиях наиболее эффективными окажутся непараметрические методы, не требующие знания априорных сведений о процессе.

В качестве критерия стационарности случайного процесса будем использовать структурную функцию [14], предложенную А.Н. Колмогоровым:

(1) $C_x(t,t+\tau) = M\{x(t) - x(t+\tau)\}^2$,

где $x(t)$ – некоторый случайный процесс. Очевидно, что функция всегда неотрицательна, четна и удовлетворяет условию $C_x(0) = 0$. В отличие от корреляционной функции, всегда являющейся ограниченной, структурная функция может неограниченно возрастать при $t \to \infty$. Рассмотрим частный случай, когда $x(t)$ представляет собой стационарный случайный процесс с нулевым средним. Тогда структурная функция будет иметь вид

(2)
$$\begin{aligned} &C_x(t,t+\tau) = M\{x(t) - x(t+\tau)\}^2 = \\ &= M\left(x^2(t)\right) - 2M\left(x(t)x(t+\tau)\right) + M\left(x^2(t+\tau)\right) = \\ &= 2R_{xx}(0) - 2R_{xx}(\tau) = C_x(\tau). \end{aligned}$$

Как видно из (2), структурная функция стационарного случайного процесса не зависит от текущего момента времени. На основании (2) можно утверждать, что структурная функция стационарного случайного процесса с течением времени стремится к установившемуся значению:

(3) $C_x(\tau) \xrightarrow[\tau \to \infty]{} 2R_{xx}(0)$.

Практическое построение структурной функции более надежно по сравнению с корреляционной, поскольку на нее не влияют ошибки определения среднего значения процесса $x(t)$. Оно осуществляется по формуле

$$(4)\quad C_x(k)=\frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k}\left(x(i)-x(i+k)\right)^2 ,$$

где N – число измерений процесса $x(t)$.

Раздел теории случайных процессов, связанный с изучением случайных процессов на базе исследования структурных функций, носит название структурного анализа [14]. Структурный анализ случайных процессов в ряде случаев приводит к более устойчивым характеристикам по сравнению с корреляционными. Эффективность структурного анализа заключается в том, что параметры структурной функции обладают свойствами инвариантности относительно некоторых форм нестационарности, проявляющихся, например, при смещенности по математическому ожиданию, а также в случае квазистационарного характера случайного процесса.

Независимость оценки структурной функции от оценки среднего значения случайного процесса позволяет использовать ее для описания как стационарных, так и нестационарных процессов. Важными свойствами структурной функции, используемыми для анализа стационарности случайного процесса, являются следующие [8, 10]:

- структурная функция стационарного процесса ограничена и с течением времени выходит на установившееся значение;

- структурная функция нестационарного процесса с течением времени неограниченно возрастает.

Для обеспечения эффективной алгоритмической и программной реализации метода анализа стационарности и исключения визуального анализа кривых структурной функции возможно получение модели структурной функции сигнала в форме непрерывной дроби [8, 10]. Свойство стационарности случайного процесса отождествляется с устойчивостью полученной модели структурной функции в форме непрерывной дроби.

Для этого на основании значений структурной функции сигнала, полученных по формуле (4), расчетным путем определяется идентифицирующая матрица:

$$(5)\quad \begin{array}{c} (-1)-строка \\ (0)-строка \\ 1-строка \\ \ldots \\ \ldots \\ m-строка \\ \ldots \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots \\ C_x(0) & C_x(\Delta t) & C_x(2\Delta t) & \ldots & C_x(n\Delta t) & \ldots \\ \alpha_1(0) & \alpha_1(\Delta t) & \alpha_1(2\Delta t) & \ldots & \alpha_1(n\Delta t) & \ldots \\ \alpha_2(0) & \alpha_2(\Delta t) & \alpha_2(2\Delta t) & \ldots & \alpha_2(n\Delta t) & \ldots. \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_m(0) & \alpha_m(\Delta t) & \alpha_m(2\Delta t) & \ldots & \alpha_m(n\Delta t) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

в которой (-1)-строка содержит значения единичной функции $1(t)$, а (0)-строка – значения структурной функции входного сигнала $C_x(k\Delta t)$ в моменты времени $\{n\Delta t\}_0^N$, Δt – шаг дискретизации, а элементы $\alpha_m(n\Delta t)$ последовательно определяются с помощью соотношения:

$$(6)\quad \alpha_m(n) = \frac{\alpha_{m-2}(n+1)}{\alpha_{m-2}(0)} - \frac{\alpha_{m-1}(n+1)}{\alpha_{m-1}(0)},$$

где $\alpha_{-1}(n) = 1(n\Delta t)$, $\alpha_0(n) = C_x(n\Delta t)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Вычисление элементов $\alpha_m(n\Delta t)$ продолжается до появления нулевой строки.

