ТРИ ЭТЮДА О ПОВТОРЯЮЩИХСЯ ИГРАХ

Горелов М. А.
(Вычислительный центр РАН, Москва)
griefer@ccas.ru

С позиций современных представлений о сложности обсуждаются границы применимости при моделировании больших систем таких распространенных конструкций, как смешанные стратегии.

Ключевые слова: повторяющиеся игры, смешанные расширения, сложность.

Введение

Смешанные расширения появились уже в первых работах по теории игр, причем, по-видимому, независимо у Э. Бореля [10] и Дж. фон Неймана [11]. Авторы придавали этой концепции весьма большое значение. Это видно, например, из того факта, что фон Нейман, обычно предпочитавший не ввязываться в приоритетные споры, в данном случае настаивал на своем первенстве на том основании, что он, в отличие от Бореля, доказал существование седловой точки в смешанных стратегиях [2].

Позднее исследование смешанных расширений стало весьма популярным среди теоретиков. А вот возможность использования этих конструкций при моделировании реальных процессов нередко подвергается сомнению, зачастую даже профессионалами. Да и на практике рандомизация процесса принятия решений, особенно важных, наблюдается не часто. Причина, видимо, заключается в том, что само понятие случайности остается неопределенным и не совсем ясным.

Игра на классе смешанных стратегий, как и всякая модель, имеет свои границы применимости. Чаще всего такие конструкции появляются тогда, когда статическая модель – игра в нормальной форме – появляется в результате агрегирования автономной динамической модели. Обычно этот процесс не описывается явно, а изложение начинается сразу с построения статической модели. Во всяком случае, мне не приходилось встречать такого рода результатов в опубликованном виде. Но такое понимание существует, несомненно, уже достаточно давно.

Проблема в описании такого процесса агрегирования заключается в том, что стохастичность предполагает некоторую регулярность динамического процесса, например, устойчивость частоты выбора той или иной стратегии. А если мы допускаем сколь угодно сложное поведение игроков, то ожидать такой регулярности не приходится.

В последнее время все чаще, например, при моделировании процесса синтеза хозяйственного механизма приходится сталкиваться с ситуациями, в которых применение привычных теоретико-игровых моделей приводит к неадекватным выводам именно потому, что предлагаемые теорией «оптимальные» решения оказываются слишком сложными.

Понимание этого появилось уже достаточно давно. В контексте наиболее близком к теме данной работы подобные соображения явно сформулированы, например, в [4]. Однако решают проблему чаще всего следующим образом: находят одну из оптимальных стратегий в задаче без ограничений, а затем заявляют, что более сложные стратегии можно и не рассматривать.

По-видимому, корни этого лежат в истории возникновения теории игр. Отцы-основатели теории игр — Э. Цермело, Э. Борель, Дж. фон Нейман — были одновременно крупными специалистами в теории множеств. А в теоретико-множественной парадигме как понятие сложности, так и понятие случайности формализуется достаточно плохо (см. [9] и [5]). Результаты данной статьи опираются на гораздо более поздние идеи А. Н. Колмогорова [5].

Ниже предлагается три способа формализации. При этом выясняется, что смешанные стратегии появляются весьма естественно при агрегировании *детерминированных* динамических моделей. С другой стороны рандомизация становится естественной и необходимой, если игрок знает, что противник «гораздо умнее» (или не исключает такой возможности и при этом осторожен). В этом случае рандомизированное поведение выглядит как предел детерминированного при его усложнении.

При написании статьи я придерживался «эстетики минимализма»: все полученные ниже результаты могут быть обобщены сразу в нескольких направлениях без привлечения новых идей, лишь за счет использования более сложных обозначений и/или более изощренной аналитической техники. Я не обсуждаю такие «обобщения», поскольку на данном этапе наиболее важными представляются общие подходы и интерпретации, а они наиболее понятны, когда изложение не загромождается второстепенными деталями. Поэтому я ограничиваюсь рассмотрением матричных игр. Более того, все становится особенно прозрачным, если рассматривать процесс игры в орла и решку.

