

ЦЕЛОЧИСЛЕННАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ БЕЗОПАСНОСТЬЮ ОБЪЕКТОВ РКТ

Андриенко А. Я., Тропова Е. И.
(Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)
vladguc@ipu.rssi.ru

Применительно к проблеме управления безопасностью объектов ракетно-космической техники (РКТ) в их жизненном цикле излагается метод целочисленной оптимизации управления обобщенным риском.

Ключевые слова: управление безопасностью, целочисленная оптимизация.

Введение

Проблема управления безопасностью в жизненном цикле объектов РКТ [1] порождает ряд задач теории управления, явно отличающихся от известных своих аналогов в общей теории оптимальных систем. Эти отличия вытекают, во-первых, из высокой сложности объекта оптимизации, составляемого из многих (десятков, сотен и даже тысяч) разнородных управляемых компонентов, и, во-вторых, из специфики используемого здесь обобщенного критерия, учитывающего важнейшие характеристики объекта РКТ с приоритетом требований по безопасности.

В данной статье рассматривается одна из таких задач – операционная задача [2] целочисленного управления по критерию, в котором непосредственно учитываются только требования по безопасности и экономичности исполнения этапа жизненного цикла объекта РКТ. Пояснения физического смысла отдельных формализмов проводятся на примере принятия проектно-производственных решений при разработке космической ракеты-носителя (КРН).

1. Постановка задачи

Рассматривается технический объект РКТ (например, КРН), состоящий из J компонент (двигатели, баки, командные приборы и прочее), и подлежащий совершенствованию в результате выполнения планируемой операции A по повышению общей надёжности действия и экологичности системы (её безопасности $F_{без}$) с возможно меньшими затратами $F_{зат}$.

Имеется банк данных о возможных мероприятиях по повышению безопасности $F_{без}$ – набор из S типов управляющих факторов u_{sj} (резервирование, испытания на аналого-цифровых комплексах (АЦК), огневые испытания и др.) j -го компонента объекта РКТ, $s = 1, 2, \dots, S$, принимающих целочисленные значения $u_{sj} = 0, 1, \dots, k, \dots$ (без резервирования, одно-, ... , k -кратное резервирование; без испытаний, одно-, ... , k испытаний и т.д.). Считаются известными нормирующе-весовые коэффициенты c_j ($c_j \geq 0$), $j = 1, 2, \dots, J$, с помощью которых показатели безопасности F_j , $j = 1, 2, \dots, J$, отдельных компонент объекта РКТ свёртывается в общий показатель

$$F_{без} = \sum_{j=1}^J c_j F_j ,$$

а также зависимости безопасности F_j компонент от управляющих факторов u_{sj} :

$$(1) \quad F_j = W_j \left(\sum_{s=1}^S m_{sj} l_{sj} u_{sj} \right), \quad j = 1, 2, \dots, J ,$$

где m_{sj} , $s = 1, 2, \dots, S$ – положительные коэффициенты матрицы $M = \parallel m_{sj} \parallel$, характеризующие относительную эффективность проведения мероприятия s -го типа применительно к j -му компоненту объекта РКТ по сравнению с реализацией некоторого эталонного мероприятия; l_{sj} , $s = 1, 2, \dots, S$ – элементы матрицы применимости $L = \parallel l_{sj} \parallel$, принимающие два значения:

$l_{sj} = 0$, если управление u_{sj} либо не может быть физически реализовано (например, испытание реального двигателя на АЦК), либо при реализации наносит существенный ущерб характеристикам объекта РКТ (например, резервирование основных

двигателей приводит к недопустимому снижению грузоподъёмности КРН);

$l_{sj} = 1$ в противном случае.

Из физического содержания показателей безопасности $W_j(x_j)$, $j = 1, 2, \dots, J$, следует, что они должны быть возрастающими функциями аргументов $x_j = \sum_{s=1}^S m_{sj} l_{sj} u_{sj}$ и, следовательно,

но, неубывающими функциями от u_{sj} , $s = 1, 2, \dots, S$, $j = 1, 2, \dots, J$ (например, $W_j(x_j) = 1 - q_j^{x_j}$, $0 < q_j < 1$, $x_j > 0$).