Элементы первого столбца матрицы (5) позволяют получить модель структурной функции сигнала:

$$(7)\quad G(z) = \cfrac{C_x(1)z^{-1}}{1 + \cfrac{\alpha_1(0)z^{-1}}{1 + \cfrac{\alpha_2(0)z^{-1}}{1 + \cfrac{\alpha_2(0)z^{-1}}{\ldots}}}}.$$

Далее производится проверка устойчивости полученной модели (7) с помощью любого из известных критериев устойчивости. В случае устойчивости модели следует утверждать, что данный сигнал стационарен. В противном случае сигнал является нестационарным.

Поскольку потенциальной возможностью для определения причинно-следственных взаимосвязей стохастических процессов является понятие стационарности, на практике часто применяют процедуру стационаризации нестационарных случайных процессов [2, 3]. Если данные измерений процесса x(t) нестационарны, их можно привести к стационарным с помощью взятия правых

(8) $\Delta^{d} x(k) = \Delta^{d-1} x(k+1) - \Delta^{d-1} x(k)$,

или левых разностей

(9) $\nabla^{d} x(k) = \nabla^{d-1} x(k-1) - \nabla^{d-1} x(k)$,

где Δ – правая разность, ∇ – левая разность, d – порядок разности. Формулы (8) и (9) определяют процедуры стационаризации сигнала. Процедуры (8), (9) справедливы для часто встречающихся в системах автоматического управления нестационарных процессов, называемых процессами со стационарными приращениями d-ого порядка [2, 3].

Порядок взятия разностей d будем определять по поведению структурной функции процесса, то есть по устойчивости модели структурной функции. Если модель устойчива, следует прекратить процесс взятия разностей, так как стационаризация сигнала произведена.

2. Идентификация стохастического объекта

Условия априорной неопределенности являются характерной чертой научных исследований и значительно затрудняют применение большого количества существующих методов идентификации [2, 3, 5, 11], в которых восстановление структуры модели является неочевидным процессом и приводит к процедуре перебора пробных моделей из множества общего класса. Это становится причиной актуальности задач структурно-параметрической (SP-) идентификации.

Линейный (линеаризованный) динамический объект описывается математической моделью в форме интеграла-свертки (интеграла Дюамеля) [5]:

(10) $y(t) = \int_{0}^{t} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$,

где $h(t)$ – весовая функция, $x(t)$ – входной стационарный случайный процесс, $y(t)$ – выходной стационарный случайный процесс. Известно соотношение, устанавливающее связь между взаимной корреляционной функцией входного и выходного сигналов и корреляционной функцией входного сигнала (уравнение Винера-Хопфа) [5]:

(11) $R_{xy}(\tau) = \int_0^{\tau} h(t) R_{xx}(\tau - t) dt$.

Применив преобразование Лапласа к соотношению (11), получим

(12) $R_{xy}(s) = G(s) R_{xx}(s)$,

где

(13) $R_{xy}(s) = L\left(R_{xy}(\tau)\right) = \int_0^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-s\tau} d\tau$

– преобразование Лапласа взаимной корреляционной функции входного и выходного сигналов;

(14) $R_{xx}(s) = L\left(R_{xx}(\tau)\right) = \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-s\tau} d\tau$

– преобразование Лапласа корреляционной функции входного сигнала.

Формула (12) приводит к *математической модели стохастического объекта в форме непрерывной передаточной функции (НПФ)*, являющейся дробно-рациональной функцией от переменной s преобразования Лапласа:

(15) $G(s) = \dfrac{R_{xy}(s)}{R_{xx}(s)} = \dfrac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \ldots + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_0}]$,

где *m, n* – целые положительные числа, причем $m \le n$.

Найдя оценки несобственных интегралов (13) и (14) в виде интегральных сумм, можно оценить дискретную передаточную функцию (ДПФ) стохастического объекта:

$$(16)\ \ G(z) = \frac{R_{xy}(z)}{R_{xx}(z)} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} R_{xy}(n\Delta t) z^{-n}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} R_{xx}(n\Delta t) z^{-n}},$$

где z – переменная z-преобразования $z = e^{s\Delta t}$, z^{-1} - оператор обратного сдвига.

Модель ДПФ стохастического объекта в форме дробно-рационального выражения имеет вид [5]:

$$(17)\ \ G(z) = \frac{a_m z^{-m} + \ldots + a_1 z^{-1} + a_0}{b_n z^{-n} + \ldots + b_1 z^{-1} + 1} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{m} a_i z^{-i}}{1 + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i z^{-i}} = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)},$$

где $P_m\left(z\right)$, $Q_n\left(z\right)$ – полиномы от комплексной переменной z-преобразования, *m, n* – целые положительные числа – порядки этих полиномов.