Обобщения другого рода в работе упоминаются. Есть ряд вопросов, ответы на которые мне пока не известны, но которые представляются достаточно важными. Их я формулирую в виде задач. Об одном из них уместно сказать прямо сейчас.

Задача. В трех разделах статьи рассматриваемая проблема исследуется с позиций трех довольно разных областей математики – эргодической теории, теории чисел и теории алгоритмов. Аналогия между полученными результатами на содержательном, игровом уровне достаточно понятна. Прояснение этой аналогии на более формальном уровне смогло бы значительно улучшить понимание проблемы.

1. Этюд первый

Рассмотрим игру в нормальной форме $\Gamma = \langle U, V, g \rangle$, где U – конечное множество управлений первого игрока, V – конечное множество управлений второго игрока, g – функция выигрыша, которую первый игрок стремится максимизировать, а второй – минимизировать.

На основе этой игры построим повторяющуюся игру на классе программных стратегий. При этом будем считать, что для выбора своих управлений игроки используют датчики квазислучайных чисел, устроенные по принципу рулетки. Формально эти конструкции выглядят следующим образом.

Пусть Ф – множество всех измеримых по Лебегу функций φ:[0, 1] $\to U$, а Ψ – множество всех измеримых функций ψ:[0, 1] $\to V$. Фиксируем четыре действительных числа α, β, γ и δ и определим функцию $h : \Phi \times \Psi \to \mathbb{R}$ условием

(1) $$h(\varphi,\psi) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} g(\varphi(\{\alpha t + \gamma\}), \psi(\{\beta t + \delta\}))$$

(здесь, как обычно, фигурные скобки обозначают дробную часть числа). Таким образом, получаем новую игру в нормальной форме $\Gamma_{\alpha\beta} = \langle \Phi, \Psi, h \rangle$.

Чтобы аналогия с рулеткой стала ясной, следует представить себе окружность единичной длины как прямую, факторизованную по модулю 1.

Теорема 1. Пусть числа α и β таковы, что при любых целых числах i, j, k, не равных нулю одновременно, выполняется условие

(2) $i\alpha + j\beta \neq k$.

Тогда предел в формуле (1) существует и равен $\sum_{u\in U}\sum_{v\in V} g(u,v)\mu(\varphi^{-1}(u))\mu(\psi^{-1}(v))$, где μ – мера Лебега на [0, 1], а $\varphi^{-1}(u)$ и $\psi^{-1}(v)$ – полные прообразы точек u и v соответственно.

Доказательство. По существу, это только переформулировка на интересующий нас частный случай теоремы Вейля – фон Неймана (см. [7], теорема 2 на стр. 19 или [3], предложение 4.2.2 на стр. 157).

Назовем две стратегии φ и χ эквивалентными, если для любого $u \in U$ выполняется равенство $\mu(\varphi^{-1}(u)) = \mu(\chi^{-1}(u))$. В силу доказанной теоремы, если стратегии φ и χ эквивалентны, то $h(\varphi,\psi) = h(\chi,\psi)$ для любой стратегии ψ второго игрока. Факторизуя множество Ф по этому отношению эквивалентности, получим новое множество $\overline{\Phi}$. Аналогичным образом отождествляя неразличимые стратегии второго игрока, получим множество $\overline{\Psi}$. Пусть $\overline{\varphi}$ – класс эквивалентности, содержащий стратегию φ, а $\overline{\psi}$ – класс эквивалентности, содержащий стратегию ψ. В силу теоремы 1 условие $\overline{h}(\overline{\varphi},\overline{\psi}) = h(\varphi,\psi)$ корректно определяет функцию $\overline{h} : \overline{\Phi} \times \overline{\Psi} \to \mathbb{R}$. В силу той же теоремы игра $\overline{\Gamma}_{\alpha\beta} = \left\langle \overline{\Phi}, \overline{\Psi}, \overline{h} \right\rangle$ есть в точности смешанное расширение игры Г.

Теперь можно обсудить содержательный смысл введенных конструкций и полученных результатов.