Полагаются известными стоимости $p_{sj} > 0$, $s = 1, 2, \dots, S$, $j = 1, 2, \dots, J$, реализации единицы каждого управления u_{sj} , на основе которых определяются затраты на реализацию операции A :

$$(2) \quad F_{зам} = \sum_{j=1}^J \sum_{s=1}^S p_{sj} l_{sj} u_{sj}.$$

Общую эффективность операции A будем оценивать скалярным критерием R в виде отношения $F_{без} / F_{зам}$ показателей «позитивной» (безопасность) и «негативной» (затраты) составляющих жизненного риска объекта РКТ при линейных ограничениях

$$(3) \quad \sum_{j=1}^J u_{sj} = U_s, \quad s = 1, 2, \dots, S,$$

определяемыми теми ресурсами $U_s > 0$, $s = 1, 2, \dots, S$ (производственными мощностями и т.д.), которые выделяются на проведение операции.

Замечание 1. В отличие от обычных задач целочисленной оптимизации, когда условие типа (3) представляется неравенством, здесь в обеспечение приоритета требования по безопасности ограничение (3) задаётся строгим равенством, предусматривающим обязательную мобилизацию всех ресурсов для предельно возможного увеличения $F_{без}$ – неубывающей, как уже отмечалось, функции от управления u_{sj} .

Задача состоит в том, чтобы определить матрицу управления $U = \|u_{sj}\|$ с целочисленными неотрицательными элементами u_{sj} , максимизирующую критерий

$$(4) \quad R = \frac{\sum_{j=1}^J c_j W_j \left(\sum_{s=1}^S m_{sj} l_{sj} u_{sj} \right)}{\sum_{j=1}^J \sum_{s=1}^S p_{sj} l_{sj} u_{sj}}$$

при выполнении ограничений (3) и при заданных матрицах $M = \|m_{sj}\|$, $P = \|p_{sj}\|$, с положительными элементами m_{sj} , p_{sj} и матрице применимости $L = \|l_{sj}\|$, $l_{sj} = 0$ или $l_{sj} = 1$, не содержащей нулевых строк и столбцов.

Замечание 2. Очевидно, что не следует учитывать нулевых строк и столбцов матрицы L , так как такие строки и столбцы не оказывают влияния на риск R . Поэтому в постановку задачи и вводится соответствующее условие, предусматривающее отказ от рассмотрения «неуправляемых» компонент объекта РКТ и тех видов управления, которые неприменимы ни к одному компоненту.

2. Решение задачи

Наиболее сильный результат при решении задачи (3), (4) излагается в данной статье применительно к важному для практических применений случаю $p_{sj} = p_j$, $m_{sj} = m_j$, $s = 1, 2, \dots, S$.

Решение задачи (3), (4) проводилось в два этапа. На первом этапе решается *вспомогательная задача* целочисленной оптимизации по критерию $F_{\text{без}}$, представляющему собой сумму выпуклых нелинейных неотрицательных функций $r_j(x_j) = c_j W_j(x_j)$,

$$x_j = \sum_{s=1}^S m_{sj} l_{sj} u_{sj} \quad \text{— см. (1).}$$

В частном случае $s = 1$, когда матрица управления U вырождается в строку (u_1, u_2, \dots, u_J) , известно решение вспомогательной задачи в виде критерия оптимальности Гросса [2]: необходимое и достаточное условие того, что вектор с неотрицательными компонентами $u = (u_1, u_2, \dots, u_J)$ максимизирует выражение $\sum_{j=1}^J r_j(u_j)$, где r_j — выпуклые функции, при ог-

раничении $\sum_{j=1}^J u_j = U_1$, где $U_1 > 0$ – целое число, состоит в том,

что

$$\max_{j \in J^*} [r_j(u_j + 1) - r_j(u_j)] \leq \min_{j \in J(U)} [r_j(u_j) - r_j(u_j - 1)],$$

$$J^* \stackrel{\Delta}{=} \{1, 2, \dots, J\}, \quad J(U) \stackrel{\Delta}{=} \{j \in J^* / u_j > 0\}.$$

Это условие можно переформулировать следующим образом:

$$r_j(u_j + 1) - r_j(u_j) \leq r_i(u_i) - r_i(u_i - 1)$$

$$\forall j \in J^*, \quad \forall i \in J(U).$$

Найдём условия оптимальности для более общего случая $s > 1$ и заданной матрицы применимости L , составленной из нулей и единиц.

Для этого определим следующие множества.