Известно также другое определение ДПФ в виде

$$(18)\ \ G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\Delta t \sum\limits_{n=0}^{\infty} y(n\Delta t)\, z^{-n}}{\Delta t \sum\limits_{n=0}^{\infty} x(n\Delta t)\, z^{-n}},$$

где $X(z)$, $Y(z)$ – z-преобразование числовых последовательностей значений случайного входного $\{x(n\Delta t\}_{n=0}^{\infty}$ и случайного выходного $\left\{y(n\,\Delta t)\right\}_{n=0}^{\infty}$ сигналов, z^{-1} – оператор обратного сдвига.

Благодаря операторным свойствам z-преобразования $z^{-k} y(n\Delta t) = y((n-k)\Delta t)$ дискретную модель линейного объекта можно представить как в форме *стохастического разностного уравнения*

$$(19)\ \ y(k\Delta t) = \sum_{i=0}^{m} a_i x\left(\left(k-i\right)\Delta t\right) - \sum_{i=1}^{n} b_i y\left(\left(k-i\right)\Delta t\right),$$

относящегося к классу процессов *авторегрессии со скользящим средним*, так и в форме *детерминированного разностного уравнения*

(20) $R_{xy}(k\Delta t)=\sum_{i=0}^{m}a_i R_{xx}\left(\left(k-i\right)\Delta t\right)-\sum_{i=1}^{n}b_i R_{xy}\left(\left(k-i\right)\Delta t\right).$

Для решения задачи SP-идентификации стохастического объекта используем теорию непрерывных дробей [7] и модифицированный алгоритм В. Висковатова [7, 10].

Будем считать, что $R_{xy}\left(0\right)\neq 0$ и $R_{xx}\left(0\right)\neq 0$. Будем определять идентифицирующую матрицу:

(21)
$$\begin{array}{r}
(-1)-\textit{строка}\\
(0)-\textit{сторока}\\
1-\textit{сторока}\\
\ldots\\
\ldots\\
m-\textit{сторока}\\
\ldots
\end{array}
\begin{pmatrix}
R_{xx}(0) & R_{xx}(\Delta t) & R_{xx}(2\Delta t) & \ldots & R_{xx}(n\Delta t) & \ldots\\
R_{xy}(0) & R_{xy}(\Delta t) & R_{xy}(2\Delta t) & \ldots & R_{xy}(n\Delta t) & \ldots\\
\alpha_1\left(0\right) & \alpha_1\left(\Delta t\right) & \alpha_1\left(2\Delta t\right) & \ldots & \alpha_1\left(n\Delta t\right) & \ldots\\
\alpha_2\left(0\right) & \alpha_2\left(\Delta t\right) & \alpha_2\left(2\Delta t\right) & \ldots & \alpha_2\left(n\Delta t\right) & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\alpha_m\left(0\right) & \alpha_m\left(\Delta t\right) & \alpha_m\left(2\Delta t\right) & \ldots & \alpha_m\left(n\Delta t\right) & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{pmatrix},$$

в которой (–1)-строка и (0)-строка содержат значения корреляционной функции входного сигнала $R_{xx}(k\Delta t)$ и взаимной корреляционной функции входного и выходного сигналов $R_{xy}(k\Delta t)$ в моменты времени $\{n\Delta t\}_0^N$ и они являются начальными условиями при построении матрицы, а элементы $\alpha_m(m\Delta t)$ последовательно определяются с помощью соотношения:

(22) $\alpha_m(n\Delta t)=\dfrac{\alpha_{m-2}\left(\left(n+1\right)\Delta t\right)}{\alpha_{m-2}(0)}-\dfrac{\alpha_{m-1}\left(\left(n+1\right)\Delta t\right)}{\alpha_{m-1}(0)},$

где $\alpha_{-1}(n\Delta t)=R_{xx}(n\Delta t)$, $\alpha_0(n\Delta t)=R_{xy}(n\Delta t)$, m = 1, 2, 3, ..., а n = 0, 1, 2, ... Тогда элементы первого столбца матрицы (21) порождают частные числители правильной С-дроби [7], что и позволяет получить ДПФ объекта:

$$(23)\quad G(z)=\frac{R_{xy}(0)/R_{xx}(0)}{1+\cfrac{\alpha_1(0)z^{-1}}{1+\cfrac{\alpha_2(0)z^{-1}}{1+\ldots}}}.$$

В модифицированном алгоритме В. Висковатова при аппроксимации дробно-рациональной функции конечного порядка в матрице (21) наблюдается появление нулевой строки, номер которой позволяет идентифицировать порядок функции.

Если в некоторой *i*-ой строке (*i* = 0, 1, 2, ...) матрицы (21) конечное число k_i первых элементов равны 0, а последующие элементы отличны от нуля, то необходимо осуществить сдвиг влево на k_i элементов до появления в нулевом столбце ненулевого элемента и далее продолжить определение других элементов матрицы (21) по правилу (22). Для *i*-ой строки при восстановлении правильной С-дроби (23) элемент $\alpha_i(0)$ умножается на z^{-k_i}.

Пример 1.