В [1] Ю. Б. Гермейер отмечает, что правомерность использования смешанных стратегий основана «на двух предположениях.

а) Осреднение критерия по случайностям (естественным или искусственным) … допустимо.

б) Противник не имеет информации о конкретном, хотя и случайном выборе» управления.

Первое предположение учтено нами в формуле (1). Второе не столь существенно и может быть обойдено следующим нехитрым трюком. Если, например, второй игрок до своего решения узнает выбранное на текущем шаге управление первого, то вместо V следует рассмотреть конечное множество всех функций из U в V.

Задаваемый формулой (1) вид критерия в повторяющейся игре соответствует представлению о длинных горизонтах планирования у игроков[1]. К сожалению, на практике все чаще встречаются системы, к которым такого рода предположения неприменимы. По-видимому, в этих случаях и смешанными расширениями пользоваться нельзя. Однако анализ моделей таких систем показывает, что они не стабильны: при оптимальном поведении игроков «проедаются» основные фонды и система деградирует. Поэтому для теоретического анализа такие системы не слишком интересны.

[1] *Как обычно, представление о бесконечно большом плановом периоде является удобной идеализацией «очень большого».*

В данной модели мы ввели два ограничения на сложность поведения игроков. Первое ограничение связано с запретом использовать информацию об управлениях, выбранных на предыдущих шагах. Кроме того, мы ограничили класс используемых программных стратегий. И в результате пришли, как и анонсировалось, к смешанному расширению.

Остановимся на смысле условия (2). Во-первых, оно отвечает за «стохастичность»: при его нарушении последовательность $(\varphi(\{\alpha t + \gamma\}), \psi(\{\beta t + \delta\}))$, $t = 1, 2, \ldots$, будет периодической. Кроме того, оно отвечает и за «статистическую независимость» выборов первого и второго игроков. В самом деле, в силу той же теоремы Вейля–фон Неймана частота появления пары (u, v) в этой последовательности равна $\mu(\varphi^{-1}(u))\mu(\psi^{-1}(v))$, а частоты появления управлений u и v в последовательностях $\varphi(\{\alpha t + \gamma\})$, $t = 1, 2, \ldots$, и $\psi(\{\beta t + \delta\})$, $t = 1, 2, \ldots$, равны $\mu(\varphi^{-1}(u))$ и $\mu(\psi^{-1}(v))$ соответственно.

В «типичном» случае условие (2) выполняется. В самом деле, при фиксированной тройке (i, j, k) множество пар (α, β), для которых это условие нарушается, представляет собой прямую на плоскости, т. е. нигде не плотное множество меры ноль. А так как таких троек всего счетное число, множество пар (α, β), для которых условие (2) не выполняется, имеет меру ноль и первую категорию Бэра [8]. Таким образом, здесь проявляется одно из многих «лиц» случайности: типичность (см. [9]).

Задача. Предположим, что игроки, принимая решение на очередном шаге, используют информацию об управлениях, выбранных на предыдущем шаге. По сути, это означает, что стратегиями игроков являются функции $\tilde{u} : U \times V \to U$ и $\tilde{v} : U \times V \to V$ соответственно. Если эти функции не зависят явно от времени, то, начиная с некоторого момента, выбранные управления будут периодически повторяться[1], и динамика получится достаточно простой и не слишком интересной.

Введем теперь зависимость от времени, предположив, что такие функции выбираются с помощью «рулетки», аналогичной описанной выше. Будет ли в этом случае иметь место свойство эргодичности, аналогичное полученному в теореме 1? Можно предположить, что при такой динамике увеличение информированности игроков не приведет к увеличению их гарантированных результатов.

Те же вопросы возникают и в более общем случае, когда игроки оперируют информацией об управлениях, выбранных на k предыдущих шагах (здесь k – ранее выбранное фиксированное число).

2. Этюд второй

Модифицируем конструкции предыдущего раздела с тем, чтобы определить количественную меру сложности поведения игроков и исследовать зависимость от нее их максимальных гарантированных результатов.