$J^* \stackrel{\Delta}{=} \{1, 2, \dots, J\}$ – множество всех индексов столбцов матриц применимости и управления;

$J(j) \stackrel{\Delta}{=} \{J^* / \exists s : l_{sj} = l_{si} = 1\}$ – множество индексов столбцов матрицы применимости, связанных со столбцом j через ненулевые элементы строк этой матрицы, т.е. если $i \in J(j)$, то существует строка s , на пересечениях которой со столбцами i и j соответствующие элементы l_{sj} и l_{si} матрицы L равны единице;

$J^*(j) \stackrel{\Delta}{=} \{i \in J(j) / \exists s : u_{si} > 0, \quad l_{sj} = l_{si} = 1\}$ – сужение множества $J(j)$ на множество индексов столбцов $J^*(j) \in J(j)$, связанных со столбцом j через ненулевые элементы строк матрицы применимости и имеющие ненулевой элемент матрицы управления, т.е. если $i \in J^*(j)$, то существует строка s , такая, что l_{si} и l_{sj} равны единице, и, кроме того, $u_{si} > 0$, в силу чего возможно перераспределение одной единицы со столбца i на столбец j (новые значения u_{si} , u_{sj} будут равны соответственно $u_{si} - 1$, $u_{sj} + 1$) без изменения

суммы $\sum_{j=1}^J u_{sj}$ элементов строки s ;

$I(j)$ – множество таких индексов столбцов, что возможно перераспределение одной единицы с этих столбцов на столбец j , т.е. для любого $i \in I(j)$ существует такое множество N индексов $\{i_1, i_2, \dots, i_N\}$, что $i_{n-1} \in J^*(i_n)$; $n = 2, 3, \dots, N$; $i_1 = j$; $i_N = i$; перераспределение единиц производится по «цепочке»: $N - 1$ раз передается одна единица с i_n на i_{n-1} ($n = N, N - 1, \dots, 2$), в силу того, что $i_{n-1} \in J^*(i_n)$;

$I^*(j) = \{i \in J^* / j \in I(i)\}$ – множество таких индексов столбцов, что возможно перераспределение одной единицы с j -го столбца на эти столбцы; данное множество является «обратным» множеству $I(j)$.

Лемма. Необходимое и достаточное условие того, что матрица управлений $U = \|u_{sj}\|$ размера $S \times J$ с неотрицательными элементами максимизирует выражение $\sum_{j=1}^J r_j(x_j)$, где r_j – вы-

пуклые функции, $x_j = \sum_{s=1}^S l_{sj} u_{sj}$ – сумма элементов матрицы U в

j -ом столбце с весами l_{sj} ($l_{sj} = 0$ или $l_{sj} = 1$ – элементы матрицы применимости $L = \|l_{sj}\|$, не содержащей нулевых строк и столбцов), при ограничениях на элементы u_{sj} в строках $\sum_{j=1}^J u_{sj} = U_s$,

где $u_s > 0$ – целые числа, состоит в выполнении неравенства

$$(5) \quad r_j(x_j + 1) - r_j(x_j) \leq r_i(x_i) - r_i(x_i - 1)$$

$$\forall j \in J^*, \quad \forall i \in I(j),$$

где множества J^* и $I(j)$ определены выше.

Доказательство. Достаточность. Пусть $U = \|u_{sj}\|$ – допустимое решение, т.е. решение, для которого выполняются заданные в условиях леммы ограничения и, кроме того, U удовлетворяет неравенству (5). Пусть $\tilde{U} = \|\tilde{u}_{sj}\|$ – любое другое допустимое решение.

Покажем, что

$$\sum_{j=1}^J r_j(x_j) \geq \sum_{j=1}^J r_j(\tilde{x}_j), \quad \tilde{x}_j = \sum_{s=1}^S l_{sj} \tilde{u}_{sj}.$$

Положим

$$\lambda_j = r_j(x_j + 1) - r_j(x_j), \quad \lambda_j^{\max} = \max_{i \in I^*(j)} \lambda_i.$$

Из выпуклости r_j следует, что $[r_j(n+1) - r_j(n)]$ – невозрастающая функция на множестве целых чисел. Поэтому если $n \geq x_j$, то, по определению λ_j

$$(6) \quad r_j(n+1) - r_j(n) \leq \lambda_j,$$

а если $0 < n \leq x_j$, т.е. $\exists u_{sj} > 0$, множество $I^*(j)$ непусто, определено λ_j^{\max} , и из условия (6) следует

$$(7) \quad r_j(n-1) - r_j(n) \leq \lambda_j^{\max}.$$

Просуммируем неравенства (6) по всем n от x_j до $\tilde{x}_j - 1$ при $\tilde{x}_j > x_j$ и неравенства (7) по всем n от $\tilde{x}_j + 1$ до x_j при $x_j > \tilde{x}_j$. Получаем

$$r_j(\tilde{x}_j) - r_j(x_j) \leq \lambda_j(\tilde{x}_j - x_j) \quad \text{при } \tilde{x}_j > x_j,$$

$$r_j(\tilde{x}_j) - r_j(x_j) \leq \lambda_j^{\max}(\tilde{x}_j - x_j) \quad \text{при } \tilde{x}_j < x_j.$$