Объект идентификации имеет НПФ

$$(24)\quad G(s)=\frac{1}{s}.$$

На вход объекта подается случайный сигнал, дискретная модель которого имеет вид:

$$(25)\quad x(k)=2\,a(k)+0.36788\,x(k-1),$$

где $a(k)$ - белый шум с математическим ожиданием $M_a=0$ и дисперсией $D_a=1$. На выходе имеется случайный сигнал

$$(26)\quad y(k)=0.63212\,x(k-1)+y(k-1).$$

На основании дискретных моделей (25), (26) моделировались реализации $x(k\Delta t)$ и $y(k\Delta t)$ с шагом дискретизации Δt = 1 объемом *N* =100.

Построим структурные функции процессов $x(t)$ и $y(t)$ по формуле (4) и применим модифицированный алгоритм

В. Висковатова для аппроксимации непрерывными дробями их моделей. Определим матрицу (5) для $C_x\left(k\Delta t\right)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 6.46566 & 8.59372 & 9.58143 & 9.62135 & 9.70000 & \ldots \\ -0.32913 & -0.48190 & -0.048807 & -0.50023 & \ldots & \\ 0.13500 & -0.00102 & -0.03178 & \ldots & & \end{pmatrix}$$

в которой 2-ую строку можно считать нулевой. На основании элементов первого столбца матрицы аппроксимируем непрерывной дробью модель структурной функции входного сигнала

$$G_x\left(z\right)=\frac{6.46566\,z^{-1}}{1-0.32913\,z^{-1}}\,.$$

Модель имеет один полюс $z^n=0.32913$, на основании значения которого можно сделать вывод об ее устойчивости и, следовательно, о стационарности входного сигнала.

Аналогичным образом определим матрицу вида (5) для $C_y\left(k\Delta t\right)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 2.50000 & 5.13043 & 8.79223 & 12.49554 & 16.30433 & \ldots \\ -1.05217 & -2.51689 & -3.99822 & -5.52173 & \ldots & \\ -0.33992 & -0.28307 & -0.24972 & \ldots & & \end{pmatrix}$$

в которой 2-ую строку можно считать близкой к нулевой (при расчете элементов следующей строки их значения резко возрастают). Тогда модель структурной функции выходного сигнала имеет вид

$$G_y\left(z\right)=\frac{2.50000\,z^{-1}}{1-1.05217\,z^{-1}}\,.$$

Так как полюс модели лежит вне единичной окружности, можно сделать вывод о ее неустойчивости. Следовательно, выходной сигнал нестационарен. Применим процедуру стационаризации

$$\Delta y\left(k\right)=y\left(k+1\right)-y\left(k\right),\quad k=\overline{1,N-1}\,,$$

после чего вновь вычислим структурную функцию выходного сигнала. Матрица (5) будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 2.52426 & 3.46965 & 3.87024 & 3.88968 & 3.90000 & \ldots \\ -0.37453 & -0.53322 & -0.54093 & -0.54501 & \ldots & \\ -0.0492 & 0.08894 & 0.08572 & \ldots & & \end{pmatrix}.$$

Модель имеет вид

$$G_y(z) = \frac{2.52426\,z^{-1}}{1 - 0.37453\,z^{-1}},$$

$z^n = 0.37453$, следовательно, сигнал стационарен.

Далее вычисляем статистические характеристики: корреляционную функцию входного сигнала $R_{xx}(k)$ и взаимную корреляционную функцию вход-выходного сигналов $R_{xy}(k)$ [5].

Применяем модифицированный алгоритм В. Висковатова для получения модели стохастического объекта. Идентифицирующая матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 4.62763 & 1.39002 & 0.25001 & -0.20262 & -0.17472 & \ldots \\ 2.92955 & 0.87866 & 0.15804 & -0.12808 & -0.11044 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

Тогда ДПФ преобразователя разностей

(27) $G_\Delta(z) = \dfrac{2.92955}{4.62763} = 0.63306$

позволяет записать разностное уравнение:

(28) $\Delta y^{м}(k) = 0.63306\,x(k)$.

Для получения ДПФ объекта применим процедуру взятия обратных разностей. Получим модель выходного процесса

(29) $y^{м}(k) = 0.63306\,x(k-1) + y^{м}(k-1)$.

Тогда ДПФ объекта примет вид:

(30) $G(z) = \dfrac{0.63306\,z^{-1}}{1 - z^{-1}}$.

ДПФ имеет полюс $z^n = 1$, который, согласно соотношению $s = \frac{1}{\Delta t}\ln|z| + i\frac{1}{\Delta t}\arg z$ [9], соответствует полюсу НПФ $s^n = 0$, совпадающему с полюсом истинной НПФ (24).

Модель стохастического объекта (24) восстановлена достоверно. Произведя сравнение модели (29) с истинной моделью выходного процесса (26), можно сделать вывод о том, что структура модели восстановлена верно, а ее параметры определены с относительной погрешностью 0.15%.