Пусть Γ – та же игра, что и прежде. Фиксируем натуральные числа m и n. Пусть $\mathbb{Z}_m$ и $\mathbb{Z}_n$ – кольца вычетов по модулю m и n соответственно, Φ – множество всех функций $\varphi:\mathbb{Z}_m \to U$, а Ψ – множество всех функций $\psi:\mathbb{Z}_n \to V$. Зададим вычеты $\alpha,\gamma \in \mathbb{Z}_m$ и $\beta,\delta \in \mathbb{Z}_n$ и определим функцию $h:\Phi\times\Psi \to \mathbb{R}$ условием (1). Получим новую игру $\Gamma_{mn} = \langle \Phi,\Psi,h \rangle$.

Не ограничивая общности, можно считать, что числа α и m взаимно просты. В противном случае, сохраняя ту же динамику, можно перейти к игре с меньшим модулем m. По той же причине будем считать, что числа β и n взаимно просты.

---

[1] *Это нетрудно показать стандартными рассуждениями, аналогичными использованным в последнем разделе данной статьи.*

Теорема 2. Пусть числа m и n взаимно просты. Тогда предел в формуле (1) существует и равен $\sum_{u\in U}\sum_{v\in V} g(u,v)p(u)q(v)$, где $p(u)$ – количество элементов в множестве $\varphi^{-1}(u)$, поделенное на m, а $q(v)$ – количество элементов в множестве $\psi^{-1}(v)$, поделенное на n.

Доказательство. Функция $t \to (\alpha t + \gamma, \beta t + \delta)$ взаимнооднозначно отображает множество $\{1, 2, \ldots, mn\}$ на $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$. В самом деле, в силу взаимной простоты α и m равенство $\alpha t_1 + \gamma = \alpha t_2 + \gamma$ (в $\mathbb{Z}_m$) влечет делимость $t_1 - t_2$ на m. По аналогичной причине из равенства $\beta t_1 + \delta = \beta t_2 + \delta$ следует, что $t_1 - t_2$ делится на n. Но тогда, так как m и n взаимно просты, $t_1 - t_2$ делится на mn. Следовательно, рассматриваемая функция инъективна, а поскольку ее область определения и множество значений равномощны, она и биективна.

В силу этой взаимной однозначности мощность множества

$$Z(u,v) = \left\{t \in \{1,2,...,mn\} : \alpha t + \gamma \in \varphi^{-1}(u), \beta t + \delta \in \psi^{-1}(v)\right\}$$

равна мощности множества

$$Y(u,v) = \left\{(\xi,\varsigma) : \xi \in \varphi^{-1}(u), \varsigma \in \psi^{-1}(v)\right\} = \varphi^{-1}(u) \times \psi^{-1}(v)\},$$

а последняя равна произведению мощностей множеств $\varphi^{-1}(u)$ и $\psi^{-1}(v)$, то есть $mnp(u)q(v)$.

Поэтому

$$\sum_{t=1}^{mn} g(\varphi(\alpha t+\gamma),\psi(\beta t+\delta)) = \sum_{u\in U}\sum_{v\in V}\sum_{(\xi,\varsigma)\in Y(u,v)} g(u,v) =$$
$$= \sum_{u\in U}\sum_{v\in V} g(u,v) \sum_{(\xi,\varsigma)\in Y(u,v)} 1 = \sum_{u\in U}\sum_{v\in V} g(u,v) \sum_{\xi\in\varphi^{-1}(u)}\sum_{\varsigma\in\psi^{-1}(v)} 1 =$$
$$= mn\sum_{u\in U}\sum_{v\in V} g(u,v)p(u)q(v).$$

Кроме того, очевидно, что если $t_1 - t_2$ делится на mn, то $g(\varphi(\alpha t_1+\gamma),\psi(\beta t_1+\delta)) = g(\varphi(\alpha t_2+\gamma),\psi(\beta t_2+\delta))$. Следовательно, если обозначить $\kappa(T)=\left[\dfrac{T}{mn}\right]$ и $\tau(T)=mn\kappa(T)$ (квадратные скобки означают целую часть числа), то