Суммируя по всем j , получим на рассматриваемом множестве индексов J^*

$$(8) \quad \sum_{j=1}^J r_j(\tilde{x}_j) - \sum_{j=1}^J r_j(x_j) \leq \sum_{j \in I} \lambda_j(\tilde{x}_j - x_j) + \sum_{j \in I^*} \lambda_j^{\max}(\tilde{x}_j - x_j),$$

где $I = \{j \in J^* / \tilde{x}_j > x_j\}$, $I^* = \{j \in J^* / \tilde{x}_j < x_j\}$ – множество индексов, для которых \tilde{x}_j соответственно больше или меньше, чем x_j . Ясно, что те индексы, для которых $\tilde{x}_j = x_j$, вообще можно не рассматривать.

Так как U – допустимое решение, то его можно получить посредством перераспределения единиц в строках матрицы $\|u_{sj}\|$, при этом соответствующим образом изменится сумма элементов столбцов $x_j = \sum_{s=1}^S l_{sj} \tilde{u}_{sj}$, $j = 1, 2, \dots, J$, и произойдёт

передача единицы со столбцов множества I на столбцы множества I^* .

Перераспределение единиц, осуществляемое при заданных матрицах $L = \|l_{sj}\|$ и $U = \|u_{sj}\|$ размера $S \times J$, возможно только в направлении от j -го столбца из множества $I(i)$ к i -му столбцу из множества $I^*(j)$, что следует из определения этих множеств. Поэтому любому j -му столбцу из множества I^* можно поставить в соответствие некоторый i -ый столбец из I , причём $i \in I^*(j)$, $j \in I(i)$, и наоборот, можно установить соответствие $I \rightarrow I^*$.

Рассмотрим две последние суммы в неравенстве (8). Для каждой единицы из $\sum_{j \in I} (\tilde{x}_j - x_j)$ единиц первой суммы установим, с учётом вышеизложенного, взаимно-однозначное соответствие с некоторой единицей из $-\sum_{j \in I^*} (\tilde{x}_j - x_j)$. Так как

$$\sum_{j \in I} (\tilde{x}_j - x_j) = - \sum_{j \in I^*} (\tilde{x}_j - x_j)$$

в силу заданных ограничений, преобразуем рассматриваемые суммы к следующему виду:

$$\sum_{j \in I} \lambda_j (\tilde{x}_j - x_j) + \sum_{j \in I^*} \lambda_j^{\max} (\tilde{x}_j - x_j) = \sum_{i, j \in I^*(i)} (\lambda_j - \lambda_i^{\max}).$$

По определению, $\lambda_i^{\max} = \max_{j \in I^*(i)} \{\lambda_j\}$, поэтому все элементы

суммы положительны. Следовательно

$$\sum_{j=1}^J r_j(\tilde{x}_j) - \sum_{j=1}^J r_j(x_j) \leq 0,$$

что и требовалось доказать.

Необходимость. Пусть U – оптимальное решение задачи, \tilde{U} – другое допустимое решение, такое, что для фиксированных α, β имеем $\tilde{x}_\alpha = x_\alpha - 1$, $\tilde{x}_\beta = x_\beta + 1$, $\alpha \in I(\beta)$, а $\tilde{x}_j = x_j$ для остальных j . Пусть, кроме того, для α, β не выполняется равенство (5):

$$(9) \quad r_\beta(x_\beta + 1) - r_\beta(x_\beta) > r_\alpha(x_\alpha) - r_\alpha(x_\alpha - 1).$$

Так как r_j – выпуклые функции, то $\alpha \neq \beta$.

Кроме того,

$$\sum_{j=1}^J r_j(\tilde{x}_j) - \sum_{j=1}^J r_j(x_j) = r_\alpha(x_\alpha - 1) - r_\alpha(x_\alpha) + r_\beta(x_\beta + 1) - r_\beta(x_\beta).$$

Это выражение больше нуля на основании неравенства (9), что противоречит оптимальности решения U . Итак, лемму можно считать доказанной.