Пример 2.

При решении практических задач часто встречаются объекты, обладающие свойством неминимально-фазовости [5]. Например, объект идентификации – аппарат каталитической конверсии метана. Процесс расхода кислорода описывается функцией

$$(31)\quad G(s) = \frac{k(1+\tau s)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)},$$

где τ, T_1, T_2 – постоянные времени, k – коэффициент передачи. На вход объекта поступает стационарный случайный сигнал с корреляционной функцией $R_{xx}(t) = e^{-t}$. Первоначальная подача кислорода понижает температуру в зоне катализа, так как подаваемый кислород имеет сравнительно низкую температуру, и происходит отбор тепла, поэтому объект на начальном этапе приобретает свойства неминимально-фазовости. Передаточная функция объектов с неминимально-фазовой характеристикой имеет вид:

$$(32)\quad G(s) = \frac{k(1-\tau s)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}.$$

Наличие данного свойства значительно затрудняет решение задачи SP-идентификации. Проверим работоспособность модифицированного метода В. Висковатова на объектах, обладающих свойством неминимально-фазовости.

Пусть $k = 1$, $\tau = 2$, $T_1 = 3$, $T_2 = 1$. Тогда взаимная корреляционная функция входного и выходного сигналов будет иметь вид

(33) $R_{xy}(t) = k\,(C_1 e^{-\alpha_1 t} + (C_2 + B\,t)e^{-\alpha_2 t})$,

где $C_1 = -C_2 = \dfrac{T_1 + \tau}{(T_1 - T_2)^2}$, $\alpha_i = 1/T_i$.

Для шага дискретизации $\Delta t = 0.5$ матрица (21) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.60653 & 0.36788 & 0.22313 & 0.13534 & 0.08208 \\ -0.15496 & -0.11600 & -0.02279 & 0.06660 & 0.13282 & 0.17357 \\ -0.14208 & 0.22079 & 0.65290 & 0.99248 & 1.20221 & \\ 2.30261 & 4.74232 & 6.55553 & 7.60426 & & \\ -3.61354 & -7.44224 & -10.28776 & & & \\ 0 & 0 & & & & \end{pmatrix}.$$

С учетом того, что в нулевой строке осуществлен сдвиг влево на один элемент, обусловленный начальным значением $R_{xy}(0) = 0$, получаем конечную правильную С-дробь:

$$G(z) = \cfrac{-0.15496\,z^{-1}}{1 + \cfrac{-0.14208 z^{-1}}{1 + \cfrac{2.30261\,z^{-1}}{1 - 3.61354\,z^{-1}}}}.$$

Тогда ДПФ $G(z)$ идентифицируемого объекта равна

(34) $G(z) = \dfrac{-0.15496\,z^{-1} + 0.20314\,z^{-2}}{1 - 1.45301\,z^{-1} + 0.51342\,z^{-2}}$.

Дискретная математическая модель взаимной корреляционной функции входного и выходного сигналов имеет вид:

(35) $$\begin{aligned} R^M_{xy}(k\,\Delta t) &= -0.15496\,R_{xx}((k-1)\,\Delta t) + 0.20314\,R_{xx}((k-2)\,\Delta t) + \\ &+ 1.45301\,R^M_{xy}((k-1)\Delta t) - 0.51342\,R^M_{xy}((k-2)\,\Delta t), \end{aligned}$$

а дискретная математическая модель объекта восстанавливается конечно-разностным уравнением:

$$y^M(k\,\Delta t) = -0.15496\,x((k-1)\,\Delta t) + 0.20314\,x((k-2)\,\Delta t) + \tag{36}$$
$$+1.45301\,y^M((k-1)\Delta t) - 0.51342\,y^M((k-2)\,\Delta t).$$

Сравнение значений экспериментальной взаимной корреляционной функции вход-выходного сигналов $R_{xy}(k\Delta t)$ (33) и модельных значений $R^M_{xy}(k\Delta t)$, рассчитанных с помощью (35), позволяет сделать вывод о достоверном восстановлении дискретной модели объекта (максимальная относительная погрешность восстановления $R^M_{xy}(k\Delta t)$ составляет 0,007%).

Пример 3.

Объект идентификации имеет передаточную функцию

(37) $G(s) = \dfrac{1}{4s+1}$.

Входной сигнал объекта задается разностным уравнением:

(38) $x(k) = a(k) + x(k-1)$,

где $a(k)$ – белый шум с математическим ожиданием $M_a = 0$ и дисперсией $D_a = 1$, а на выходе имеется случайный сигнал, дискретная математическая модель которого имеет вид:

(39) $y(k) = 0.22119\,x(k-1) + 0,7788\,y(k-1)$.

На основании дискретных моделей вход-выходных сигналов моделировались реализации $x(k\Delta t)$ и $y(k\Delta t)$ объемом $N = 100$ с шагом дискретизации $\Delta t = 1$.