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}g(\varphi_t,\psi_t)=\frac{1}{T}\left(\sum_{t=1}^{\tau(T)}g(\varphi_t,\psi_t)+\sum_{t=\tau(T)+1}^{T}g(\varphi_t,\psi_t)\right)=$$

$$=\frac{1}{T}\left(\kappa(T)\sum_{t=1}^{mn}g(\varphi_t,\psi_t)+\sum_{t=\tau(T)+1}^{T}g(\varphi_t,\psi_t)\right)=$$

$$=\frac{\tau(T)}{T}\left(\frac{1}{mn}\sum_{t=1}^{mn}g(\varphi_t,\psi_t)\right)+\frac{1}{T}\sum_{t=\tau(T)+1}^{T}g(\varphi_t,\psi_t)$$

(здесь для краткости обозначено $\varphi_t=\varphi(\alpha t+\gamma)$, $\psi_t=\psi(\beta t+\delta)$). Второе слагаемое в правой части, очевидно, стремится к нулю при $T\to\infty$, а первое, в силу сказанного выше, — к $\sum_{u\in U}\sum_{v\in V}g(u,v)p(u)q(v)$. Теорема доказана.

Обсудим полученные результаты. Числа m и n естественно рассматривать как меры сложности поведения первого и второго игроков соответственно. Взаимная простота этих чисел отвечает за «статистическую независимость» выборов игроков.

Теорема показывает, что при простой детерминированной динамике мы получаем игру, очень похожую на смешанное расширение исходной игры Г. Разница заключается в следующем. Во-первых, в игре Γ_{mn} имеются «эквивалентные» стратегии, которых, вообще говоря, нет в смешанном расширении. От них легко избавиться с помощью факторизации, как это было сделано в предыдущем разделе, что, впрочем, не меняет сути дела. Во-вторых, в игре Γ_{mn} «вероятности» $p(u)$ и $q(v)$ могут принимать лишь значения вида $\dfrac{k}{mn}$, где k – целое число. Понятно, что если выбрать числа m и n большими, игра Γ_{mn} будет близка к смешанному расширению (в естественном смысле). В частности, максимальный гарантированный результат первого игрока будет примерно равен цене игры Г в смешанных стратегиях.

Таким образом, если первый игрок ориентируется на свой максимальный гарантированный результат, то он заинтересован в переходе к расширению Γ_{mn}. Правда, для того, чтобы все сработало «как надо», ему нужно знать число n, которое естественно считать выбором противника. Однако здесь есть следующая возможность. Допустим, первому игроку известно, что сложность поведения противника не превосходит некоторого числа N. Тогда он может выбрать $m = A \cdot N! + 1$, где A – целое число, и тем самым обеспечить выполнение условий теоремы 2.

Итак, первый игрок заинтересован в том, чтобы его сложность поведения была больше сложности поведения противника. Но по тем же причинам второй игрок может стремиться к усложнению своего поведения. Круг может быть разорван переходом к «настоящим» смешанным стратегиям.

Задача. Предположим, нам известно, что сложность поведения второго игрока не превосходит N. Нельзя ли выбрать так число m, чтобы в соответствующей игре Γ_{mn} максимальный гарантированный результат первого игрока был близок к $\min_{v \in V} \max_{u \in U} g(u, v)$?

Задача. Нельзя ли модель предыдущего раздела рассматривать как предел (в каком-то разумном смысле) игр Γ_{mn}, когда m и n стремятся к бесконечности, оставаясь взаимно простыми?

3. Этюд третий

Предположим, что игроки перепоручают игру компьютерам (каждый – своему). Технические возможности компьютера задают ограничения на сложность поведения игрока, а выбор программы является его правом (стратегией). Проанализируем зависимость гарантированного результата игрока от сложности его компьютера.

Для этого конкретизируем описание ситуации. Не ограничивая общности, можем считать, что множества управлений в рассматриваемой нами игре Γ содержатся в множестве натуральных чисел: $U = \{1, \ldots, r\}$, $V = \{1, \ldots, s\}$.