Переходя на втором этапе решения от рассмотрения вспомогательной с критерием $F_{\text{без}} = \sum_{j=1}^J r_j(x_j)$ к исходной задаче с критерием $R = F_{\text{без}} / F_{\text{зам}}$ и условием $m_{sj} = m_j$ ($s = 1, 2, \dots, S$), отметим следующее обстоятельство.

Если формально заменить в критерии R целочисленный аргумент u_{sj} на его непрерывный аналог v_{sj} , то на основе соотношения

$$\frac{\partial R}{\partial v_{sj}} = \frac{1}{F_{\text{зам}}} \left(\frac{\partial F_{\text{без}}}{\partial v_{sj}} - \frac{\partial F_{\text{зам}}}{\partial v_{sj}} R \right)$$

может быть построена итерационная процедура определения оптимальной по критерию R матрицы $V = \|v_{sj}\|$:

$$\begin{aligned} V^{(k)} &= \arg \max_{\|V_{sj}\|} R^{(k)}(V) = \\ (10) \quad &= \arg \max_{\|V_{sj}\|} \left\{ \frac{1}{F_{\text{зам}}(V^{(k-1)})} \left[F_{\text{без}}(V) - F_{\text{зам}}(V) \frac{F_{\text{без}}(V^{(k-1)})}{F_{\text{зам}}(V^{(k-1)})} \right] \right\} \\ &(k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Поскольку $\frac{\partial R^{(k)}(V)}{\partial V_{sj}} = \frac{\partial R(V)}{\partial V_{sj}} \Big|_{v_{sj} = v_{sj}^{(k-1)}} \quad (s = 1, 2, \dots, S; j = 1, 2, \dots, J)$, то последовательность критериев $R^{(1)}, R^{(2)}, \dots$ эквивалентна исходному критерию R в том смысле, что если существует $V^* = \lim V^{(k)}$ при $k \rightarrow \infty$, то

$$\arg \max_{\|V_{sj}\|} R(V) = V^*.$$

Опуская в (10) постоянный множитель $1/F_{\text{зам}}(V^{(k-1)})$ (не влияющий на результаты оптимизации), заменяя $F_{\text{без}}(V^{(k-1)})$ на $F_{\text{без}}(V)$ и возвращаясь к целочисленному аргументу U , получим

итерационную последовательность решения исходной целочисленной задачи

$$u^{(k)} = \arg \max_{\|u_{sj}\|} R^{(k)}(u) = \arg \max_{\|u_{sj}\|} \left\{ \sum_{j=1}^J \left[\left(1 - \frac{p_j x_j}{a^{(k-1)}} \right) c W_j(m_j x_j) \right] \right\},$$

$$k = 1, 2, \dots, K,$$

где $x_j = \sum_{s=1}^S l_{sj} u_{sj}$, ($j = 1, 2, \dots, J$), $a^{(k-1)} = \sum_{j=1}^J p_j \sum_{s=1}^S l_{sj} u_{sj}^{(k-1)}$; $u_{sj}^{(0)}$

($s = 1, 2, \dots, S$; $j = 1, 2, \dots, J$) определяется из решения вспомогательной задачи, а K – из условия $u^{(k-1)} \approx u^{(k)}$.

Критерий $R^{(k)}(u)$ представляет собой сумму произведений линейно убывающих функций аргумента x_j ($j = 1, 2, \dots, J$) на выпуклые функции того же аргумента. Поэтому на каждом шаге k итерации может быть использован унифицированный (по обоим этапам) алгоритм решения задачи (3), (4), построенный на основе представленной здесь леммы.

Заключение

Отдельные фрагменты представленного в статье итерационного алгоритма целочисленной оптимизации вполне успешно использовались в прикладных работах ИПУ по автоматизированному целераспределению поражающих средств. Но поскольку концепция управления безопасностью объектов РКТ в их жизненном цикле носит преимущественно прогностический характер, то эффективность этой оптимизации в РКТ ещё предстоит оценивать – по мере практической реализации данной концепции.

Литература

1. АНДРИЕНКО А.Я., ИВАНОВ В.П., ПОРТНОВ-СОКОЛОВ Ю.П. *Концепция управления безопасностью объектов РКТ в их жизненном цикле.* / Труды Института проблем управления РАН. 1999, т. III. С. 14 – 38.
2. GROSS D. *Fundamentals of Queueing Theory.* Wiley, New

Управление большими системами. Выпуск 21.

York, 1974. – 253р.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В.Г. Заскановым*