Определим матрицу (5) для $C_x(k\Delta t)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 1.1044 & 2.34975 & 3.63344 & 5.13773 & 6.8239 & 8.44232 & \ldots \\ -1.12763 & -2.28997 & -3.65207 & -5.17885 & -.64428 & - & \\ 0.09685 & 0.05126 & 0.05939 & 0.2866 & - & & \end{pmatrix},$$

в которой 2-ая строка близка к нулевой. Запишем модель структурной функции $C_x(k\Delta t)$

(40) $G_x(z) = \dfrac{1.1044\,z^{-1}}{1 - 1.12763\,z^{-1}}$.

Так как $z^n = 1.12763$ лежит вне единичной окружности, модель неустойчива и, следовательно, входной сигнал нестационарен. Применим процедуру стационаризации

$$\Delta x(k) = x(k+1) - x(k), \quad k = \overline{1, N-1},$$

после которой вновь вычислим структурную функцию входного сигнала и запишем матрицу (5)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 2.05 & 2.06 & 2.07 & 2.08 & 2.1 & 2.1 & \dots \\ -0.0048 & -0.00976 & -0.01463 & -0.02439 & -0.02439 & - & \end{pmatrix}.$$

Модель структурной функции имеет вид

(41) $G_x(z) = 2.05\,z^{-1}$

и является устойчивой, а входной сигнал является стационарным.

Матрица (5) для $C_y(k\Delta t)$ будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.78 & 2.1 & 4.25 & 6.56482 & 9.02254 & 11.39957 & 14 \\ -1.69231 & -4.44872 & -1.69231 & -10.5674 & -13.6148 & -16.9487 & \\ 0.06352 & 4.44872 & -3.55204 & 3.52223 & 4.59968 & & \\ -67.4079 & 56.9202 & -49.2065 & -64.3682 & & & \\ 70.88111 & -56.6502 & 54.49598 & & & & \\ -0.04519 & -0.03885 & & & & & \end{pmatrix}.$$

Тогда модель структурной функции выходного сигнала имеет вид

(42) $G_y(z) = \dfrac{0.78\,z^{-1} + 2.75864\,z^{-2} + 3.51184\,z^{-3}}{1 + 1.84441\,z^{-1} + 4.50235\,z^{-2} + 8085.757\,z^{-3}}$.

Нули и полюса объекта принимают значения:

$$z_{1,2}^{н} = -1.76836 \pm i1.17272,$$

$$z_1^n = -20.62816, \; z_{2,3}^n = 9.39188 \pm i17.42898.$$

Модель (42) неустойчива, поэтому применим процедуру стационаризации сигнала

$$\Delta y(k) = y(k+1) - y(k), \quad k = \overline{1, N-1},$$

после чего вновь вычислим структурную функцию выходного сигнала. Матрица (5) имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0.10989 & 0.19 & 0.25 & 0.30001 & 0.309 & 0.32 & \ldots \\ -0.729 & -1.275 & -1.73009 & -1.8119 & -1.912 & - & \\ -0.01997 & -0.09823 & 0.24464 & 0.18913 & - & & \end{pmatrix},$$

а модель структурной функции выходного сигнала:

$$G_y(z) = \frac{0.10989\, z^{-1}}{1 - 0.729\, z^{-1}}.$$

Модель устойчива, поэтому выходной сигнал стационарен.

Применяем модифицированный алгоритм В. Висковатова для получения дискретной модели объекта. Расчетным путем определяется идентифицирующая матрица (21). Так как $R_{xy}(0) = 0.02851 \approx 0$, т.е. близко к нулю, в нулевой строке необходимо сделать сдвиг влево на один элемент. Тогда идентифицирующая матрица примет вид

$$\begin{pmatrix} 1.10285 & 0.07474 & 0.12000 & 0.10175 & 0.08145 & -0.03279 \\ 0.26701 & 0.22493 & 0.1785 & 0.16244 & 0.14483 & 0.10607 \\ -0.77436 & -0.55971 & -0.51611 & -0.46854 & -0.42698 & \\ 0.11986 & 0.00226 & 0.00348 & -0.00879 & & \end{pmatrix}.$$

ДПФ преобразователя разностей имеет вид

$$(43)\quad G_\Delta(z) = \frac{0.24211\, z^{-1}}{1 - 0.77436\, z^{-1}}.$$

Запишем дискретную модель в разностях

$$(44)\quad \Delta y^{м}(k) = 0.24211\, x(k-1) + 0.77436\, \Delta y^{м}(k-1).$$

Заменив $\Delta y^{м}(k) = y^{м}(k+1) - y^{м}(k)$ и $\Delta x(k) = x(k+1) - x(k)$, получим дискретную модель на выходе апериодического звена

$$y^{м}(k) = 0.24211\,x(k-1) - 0.24211\,x(k-2) + \\ + 1.77436 y^{м}(k-1) - 0.77436\, y^{м}(k-2)$$