Для простоты будем считать, что компьютеры работают по принципу машины Тьюринга (см., например, [6]). А именно, имеется две параллельные, бесконечные в обе стороны ленты, разбитые на ячейки. Ленты «синхронизированы» так, что между их ячейками установлено взаимно однозначное соответствие. Компьютер первого игрока может находиться в одном из m внутренних состояний и наблюдать состояние l ячеек, находящихся непосредственно слева от его головки на обеих лентах. В зависимости от этой информации он на очередном шаге печатает на первой ленте одно из чисел от 1 до r, переходит в новое состояние и сдвигает свою головку на одну ячейку вправо. Аналогично, компьютер второго игрока, имея информацию о состоянии k предыдущих ячеек на лентах и своем внутреннем состоянии (число которых равно n) печатает на второй ленте одно из чисел от 1 до s, переходит в новое состояние и сдвигает головку на одну клетку вправо.

В начальный момент времени головки компьютеров расположены напротив соответствующих друг другу ячеек, их внутренние состояния заданы, все ячейки слева от головок заполнены числами от 1 до r на первой ленте и от 1 до s на второй, а остальные ячейки пусты.

Формально, программой первого компьютера является отображение a: $(U \times V)^l \times \{1, \ldots, m\} \to U \times \{1, \ldots, m\}$, а программой второго компьютера — отображение b: $(U \times V)^k \times \{1, \ldots, n\} \to$ $\to V \times \{1, \ldots, n\}$. Множество всех программ первого игрока обозначим A, а второго – B.

Если программы обоих компьютеров и начальные условия заданы, то однозначно определяется последовательность чисел (u_1, v_1), (u_2, v_2), …, напечатанных компьютерами на ленте и, соответственно выигрыши $g(u_1, v_1)$, $g(u_2, v_2)$, … . Таким образом, каждой паре программ (a, b) соответствует средний выигрыш

$$(3) \quad h(a,b) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} g(u_t, v_t)$$

Соответственно, определена игра в нормальной форме $\Gamma_{mnlk} = \langle A, B, h \rangle$.

Лемма. Последовательность (u_1, v_1), (u_2, v_2), …, начиная с некоторого момента времени, становится периодической, причем происходит это не позднее, чем на шаге номер $(rs)^{\max\{l,\,k\}}mn$.

Доказательство. Назовем состоянием игры набор, состоящий из $\max\{l, k\}$ пар чисел, написанных непосредственно слева от текущего положения головок компьютеров, и пары их текущих внутренних состояний. Всего имеется $(rs)^{\max\{l,\,k\}}mn$ состояний игры, следовательно, за первые $(rs)^{\max\{l,\,k\}}mn + 1$ шагов игра непременно дважды побывает в одном и том же состоянии. Начиная с первого попадания в это состояние, последовательность состояний будет повторяться.

Следствие. Предел в формуле (3) существует, значит, игра Γ_{mnlk} определена корректно.

Доказательство. Все необходимые выкладки вполне аналогичны проделанным в предыдущем разделе.

Пары (m, l) и (n, k) характеризуют сложность поведения первого и второго игроков соответственно.

Теорема. При заданной сложности (n, k) поведения второго игрока существуют такая сложность поведения (m, l) первого игрока и такая стратегия a первого игрока в игре Γ_{mnlk}, что $\min\limits_{b\in B} h(a,b) = \min\limits_{v\in V}\max\limits_{u\in U} g(u,v)$.

Доказательство. Начнем писать соответствующую программу для первого компьютера (его сложность определим позднее). Множество B состоит из $(sn)^{(rs)^k n}$ элементов. Перенумеруем их натуральными числами, начиная с единицы. Не ограничивая общности, можем считать, что начальное внутреннее состояние компьютера второго игрока есть 1.