и ДПФ

$$G(z) = \frac{0.24211\,z^{-1}\left(1 - z^{-1}\right)}{\left(1 - 0.77436\,z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)} = \frac{0.24211\,z^{-1}}{1 - 0.77436\,z^{-1}}\,.$$

ДПФ имеет полюс $z^n = 0.77436$, который, согласно соотношению $s = \frac{1}{\Delta t}\ln|z| + i\frac{1}{\Delta t}\arg z$ [9], соответствует полюсу НПФ $s^n = 0.25572$. Относительная погрешность определения полюса составила 2%. Кроме того, дискретная модель в разностях (44) совпадает с истинной моделью (39) по структуре и по параметрам с точностью до погрешности вычислений.

Пример 4.

Объект идентификации имеет НПФ

$$G(s) = \frac{1}{4s^2 + 2s + 1}, \tag{45}$$

с полюсами $s^n_{1,2} = -0{,}25 \pm i\,0.43301$. На вход объекта подается сигнал, заданный разностным уравнением

$$x(k) = 2a(k) - 0.59101a(k-1) + \\ + 0.59101\,x(k-1) - 0.08208\,x(k-2), \tag{46}$$

где $a(k)$ – белый шум с математическим ожиданием $M_a = 0$ и дисперсией $D_a = 1$, а на выходе имеется процесс, дискретная модель которого имеет вид

$$y(k) = 0.01958\,x(k-1) + 0.012\,x(k-2) + \\ + 1.73125 y(k-1) - 0.78818 y(k-2). \tag{47}$$

На основании (46) и (47) моделировались реализации $x(k\Delta t)$ и $y(k\Delta t)$ объемом $N = 500$ с шагом дискретизации $\Delta t = 0.5$.

Проверим стационарность вход-выходных процессов с помощью структурных функций. Вычислим значения структурных функций $C_x\left(k\Delta t\right)$ и $C_y\left(k\Delta t\right)$ по формуле (4). Идентифицирующая матрица для $C_x\left(k\Delta t\right)$ принимает вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6.02636 & 6.80000 & 7.53000 & 7.65000 & 7.74000 & 7.77000 & 7.78000 \\ -0.12781 & -0.24889 & -0.26879 & -0.28372 & -0.28869 & -0.29035 & \\ -0.81945 & -0.85409 & -0.95097 & -0.97498 & -0.98298 & & \\ 0.90499 & 0.94248 & 1.02997 & 1.05914 & & & \\ 0.00085 & 0.02240 & 0.01946 & & & & \end{pmatrix}.$$

4-ую строку матрицы можно считать нулевой. На основании элементов первого столбца матрицы можно записать модель структурной функции входного сигнала

$$(48)\quad G_x\left(z\right) = \frac{6.02936\,z^{-1} + 0.15576\,z^{-2}}{1 - 0.04227\,z^{-1} - 0.11576\,z^{-2}}\,.$$

Модель имеет один нуль $z^{н} = -0.08554$ и два полюса - $z_1^{п} = 0.3619$ и $z_2^{п} = -0.31962$, на основании значений которых можно сделать вывод о стационарности входного сигнала.

Определим матрицу для $C_y\left(k\Delta t\right)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.37156 & 0.89081 & 1.08323 & 0.91962 & 0.65353 & 0.54939 \\ -1.91536 & -1.91538 & -1.47502 & -0.75888 & -0.47860 & -0.78426 \\ 1.62738 & 2.14525 & 2.07881 & 1.50900 & 1.06914 & 1.09023 \\ -0.27740 & -0.50729 & -0.53105 & -0.40709 & -0.26047 & \\ -0.59617 & -0.63700 & -0.54029 & -0.28200 & & \\ 0.92250 & 1.00813 & 0.99452 & & & \\ -0.00960 & -0.17182 & & & & \end{pmatrix},$$

а затем модель структурной функции выходного сигнала

$$(49)\quad G_y\left(z\right) = \frac{0.37156\,z^{-1} + 0.62285\,z^{-2} + 0.10224\,z^{-3}}{1 - 0.23905\,z^{-1} + 0.18144\,z^{-2} + 0.49014\,z^{-3}}\,.$$

ДПФ имеет 2 нуля – $z_1^н = -1.49187$ и $z_2^н = -0.18444$; 3 полюса – $z_1^п = -0.64805$ и $z_{2,3}^п = 0.44355 \pm i0.74806$, на основании которых можно сделать вывод о стационарности выходного сигнала.

Применяем модифицированный алгоритм В.Висковатова для получения дискретной модели объекта. Расчетным путем определяется идентифицирующая матрица (21). Так как $R_{xy}(0) = -0.00116$, т.е. близко к нулю, в нулевой строке необходимо сделать сдвиг влево на один элемент. Тогда идентифицирующая матрица примет вид

$$\begin{pmatrix} 3.83387 & 0.82635 & 0.19623 & -0.02754 & 0.07468 & 0.01000 \\ 0.10373 & 0.24205 & 0.35217 & 0.42102 & 0.45163 & 0.45176 \\ -2.11794 & -3.34389 & -4.06606 & -4.33445 & -4.35068 & \\ 0.75464 & 1.47526 & 2.01234 & 2.29973 & & \\ -0.37607 & -0.74680 & -1.00090 & & & \\ -0.03088 & 0.00514 & & & & \end{pmatrix}.$$

На основании элементов первого столбца матрицы запишем ДПФ идентифицируемого объекта

$$(50)\quad G(z) = \frac{0.02706\, z^{-1} + 0.01024\, z^{-2}}{1 - 1.73937\, z^{-1} + 0.79649\, z^{-2}}.$$

ДПФ имеет нуль $z^н < 0$, который отсутствует в НПФ [9], а также 2 полюса: $z_{1,2}^п = 0.86968 \pm i\, 0.20034$, которые соответствуют полюсам НПФ $s_{1,2}^п = -0.22755 \pm i\, 0.45282$.

Полюса НПФ (45) и полюса, полученные на основе ДПФ (50), совпадают с точностью до вычислительных погрешностей. На основании (50) запишем дискретную модель выходного процесса, совпадающую по структуре и параметрам (до погрешностей вычислений) с истинной моделью (47):

$$\begin{gathered} y^м(k) = 0.02706\, x(k-1) + 0.01024\, x(k-2) + \\ + 1.73937\, y^м(k-1) - 0.79649\, y^м(k-2) \end{gathered}.$$

Задача SP-идентификации стохастического процесса решена.

Таким образом, идентификация линейного стохастического объекта, достигающаяся поэтапно посредством предварительной классификации исходных данных и построения дискретных моделей в форме соответствующих непрерывных дробей, позволяет достоверно получить его модель в условиях априорной неопределенности.

Литература

1. БЕНДАТ Д., ПИРСОЛ А. *Измерение и анализ случайных процессов.* М.: Мир, 1974. – 464 с.
2. БОКС Д., ДЖЕНКИНС Г. *Анализ временных рядов. Прогноз и управление.* М.: Мир, 1974. Выпуск 1. – 406 с.
3. БОКС Д., ДЖЕНКИНС Г. *Анализ временных рядов. Прогноз и управление.* М.: Мир, 1974. Выпуск 2. – 199 с.
4. *Вероятностные методы в ВТ.* / Под ред. А.Н. Лебедева, Е.А. Чернявского. – М.: Высшая школа, 1986. – 312 с.
5. ДЕЙЧ А.М. *Методы идентификации динамических объектов*. – М.: Наука, 1985. – 240 с.
6. ЖОВИНСКИЙ А.Н., ЖОВИНСКИЙ В.Н. *Инженерный экспресс-анализ случайных процессов*. – М.: Энергия, 1979. – 112 с.
7. КАРТАШОВ В.Я. *Непрерывные дроби (определения и свойства).* – Кемерово: Изд-во Кемеровского госуниверситета, 1999. – 88 с.
8. КАРТАШОВ В.Я., НОВОСЕЛЬЦЕВА М.А. *Анализ стационарности случайного процесса с помощью модели структурной функции в форме непрерывной дроби* // Вестник Томского Государственного Университета. 2002. №1. С. 55 - 60.
9. КАРТАШОВ В.Я., НОВОСЕЛЬЦЕВА М.А., ПЯТКОВА Г.А. *Выбор периода дискретизации при контроле непрерывных динамических систем* // Вестник Кемеровского Государственного университета. 2000. №4. С. 155 - 165.
10. КАРТАШОВ В.Я., НОВОСЕЛЬЦЕВА М.А. *Способ идентификации объекта.* Патент № 2189622 Российская Федерация, МПК 7 G 05 B 17/02. Заявитель и патентообладатель КемГУ и

Карташов В.Я. – № 2001108830/09; заявл. 02.04.01; опубл. 20.09.02, Бюл. N 26. – 34 с.

11. КАШЬЯП Р.Л., РАО А.Р. *Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным.* – М.: Наука, 1983. – 384 с.
12. НИКИФОРОВ И.В. *Последовательное обнаружение изменения свойств временных рядов*. – М.: Наука, 1983. – 200 с.
13. *Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем*: Пер. с англ. / М. Бассвиль, А. Вилски, А. Банвенист и др.; Под ред. М. Бассвиль, А. Банвениста. – М.: Мир, 1989. – 278 с.
14. РОМАНЕНКО А.Ф., СЕРГЕЕВ Г.А. *Вопросы прикладного анализа случайных процессов.* – М.: Советское радио, 1968. – 247 с.

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Б.Т. Поляком