Для каждой функции b: $(U \times V)^k \times \{1, …, n\} \to V \times \{1, …, n\}$ определим функцию $\bar{b} : (U \times V)^k \times \{1, …, n\} \to U \times \{1, …, n\}$ условием: если $b(u_{-k}, v_{-k}, …, u_{-1}, v_{-1}, i) = (v, j)$, то

$$\bar{b}\left(u_{-k}, v_{-k}, ..., u_{-1}, v_{-1}, i\right) = \left(\arg\max_{u\in U} g(u,v), j\right).$$

Если бы выбор b второго игрока был заранее известен, то программа $\bar{b}$ была бы искомой. Наша цель будет состоять в том, чтобы на основе имеющейся информации выяснить выбор противника, а затем действовать в соответствии с ним.

Состояние компьютера первого игрока будем описывать тройкой (t, c, i), где t – счетчик времени, c – текущая гипотеза о программе противника, i – информация о состоянии компьютера второго игрока. Будем считать, что начальное состояние первого компьютера есть (1, 1, 1).

Счетчик времени будет на каждом шаге увеличиваться на 1 до тех пор, пока не достигнет величины τ, после чего будет оставаться неизменным. Значение τ уточним позднее.

Пусть в момент времени t компьютер находится в состоянии $(\max\{t, \tau\}, c, i)$. Определим его текущее действие следующим образом. Если $v_{t-1} = c(u_{t-k-1}, v_{t-k-1}, \ldots, u_{t-2}, v_{t-2}, i)$, то текущая гипотеза c остается неизменной, а выбор управления и новое состояние i определяется парой $\bar{c}\,(u_{t-k-1}, v_{t-k-1}, \ldots, u_{t-2}, v_{t-2}, i)$. В противном случае действуем сложнее. С помощью счетчика времени выделяем начальные ячейки и соответственно реальные решения, принятые вторым компьютером. Находим программу d с наименьшим номером, которая при заданной предыстории и заданной последовательности $(u_1, \ldots, u_{t-1})$ печатает на ленте последовательность $(v_1, \ldots, v_{t-1})$[1]. Ее принимаем за новую гипотезу. После этого просчитываем, в каком внутреннем состоянии j будет находиться второй компьютер, снабженный программой d, при заданной предыстории и заданных действиях первого игрока $(u_1, \ldots, u_{t-1})$. Новое состояние первого компьютера будет $(\max\{t, \tau\}, d, j)$, а напечатать на ленте он должен будет стратегию, соответствующую $\bar{d}\,(u_{t-k-1}, v_{t-k-1}, \ldots, u_{t-2}, v_{t-2}, j)$.

[1] *Реальный выбор второго игрока удовлетворяет этому условию, поэтому такая программа непременно найдется.*

Проанализируем, как будет развиваться игра, если второй игрок выберет программу b, а первый будет руководствоваться описанной выше логикой. Возможно два случая. Либо на текущем шаге гипотеза не изменяется, значит, на предыдущем шаге первый игрок получает выигрыш, не меньший, чем $\min_{v \in V} \max_{u \in U} g(u,v)$. Либо текущая гипотеза изменяется. Покажем, что число таких шагов конечно.

В самом деле, номер c при каждом изменении увеличивается на 1, а его значение заведомо не превосходит $(sn)^{(rs)^k n}$. Значит, количество изменений не больше $(sn)^{(rs)^k n}$. Более того, если гипотеза не меняется на протяжении $(rs)^k n^2$ шагов, то рассуждения, аналогичные тем, которые использовались при доказательстве леммы, показывают, что она уже не изменится никогда. Поэтому гипотеза перестанет уточняться не позднее шага с номером $(rs)^{k+1} n^2 (sn)^{(rs)^k n}$. После этого нам станут не нужны значение счетчика времени и информация о выборе противника на более чем k предыдущих шагах. Поэтому мы можем положить $\tau = k = (rs)^k mn (sn)^{(rs)^k n}$.

Мысленно проиграв ситуацию при различных вариантах выбора b, мы определим значения искомой функции a при всех тех значениях аргументов, которые реально могут возникнуть в процессе игры. При остальных значениях аргумента значения этой функции можно определить произвольно.

Нетрудно сообразить, что таким образом корректно определена искомая программа a. Чезаровское среднее (3) от конечного числа значений критерия в моменты смены гипотезы не зависит, поэтому эта программа – искомая. Теорема доказана.

Обсудим полученные результаты. Разумеется, аналогичные рассуждения могут быть проведены и с позиций второго игрока. Следовательно, если седловая точка в исходной игре Г отсутствует, оба игрока заинтересованы в повышении сложности своего компьютера. Если возможности рассматриваемого игрока достаточно велики, то это позволит ему добиться максимального возможного результата.

А что делать, если эти возможности сильно ограничены? Если игрок опасается, что противник имеет очень мощный компьютер, то ему ничего не остается, как использовать «настоящую» случайную последовательность управлений, что позволит гарантировать выигрыш равный цене игры в смешанных стратегиях. По этому поводу см. [9].

Если же возможности обоих игроков очень велики, то в результате их оптимальных действий мы получим «очень сложную» последовательность (u_1, v_1), (u_2, v_2), …, а это – еще одно лицо случайности [9].

Задача. Анализируя доказательство теоремы, несложно получить оценку сложности компьютера, необходимой для реализации описанной там программы. По-видимому, эта оценка сильно завышена. Представляет интерес поиск наиболее простого компьютера, позволяющего первому игроку получать выигрыш $\min_{v\in V}\max_{u\in U} g(u,v)$ при заданной сложности компьютера противника.

Задача. Нетрудно видеть, что если длина l непосредственно наблюдаемой части лент по какой-то причине ограничена, то это можно компенсировать, «запоминая» недостающую информацию с помощью надлежащим образом структурированного внутреннего состояния компьютера. Интересно найти оптимальный (в смысле минимизации числа внутренних состояний m) способ такого запоминания. Это позволило бы найти естественный способ сопоставления величин l и m и, тем самым, найти скалярную характеристику сложности компьютера.

Задача. Интересно проанализировать, как изменятся основные выводы данного раздела, если добавить каждому компьютеру, кроме выходных лент, еще по ленте для «внутреннего» пользования, ограничив при этом время принятия очередного решения.

Литература

1. ГЕРМЕЙЕР Ю. Б. *Введение в теорию исследования операций*. М.: Наука, 1971. – 383 с.
2. ДАНИЛОВ Ю. А. *Джон фон Нейман*. М.: Знание, 1990. – 64 с.
3. КАТОК А. Б., ХАССЕЛЬБЛАТ Б. *Введение в современную теорию динамических систем*. М.: Факториал, 1999. – 767 с.
4. КОНОНЕНКО А. Ф. *Анализ устойчивых ситуаций в повторяющихся процессах* / Современное состояние теории исследования операций. Под ред. Н. Н. Моисеева. М.: Наука, 1979. С. 173 – 186.
5. КОЛМОГОРОВ А. Н. *Теория информации и теория алгоритмов*. М.: Наука, 1987. – 304 с.
6. МАЛЬЦЕВ А.И. *Алгоритмы и рекурсивные функции*. М.: Наука, 1986. – 368 с.
7. СИНАЙ Я. Г. *Введение в эргодическую теорию*. М.: Фазис, 1996. – 132 с.
8. ОКСТОБИ ДЖ. *Мера и категория*. М.: Мир, 1974. – 158 с.
9. УСПЕНСКИЙ В. А. *Четыре алгоритмических лица случайности*. М.: МЦНМО, 2006. – 45 с.
10. BOREL E. *La theorie du jeu et les equations integrals a noyau symetrique* // Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. Vol. 173. 1921. P. 1304 – 1308.
11. VON NEUMANN J. *Zur Theorie der Gesellschaftspiele* // Math. Ann. Vol. 100. 1928. № 5. P. 173–204. Рус. пер.: ФОН НЕЙМАН ДЖ. *К теории стратегических игр* / *Матричные игры*. Под ред. Н. Н. Воробьева. М.: Физматлит. 1961. С. 173 – 204.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Д.А. Новиковым